عنوان: عمر باقیمانده و میانگین عمر باقیمانده

مدرس: دکتر اصغرزاده نشلی

دانشگاه مازندران

A.Asgharzadeh
University of Mazandaran

عمر باقیمانده (Residual life)

فرض کنید که T متغیر تصادفی طول عمر با تابع قابلیت اعتماد $R(t)$ باشد. فرض کنید سیستمی با طول عمر T در زمان $t = ۰$ مورد استفاده قرار گرفته و در زمان $t > ۰$ هنوز فعال است. عمر باقیمانده سیستم تحت شرط $T > t$ می‌شود:

$$T_t = T - t|T > t, \qquad t > ۰ \qquad (T_۰ = T)$$

قابلیت اعتماد T_t:

$$R(x) = P(T \geq x)$$

$$\begin{aligned} R(x|t) &= P(T_t \geq x) = P(T - t \geq x|T > t) \\ &= \frac{P(T - t \geq x, T > t)}{P(T > t)} = \frac{P(T \geq t + x)}{P(T > t)} = \frac{R(x + t)}{R(t)} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{R(x|t) = \frac{R(x + t)}{R(t)}, \quad x, t > ۰}$$

حالت خاص: برای $t = ۰$ داریم

$$R(x|۰) = \frac{R(x + ۰)}{R(۰)} = \frac{R(x)}{۱} = R(x) \Longrightarrow \boxed{R(x|۰) = R(x)}$$

A.Asgharzadeh University of Mazandaran

میانگین عمر باقیمانده (Mean residual life)

میانگین عمر باقیمانده T_t $(t > ۰)$ می‌شود:

$$m(t) = E(T_t) = E(T - t | T > t)$$

داریم:

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_{۰}^{\infty} R(x|t)\, dx = \int_{۰}^{\infty} \frac{R(x+t)}{R(t)}\, dx \\ &= \frac{۱}{R(t)} \int_{۰}^{\infty} R(x+t)\, dx \qquad (u = x + t \longrightarrow x = u - t,\ \ dx = du) \\ &= \frac{۱}{R(t)} \int_{t}^{\infty} R(u)\, du \Longrightarrow \boxed{m(t) = \frac{۱}{R(t)} \int_{t}^{\infty} R(u)\, du} \end{aligned}$$

حالت خاص: برای $t = ۰$ داریم

$$m(۰) = \frac{۱}{R(۰)} \int_{۰}^{\infty} R(x)\, dx = \int_{۰}^{\infty} R(x)\, dx = E(T)$$

A.Asgharzadeh University of Mazandaran

دانشگاه مازندران

مثال

فرض کنید توزیع طول عمر یک لامپ الکتریکی برحسب ماه به‌صورت زیر است:

$$F(t) = ۱ - \frac{(۳ - t)^۲}{۹}, \quad ۰ < t < ۳$$

الف) تابع نرخ خطر F را تعیین کنید.

ب) قابلیت اعتماد این لامپ در زمان $t = ۲$ ماه چقدر است؟

ج) میانگین عمر باقیمانده لامپ را بدست آورید.

د) اگر بدانیم که لامپ در زمان $t = ۱$ هنوز کار می‌کند، چقدر احتمال دارد که یک ماه دیگر کار کند؟

A.Asgharzadeh University of Mazandaran

دانشگاه مازندران

مثال

فرض کنید یک قطعه الکتریکی دارای طول عمریست که تابع قابلیت اعتماد آن برحسب ماه به‌صورت زیر است:

$$R(t) = \frac{۴}{(t+۲)^۲}, \qquad t > ۰$$

الف) میانگین عمر باقیمانده T را در زمان $t = ۳$ ماه تعیین کنید.

ب) میانگین عمر این قطعه را بیابید.

ج) تابع نرخ خرابی T را پیدا کنید.

A.Asgharzadeh University of Mazandaran

دانشگاه مازندران

قضیه ۴: رابطه بین $m(t)$ و $R(t)$

اگر متغیر تصادفی T دارای قابلیت اعتماد $R(t)$ و میانگین عمر باقیمانده $m(t)$ باشد، آنگاه:

$$R(t) = \frac{m(0)}{m(t)} e^{-\int_0^t \frac{dx}{m(x)}}.$$

یادآوری:

$$m(t) = \frac{1}{R(t)} \int_t^\infty R(x)\, dx.$$

قضیه ۵: رابطه بین $m(t)$ و $h(t)$

اگر $m(t)$ و $h(t)$ به‌ترتیب میانگین عمر باقیمانده و تابع نرخ خرابی طول عمر T باشند، آنگاه:

$$h(t) = \frac{1 + m'(t)}{m(t)}$$

A.Asgharzadeh University of Mazandaran

دانشگاه مازندران

مثال

میانگین عمر باقیمانده طول عمر یک لامپ الکتریکی برحسب ماه به‌صورت زیر است:

$$m(t) = ۱ - \frac{t}{۳}, \quad ۰ < t < ۳$$

به کمک دو قضیه‌ای که بیان شد، تابع قابلیت اعتماد و تابع نرخ خرابی این لامپ را بدست آورید.

A.Asgharzadeh
University of Mazandaran

دانشگاه مازندران

مثال

فرض کنید یک قطعه الکتریکی دارای طول عمریست که تابع قابلیت اعتماد آن برحسب ماه به‌صورت زیر است:

$$R(t) = \frac{۴}{(t+۲)^۲}, \qquad t > ۰$$

تابع نرخ خرابی این قطعه الکتریکی را پیدا کنید.

A.Asgharzadeh University of Mazandaran