بسم الله الرحمن الرحیم

ماشینهای الکتریکی ۱

مدرس: دکتر گرگانی فیروزجاه

فصل دوم

فرایند تبدیل انرژی

تبدیل انرژی الکترومکانیکی — فرایند تبدیل انرژی

- ✓وسایل متنوعی برای تبدیل انرژی الکتریکی به مکانیکی و یا بالعکس مورد استفاده قرار می گیرد.
- ✓ساختار این وسایل متناسب با ماهیت کار آنها می تواند متفاوت باشد.
  - ❋تبدیل مستمر انرژی در مبدلهائی نظیر موتورها و ژنراتورها
  - ❋تولید نیروهای جابجاگر در عملگرها، بوبین ها، رله ها و الکترومگنتها
- ✓علیرغم تفاوت ساختمانی، این مبدلها همگی بر پایه اصول مشابهی عمل می کنند.
- ✓در مبدلهای مورد بحث میدان مغناطیسی به عنوان واسطه ای برای تبدیل انرژی بکار گرفته می شود.
- ✓در میان روشهای محاسبه نیرو و گشتاور، در اینجا از روش متکی بر اصل بقای انرژی استفاده می گردد.

انرژی تولید یا نابود نمی گردد بلکه از نوعی به نوع دیگر تبدیل می شود.

تبدیل انرژی الکترومکانیکی

روابط انرژی

سیستم مکانیکی ⟷ میدان تزویج ⟷ سیستم الکتریکی

دستگاه های الکترومکانیکی در تنوع گسترده ای از سیستم های مورد استفاده قرار می گیرند.

عمل متقابل بین دو سیستم از طریق میدان های الکترومغناطیسی و الکترواستاتیکی صورت می پذیرد.

تلفات در سیستم الکترومکانیکی

- اتلاف گرما در نتیجه اصطکاک در سیستم مکانیکی
- گرما در نتیجه مقاومت هادی های حامل جریان
- تلفات ناشی از جریان فوکو و تلفات هیسترزیس
- تلفات دی الکتریکی در میدان

در مبدل انرژی الکتریکی به مکانیکی (مثل الکترو موتور)

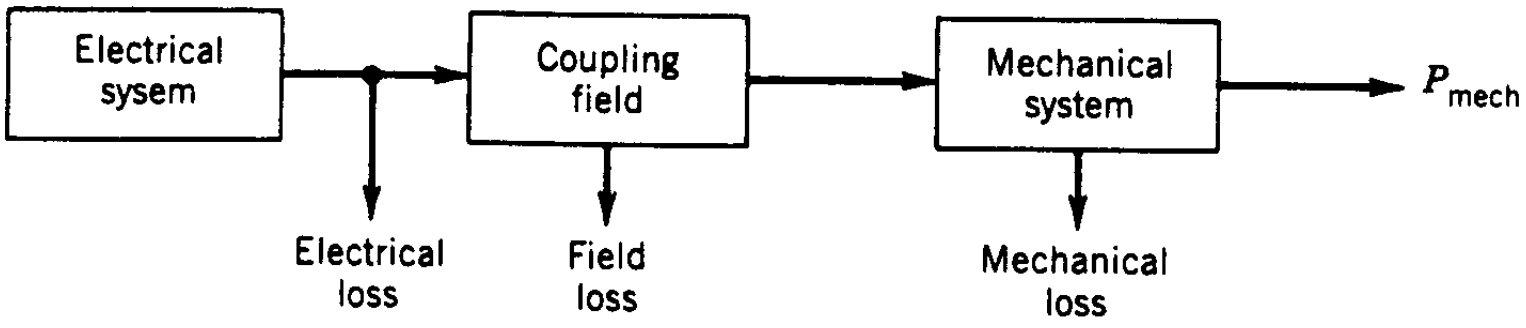
$$\begin{pmatrix} Energy\ \ input \\ from\ \ electric \\ sources \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mechanical \\ energy \\ output \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} increase\ \ in\ energy \\ stored\ in \\ magnetic\ \ field \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} energy \\ convrted \\ to\ heat \end{pmatrix}$$

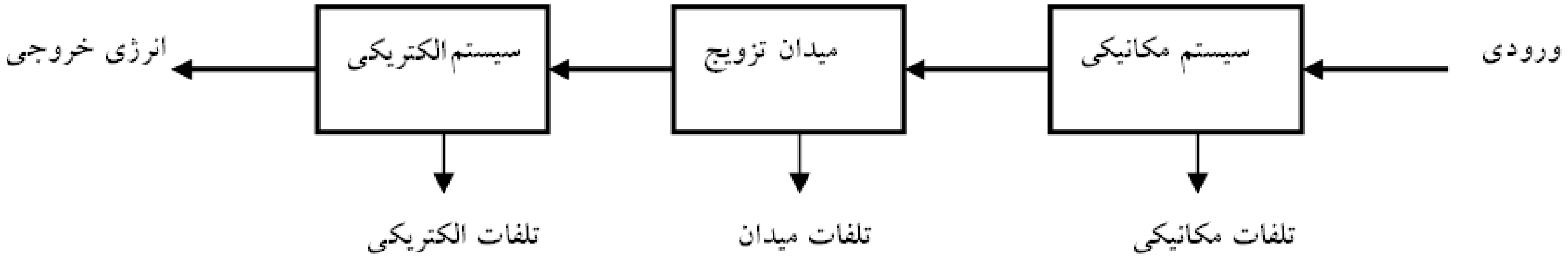
در مبدل انرژی مکانیکی به الکتریکی (مثل ژنراتور)

$$\begin{pmatrix} Energy\ \ input \\ from\ \ mechanical \\ sources \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} electrical \\ energy \\ output \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} increase\ \ in\ energy \\ stored\ in \\ magnetic\ \ field \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} energy \\ convrted \\ to\ heat \end{pmatrix}$$

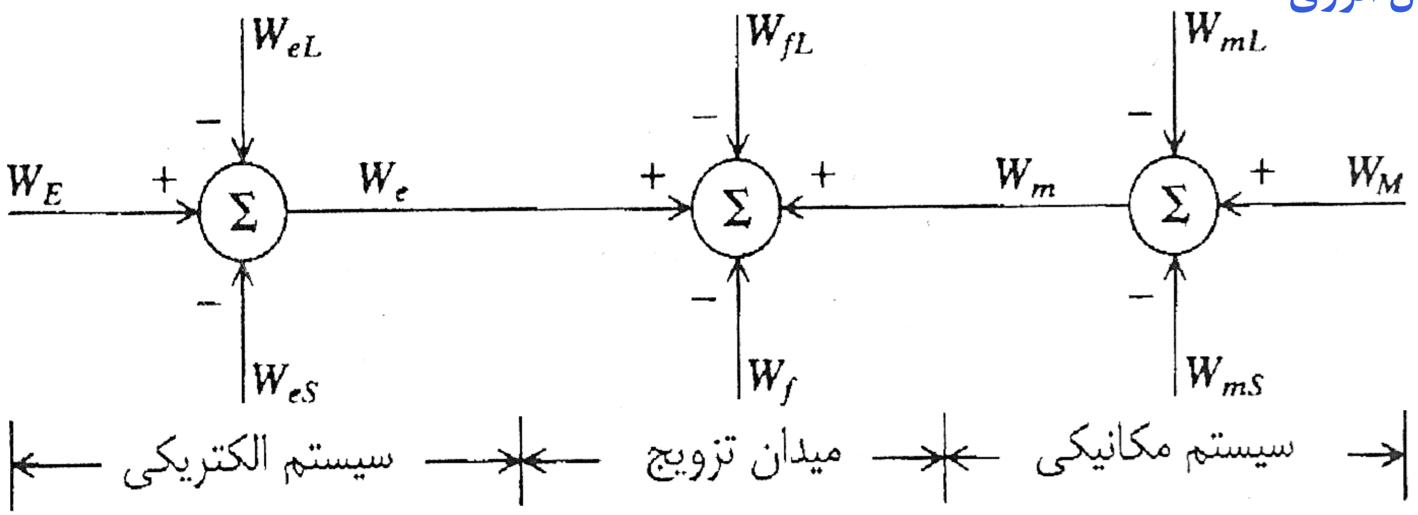
✓اجزای اساسی سیستم های تبدیل انرژی الکترومکانیکی:

- سیستم الکتریکی (electrical system)
- سیستم مکانیکی (mechanical system)
- میدان مغناطیسی تزویج کننده (coupling magnetic field)





تعادل انرژی



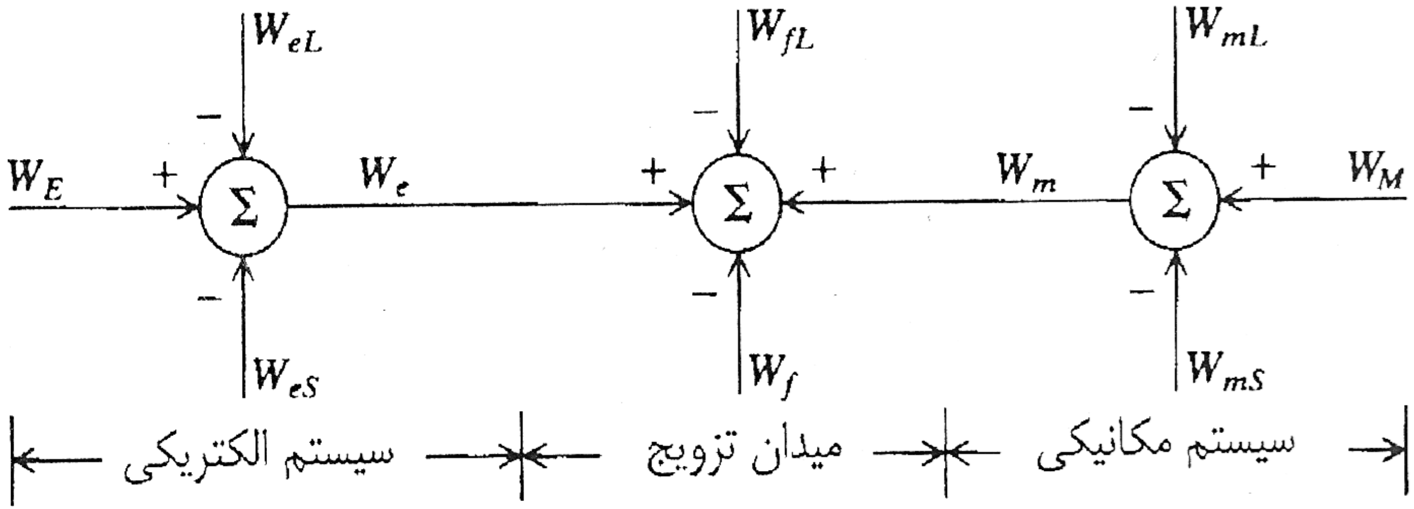
W_E کل انرژی تولیدی توسط منبع الکتریکی — چنانچه انرژی به منبع داده شود عدد منفی خواهد بود

W_{eS} انرژی ذخیره شده در میدانهای الکتریکی و یا مغناطیسی است که با سیستم مکانیکی تزویج نشده‌اند.

W_{eL} تلفات گرمایی مربوط به سیستم الکتریکی ، در نتیجهٔ مقاومت هادیهای حامل جریان و همچنین انرژی تلف شده از این میدانها به شکل گرمای ناشی از هیسترزیس، جریانهای فوکو و تلفات دی‌الکتریکی پدید می آیند.

W_e انرژی منتقل شده توسط سیستم الکتریکی به میدان تزویج است.

تعادل انرژی



چنانچه انرژی به منبع داده شود عدد منفی خواهد بود

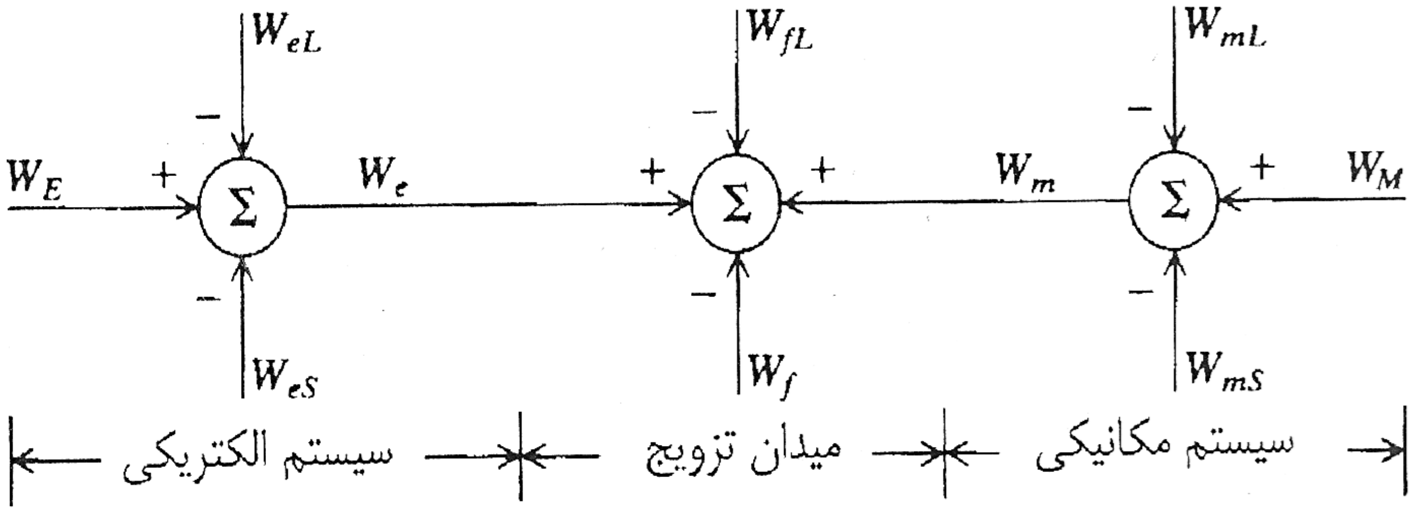
کل انرژی تولیدی توسط منبع مکانیکی W_M

W_{mS} انرژی ذخیره شده در عضو محرک و انعطاف پذیری سیستم مکانیکی است

W_{mL} تلفات انرژی سیستم مکانیکی به شکل گرماست

W_m انرژی منتقل شده به میدان تزویج است

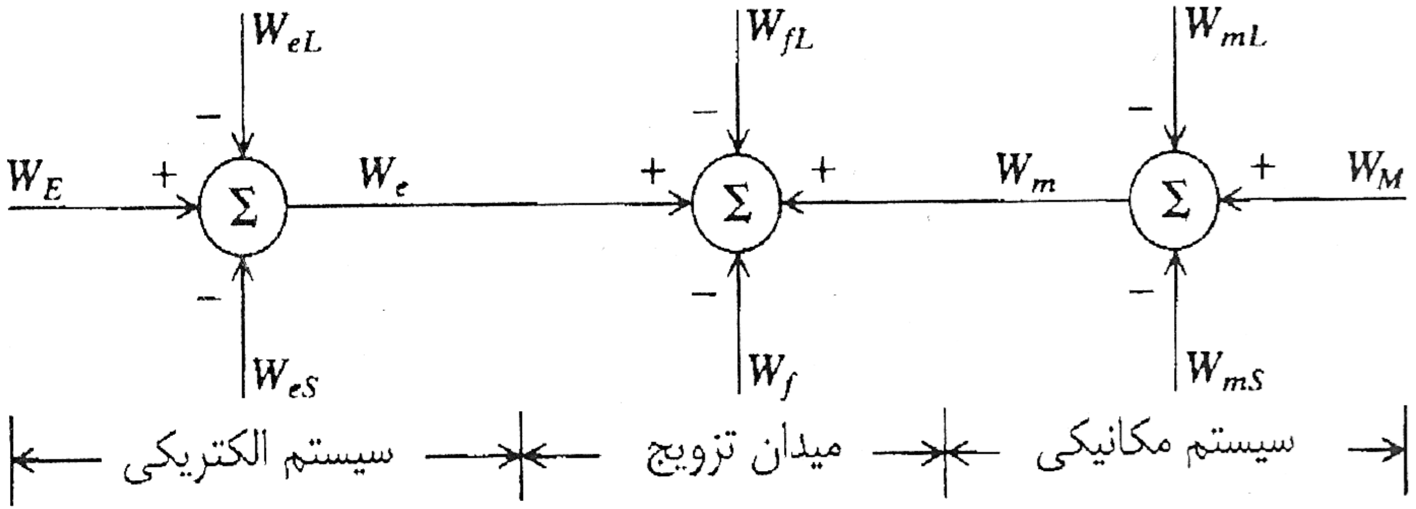
تعادل انرژی



W_f انرژی ذخیره شده در میدان تزویج

W_{fl} انرژی تلف شده به شکل گرما ناشی از تلفات در میدان تزویج (جریان فوکو، هیسترزیس، یا تلفات دی الکتریک)

تعادل انرژی



$$W_E = W_e + W_{eL} + W_{eS}$$

$$W_M = W_m + W_{mL} + W_{mS}$$

$$W_F = W_f + W_{fL}$$

اصل پایستگی انرژی:

$$W_f + W_{fL} = W_e + W_m$$

$$W_f + W_{fL} = (W_E - W_{eL} - W_{eS}) + (W_M - W_{mL} - W_{mS})$$

فرایند واقعی تبدیل انرژی الکتریکی به مکانیکی (ویابرعکس) مستقل است از

- انرژیهای ذخیره شده در سیستم مکانیکی (W_{mS})
- اتلاف انرژی در هر یک از سیستمهای الکتریکی و یا مکانیکی (W_{eL} و W_{mL})
- انرژیهای ذخیره شده در میدانهای الکتریکی یا مغناطیسی که در هر دو سیستم (W_{eS}) یکسان نیستند

جریان فوکو،
هیسترزیس، یا
تلفات دی الکتریک

اگر از تلفات میدان تزویج صرف نظر شود، در نتیجه میدان پایستار است

$$W_f = W_e + W_m$$

dWm = dWe + dWf یا **dWe = dWm + dWf**

$$dW_e = dW_m + dW_f$$

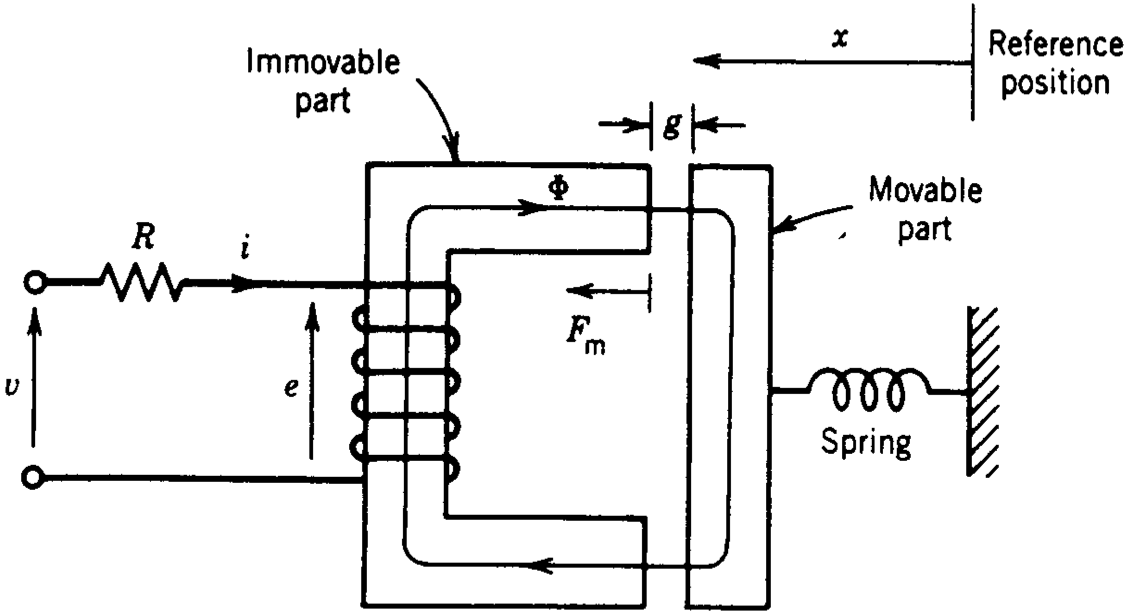
$$\boxed{dW_m = 0}$$

$$dW_e = dW_f$$

$$dW_e = p\,dt = e\,i\,dt$$

$$e = \frac{d\lambda}{dt}$$

$$dW_f = dW_e = i\,d\lambda$$



✓ $R =$ مقاومت اهمی سیم پیچ

✓از شار پراکندگی صرفنظر میشود.

