آنالیز حقیقی ۱۱ — بسم الله الرحمن الرحیم

Real and Complex Analysis — walter Rudin

مفاهیم اندازه پذیری
The Concept of Measurability

تعریف ۱.۲: ابتدا توپولوژی روی یک مجموعه X و فضای توپولوژی را یادآوری می‌کنیم. گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های از مجموعه X مانند τ را یک توپولوژی برای X می‌نامیم، هرگاه شرایط زیر برای آن برقرار باشد.

i) $\emptyset, X \in \tau$. ii) اگر برای هر خانواده دلخواه $\{V_\alpha\}$ از τ را در نظر بگیریم، آنگاه $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

iii) برای هر تعداد متناهی $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ از اعضای τ، داریم $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ عضوی از τ است.

اگر τ یک توپولوژی برای X باشد. آنگاه X با این توپولوژی را فضای توپولوژی می‌نامیم و با (X,τ) نشان می‌دهیم.

تابع f از فضای توپولوژیک X به فضای توپولوژیک Y تعریف می‌شود، گوییم این تابع پیوسته است هرگاه برای هر مجموعه باز V در Y، مجموعه $f^{-1}(V)$ در X باز باشد.

تعریف ۱.۳. گردایه‌ای مانند $\mathfrak{M}$ از زیرمجموعه‌های X یک σ-جبر بر X می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد

i) $X \in \mathfrak{M}$. ii) اگر $A \in \mathfrak{M}$ آنگاه $A^c \in \mathfrak{M}$.

iii) اگر $A_n \in \mathfrak{M}$ که $n = 1, 2, 3, \ldots$ آنگاه $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$.

اگر $\mathfrak{M}$ یک σ-جبر برای X باشد، آنگاه X را فضای اندازه‌پذیر (measurable space) می‌نامیم و با $(X,\mathfrak{M})$ نشان می‌دهیم و اعضای $\mathfrak{M}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X می‌نامند.

هرگاه X یک فضای اندازه‌پذیر و Y یک فضای توپولوژیک و f از X بتوی Y تابع باشد را اندازه‌پذیر می‌نامیم هرگاه برای هر مجموعه باز V در Y، $f^{-1}(V)$ در X یک مجموعه اندازه‌پذیر باشد.

مثال ۱.۴. فضای متریک معمولی یک فضای توپولوژیک است. همچنین خط توسعه یافته $[-\infty, \infty]$ که مجموعه‌های باز آن بصورت‌های (a,b)، $(a,\infty]$ و $[-\infty,b)$ می‌باشند، فضای توپولوژیکی می‌باشد.

تعریف ۱.۵. تابع $f: X \to Y$ پیوسته است $\Leftrightarrow$ در هر نقطه پیوسته باشد.

از تعریف σ-جبر بودن و اینکه $X \in \mathfrak{M}$ است می‌توان نتیجه گرفت که $X^c = \emptyset \in \mathfrak{M}$ فراهم بود و برای هر تعداد متناهی $A_1, A_2, \ldots, A_n$ از اعضای $\mathfrak{M}$، می‌توان نتیجه گرفت که $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{M}$

و همچنین برای دنباله $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ از اعضای $\mathfrak{M}$ می‌دانیم که $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$ پس $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c \in \mathfrak{M}$

یعنی اشتراک هر دنباله از اعضای $\mathfrak{M}$ در $\mathfrak{M}$ قرار می‌گیرد.

از فرمول صفحه قبل $A - B = B^c \cap A$ می‌توان برای هر دو عضو A, B از $\mathfrak{M}$ نتیجه گرفت

$$A - B \in \mathfrak{M}$$

پس با داشتن سه خاصیت از σ-جبر، چهار خاصیت دیگر اعضای $\mathfrak{M}$ را بدست آوردیم

قضیه ۷.۱. فرض کنید Y و Z فضاهای توپولوژی باشند و $g: Y\to Z$ تابع پیوسته است.

a) اگر X فضای توپولوژیک و $f: X\to Y$ پیوسته باشد آنگاه $h=g\circ f: X\to Z$ پیوسته است.

b) اگر X فضای اندازه‌پذیر و $f: X\to Y$ اندازه‌پذیر باشد $h=g\circ f: X\to Z$ نیز اندازه‌پذیر

اثبات a مربوطه آنالیز (۱) مشابه است

b) اگر V مجموعه باز در Z باشد، $g^{-1}(V)$ طبق فرض در Y باز است و $h^{-1}(V)=f^{-1}(g^{-1}(V))$ لذا طبق فرض مسئله که f اندازه‌پذیر است پس $f^{-1}(g^{-1}(V))$ یک مجموعه اندازه‌پذیر است. یعنی $h^{-1}(V)$ اندازه‌پذیر است.

قضیه ۸.۱ فرض کنید u و v توابع اندازه‌پذیر حقیقی بر فضای اندازه‌پذیر X و Φ تابع پیوسته‌ای بر R^2 بتوی یک فضای توپولوژیک Y است. تعریف می‌کنیم $h(x)=\Phi(u(x),v(x))$ $(x\in X)$ در این صورت h اندازه‌پذیر است.

اثبات. قرار می‌دهیم $f(x)=(u(x),v(x))$ پس $f: X\to R^2$ و $h=\Phi\circ f$.

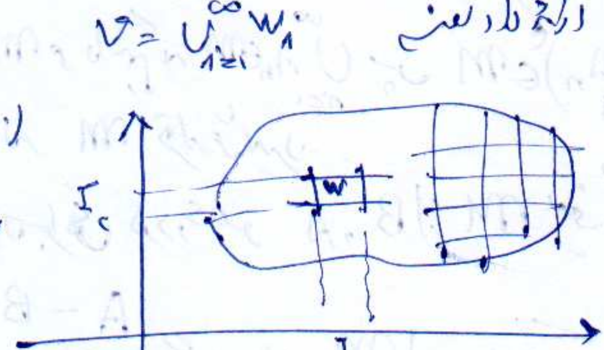
با توجه به قضیه قبل کافی است ثابت کنیم f تابع اندازه‌پذیری است. حال اگر W یک مستطیل باز در R^2 باشد، که اضلاع آن موازی محورهای مختصات باشد W را می‌توان به صورت حاصلضرب دو بازه باز I_1 و I_2 نشان داد یعنی $W=I_1\times I_2$. در این صورت

$$f^{-1}(W)=f^{-1}(I_1\times I_2)=u^{-1}(I_1)\cap v^{-1}(I_2)\in\mathfrak{M}$$

که با توجه به اندازه‌پذیر بودن توابع u و v، نتیجه حاصل شده است. پس f نیز یک تابع اندازه‌پذیر است پس به دلیل اینکه تابع Φ در قضیه قبل تابع h هم اندازه‌پذیر می‌باشد

هرگاه V یک مجموعه باز دلخواه از R^2 باشد می‌توان آن را به صورت اجتماع شمارا از مستطیل‌های باز مانند W_nها درج دارد یعنی $V=\bigcup_{n=1}^{\infty}W_n$

$$f^{-1}(V)=f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}W_n\right)=\bigcup f^{-1}(W_n)$$



و چون برای هر مستطیل باز W_n نشان دادیم که $f^{-1}(W_n)$ عضو $\mathfrak{M}$ است پس $f^{-1}(V)$ عضو $\mathfrak{M}$ است.

صفحه ۳

با توجه به مطالب ارائه شده و خواص فضای توپولوژیک و فضای اندازه پذیر به چند مثال ساده زیر توجه کنید.