✓از تلفات هسته صرفنظر میشود.

✓قطعه متحرک در وضعیت پایدار و ساکن می باشد

$W_f =$ انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی

دانشگاه مازندران

$$W_f = \int_0^{\lambda} i \, d\lambda$$

$$\boxed{dW_f = dW_e = i \, d\lambda}$$

$$N i = H_c l_c + H_g l_g$$

$$i = \frac{H_c l_c + H_g l_g}{N}$$

$$\lambda = N \varphi = N B A$$

$$d\lambda = N A dB$$

$$W_f = \int_{B_1}^{B_2} \frac{H_c l_c + H_g l_g}{N} N A \, dB$$

$$\text{for the air gap}: \quad H_g = \frac{B}{\mu_0}$$

$$W_f = \int (H_c\, l_c + \frac{B}{\mu_0} l_g) A\, dB$$

$$= \int (H_c\, dB \;\; \boxed{A\, l_c} \; + \frac{B}{\mu_0} dB \;\; \boxed{A\, l_g} \;)$$

$Vol_g = Volume \;\; of\; air\; gap$

$Vol_c = Volume \;\; of\; magnetic\; material$

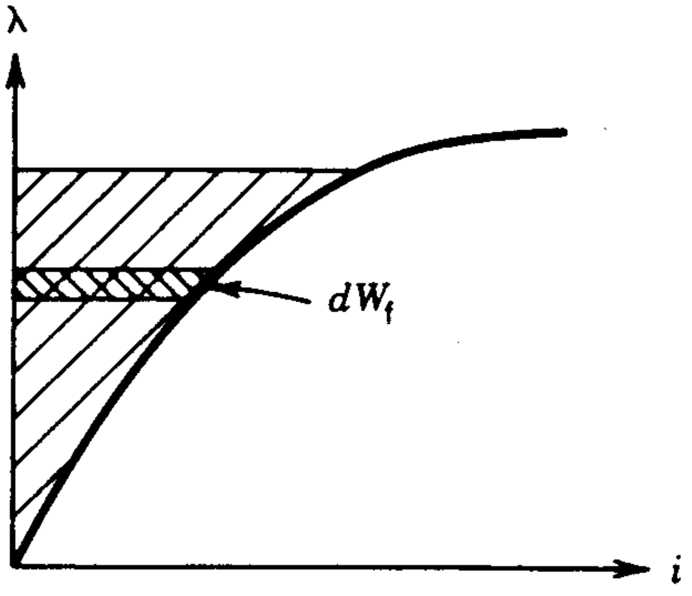
$$W_f = \int H_c\, dB \times Vol_c + \frac{B^2}{2\mu_0} \times Vol_g$$

$$W_f = w_{fc} \times Vol_c + w_{fg} \times Vol_g$$

$$= W_{fc} + W_{fg}$$

for linear magnetic system :

$$H_c = \frac{B_c}{\mu_c} \;\; , \; w_{fc} = \int \frac{B_c}{\mu_c} dB_c = \frac{B_c^2}{2\,\mu_c}$$



کل طول فاصله هوائی = $l_g = 2 \times g$

$w_{fc} =$ چگالی انرژی ذخیره شده در هسته

$w_{fg} =$ چگالی انرژی ذخیره شده در فاصله هوائی

$W_{fc} =$ کل انرژی ذخیره شده در هسته

$W_{fg} =$ کل انرژی ذخیره شده در فاصله هوائی

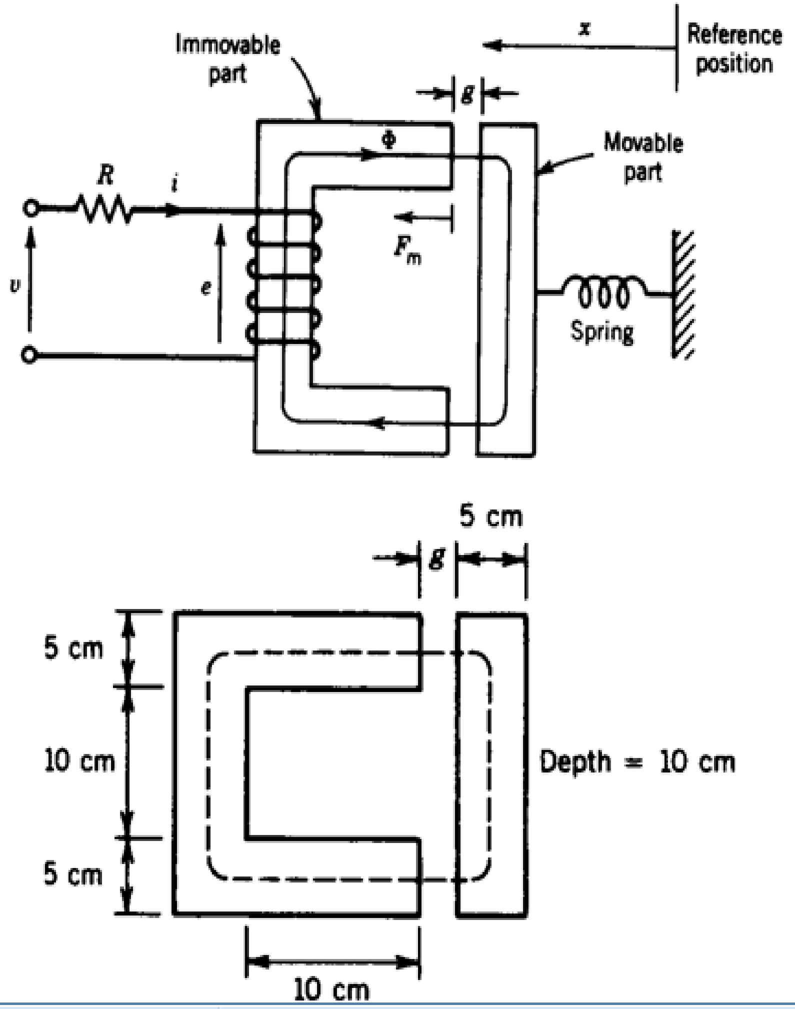
برای چگالی شار مساوی، چگالی انرژی ذخیره شـــده در هوا از چگالـــی انرژی در هسته خیلی بیشتر است.

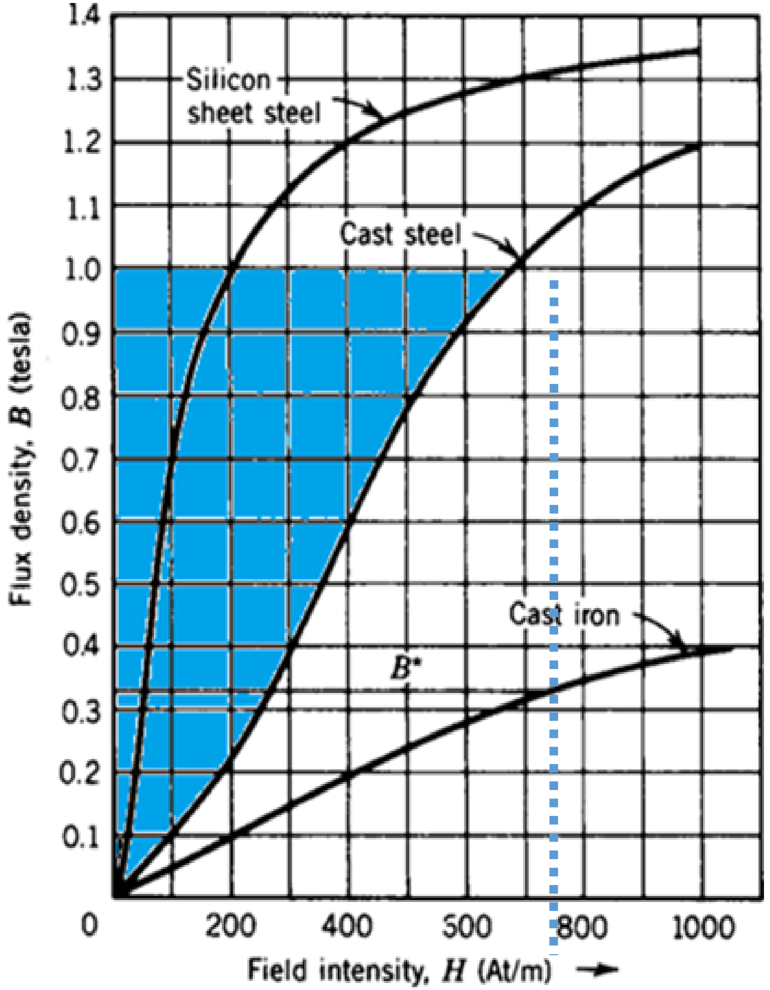
$\boxed{\dfrac{B^2}{2\mu_0}}$ $\boxed{\dfrac{B_c^2}{2\mu_c}}$

در ماشین های واقعی W_{fc} از W_{fg} خیلی کوچکتر و بعضاً قابل اغماض می باشد.

شکل زیر با ابعاد داده شده و منحنی B-H هسته از جنس هسته از نوع فولاد ریخته گری است. تعداد دور سیم پیچ ۲۵۰ دور می باشد و مقاومت آن ۵ اهم است.طول شکاف هوایی(g) ثابت و برابر ۵ میلیمتر است.اگر به سیم پیچ ولتاژ DC وصل گردد،برای داشتن چگالی شار یک تسلا مطلوبست:

الف) ولتاژ منبع DC ب) انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی





الف: از منحنی B-H، برای چگالی شار یک تسلا برای هسته فولاد ریخته گری داریم:

$$H_c = 670\ At/m$$

طول متوسط مسیر شار در هسته(l_c):

$$l_c \approx 2(10+5) + 2(10+5)cm = 60\ cm$$

شدت میدان مغناطیسی در شکاف هوایی:

$$H_g = \frac{B_g}{\mu_0} = \frac{1.0}{4\pi \times 10^{-7}} At/m = 795.8 \times 10^3\ At/m$$

نیروی محرکه (mmf) مورد نیاز:

$$Ni = 670 \times 0.6 + 795.8 \times 10^3 \times 2 \times 5 \times 10^{-3}\ At$$
$$= 402 + 7958 = 8360At$$

پس جریان سیم پیچ ۳۳/۴۴ آمپر است(چرا؟). ولتاژ منبع DC به قرار زیر است:

$$V_{dc} = 33.44 \times 5 = 167.2\ V$$

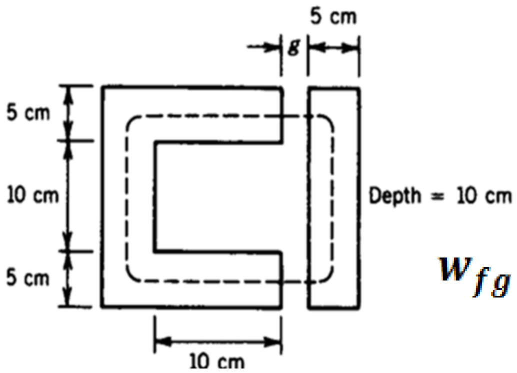
$$W_f = \int H_c \, dB \times Vol_c + \frac{B^2}{2\mu_0} \times Vol_g$$

ب: چگالی انرژی توسط سطح زیر منحنیB-H محصور بین منحنی و محور B مشخص می شود:

$$w_{fc} = w_{fc} = \int_0^{1.0} HdB \cong \frac{1}{2} \times 1 \times 670 = 335\, J/m^3$$

حجم هسته:

$$V_c = 2(0.05 \times 0.10 \times 0.20) + 2(0.05 \times 0.10 \times 0.10) = 0.003\ m^3$$



انرژی ذخیره شده در هسته:

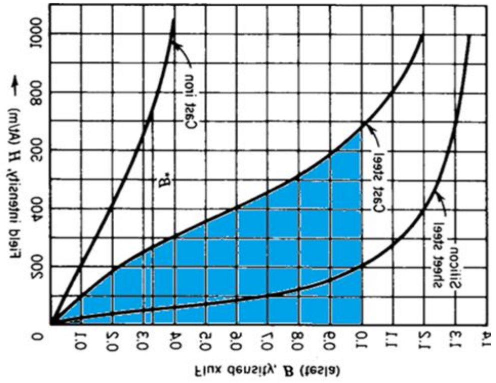
$$W_{fc} = 335 \times 0.003\, J = 1.005\, J$$

چگالی انرژی شکاف هوایی:

$$w_{fg} = \frac{1.0^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}}\, J/m^3 = 397.9 \times 10^3\ \ J/m^3$$

حجم شکاف هوایی:

$$V_g = 2(0.05 \times 0.10 \times 0.005) m^3 = 0.05 \times 10^{-3}\ m^3$$



انرژی ذخیره شده در شکاف هوایی:

$$W_{fg} = 397.9 \times 10^3 \times 0.05 \times 10^{-3} = 19.895\ joules$$

کل انرژی میدان به قرار زیر است:

$$W_f = 1.005 + 19.895\, J = 20.9\, J$$

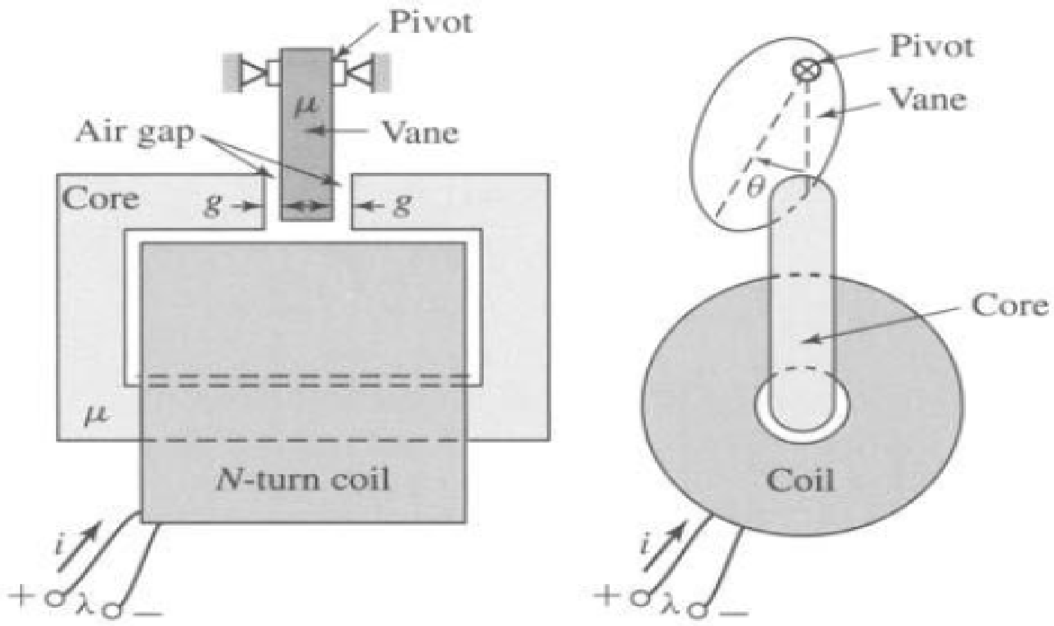
قسمت اعظم انرژی میدان در شکاف هوایی ذخیره می شود.