تذکر: در این مثالهای ساده مجموعه X متناهی فرض شده، بنابراین مثال زدن برای مجموعه‌های نامتناهی، خصوصاً مجموعه‌های شمارش ناپذیر مانند اعداد حقیقی کمی پیچیده‌تر می‌شود

مثال: فرض کنید $X=\{1,2,3\}$ یعنی دارای سه عضو باشد. دو توپولوژی بدیهی

$$\tau_1 = \{\varnothing, \{1,2,3\}\}$$

$$\tau_2 = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

داریم که در واقع τ_2 همان مجموعه توانی مجموعه X است (مجموعه همه زیرمجموعه‌های X) که با $P(X)$ نیز نشان می‌دهیم. علاوه بر این دو توپولوژی می‌توان توپولوژی‌های دیگری مانند توپولوژی

$$\tau = \{\varnothing, X, \{1\}\}$$

ارائه داد.

در خصوص σ جبر برای X، می‌توان $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_2$ را به صورت زیر ارائه داد

$$\mathcal{M}_1 = \{\varnothing, X\}$$

$$\mathcal{M}_2 = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \ldots\} = P(X)$$

که این دو σ جبر، σ جبرهای بدیهی هستند. علاوه بر این دو نیز، σ جبرهای دیگر می‌توان مثال زد از جمله

$$\mathcal{M} = \{\varnothing, X, \{1\}, \{2,3\}\}$$

که در این مثال σ جبر $\mathcal{M}$ شامل τ است. در تمرینی که بعداً ارائه می‌شود به این مثال برمی‌گردیم.

۹.۱ با توجه به مطالب قبلی اگر X یک فضای اندازه پذیر باشد، نتایج زیر از قضایای ۱.۷ و ۱.۸ بدست می آیند.

(a) اگر $f=u+iv$ و u، v توابع حقیقی اندازه پذیر بر X باشند، آنگاه f تابع مختلط اندازه پذیر بر X است.

برای اثبات این قسمت از قضیه قبل استفاده می کنیم و با فرض $\Phi(z)=z$، موضوع ثابت می گردد.

(b) اگر $f=u+iv$ تابع مختلط اندازه پذیر بر X باشد، توابع u و v و $|f|$، توابع اندازه پذیری هستند.

این موضوع نیز با کمک قضیه ۱.۷ و انتخابهای متفاوت $\Phi(z)$ برابر $Re\, z$ (تابع قسمت حقیقی) و $Im(z)$ (تابع قسمت موهومی) و $|z|$، اثبات می شود.

(c) اگر f و g توابع اندازه پذیر باشند آنگاه $f+g$ و fg نیز اندازه پذیر هستند.

این موضوع می تواند به عنوان تمرین در اختیار دانشجو قرار گیرد و آن را اثبات نمایند.

(d) اگر E یک مجموعه اندازه پذیر در X فرض شود، و تعریف کنیم

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}$$

این تابع را تابع مشخصه (characteristic function) مجموعه E می نامیم. این تابع اندازه پذیر می باشد. اثبات اندازه پذیری آن بعنوان تمرین در اختیار دانشجو گذارده. علامت χ شبیه کلاس X است و خی نام دارد.

(e) هرگاه f یک تابع اندازه پذیر مختلط بر X فرض شود، در این صورت می توان ثابت کرد که تابع مختلط اندازه پذیر α بر X وجود دارد، بطوریکه $|\alpha|=1$ و $f=\alpha|f|$.

اثبات، فرض کنید $E=\{x\,;\, f(x)=0\}$ و Y فضای اعداد مختلط بدون صفر باشد.

توصیف می کنیم $\Phi(z)=\frac{z}{|z|}$ و $\alpha(x)=\Phi(f(x)+\chi_E(x))$. چون برای هر $x\in X$، مقدار $f(x)+\chi_E(x)$ همواره مخالف صفر است، بنابراین با توجه به پیوستگی تابع Φ، تابع α هم پیوسته می باشد.

از طرفی با توجه به قضیه ۱.۷ و اندازه پذیر بودن $f+\chi_E$، پس α نیز اندازه پذیر می باشد.

اگر $x\in E$، پس $\alpha(x)=1$ و اگر $x\notin E$، $\alpha(x)=\frac{f(x)}{|f(x)|}$. پس در هر دو حالت $|\alpha|=1$ و $\alpha|f(x)|=f(x)$.