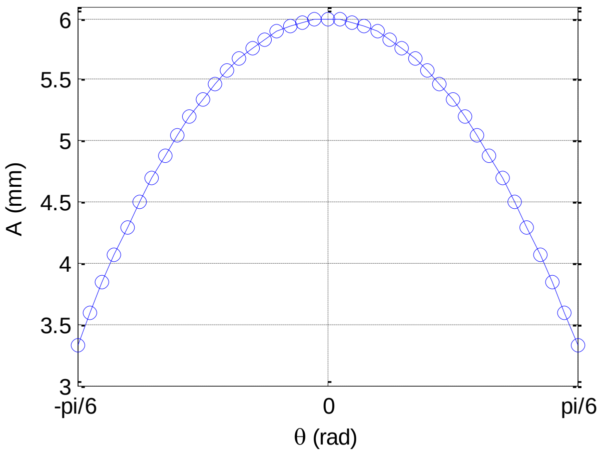
An actuator with a rotating vane is shown in Fig. 3.26. You may assume that the permeability of both the core and the vane are infinite ($\mu \rightarrow \infty$). The total air-gap length is $2g$ and shape of the vane is such that the effective area of the air gap can be assumed to be of the form

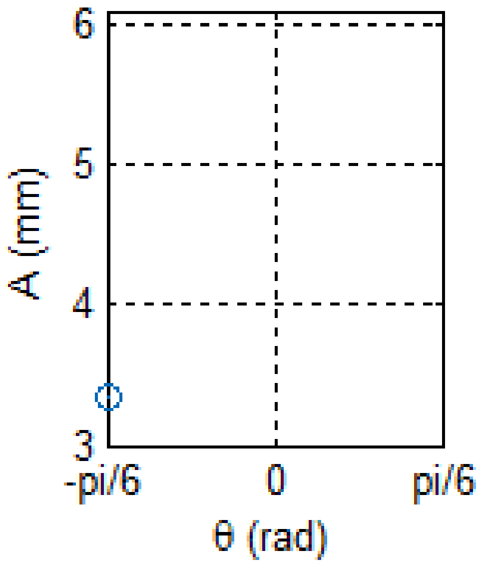
$$A_g = A_0\left(1 - \left(\frac{4\theta}{\pi}\right)^2\right)$$

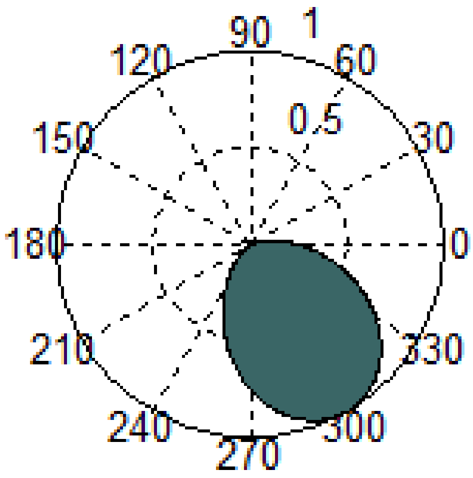
(valid only in the range $|\theta| \leq \pi/6$). The actuator dimensions are $g = 0.8$ mm, $A_0 = 6.0\ \text{mm}^2$, and $N = 650$ turns.

a. Assuming the coil to be carrying current i, write an expression for the magnetic stored energy in the actuator as a function of angle θ for $|\theta| \leq \pi/6$.




6
5.5
5
4.5
4
3.5
3
A (mm)
-pi/6
0
pi/6
θ (rad)


6
5
4
3
A (mm)
-pi/6
0
pi/6
θ (rad)


90
1
60
120
0.5
30
150
180
0
210
330
240
300
270

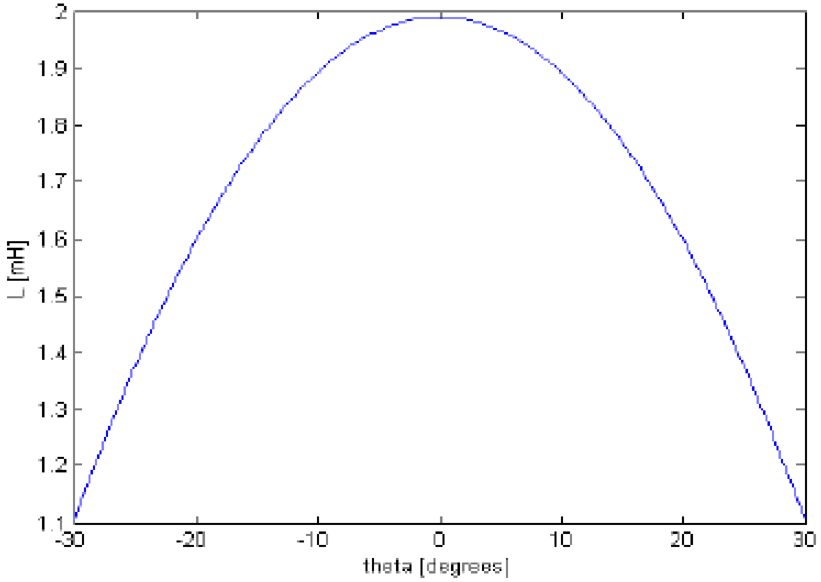
part (a):

$$B_g = \frac{\mu_0 N i}{2g}$$

$$\begin{aligned} W_{\text{fld}} &= \left(\frac{B_g^2}{2\mu_0}\right) \times \text{Air-gap volume} = \left(\frac{B_g^2}{2\mu_0}\right) \times 2gA_g \\ &= \frac{\mu_0 N^2 A_0}{4g}\left(1 - \left(\frac{4\theta}{\pi}\right)^2\right) i^2 \end{aligned}$$

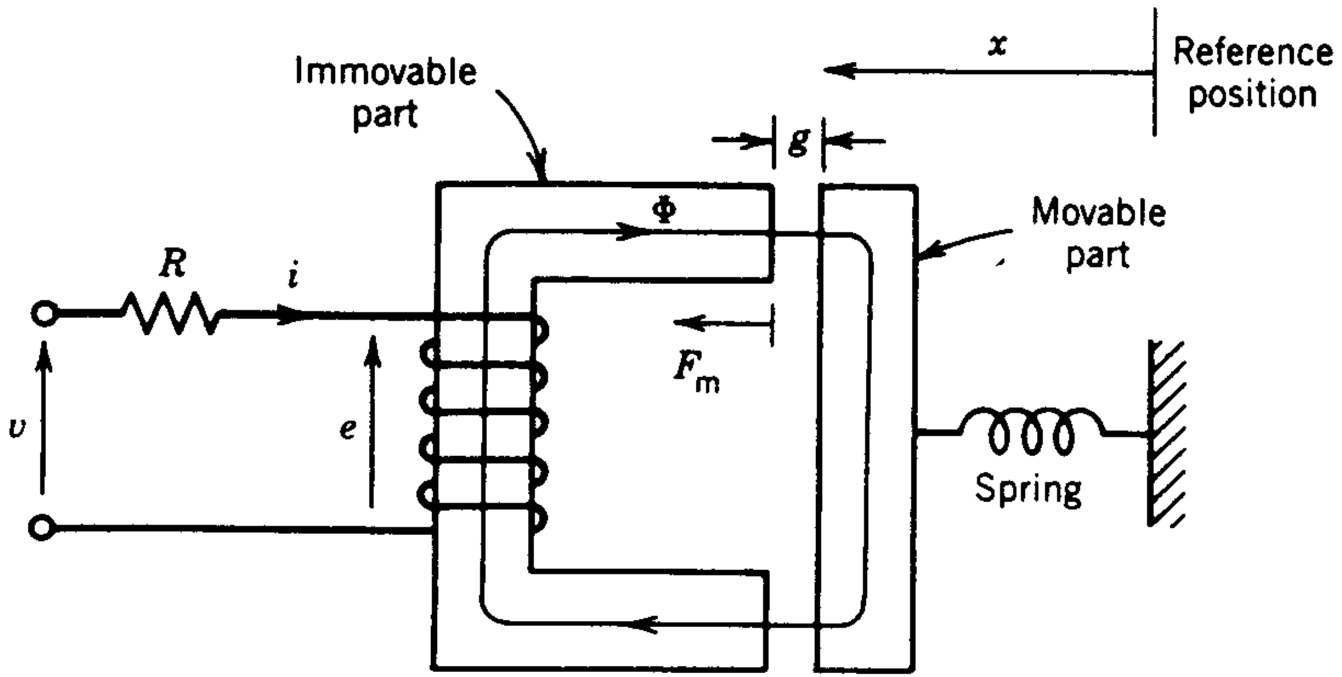
part (b):

$$L = \frac{2W_{\text{fld}}}{i^2} = \frac{\mu_0 N^2 A_0}{2g}\left(1 - \left(\frac{4\theta}{\pi}\right)^2\right)$$



تبدیل انرژی الکترومکانیکی

سیستم الکترومغناطیسی - شبه انرژی - نیروی مکانیکی



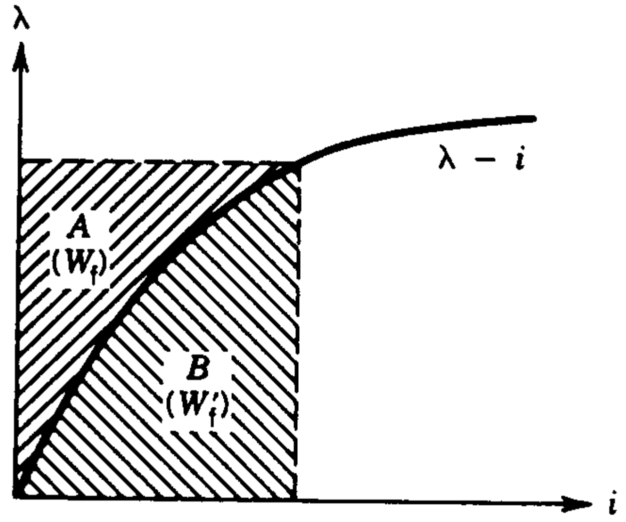
انرژی و شبه انرژی

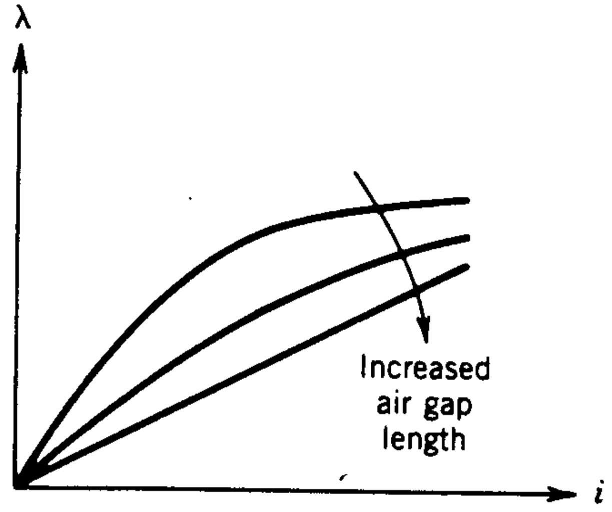
$$A = W_f = \int_0^{\lambda} i\, d\lambda \quad = \ magnetic\ \ field\ \ energy$$

$$B = W_f' = \int_0^{i} \lambda\, di \quad = \ co\,energy$$

$$for\ linear\ \ system: \quad \mu_r \ = \ cst.$$

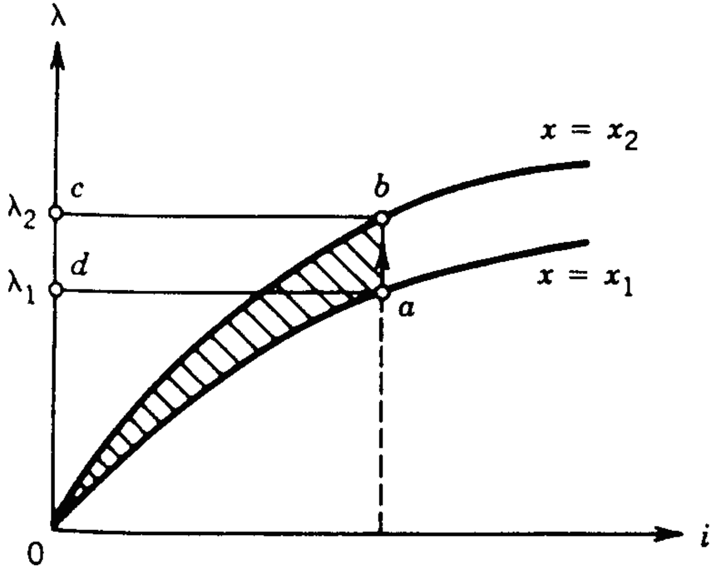
$$W_f \ = \ W_f'$$



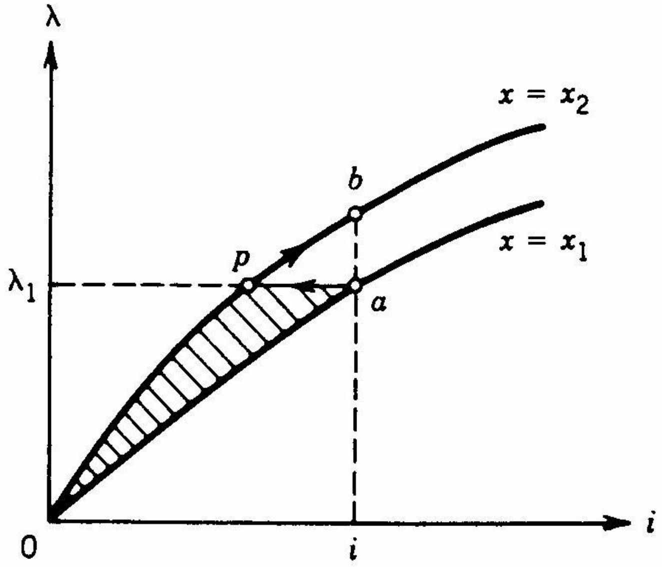


در سیستم الکترومکانیکی مورد مطالعه، فرض می کنیم قسمت متحرک از وضعیت $x=x_1$ به وضعیت $x=x_2$ برود.

$$W'_f = \int_0^i \lambda\, di \;=\; coenergy \qquad , \qquad W'_f = W'_f(i,x) \qquad a\ function\ of\ i\ and\ x$$



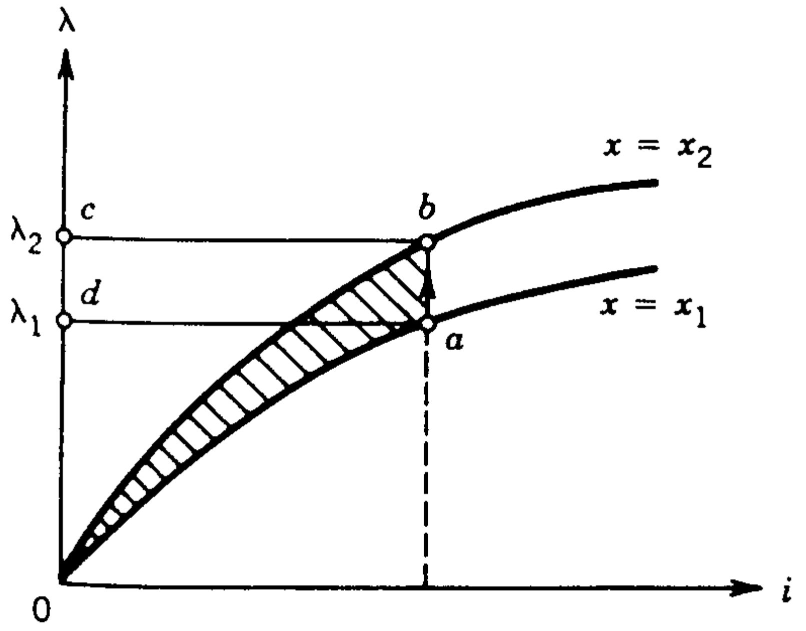
جریان ثابت (حرکت آرام)



شار پیوندی ثابت (حرکت سریع)

جریان ثابت

(حرکت آرام)



$$dW_f = W_{f2} - W_{f1} = A_{obc} - A_{oad}$$

$$dW_e = \int e\, i\, dt = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} i\, d\lambda = A_{abcd}$$

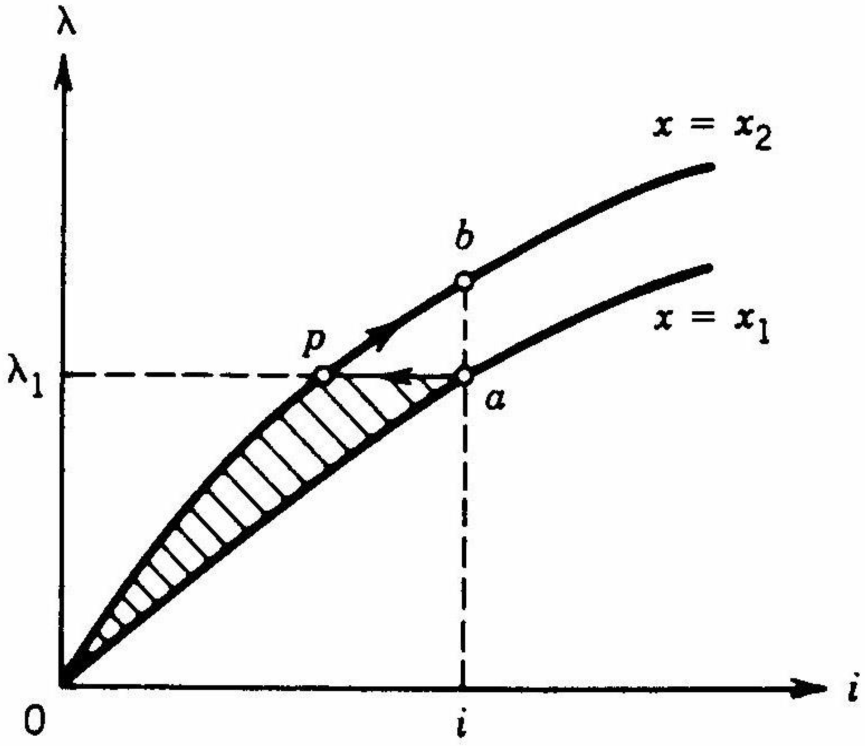
$$dW_m = dW_e - dW_f = A_{abcd} + A_{oad} - A_{obc} = A_{oab} = dW_f'$$

$$dW_m = f_m\, dx = dW_f'$$

$$f_m = \left.\frac{\partial W_f'(i,x)}{\partial x}\right|_{i=cst.}$$

شار پیوندی ثابت

(حرکت سریع)



$$dW_e = i\,d\lambda = 0 \qquad , \qquad dW_m = f_m\,dx$$

$$dW_f(\lambda, x) = dW_e - dW_m = -\,f_m\,dx$$

$$f_m = -\left.\frac{\partial W_f(\lambda, x)}{\partial x}\right|_{\lambda = cst.}$$

مشخصه λ-i یک سیستم الکترو مغناطیسی به قرار زیر است:

$$i = \left(\frac{\lambda g}{0.09}\right)^2$$

این مشخصه تحت شرایط زیر صادق است:

$$0 < i < 4\,(\text{آمپر})\ ,3 < g < 10\,(\text{سانتیمتر})$$

g طول شکاف هوایی است،اگر:

$$i = 3\,(\text{آمپر})\ ,g = 5\,(\text{سانتیمتر})$$

نیروی مکانیکی اعمال شده به قسمت متحرک را بیابید.برای حل این مساله از انرژی و شبه انرژی استفاده کنید.

از روش انرژی

$$W_f = \int_0^{\lambda} i d\lambda = \int_0^{\lambda} \left(\frac{\lambda g}{0.09}\right)^2 d\lambda$$

$$= \frac{g^2}{0.09^2} \frac{\lambda^3}{3}$$

$$f_m = -\left.\frac{\partial W_f(\lambda, g)}{\partial g}\right|_{\lambda = \text{ثابت}}$$

$$= -\frac{\lambda^3 2g}{3 \times 0.09^2}$$

با جایگزین مقادیر جریان وطول شکاف هوایی داریم:

$$\lambda = \frac{0.09 \times 3^{1/2}}{0.05} = 3.12\ Wb - turn$$

$$f_m = \frac{-3.12^3 \times 2 \times 0.05}{3 \times 0.09^2}$$

$$= -124.7\ N.m$$

از روش شبه انرژی

$$W'_f = \int_0^i \lambda di = \int_0^i \frac{0.09 i^{1/2}}{g} di$$

$$= \frac{0.09}{g}\frac{2}{3} i^{3/2} (\text{ژول})$$

$$f_m = \left.\frac{\partial W'_f(i,g)}{\partial g}\right|_{i=\text{ثابت}}$$

$$= 0.09 \times \frac{2}{3} i^{3/2} \left.\frac{-1}{g^2}\right|_{i=\text{ثابت}}$$

برای $i=3$ و $g=0.05m$ داریم:

$$f_m = -0.09 \times \frac{2}{3} \times 3^{3/2}$$

$$\times \frac{1}{0.05^2}\ N.m$$

$$= -124.7\ N.m$$

یک محرک یا عمل کننده با حرکت انتقالی مفروض است و مشخصه $i - \lambda$ آن به قرار زیر است:

$$i = \lambda^{\frac{3}{2}} + 2.5\lambda(x - 1)$$

$$0 < x < 1 \text{ متر}$$

i جریان سیم پیچ محرک می باشد.نیروی اعمال شده به قسمت متحرک را در $x = 0.6$ متر حساب کنید.

حل: انرژی سیستم برابر با

$$i = \lambda^{\frac{3}{2}} + 2.5\lambda(x-1)$$

$$w_f = \int_0^{\lambda} i d\lambda = \int_0^{\lambda} \left(\lambda^{\frac{3}{2}} + 2.5\lambda(x-1)^2\right) d\lambda$$

$$= \frac{3}{2}\lambda^{\frac{5}{2}} + 1.25\lambda^2(x-1)\Big|_0^{\lambda}$$

$$= \frac{3}{2}\lambda^{\frac{5}{2}} + 1.25\lambda^2(x-1)^2$$

$$f_m(\lambda, x) = -\frac{\partial w_f(\lambda, x)}{\partial x}\Big|_{\lambda = cte}$$

$$= -2.5\lambda^2(x-1)^2$$

نابراین در $x=0.6$ داریم

$$f_m(\lambda, 0.6) = -2.5\lambda^2(0.6-1)^2 = \lambda^2$$

سیستم الکترومغناطیسی خطی – نیروی مکانیکی

اگر مقاومت مغناطیسی هسته نسبت به مقاومت مغناطیسی شکاف هوایی کم باشد، مشخصه λ-i خطی میشود و در این شرایط ایده آل داریم:

$$\lambda = L(x)\, i \qquad , \quad i = \frac{\lambda}{L(x)}$$

$$W_f = \int i\, d\lambda = \int_0^{\lambda} \frac{\lambda}{L(x)} d\lambda = \frac{\lambda^2}{2\,L(x)} = \frac{1}{2} L(x)\ i^2$$

$$f_m = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda^2}{2\,L(x)}\right)\bigg|_{\lambda = cst}$$

$$= \frac{\lambda^2}{2\,L^2(x)} \frac{dL(x)}{dx} = \frac{1}{2}\, i^2\ \frac{dL(x)}{dx}$$

or

$$W_f = W_f' = \frac{1}{2} L(x) i^2$$

$$f_m = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} L(x) i^2\right)\bigg|_{i = cst} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(x)}{dx}$$

اگر از مقاومت مغناطیسی هسته صرف نظر گردد،

$$N\,i = H_g\,2g = \frac{B_g}{\mu_0}\,2g$$

انرژی میدان

$$W_{fg} = \frac{B_g^2}{2\,\mu_0} \times Vol_g = \frac{B_g^2}{2\,\mu_0} \times A_g\,2g$$

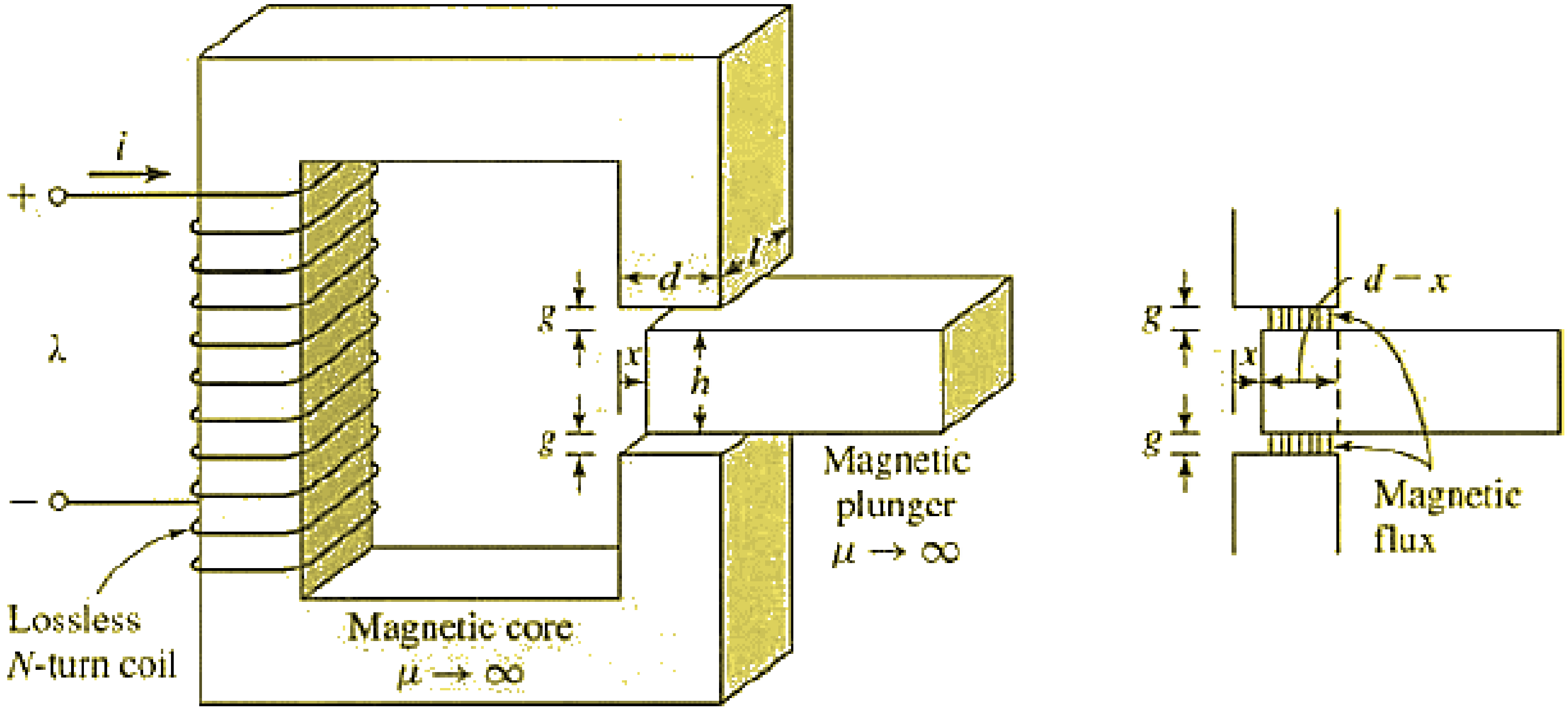
$$d\,W_f = d\,W_{fg} = \frac{B_g^2}{2\,\mu_0} \times dVol_g = \frac{B_g^2}{2\,\mu_0} \times A_g\,dx$$

$$F_m = \frac{\partial W_f}{\partial x} = \frac{B_g^2}{2\,\mu_0}(2A_g) \qquad N$$

نیرو بر واحد سطح

$$f_m = \frac{B_g^2}{2\,\mu_0} \quad N/m^2 \qquad force\ per\ unit\ area$$

The relay shown in Fig. 3.6a is made from infinitely-permeable magnetic material with a movable plunger, also of infinitely-permeable material. The height of the plunger is much greater than the air-gap length ($h \gg g$). Calculate the magnetic stored energy W_{fld} as a function of plunger position ($0 < x < d$) for $N = 1000$ turns, $g = 2.0$ mm, $d = 0.15$ m, $l = 0.1$ m, and $i = 10$ A.



Equation 3.19 can be used to solve for W_{fld} when λ is known. For this situation, i is held constant, and thus it would be useful to have an expression for W_{fld} as a function of i and x. This can be obtained quite simply by substituting Eq. 3.14 into Eq. 3.19, with the result

$$W_{\text{fld}} = \frac{1}{2}L(x)i^2$$

The inductance is given by

$$L(x) = \frac{\mu_0 N^2 A_{\text{gap}}}{2g}$$

where A_{gap} is the gap cross-sectional area. From Fig. 3.6b, A_{gap} can be seen to be

$$A_{\text{gap}} = l(d-x) = ld\left(1 - \frac{x}{d}\right)$$

Thus

$$L(x) = \frac{\mu_0 N^2 ld(1 - x/d)}{2g}$$

and

$$\begin{aligned} W_{\text{fld}} &= \frac{1}{2}\frac{N^2\mu_0 ld(1-x/d)}{2g}\,i^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{(1000^2)(4\pi\times 10^{-7})(0.1)(0.15)}{2(0.002)} \times 10^2\left(1 - \frac{x}{d}\right) \\ &= 236\left(1 - \frac{x}{d}\right)\text{ J} \end{aligned}$$

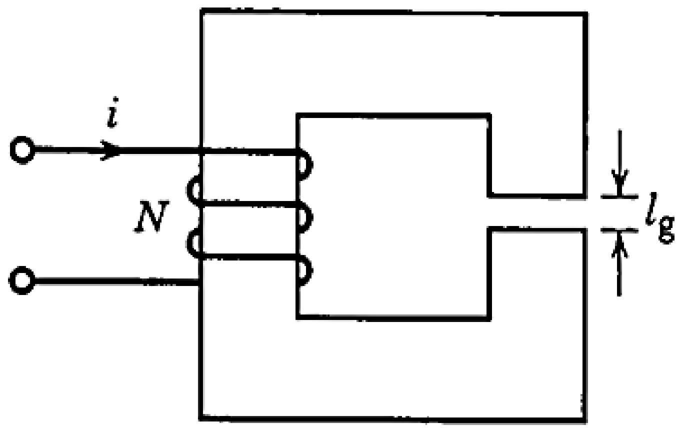
سیستم مغناطیسی نشان داده شده در شکل روبرو پارامترهای زیر را داراست:

$N=500 \quad , \quad i=2A$

عرض شکاف هوایی=۲ سانتی متر

عمق شکاف هوایی=۲ سانتی متر

طول شکاف هوایی=۱ میلیمتر



از رلوکتانس هسته وشار پیوندی صرف نظر می کنیم.از خمیدگی شار نیز صرف نظرشود.

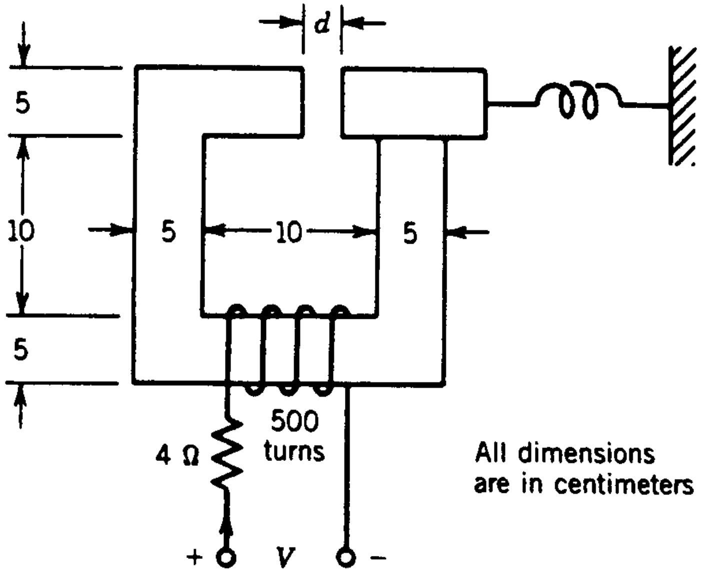
الف: نیروی جاذبه میان دو سمت شکاف هوایی	ب: انرژی ذخیره شده در شکاف هوایی
$B_g = \frac{\mu_0 N i}{l_g}$ $f_m = \frac{B^2{}_g}{2\mu_0} \times A_g = \mu_0 \frac{N^2 i^2}{2 l^2{}_g} A_g$ $= \frac{4\pi 10^{-7} (500 \times 2)^2}{2 \times 1 \times 1 \times 10^{-6}}$ $\times 2.0 \times 2.0 \times 10^{-4}$ $= 251.33\ N$	$W_f = \frac{B^2{}_g}{2\mu_0} \times V_g = \frac{B^2{}_g}{2\mu_0} \times A_g \times l_g$ $= 251.33 \times 10^{-3} J$ $= 0.25133\ J$

مثال :شکل زیر یک سیستم عملگر را نشان می دهد. هسته ثابت و متحرک هردو از فولاد ریخته گری (**cast steel**) می باشد. سطح مقطع هسته و هوا برابر و مربعی است.

a) چنانچه **d = 1 mm** باشد مطلوب است محاسبه :

۱- جریان و ولتاژ **DC** مورد نیاز برای چگالی شار **0.5 T** در فاصله هوائی. ۲- چگالی انرژی ذخیره شده در هسته. ۳- کل انرژی ذخیره شده در هسته. ۴- چگالی انرژی ذخیره شده در هوا. ۵- کل انرژی ذخیره شده در هوا. ۶- کل انرژی ذخیره شده در سیستم.

b) چنانچه قطعه متحرک به آرامی حــــــرکت نموده و فاصله هوائی نهایتاً بسته شود (**d = 0**) درصورتیکه ولتاژ و جریان اعمال شده مقدار قبلی خود را داشته باشند. مــــطلوب است :



۷. چگالی شار در هسته.

۸. کل انرژی ذخیره شده در سیستم.