صفحه ۵

قضیه ۱.۱۰ هرگاه $\mathcal{F}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد کوچکترین σ-جبر شامل $\mathcal{F}$ مانند $\mathfrak{M}^*$ وجود دارد.

(در مثال صفحه ۳ اگر فرض کنیم $\mathcal{F}$ برابر ح باشد، کوچکترین σ-جبر شامل آن برابر $\mathfrak{M}^*$ که برابر $\mathfrak{M}$ در آن مثال است.)

اثبات. هرگاه $\mathcal{F}$ را در نظر بگیریم و فرض کنیم Ω مجموعه همه σ-جبرهایی باشد شامل $\mathcal{F}$ (یعنی هر عضو Ω یک σ-جبری است شامل $\mathcal{F}$)، با در نظر گرفتن مجموعه توانی، می‌توان نتیجه گرفت که Ω غیرخالی است. حال قرار می‌دهیم $\mathfrak{M}^*=\cap\{\mathfrak{M} ; \mathfrak{M}\in\Omega\}$.
واضح است که $\mathcal{F}\subset\mathfrak{M}^*$. حال نشان می‌دهیم $\mathfrak{M}^*$ یک σ-جبر است.
دو خاصیت اول σ-جبر بودن $\mathfrak{M}^*$ بدیهی است و به عهده دانشجو است. برای خاصیت سوم σ-جبر، فرض کنیم برای هر $n=1,2,\ldots$ ، $A_n\in\mathfrak{M}^*$. بنابر خاصیت $\mathfrak{M}^*$ می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $\mathfrak{M}\in\Omega$ ، و برای هر n ، $A_n\in\mathfrak{M}$ ؛ بنابر σ-جبر بودن هر یک از $\mathfrak{M}$ می‌توان نتیجه گرفت که $\cup A_n\in\mathfrak{M}$ ، پس $\cup A_n\in\mathfrak{M}^*$. در نتیجه $\mathfrak{M}^*$ یک σ-جبر شامل $\mathcal{F}$ است.

۱.۱۱ تعریف مجموعه‌های بُرل (Borel Sets)

فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد. بنابر ۱.۱۰ یک کوچکترین σ-جبر مانند $\mathcal{B}$ وجود دارد که شامل همه مجموعه‌های باز در X است. این σ-جبر $\mathcal{B}$ را به عنوان σ-جبر بُرل X می‌نامیم و اعضای $\mathcal{B}$ را مجموعه‌های بُرل در X می‌نامیم.
با این ترتیب همه مجموعه‌های باز و همه مجموعه‌های بسته و اتحاد شمارای مجموعه‌های بسته و اشتراک شمارای همه مجموعه‌های باز عضو این σ-جبر بُرل هستند. بطور خلاصه اتحاد شمارای مجموعه‌های بسته را با F_σ و اشتراک شمارای مجموعه‌های باز را G_δ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۱۲. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک σ-جبر در X و Y فضای توپولوژیک باشد، تابع f نگاشتی از X بتوی Y فرض می‌شود.
(a) اگر $\Omega=\{E\subset Y ; f^{-1}(E)\in\mathfrak{M}\}$ آنگاه Ω یک σ-جبر در Y است.

(b) اگر f ~~یک~~ اندازه‌پذیر فرض شود و E یک مجموعه برل در Y باشد، آنگاه $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$ است.

(c) اگر $Y = [-\infty, \infty]$ و برای هر عدد حقیقی α داشته باشیم $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathfrak{M}$، آنگاه f اندازه‌پذیر است.

(d) اگر f اندازه‌پذیر باشد و Z یک فضای توپولوژیک باشد و $g: Y \to Z$ یک تابع برل فرض گردد و بگیر $h = g \circ f$. آنگاه $h: X \to Z$ اندازه‌پذیر است.

اثبات.