۹.انرژی مبادله شده بین منبع **DC** و سیستم عملگر (به جز تلفات انرژی در مقاومت سیم پیچ)

۱-جریان و ولتاژ DC مورد نیاز برای چگالی شار **0.5 T** در فاصله هوائی؟

$a)$

$$from\ \ B-H\ \ curve\ of\ \ cast\ \ steel\ :$$

$$B=0.5\,T \Rightarrow H_c=350\ At/m$$

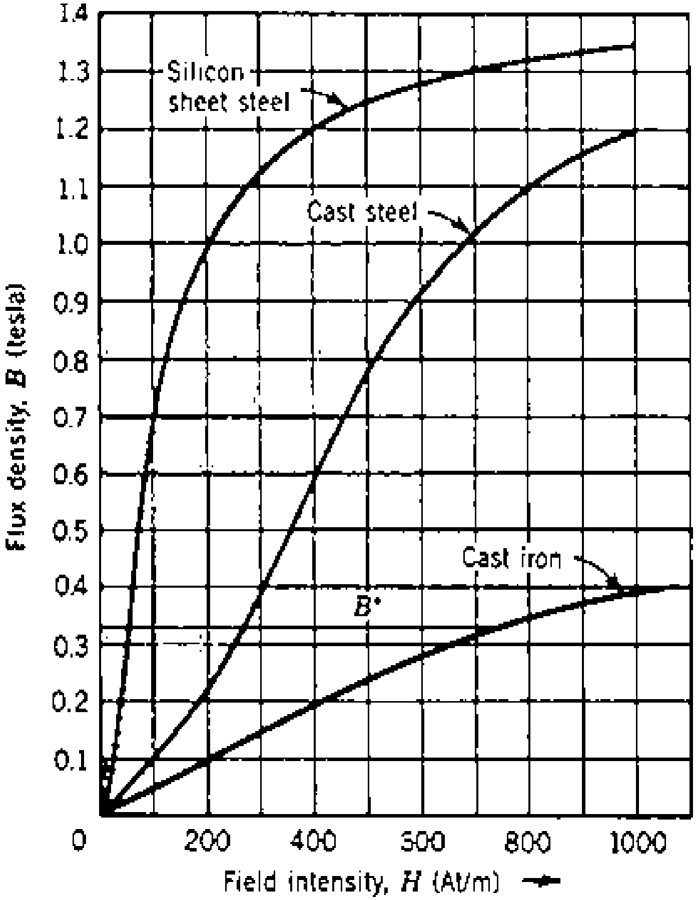
$$H_g=\frac{B}{\mu_0}=\frac{0.5}{4\pi\times10^{-7}}=397877\ \ At/m$$

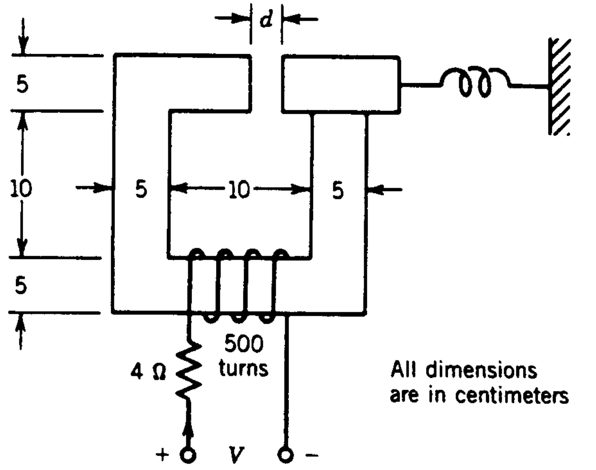
$$N\ i=H_c l_c+H_g l_g$$

$$=350\times0.6+0.001\times397877=608\,At$$

$$i=\frac{608}{500}=1.22\ \ A\quad ,\ V=RI=4\times1.22=4.88\ V$$

$$\mu_c=\frac{B_c}{H_c}=\frac{0.5}{350}=0.0014$$





۲-چگالی انرژی ذخیره شده در هسته. ۳- کل انرژی ذخیره شده در هسته. ۴- چگالی انرژی ذخیره شده در هوا. ۵- کل انرژی ذخیره شده در هوا. ۶- کل انرژی ذخیره شده در سیستم

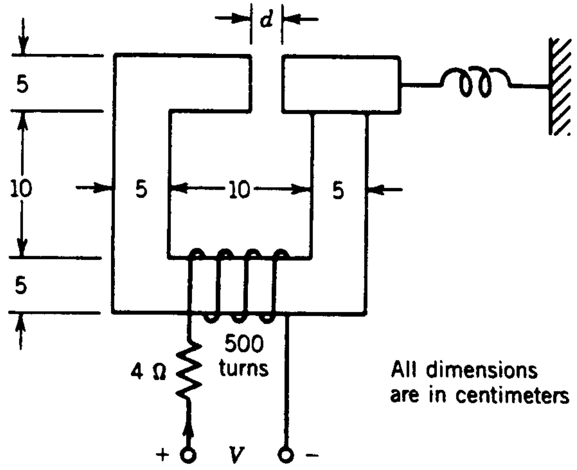
$$w_{fc} = \frac{B_c^2}{2\mu_c} = \frac{(0.5)^2}{2\times 0.0014} = 87.5 \quad J/m^3$$

$$W_{fc} = w_{fc} \times Vol_c = 87.5\times 0.6\times 25\times 10^{-4} = 0.13 \quad J$$

$$w_{fg} = \frac{B_g^2}{2\mu_0} = \frac{(0.5)^2}{2\times 4\pi\times 10^{-7}} = 99472 \quad J/m^3$$

$$W_{fg} = w_{fg} \times Vol_g = 99472\times 0.001\times 25\times 10^{-4} = 0.249 \quad J$$

$$W_f = W_{fc} + W_{fg} = 0.13 + 0.249 = 0.379 \quad J$$



b) چنانچه قطعه متحرک به آرامی حـــــرکت نموده و فاصله هوائی نهایتاً بسته شود (d = 0) درصورتیکه ولتاژ و جریان اعمال شده مقدار قبلی خود را داشته باشند. مـــطلوب است :

۷. چگالی شار در هسته.

۸. کل انرژی ذخیره شده در سیستم.

۹.انرژی مبادله شده بین منبع DC و سیستم عملگر (به جز تلفات انرژی در مقاومت سیم پیچ)

$b)$

$$N\,i = 500 \times 1.22 = 610 \;\; At$$

$$H_c = \frac{N\,i}{l_c} = 1017 \;\; At/m$$

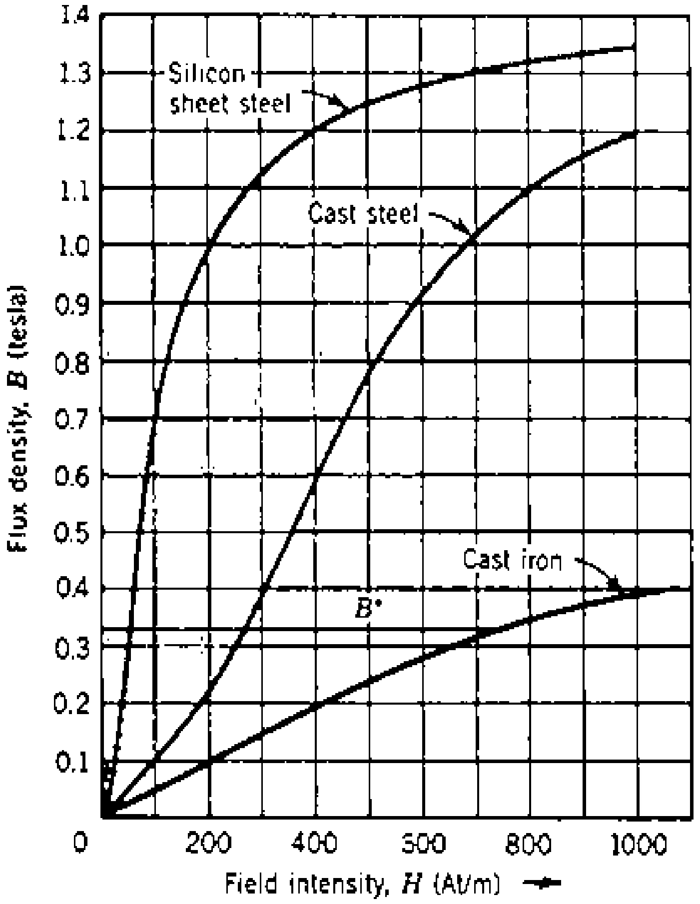
؟

$$from \; B-H \;\; curve \; of \;\; cast \; steel:$$

$$H_c = 1017 \Rightarrow \boxed{B_c = 1.2 \; T}$$

$$\mu_c = \frac{B_c}{H_c} = \frac{1.25}{1017} = 0.0012$$

$$w_{fc} = \frac{B_c^2}{2\,\mu_c} = \frac{(1.2)^2}{2 \times 0.0012} = 600 \;\; J/m^3$$



b) چنانچه قطعه متحرک به آرامی حـــــــرکت نموده و فاصله هوائی نهایتاً بسته شود (d = 0)
درصورتیکه ولتاژ و جریان اعمال شده مقدار قبلی خود را داشته باشند. مـــطلوب است :
۷. چگالی شار در هسته.
۸. کل انرژی ذخیره شده در سیستم.
۹.انرژی مبادله شده بین منبع DC و سیستم عملگر (به جز تلفات انرژی در مقاومت سیم پیچ)

$$W_f = W_{fc} = w_{fc} \times Vol_c$$

$$= 600 \times 0.6 \times 25 \times 10^{-4} = \boxed{0.891 \quad J}$$

b) چنانچه قطعه متحرک به آرامی حـــــرکت نموده و فاصله هوائی نهایتاً بسته شود (d = 0)
درصورتیکه ولتاژ و جریان اعمال شده مقدار قبلی خود را داشته باشند. مـــطلوب است :
۷. چگالی شار در هسته.
۸. کل انرژی ذخیره شده در سیستم.
۹.انرژی مبادله شده بین منبع DC و سیستم عملگر (به جز تلفات انرژی در مقاومت سیم پیچ)

$$\Delta W_e = i\, d\lambda = i\, N\, A\, \Delta B$$
$$= 1.22 \times 500 \times 25 \times 10^{-4} \times (1.2 - 0.5)$$
$$= \boxed{1.067 \quad J}$$
$$\Delta W_f = W_{fb} - W_{fa} = 0.891 - 0.379 = \boxed{0.512\ J}$$
$$\Delta W_m = \Delta W_e - \Delta W_f = 1.067 - 0.512$$
$$= \boxed{0.555\ \ J}$$

c) در مثال فوق الذکر برای حالت a و b نیروی وارده به قطعه متحرک را محاسبه کنید.

$$f_m = \frac{B_g^2}{2\mu_0} A_g$$

$a)$

$$B_g = 0.5\ T$$

$$f_m = \frac{0.5^2 \times 25\times10^{-4}}{2 \times 4\times\pi\times10^{-7}} = 248.7 \quad N$$

$b)$

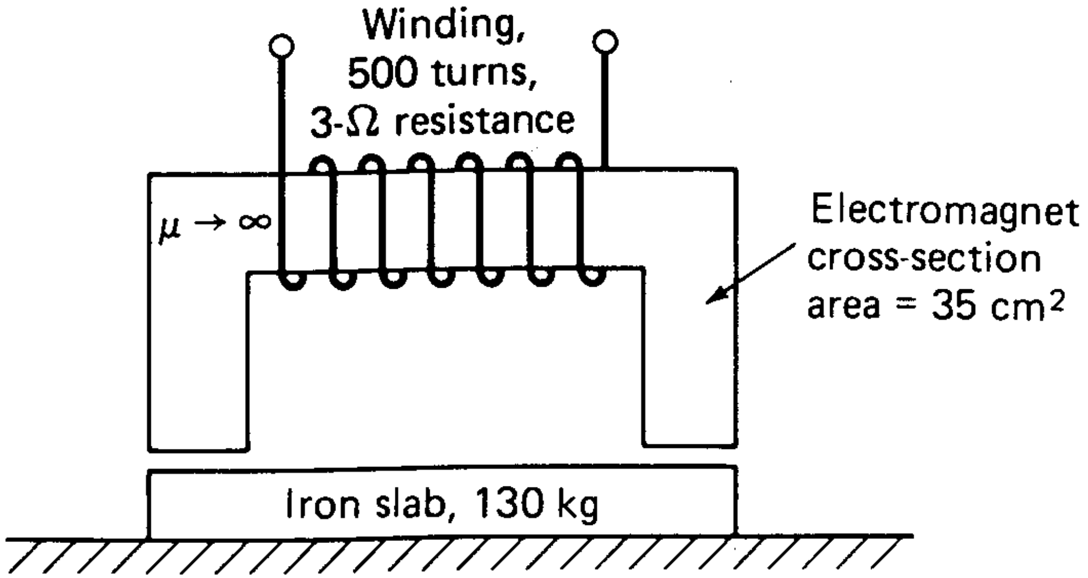
$$B_g = 1.2\ T$$

$$f_m = \frac{1.2^2 \times 25\times10^{-4}}{2 \times 4\times\pi\times10^{-7}} = 1432.4 \quad N$$

مثال: شکل زیر یک الکترو مگنت را نشان می دهد که برای بالا بردن یک قطعه آهن ۱۳۰ kg بکار میرود. ناصافی سطح آهن در حدی است که وقتی آهن و آهنربا در تماس هستند یک فاصله هوائی حداقل معادل 0.015 cm بین قطعه آهن و هر قطب آهنربا وجود دارد. سایر اطلاعات لازم روی شکل نشان داده شده است.

a) چنانچه الکترو مگنت توسط برق dc تغذیه شود مقدار ولتاژ لازم برای بلند کردن قطعه آهنی (غلبه بر نیروی جاذبه) را بدست آورید.

b) چنانچه الکترو مگنت توسط برق ac تغذیه شود مقدار موثر ولتاژ لازم برای بلند کردن قطعه آهنی (غلبه بر نیروی جاذبه) را بدست آورید.



Electromagnet lifting an iron slab

a) چنانچه الکترو مگنت توسط برق dc تغذیه شود مقدار ولتاژ لازم برای بلند کردن قطعه آهنی (غلبه بر نیروی جاذبه) را بدست آورید.

$$a)$$

$$x = air\ gap\ length\ on\ each\ side$$

$$L = \frac{\mu_0 A N^2}{2x} \quad , \quad W'_f = \frac{1}{2} L I^2$$

$$f = \frac{\partial W'_f}{\partial x} = \boxed{\frac{\partial W'_f}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial x}} = \frac{I^2}{2} \cdot \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\mu_0 A N^2}{4x^2} I^2$$

؟

$$f = \frac{-4\pi \times 10^{-7} \times 35 \times 10^{-4} \times 500^2}{4 \times (0.00015)^2} I^2 = 1.222 \times 10^4\ I^2$$

$$f = mg = 130 \times 9.8 = 1.274 \times 10^3 \quad N \quad , \quad I = \sqrt{\frac{1.274 \times 10^3}{1.222 \times 10^4}} = 0.323 \quad A$$

$$V_{DC} = RI = 0.323 \times 3 = 0.965 \quad V$$

b) چنانچه الکترو مگنت توسط برق ac تغذیه شود مقدار موثر ولتاژ لازم برای بلند کردن قطعه آهنی (غلبه بر نیروی جاذبه) را بدست آورید.

$b\,)$

$$L=\frac{\mu_0 A N^2}{2g}=\frac{4\pi\times 10^{-7}\times 35\times 10^{-4}\times 500^2}{2\times 0.015\times 10^{-2}}=3.665 \quad H$$

$$X_L=2\pi f\ L=2\pi\times 50\times 3.665=1151.45 \quad \Omega$$

$$Z=R+j\,X_L=3+j\,1151 \ ,$$

$$|Z|=\sqrt{R^2+X_L^2}=1151.5 \quad \Omega$$

$$V_{rms}=|Z|\,I=1151.5\times 0.323=372 \quad V$$

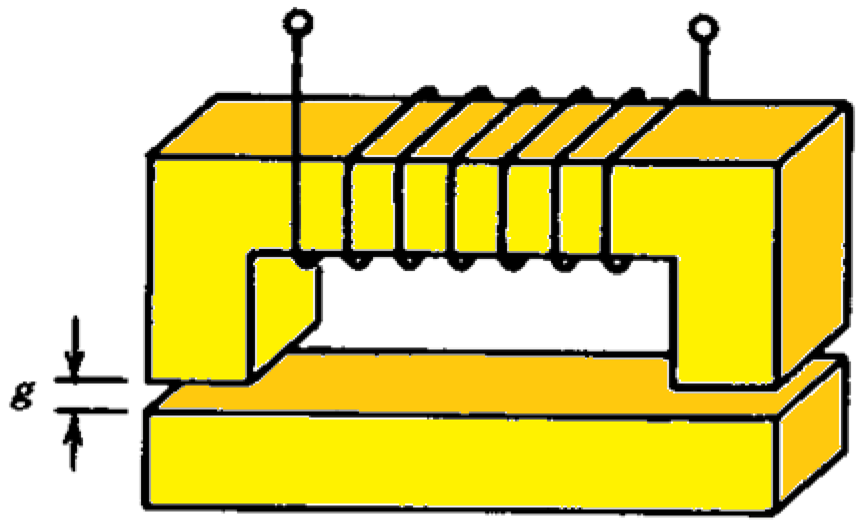
یک سیستم بالا بر مغناطیسی نشان داده شده است که مقطع آن مربع ۶×۶ سانتیمتر است.تعداد دور سیم پیچ ۳۰۰ دور ومقاومت آن ۶ اهم می باشد.از مقاومت مغناطیسی(رلوکتانس) هسته وپدیده خمیدگی صرف نظر کنید.

الف:اگر طول شکاف هوایی(g) ۵ میلیمتر و ولتاژ DC متصل به سیم پیچ ۱۲۰ ولت باشد، مطلوبست:

۱–انرژی ذخیره شده در میدان

۲–نیروی بالا برنده

ب:گیریم g برابر ۵ میلیمتر باشد وبه سیم پیچ ولتاژ AC با مقدار مؤثر ۱۲۰ ولت وفرکانس ۶۰ هرتز اعمال شود.نیروی متوسط بالا برنده را بیابید.