(a) چون $X = f^{-1}(Y)$ است و چون $X \in \mathfrak{M}$ است، پس $Y \in \Omega$. با توجه به رابطه $X - f^{-1}(A) = f^{-1}(Y-A)$. برای هر $A \in \Omega$ می‌توان نتیجه گرفت که $Y - A$ عضو Ω است. برای رابطه

$$f^{-1}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots)$$
$$= f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) \cup f^{-1}(A_n) \cup \cdots$$

اگر فرض شود برای هر $n = 1, 2, \ldots$، $A_n \in \Omega$، می‌توان نتیجه گرفت $\bigcup A_n \in \Omega$. بنابراین Ω یک σ-جبر است.

(b) فرض کنید که Ω توصیف شده در (a) را داشته باشیم. چون f اندازه‌پذیر می‌باشد پس Ω شامل همه مجموعه‌های باز در Y است، این بدان معنی است که Ω شامل همه مجموعه‌های برل است، زیرا Ω در بند (a) σ-جبر بوده است. بنابراین $E \in \Omega$. با توجه به رابطه (a) برقرار است و نتیجه می‌گیریم که $f^{-1}(E)$ در $\mathfrak{M}$ است.

صفحه ۷

آنالیز حقیقی (۱)

برای اثبات (c) فرض می‌کنیم $\Omega = \{E \subset [-\infty, \infty] : f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}\}$

عدد حقیقی α را انتخاب کرده، فرض می‌کنیم $\alpha_n < \alpha$ و $\alpha_n \to \alpha$. چون به ازای هر n

$(\alpha_n, \infty] \in \Omega$

و در ضمن $\bigcup_{n\geq 1}^{\infty} (\alpha_n, \infty]^c = \bigcup [-\infty, \alpha_n] = [-\infty, \alpha)$ ②

پس $[-\infty, \alpha) \in \Omega$ به همین ترتیب $(\alpha, \beta) = [-\infty, \beta) \cap (\alpha, \infty] \in \Omega$ ①

و چون هر مجموعه باز در $[-\infty, \infty]$ به صورت اجتماعی از بازه‌های باز به صورت ① و ② می‌باشد

بنابراین Ω شامل همه مجموعه‌های باز Y است و f اندازه‌پذیر است.

برای اثبات (d) فرض می‌کنیم V در Z باز باشد. $g^{-1}(V)$ یک مجموعه بورل در Y است و چون $f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathfrak{M}$ (و چون طبق (b) و اندازه‌پذیری f ثابت)

$h^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)) \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathfrak{M}$
$E \in \Omega$

بسیج تعاریف ۱٫۱۲، ۱٫۱۳

تعریف: فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای در $[-\infty, \infty]$ باشد و قرار دهید $b_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, \dots\}$ $(k = 1, 2, \dots)$

و $\beta = \inf\{b_1, b_2, \dots\}$ ، β را حد بالا (upper limit) دنباله $\{a_n\}$ می‌نامیم

و می‌نویسیم $\beta = \lim_{n\to\infty} \sup a_n$ واقعیات زیر

(۱) $b_1 \geq b_2 \geq \dots$

(۲) $\beta = \lim_{k\to\infty} b_k$

(۳) زیردنباله‌ای مانند $\{a_{n_i}\}$ از $\{a_n\}$ وجود دارد به طوری که $\lim_{i\to\infty} a_{n_i} = \beta$ و β بزرگترین عدد با این خاصیت است

حد پایینی به صورت زیر تعریف می‌شود دلیم:

$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = -\lim_{n\to\infty} \sup(-a_n)$

اگر $\{a_n\}$ همگرا باشد آنگاه $\lim a_n = \lim \inf a_n = \lim \sup a_n$

اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی گسترش یافته بر X باشد توابع $\sup f_n$ و $\inf f_n$ و $\lim \sup f_n$

به صورت زیر توضیح می‌شود.

$(\sup f_n)(x) = \sup(f_n(x))$ و $(\lim \sup f_n)(x) = \lim \sup(f_n(x))$ $(x \in X)$

۸

آنالیز حقیقی (۲)

اگر $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ در هر نقطه $x\in X$ وجود داشته باشد f را حد نقطه وار (pointwise) دنباله $\{f_n\}$ می‌نامیم.