الف: جریان سیم پیچ به قرار زیر است:

$$i = \frac{120}{6} = 20\ A$$

کل انرژی در شکاف هوایی ذخیره می شود(از مقاومت مغناطیسی هسته صرف نظر شده است):

$$Ni = H_g l_g = \frac{B_g}{\mu_0} l_g$$

$$B_g = \frac{\mu_0 Ni}{2g} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 300 \times 20}{2 \times 5 \times 10^{-3}} = 0.754\ tesla$$

$$W_f = \frac{B^2{}_g}{2\mu_0} \times \left(\text{حجم شکاف هوایی}\right) = \frac{0.754^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} \times 2 \times 6 \times 6 \times 5 \times 10^{-7} J$$
$$= 8.14334 J$$

نیرو بالا برنده :

$$f_m = \frac{B^2{}_g}{2\mu_0} \times \left(\text{سطح شکاف هوایی}\right) = \frac{0.754^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} \times 2 \times 6 \times 6 \times 5 \times 10^{-4} N$$
$$= 1628.7 N$$

ب: در حالتی که سیستم با ولتاژ AC تحریک می شود،امپدانس به قرار زیر است:

$$Z = R + j\omega L$$

اندوکتانس سیم پیچ این چنین است:

$$L = \frac{N^2}{R_g} = \frac{N^2\mu_0 A_g}{l_g} = \frac{300^2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 6 \times 6 \times 10^{-4}}{2 \times 5 \times 10^{-3}} = 40.7 \times 10^{-3} H$$

پس:

$$Z = 6 + j377 \times 40.7 \times 10^{-3}\Omega = 6 + j15.34\ \Omega$$

جریان مؤثر سیم پیچ به قرار زیر است:

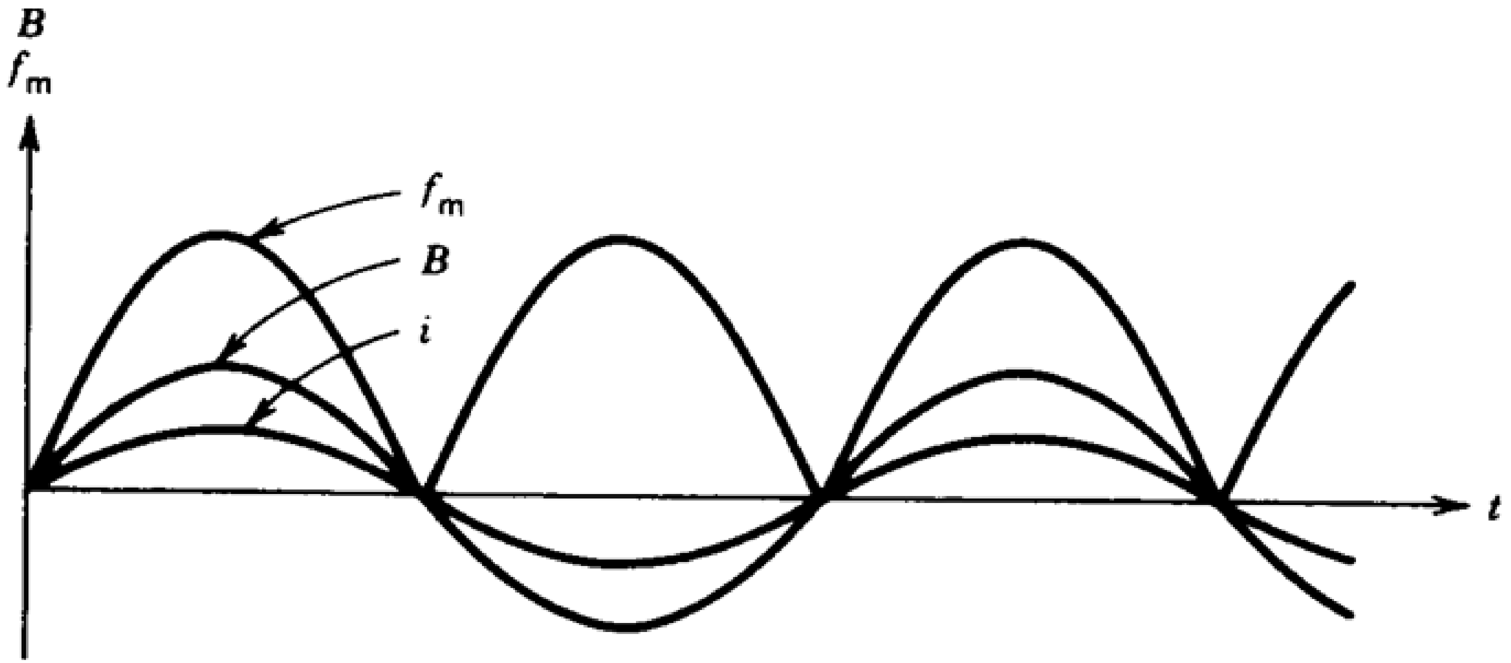
$$I_{rms} = \frac{120}{\sqrt{(6^2 + 15.34^2)}} = 7.29\ A$$

چگالی شار بشرح زیر است:

$$B_g = \frac{\mu_0 N i}{2g}$$

چگالی شار تابعی از جریان بوده ولذا به صورت سینوسی تغییر می کند.مقدار متوسط چگالی شار این چنین است:

$$B_{rms} = \frac{\mu_0 N I_{rms}}{2g} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 300 \times 7.29}{2 \times 5 \times 10^{-3}} T = 0.2748\, T$$



نیروی بالا برنده به قرار زیر است:

$$f_m = \frac{B^2{}_g}{2\mu_0} \times 2A_g \qquad \alpha B^2{}_g$$

نیرو با مجذور چگالی شار متناسب است و در شکل بالا نشان داده شده است.متوسط نیرو به قرار زیر است:

$$f_m|_{avg} = \left.\frac{B^2{}_g}{2\mu_0}\right|_{avg} \times 2A_g = \frac{B^2{}_{rms}}{2\mu_0} \times 2A_g = \frac{B^2{}_{rms}}{2\mu_0}\ (\text{سطح شکاف هوایی})$$

$$= \frac{0.2748^2 \times 6 \times 6 \times 10^{-4} \times 2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 216.3$$

می بینیم که نیرو در حالت AC حدود $\frac{1}{8}$ نیرو در حالت DC است.در بالابرهای مغناطیسی معمولاً از منبع DC استفاده می شود.

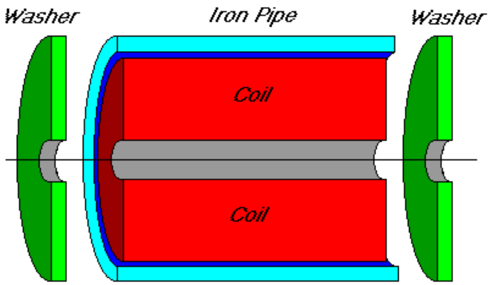
Cylindrical iron-clad solenoid actuators of the form shown in Fig. 3.29 are used for tripping circuit breakers, for operating valves, and in other applications in which a relatively large force is applied to a member which moves a relatively short distance. When the coil current is zero, the plunger drops against a stop such that the gap g is 2.25 cm. When the coil is energized by a direct current of sufficient magnitude, the plunger is raised until it hits another stop set so that g is 0.2 cm. The plunger is supported so that it can move freely in the vertical direction. The radial air gap between the shell and the plunger can be assumed to be uniform and 0.05 cm in length.

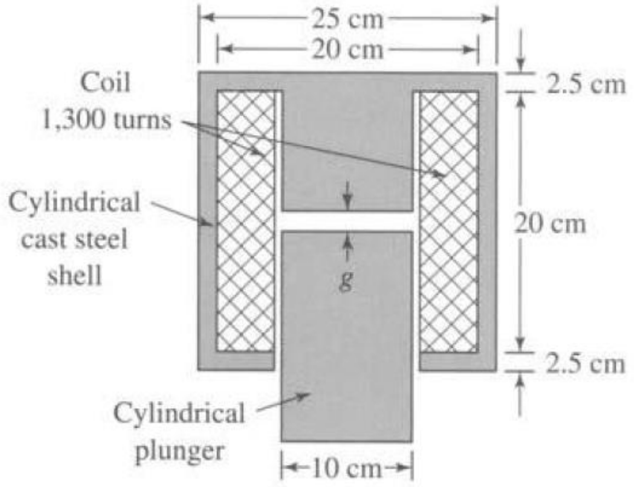
For this problem neglect the magnetic leakage and fringing in the air gaps. The exciting coil has 1300 turns and carries a constant current of 2.3 A. Assume that the mmf in the iron can be neglected and use MATLAB to

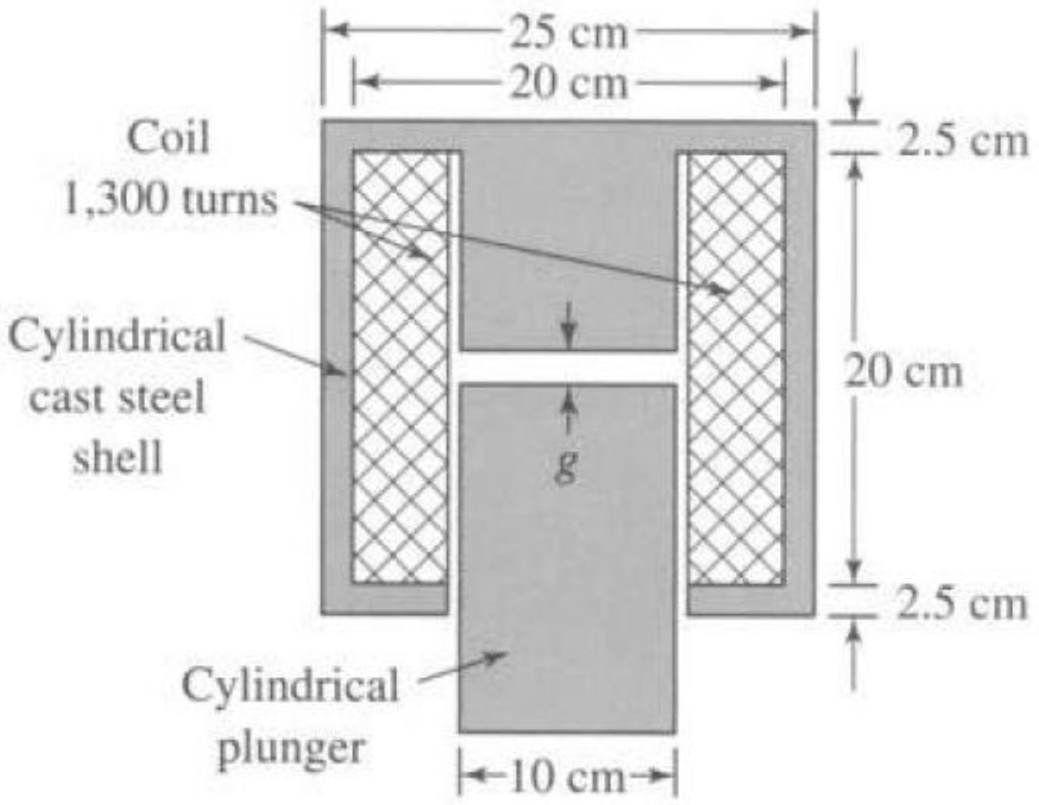
a. plot the flux density in the variable gap between the yoke and the plunger for the range of travel of the plunger,

b. plot the corresponding values of the total energy stored in the magnetic field in μJ, and

c. plot the corresponding values of the coil inductance in μH.







Part a) $B_g = \dfrac{\mu_0 N i}{g + g_1 R/(2h)}$

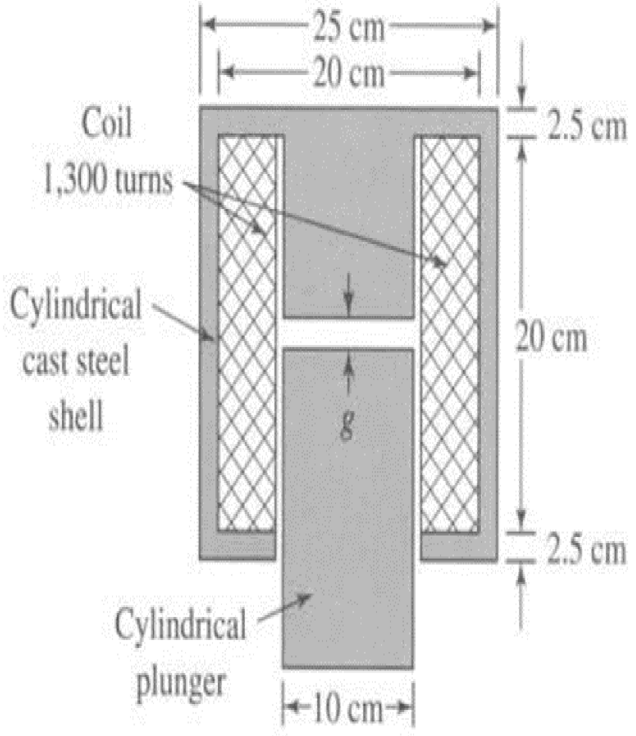
Part b) $W_{\mathrm{fld}} = \pi R^2 g \left(\dfrac{B_g^2}{2\mu_0}\right)$

Part c) $L = 2W_{\mathrm{fld}}/i^2.$

Consider the plunger actuator of Fig. 3.29. Assume that the plunger is initially fully opened ($g = 2.25$ cm) and that a battery is used to supply a current of 2.5 A to the winding.

a. If the plunger is constrained to move very slowly (i.e., slowly compared to the electrical time constant of the actuator), reducing the gap g from 2.25 to 0.20 cm, how much mechanical work in joules will be supplied to the plunger?

b. For the conditions of part (a), how much energy will be supplied by the battery (in excess of the power dissipated in the coil)?



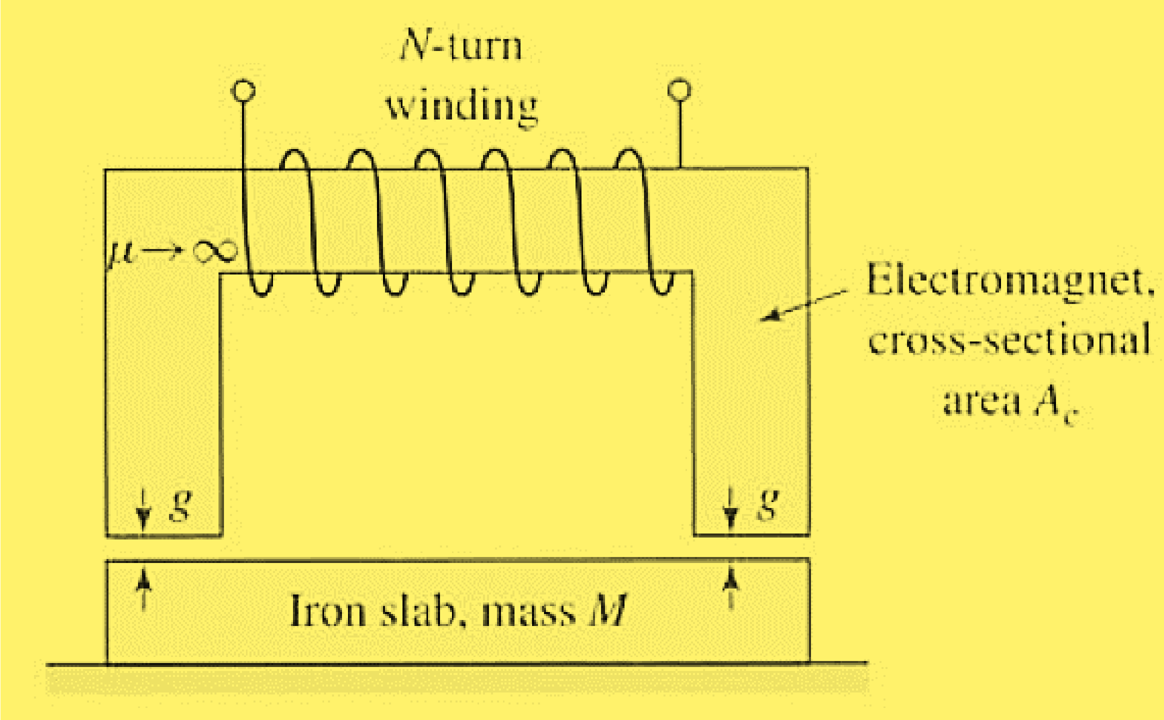
If the plunger is moved very slowly (i.e. $idL/dt << Ldi/dt$, the current will be essentially constant and all of the change in stored energy will come from the mechanical work applied to the plunger. Thus,

part (a):

$$\text{Work} = W_{\text{fld}}(g = 0.2\ \text{cm}) - W_{\text{fld}}(g = 2.25\ \text{cm}) = 46.7 \quad \mu\text{Joules}$$

part (b): The battery will supply only the energy dissipated in the coil.

As shown in Fig. 3.30, an N-turn electromagnet is to be used to lift a slab of iron of mass M. The surface roughness of the iron is such that when the iron and the electromagnet are in contact, there is a minimum air gap of $g_{\min} = 0.18$ mm in each leg. The electromagnet cross-sectional area $A_c = 32$ cm and coil resistance is 2.8 Ω. Calculate the minimum coil voltage which must be used to lift a slab of mass 95 kg against the force of gravity. Neglect the reluctance of the iron.



The coil inductance is equal to $L = \mu_0 N^2 A_c/(2g)$ and hence the lifting force is equal to

$$f_{\mathrm{fld}} = \frac{i^2}{2}\frac{dL}{dg} = -\left(\frac{\mu_0 N^2 A_c}{4g^2}\right) i^2$$

where the minus sign simply indicates that the force acts in the direction to reduce the gap (and hence lift the mass). The required force is equal to 931 N (the mass of the slab times the acceleration due to gravity, 9.8 m/sec^2). Hence, setting $g = g_{\mathrm{mim}}$ and solving for i gives

$$i_{\mathrm{min}} = \left(\frac{2g_{\mathrm{min}}}{N}\right)\sqrt{\frac{f_{\mathrm{fld}}}{\mu_0 A_c}} = 385 \quad \mathrm{mA}$$

and $v_{\mathrm{min}} = i_{\mathrm{min}} R = 1.08$ V.

An inductor is made up of a 525-turn coil on a core of 14-cm^2 cross-sectional area and gap length 0.16 mm. The coil is connected directly to a 120-V 60-Hz voltage source. Neglect the coil resistance and leakage inductance. Assuming the coil reluctance to be negligible, calculate the time-averaged force acting on the core tending to close the air gap. How would this force vary if the air-gap length were doubled?