قضیه 1.14: اگر $f_n: X\to[-\infty,\infty]$ ، $n=1,2,\ldots$ اندازه‌پذیر باشد و $g=\sup f_n$ و $h=\limsup f_n$ در اینصورت h و g هر دو اندازه‌پذیرند.

$$g^{-1}((\alpha,\infty])=\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty])$$

$x\in g^{-1}((\alpha,\infty])\Rightarrow g(x)\in(\alpha,\infty]$ ، $=\sup f_n(x)\in(\alpha,\infty]$ ، $\exists n$ $f_n(x)\in(\alpha,\infty]$

هر $f_n^{-1}((\alpha,\infty])$ و در نتیجه $g^{-1}((\alpha,\infty])$ در X اندازه‌پذیر است. پس بنابه قضیه 1-12(c) g اندازه‌پذیر است.

چون $h^{-1}((\alpha,\infty])=\bigcap g_k^{-1}((\alpha,\infty])$ ، $h=\inf_{k\ge1}\{\sup_{n\ge k} f_n\}$

پس h نیز اندازه‌پذیر است.

$\frac{f+g}{2}-\frac{|f-g|}{2}$ ، $\frac{f+g}{2}+\frac{|f-g|}{2}$

نتایج (a) حد هر دنباله نقطه‌وار همگرا از توابع مختلط اندازه‌پذیر، اندازه‌پذیر است.

(b) اگر f و g اندازه‌پذیر باشند، آنگاه $\max\{f,g\}$ و $\min\{f,g\}$ خصوصاً $f^+=\max\{f,0\}$ و $f^-=-\min\{f,0\}$ اندازه‌پذیرند.

معلوم است که $f=f^+-f^-$ ، $|f|=f^++f^-$

قضیه: اگر $f=g-h$ ، $g\ge0$ و $h\ge0$ آنگاه $f^+\le g$ و $f^-\le h$

اثبات: از $f\le g$ و $0\le g$ نتیجه می‌شود که $f^+=\max\{f,0\}\le g$

$g-h=f=f^+-f^-\Rightarrow f^-\le h$ ، $g\ge f^+$

توابع ساده:

تابع s مختلط بر یک فضای اندازه‌پذیر X را یک تابع ساده گویند هرگاه برد آن متشکل از تعداد متناهی نقطه از $[0,\infty)$ باشد.

اگر $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ مقادیر مختلف تابع ساده s باشد قرار دهیم

$$A_i=\{x: s(x)=\alpha_i\}$$

$m>n$ ، $\frac{1}{2^m}<\frac{1}{2^n}$

$n>m$ ، $\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2^m}$

$s_m(x)\ge f-\frac{1}{2^n}$ ، $s_n(x)\ge s_m(x)$

آنگاه $s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \chi_{A_i}$. بنابراین A_i ها اندازه پذیر اگر باشند
می‌توان نتیجه گرفت که s تابع اندازه پذیر است.

قضیه ۱.۱۷. فرض کنید $f: X\to [0,\infty]$ تابع اندازه پذیر باشد. در این صورت توابع ساده اندازه پذیر s_n بر X وجود دارند بطوریکه

(a) $0\le s_1(x)\le s_2(x)\le \cdots \le s_n(x)\le \cdots \le f(x),\quad x\in X$

(b) $\lim_{n\to\infty} s_n(x)=f(x)\quad , \quad (x\in X)$

اثبات. فرض کنید $\delta_n=2^{-n}$ برای هر $n\in N$ باشد. برای هر n و هر عدد t مثبت، عدد صحیح $[2^n t]$ را داریم که با $k_n(t)$ نشان می‌دهیم. پس خواهیم داشت

$$k_n(t)\le 2^n t < k_n(t)+1,$$

با یک جابجائی داریم

$$2^{-n}k_n(t)\le t < 2^{-n}k_n(t)+2^{-n}$$

و یا

$$2^n t-1<k_n(t)\le 2^n t$$

و همچنین

$$t-\frac{1}{2^n} < k_n(t)\,2^{-n} \le t$$

برای $0<t<n$ تعریف می‌کنیم $\varphi_n(t)=k_n(t)\delta_n$، در نتیجه

$$t-\delta_n<\varphi_n(t)\le t$$

و از $t\ge n$ باشد تعریف می‌کنیم $\varphi_n(t)=n$، در هر دو صورت $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=t$