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A_c}{g}; \quad f_{fld} = \left(\frac{i^2}{2}\right)\frac{dL}{dg} = -\frac{i^2 L}{2g}$$

The time-averaged force can be found by setting $i = I_{rms}$ where $I_{rms} = V_{rms}/(\omega L)$. Thus

$$< f_{fld} >= \boxed{} = -\frac{V_{rms}^2}{2\omega^2 \mu_0 N^2 A_c} = -115\ \mathrm{N}$$

A long, thin solenoid of radius r_0 and height h is shown in Fig. 3.32. The magnetic field inside such a solenoid is axially directed, essentially uniform and equal to $H = Ni/h$. The magnetic field outside the solenoid can be

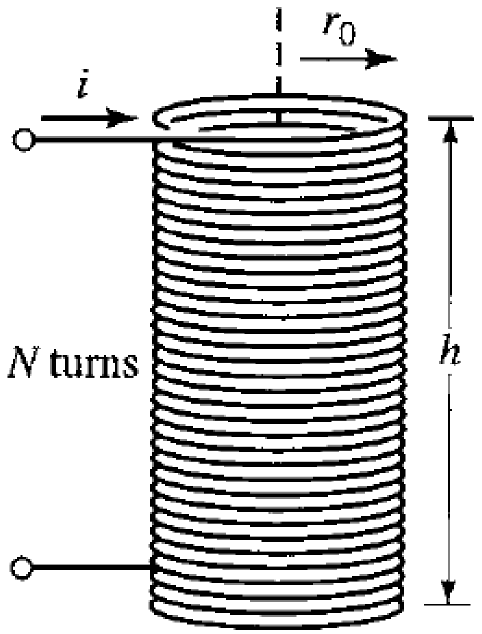


Figure 3.32
Solenoid coil (Problem 3.18).

shown to be negligible. Calculate the radial pressure in newtons per square meter acting on the sides of the solenoid for constant coil current $i = I_0$.

$$W_f = \int H_c\, \cancel{dB} \times Vol_c + \frac{B^2}{2\mu_0} \times Vol_g$$

؟

$$W'_{\text{fld}} = \left(\frac{\mu_0 H^2}{2}\right) \times \text{ coil volume} = \left(\frac{\mu_0 \pi r_0^2 N^2}{2h}\right) i^2$$

Thus

$$f = \frac{dW'_{rmfld}}{dr_0} = \left(\frac{\mu_0 \pi r_0 N^2}{h}\right) I_0^2$$

and hence the pressure is

$$P = \frac{f}{2\pi r_0 h} = \left(\frac{\mu_0 N^2}{2h^2}\right) I_0^2$$

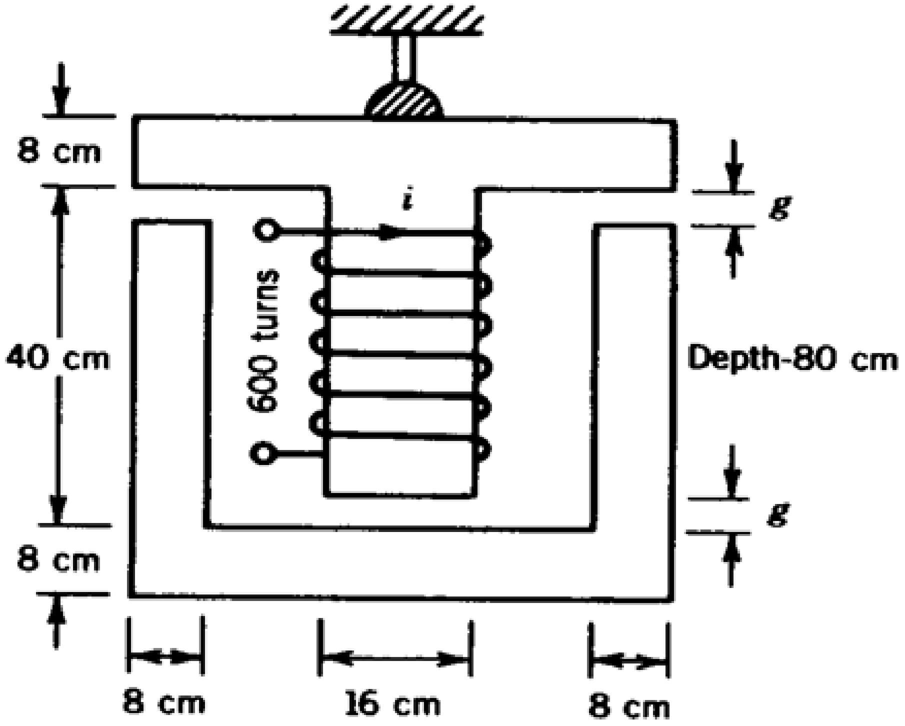
The pressure is positive and hence acts in such a direction as to increase the coil radius r_0.

شکل زیر یک سیستم الکترومغناطیسی را نشان میدهد و در حقیقت این یک سیستم بالابر است که کانال فولادی U شکل را به طرف بالا میکشد. از مقاومت مغناطیسی (رلوکتانس) هسته صرف نظر میشود و سیم پیچ این سیستم ۶۰۰ دوری است

الف: اگر جریان سیم‌پیچ معادل آمپر DC باشد حداکثر طول شکاف هوایی (g) چقدر باشد تا چگالی شار ۱/۴ تسلا شکل گیرد.

ب: با توجه به g محاسبه شده در بالا نیروی اعمال شده به کانال فولادی U شکل را به دست آورید

جرم کانال فولادی U شکل یک تن است. اگر جریان سیم‌پیچ ۱۵ آمپر DC باشد، حداکثر g چقدر باشد، تا کانال از جا کنده شود یا به عبارت دیگر بر قوه جاذبه ($9/81\ m/sec^2$) فائق آییم.



حل الف) ابتدا H_g را میابیم

$$H_g = \frac{B_g}{\mu_0} = \frac{1.4}{4\pi\times10^{-7}} = 1114084.6\,\frac{At}{m} \quad \text{و} \quad Ni = H_C\,l_c + H_g l_g$$

$$600\times15 = 2\times1114084.6\,l_g \xrightarrow{\text{بنابراین}} l_g = 4.04\times10^{-3}\text{m} = 4.04\text{mm}$$

؟

؟

حل ب: بدین منظور ابتدا $w_f = \int_0^i \lambda di$ رامحاسبه میکنیم

$$R = \frac{R_1}{2} + R_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{\mu_0(0.08\times0.8)}\right) + \frac{g}{\mu_0(0.16\times0.8)} = \frac{g}{\mu_0(0.16\times0.8)} = \frac{15.63g}{\mu_0}$$

$$\lambda = N\phi = N\frac{Ni}{R} = 600\times\frac{600I}{\frac{15.63g}{\mu_0}} = \frac{600^2I}{\frac{15.63g}{4\pi\times10^{-7}}} = \frac{28.94\times10^{-3}i}{g}$$

$$w'_f = \int_0^i \frac{28.94\times10^{-3}i}{g}di = \frac{14.47\times10^{-3}i^2}{g}$$

وبه ازای $g = 4.04mm\,, i = 15A$ خواهیم داشت:

$$f_m(i,g) = \frac{\partial w'_f(i,g)}{\partial g}\bigg|_{i=cte} = \frac{14.47\times 10^{-3} i^2}{g^2}$$

$$f_m(i,g) = \frac{14.47\times 10^{-3}\times 15^2}{(4.04\times 10^{-3})^2} = 199564$$

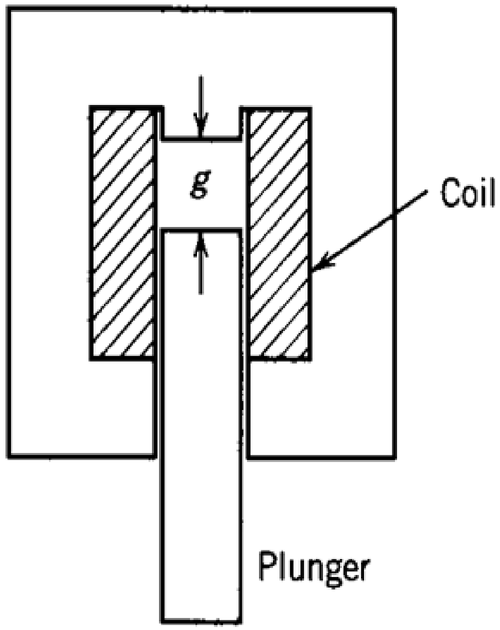
ج–به ازای جرم داده شده نیروی جاذبه برابر است با :

$$f = mg = 1000\times 9.8 = 9800$$

وبرای غلبه بر نیروی جاذبه باید نیروی برابر نیروی جاذبه شود

$$F = f_m = \frac{14.47\times 10^{-3} i^2}{g^2} \rightarrow g = 18.23mm$$

مقطع یک محرک مغناطیسی استوانه ای در شکل زیر نشان داده شده است . پیستون سطح مقطعی برابر $0.0016m^2$ دارد. سیم پیچ دارای ۲۵۰۰ دور و مقاومت 10Ω است . ولتاژ ۱۵ ولتی (DC) بر پایانه های سیم پیچ اعمال میشود. فرض کنید ماده مغناطیسی ایده ال است



الف: طول شکاف هوایی g را در صورتی حساب کنید که چگالی شار در شکاف هوایی ۱/۵ تسلا باشد. انرژی ذخیره شده در این شرایط را بیابید.

ب: نیروی اعمال شده بر plunger را به عنوان تابعی از طول شکاف هوایی تعیین نمایید.

ج: تصور کنید plunger به سرعت از شکاف ۵ میلی متری بر وضعیت کاملا بسته حرکت میکند و به قدری سریع عمل میکند که شار پیوندی سیم پیچ (و ازاین سوی چگالی شار در شکاف هوایی) در طول حرکت به سختی تغییر میکند.

۱.نیرو را در طول حرکت تعیین کنید ۲.مقدار انرژی مکانیکی تولید شده در طول حرکت را حساب کنید.

$$i = \frac{v}{R} = \frac{15}{10} = 1.5A \quad , \quad \phi = \frac{Ni}{R} \to BA = \frac{Ni}{R} \quad , \quad B_g A_g = \frac{Ni}{R_g} = \frac{Ni}{\frac{g}{\mu_0 A_g}}$$

$$g = \frac{\mu_0 Ni}{B_g} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 2500 \times 1.5}{1.5} = 3.14mm$$

چگالی انرژی ذخیره شده در فاصله هوایی برابراست با:

$$w_{fg} = \frac{{B_g}^2}{2\mu_0} = \frac{1.5^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 8.95 \times 10^5 J/m^2$$

وانرژی ذخیره شده در فاصله هوایی و با ضرب حجم فاصله هوایی در چگالی انرژی فوق حاصل خواهد شد.

$$W_{fg=}w_{fg}.A_g = 8.95 \times 10^5 \times \left(3.14 \times 10^{-3} \times 0.0016\right) = 4.469\,J$$

حل ب : ابتدا λ را می یابیم:

$$\lambda = N\phi = \frac{N^2 i}{R} = \frac{N^2 i}{\frac{g}{\mu_0 A_g}} = \frac{\mu_0 A_g N^2 i}{g}$$

در این صورت انرژی برابر است با:

$$w'_f = \int_0^i \lambda di = \int_0^i \frac{\mu_0 A_g N^2 i}{g} di = \frac{\mu_0 A_g N^2 i^2}{2g}$$

$$f_m(i,g) = \left.\frac{\partial w'_f(i,g)}{\partial g}\right|_{i = cte} = -\frac{\mu_0 A_g N^2 i^2}{2g}$$

$$f_m = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 0.0016 \times 2500^2 \times 1.5^2}{2g^2} = \frac{0.0142}{2g^2}$$

حل ج) باید انرژی را در طول حرکت یعنی $0 < g < 5 \times 10^{-3} m$ حساب کنیم که $f_m = \frac{\partial w'_f}{\partial g}$ میباشد لذا کافیست از نیرو انتگرال بگیریم (هسته ایده ال می باشد و لذا سیستم خطی است وانرژی با شبه انرژی برابر است):

$$w_f = w'_f = \int \frac{0.0142}{2g^2} dg = \frac{0.0142}{2g}$$

پس انرژی مکانیکی تولید شده برابر با انرژی ذخیره شده در $g = 5 \times 10^{-3}$ است.

$$w_f = \frac{0.0142}{2g} = \frac{0.0142}{2 \times 5 \times 10^{-3}} = 1.42\ J$$

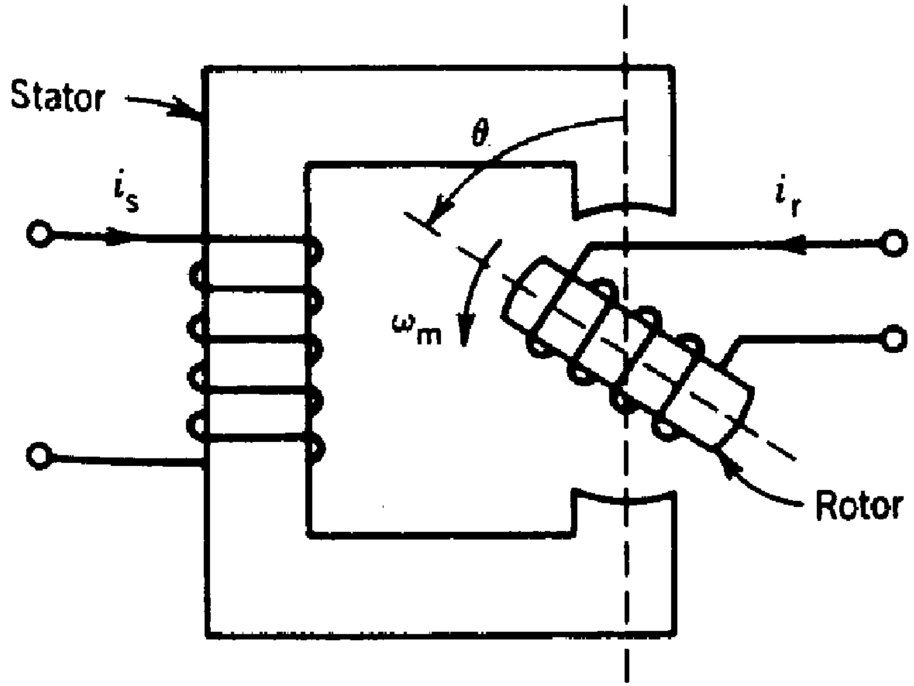
سیستم الکترومغناطیسی – ماشینهای دوار

- بیشتر مبدلهای انرژی الکترومکانیکی، بویژه مبدلهای پر قدرت، حرکت دورانی تولید می کنند.
- اجزا اساسی سیستم های الکترومغنا طیسی دوار :
- استاتور (Stator) یا قسمت ساکن (در جای ثابت نصب میشود و حرکت مکانیکی ندارد.)
- رتور (Rotor) یا قسمت گردان (روی یک محور نصب میشود و میتواند آزادانه بچرخد.)
- مدارهای الکتریکی یا سیم پیچها (Windings) :

در حالت کلی استاتور و رتور هر یک میتوانند در بر دارنده یک یا چند سیم پیچ باشند.

مبادله جریان با سیم پیچ رتور از طریق تماس جاروبکها یا برسهای زغالی (ثابت شده روی استاتور) و حلقه های لغزشی یا گردان (نصب شده روی رتور) انجام میگیرد.

نمونه یک سیستم های الکترومغنا طیسی دوار دو تحریکه



$i_s =$ جریان در سیم پیچ استاتور

$i_r =$ جریان در سیم پیچ رتور

$\omega_m =$ سرعت زاویه ای چرخش رتور

$\theta =$ زاویه مکانیکی گردش رتور

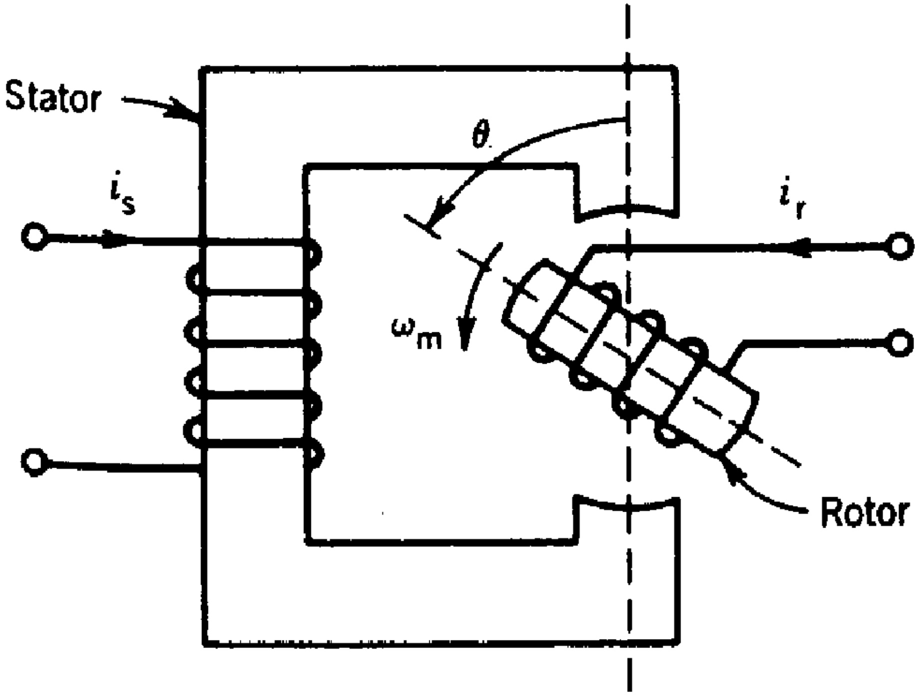
$L_{ss} =$ اندوکتانس خودی سیم پیچ استاتور

$L_{rr} =$ اندوکتانس خودی سیم پیچ رتور

$L_{sr} =$ اندوکتانس متقا بل بین سیم پیچ استاتور و رتور

$L_{rs} =$ اندوکتانس متقا بل بین سیم پیچ رتور و استاتور

$L_{rs} = L_{sr}$ (در سیستم های الکترومغناطیسی خطی)



$$dW_e = dW_f + dW_m$$

$$dW_e = electrical\ \ energy\ \ input$$

$$dW_f = energy\ stored\ in\ magnetic\ \ field$$

$$dW_m = mechanical\ energy\ output$$

$$Keeping\ \ the\ \ system\ \ static: \Rightarrow\ \omega_m = 0\ ,\ dW_m = \ 0$$

$$dW_f\ = dW_e = \ p_s\,dt\ + p_r\,dt\ = e_s\,i_s\,dt\ + e_r\,i_r\,dt$$

$$e_s = d\,\lambda_s\ /\ dt\ \Rightarrow e_s\,dt\ = d\,\lambda_s\ \ ,\ e_r = d\,\lambda_r\ /\ dt\ \Rightarrow e_r\,dt\ = d\,\lambda_r$$

$$dW_f = \ i_s\,d\,\lambda_s\ \ + \ i_r\,d\,\lambda_r$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_s \\ \lambda_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{ss}(\theta) & L_{sr}(\theta) \\ L_{rs}(\theta) & L_{rr}(\theta) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_s \\ i_r \end{vmatrix}$$