اما اگر $0<t<n$ باشد و با توجه به رابطه $\frac{1}{2}\delta_n=\delta_{n+1}$ و نیز

$$2k_n(t)=2[2^n t]\le[2^{n+1}t]=k_{n+1}(t)$$

اگر $t\ge n$ که داریم $\varphi_n\le\varphi_{n+1}$
پس در هر دو صورت می‌توان نتیجه گرفت

$$\varphi_n\le\varphi_{n+1}$$

با در نظر گرفتن اینکه $s_n=\varphi_n\circ f$. می‌توان حکم را به دست آورد

① مقدار مه را اندازه مثبت می دانیم و هرگاه ... اندازه مختلط باشد به علت اینکه برای هر مجموعه در σ جبر مقدار آن یک عدد مختلط است و اندازه حقیقی در واقع در واره اندازه مختلط است با این تفاوت که مقدار آن حقیقی است

10

آنالیز حقیقی (۲) جلسه

شروع

تعریف 1-18 : measure

(a) یک اندازه مثبت (positive measure) تابعی است مانند μ روی یک σ جبر مانند $\mathfrak{M}$ ~~با مقادیر~~ در بازه $[0,\infty]$ و بطور شمارا جمع پذیر است یعنی اگر $A_i \in \mathfrak{M}$ دو به دو جدا از هم باشند آنگاه

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

و اینکه حداقل برای یک عضو $\mathfrak{M}$ مانند A داشته باشیم $\mu(A)<\infty$ (برای دوری از بدیهیات)

(b) یک فضای اندازه (measure . sp.) عبارت است از یک فضای اندازه پذیر که یک اندازه مثبت روی گردایه های σ-جبر مجموعه های اندازه پذیر آن تعریف شده باشد.

$$(X,\mathfrak{M}) \xrightarrow{h} (Y,\tau)$$

$$h: X \to Y \qquad \mu: \mathfrak{M} \to [0,\infty]$$

(c) یک اندازه مختلط عبارت است از یک تابع مختلط بطور شمارا جمع پذیر روی یک σ-جبر

توجه: بطور خلاصه اندازه مثبت های اندازه بیان می شود و هرگاه $\mu(E)$ برای هر $E\in\mathfrak{M}$ آنگاه μ اندازه مثبت است. بقیه در ادامه ①

قضیه 1.19 : فرض کنید μ یک اندازه مثبت روی یک σ-جبر $\mathfrak{M}$ باشد

(a) $\mu(\phi)=0$

(b) اگر $A_1, \dots, A_n$ دو به دو جدا از هم و در $\mathfrak{M}$ باشند آنگاه

$$\mu(A_1\cup\dots\cup A_n) = \mu(A_1)+\dots+\mu(A_n)$$

(c) اگر $A\subset B$ آنگاه $\mu(A)\le\mu(B)$

(d) اگر $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ که $A_1\subset A_2\subset\dots$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(A)$$

(e) اگر $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ و $A_1\supset A_2\supset\dots$ و ($\mu(A_1)$ متناهی) باشد آنگاه $\lim\mu(A_n)=\mu(A)$

فرض ضروری است (مثال 1.20 دیده شود)

اثبات: (a) A را از $\mathfrak{M}$ انتخاب می کنیم که $\mu(A)<\infty$ و قرار می دهیم $A_1=A$ و $A_2=A_3=\dots=\phi$

$$\mu\left(\bigcup A_i\right)=\sum\mu(A_i) \Rightarrow \mu(A)=\mu(A)+\mu(\phi)+\dots+\mu(\phi)+\dots$$

$$\Rightarrow \mu(\phi)=0$$