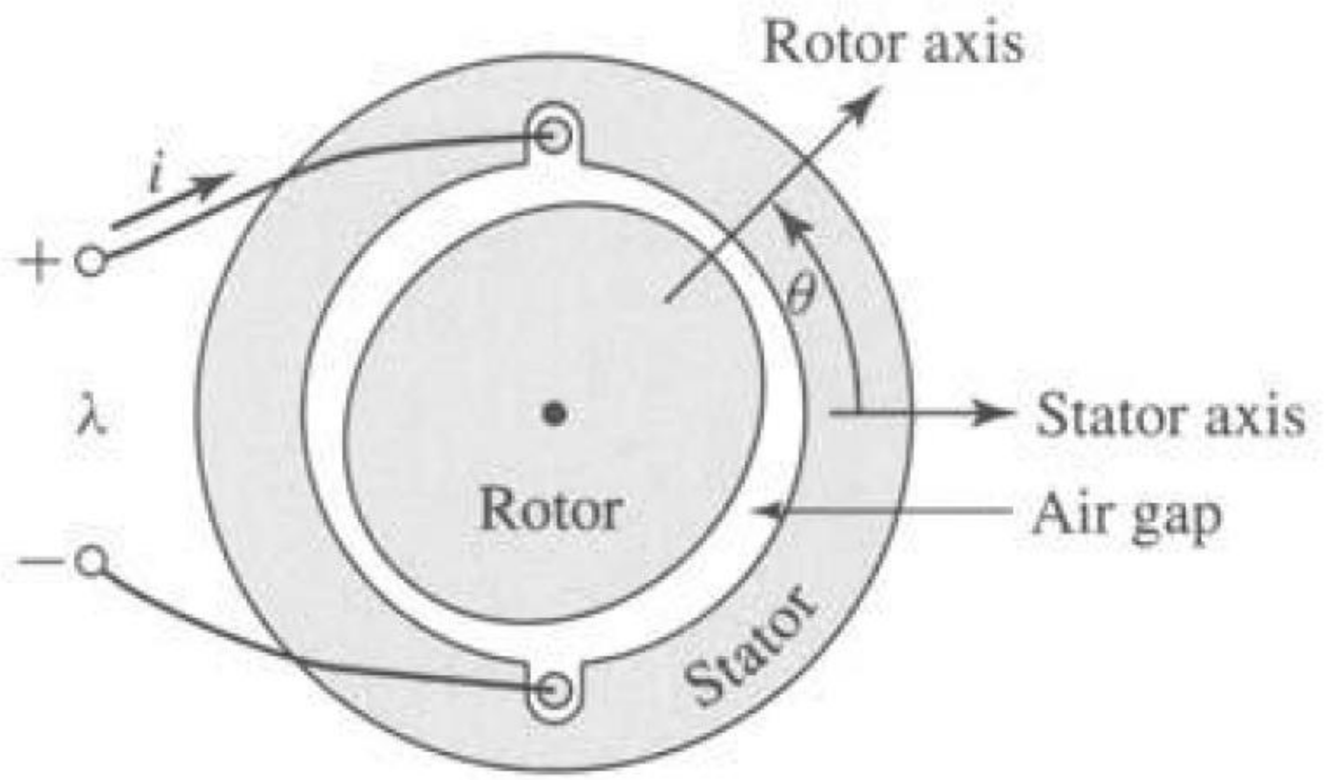
$$dW_f = i_s\, d(L_{ss} i_s + L_{sr} i_r) + i_r\, d(L_{rs} i_s + L_{rr} i_r)$$
$$= L_{ss} i_s\, di_s + L_{rr} i_r\, d i_r + L_{sr}\, d(i_s i_r)$$

$$W_f = W_f' = L_{ss}\int_0^{i_s} i_s\, di_s + L_{rr}\int_0^{i_r} i_r\, di_r + L_{sr}\int_0^{i_s,i_r} d(i_s i_r)$$
$$= \frac{1}{2}L_{ss} i_s^2 + \frac{1}{2}L_{rr} i_r^2 + L_{sr} i_r i_s$$

$$T = \frac{\partial W_f'(i,\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL_{ss}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_r^2 \frac{dL_{rr}}{d\theta} + i_s i_r \frac{dL_{sr}}{d\theta}$$

The magnetic circuit of Fig. 3.9 consists of a single-coil stator and an oval rotor. Because the air-gap is nonuniform, the coil inductance varies with rotor angular position, measured between the magnetic axis of the stator coil and the major axis of the rotor, as

$$L(\theta) = L_0 + L_2 \cos(2\theta)$$



where $L_0 = 10.6$ mH and $L_2 = 2.7$ mH. Note the second-harmonic variation of inductance with rotor angle θ. This is consistent with the fact that the inductance is unchanged if the rotor is rotated through an angle of 180°.

Find the torque as a function of θ for a coil current of 2 A.

■ Solution

From Eq. 3.33

$$T_{\text{fld}}(\theta) = \frac{i^2}{2}\frac{dL(\theta)}{d\theta} = \frac{i^2}{2}\,(-2L_2 \sin(2\theta))$$

Numerical substitution gives

$$T_{\text{fld}}(\theta) = -1.08 \times 10^{-2} \sin(2\theta) \quad \text{N}\cdot\text{m}$$

Note that in this case the torque acts in such a direction as to pull the rotor axis in alignment with the coil axis and hence to maximize the coil inductance.

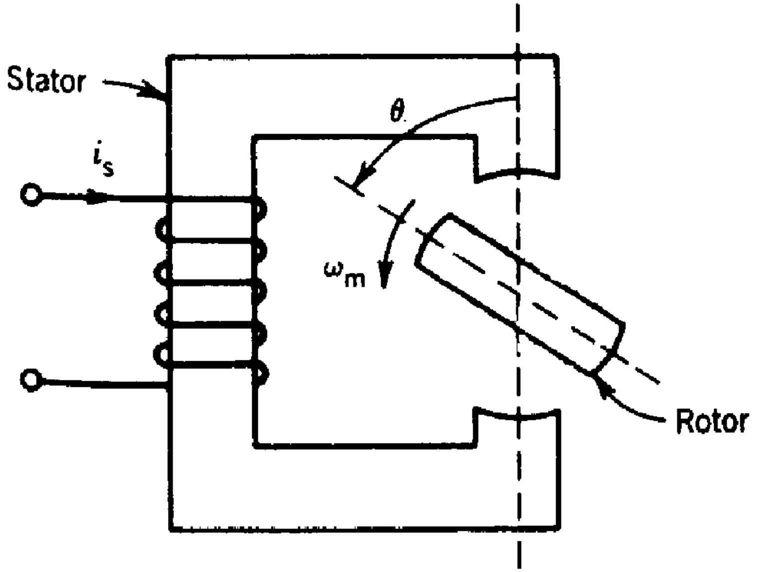
مثال : سیستم الکترومغناطیسی دوارشکل زیرمشابه یک موتور رلوکتانسی ساده است.با فرض:

$$i_s = I_{sm} \sin \omega t \quad , \quad L_{ss}(\theta) = L_0 + L_2 \cos 2\theta \ , \ L_0 = \frac{L_d + L_q}{2} \ , L_2 = \frac{L_d - L_q}{2}$$

a) برای گشتاوری که به رتور وارد میگردد رابطه ای بدست آورید .

b) شرط داشتن گشتاوری با مقدار متوسط غیرصفر چیست ؟

c) رابطه گشتاور متوسط را بدست آورید .



$i_s =$ جریان در سیم پیچ استاتور

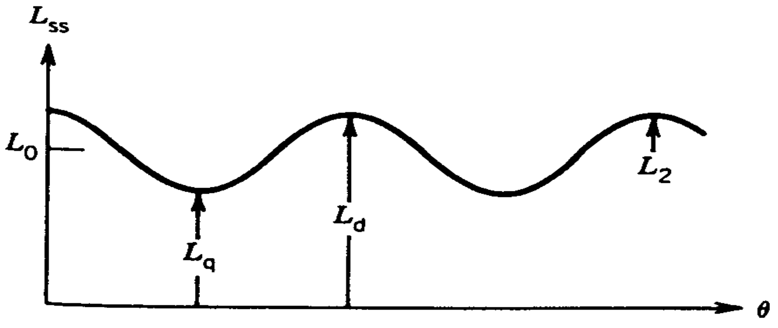
$\theta =$ زاویه موقعیت رتور نسبت به مرجع

$\omega_m =$ سرعت زاویه ای چرخش رتور

$\delta =$ موقعیت رتور نسبت به مرجع در $t = 0$

$L_d =$ اندوکتانس سیم پیچ به ازای $\theta = 0^\circ$

در این موقعیت رلوکتانس مدار مغناطیسی حداقل و اندوکتانس سیم پیچ حداکثر مقدار را دارد.



$L_q =$ اندوکتانس سیم پیچ به ازای $\theta = 90^\circ$

در این موقعیت رلوکتانس مدار مغناطیسی حداکثرو اندوکتانس سیم پیچ حداقل مقدار را دارد.

$$T = \frac{\partial W_f'(i,\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL_{ss}}{d\theta} = \frac{1}{2} I_{sm}^2 \sin^2 \omega t \frac{d}{d\theta}(L_0 + L_2 \cos 2\theta)$$

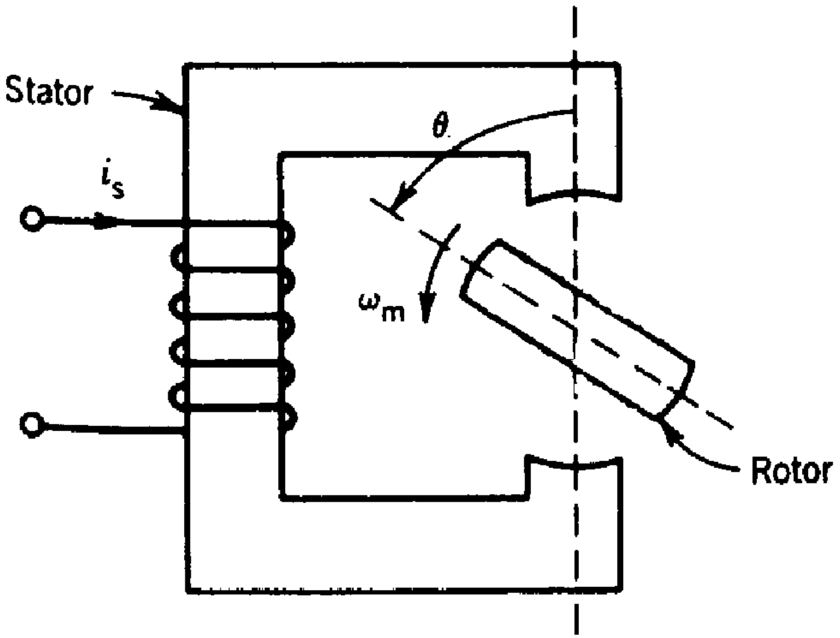
$$= -I_{sm}^2 L_2 \sin 2\theta \sin^2 \omega t = -I_{sm}^2 L_2 \sin 2(\omega_m t + \delta) \times \frac{1-\cos 2\omega t}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} I_{sm}^2 L_2 \left[\sin 2(\omega_m t + \delta) - \sin 2(\omega_m t + \delta) \cos 2\omega t\right]$$

اتحاد مثلثاتی $\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$

$$T = -\frac{1}{2} I_{sm}^2 L_2 \left\{\sin 2(\omega_m t + \delta) - \frac{1}{2}\sin 2\left[(\omega_m + \omega)t + \delta\right] - \frac{1}{2}\sin 2\left[(\omega_m - \omega)t + \delta\right]\right\}$$

مثال (ادامه)



$$i_s = I_{sm}\sin\omega t$$

$$L_{ss}(\theta) = L_0 + L_2\cos 2\theta$$

$$\theta = \omega_m t + \delta$$

گشتاور وارده به رتور

شرط داشتن گشتاور متوسط غیرصفر: ضریب **t** صفر باشد. **(چرا؟)**

$$T = -\frac{1}{2} I_{sm}^2 L_2 \times \left\{ \sin 2(\omega_m t + \delta) - \frac{1}{2}\sin 2[(\omega_m + \omega)t + \delta] - \frac{1}{2}\sin 2[(\omega_m - \omega)t + \delta] \right\}$$

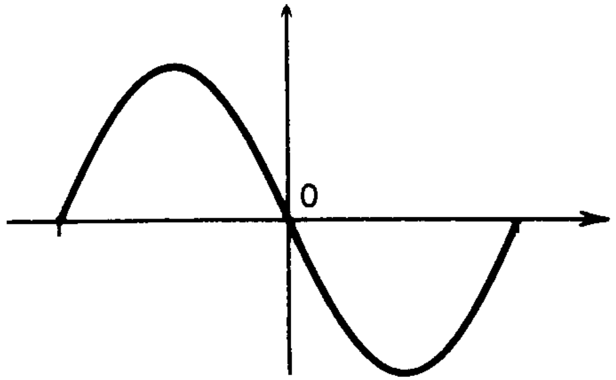
$$T = -\frac{1}{2} I_{sm}^2 L_2 \times \left\{ \sin 2(\omega_m t + \delta) - \frac{1}{2}\sin 2[(\omega_m + \omega)t + \delta] - \frac{1}{2}\sin 2[(\omega_m - \omega)t + \delta] \right\}$$

$$\text{for} \quad T_{average} \neq 0 \quad :$$

$$\omega_m = 0 \quad , \quad L_2 = \frac{L_d - L_q}{2}$$

$$T_{avg} = -\frac{1}{2} I_{sm}^2 \; L_2 \; \sin 2\delta$$

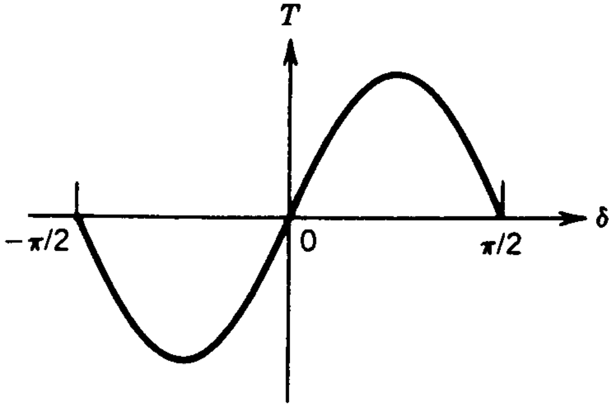
$$T_{avg} = -\frac{1}{4} I_{sm}^2 (L_d - L_q) \; \sin 2\delta$$



$$\omega_m = \pm\, \omega$$

$$T_{avg} = \frac{1}{4} I_{sm}^2 \; L_2 \; \sin 2\delta$$

$$= \frac{1}{8} I_{sm}^2 (L_d - L_q) \sin 2\delta$$



$$\boxed{\begin{aligned} \omega_m &= |\omega| = synchronous \; speed \\ \delta &= power \; or \; torque \; angle \end{aligned}}$$

یک ماشین رکتانسی مطابق شکل (۳-۶) مفروض است و بر روی رتور سیم پیچ وجود ندارد .

اندوکتانس استاتور به قرار زیر است:

$$L_{ss} = 0.1 - 0.3\cos 2\theta - 0.3\cos 4\theta \qquad H$$

از استاتور جریان **AC**، ۱۰ آمپری میگذرد و فرکانس آن ۶۰ هرتز است

الف:در چه سرعت هایی از رتور گشتاور متوسط حاصل می شود.

ب:در سرعت های به دست آمده در بالا گشتاور و توان مکانیکی ماکزیمم را به دست آورید

ج: در سرعت صفر گشتاور ماکزیمم را بیابید

$$i_s(t) = \sqrt{2}\ I_{rms} \cos 2\pi f t = 10\sqrt{2}\ \cos 120\pi t$$

$$i_s(t) = \sqrt{2}\ I_{rms} \cos 2\pi f t = 10\sqrt{2}\ \cos 120\pi t$$

و لذا گشتاور ناشی از آن عبارت است از: $T = \frac{1}{2} {i_s}^2 \frac{dl_{ss}}{d\theta}$

$$T = (\frac{1}{2}(10\sqrt{2})^2\ \cos^2 120\pi t)(0.6 \sin 2\theta + 0.8 \sin 4\theta)$$

که با استفاده از اتحاد های مثلثاتی خواهیم داشت

$$T = 30 \sin 2\theta + 40 \sin 4\theta + 15\big(\sin(2\theta + 240\pi t) + \sin(2\theta - 240\pi t)\big)$$
$$+20\big(\sin(4\theta + 240\pi t) + \sin(4\theta - 240\pi t)\big)$$

زاویهθ برابر $\omega_m t + \delta$ می باشد کهω_m سرعت چرخش رتور و δ زاویه و موقعیت اولیه رتور است لذا

$$T = 30 \sin(2\omega_m t + 2\delta) + 40 \sin(4\omega_m t + 4\delta)$$
$$+15(\sin\big((2\omega_m + 240\pi)t + 2\delta\big) + \sin\big((2\omega_m - 240\pi)t + 2\delta\big))$$
$$+20(\sin((4\omega_m + 240\pi)t + 4\delta) + \sin((4\omega_m - 240\pi)t + 4\delta))$$

$$T = 30\sin(2\omega_m t + 2\delta) + 40\sin(4\omega_m t + 4\delta)$$
$$+15\left(\sin\left((2\omega_m + 240\pi)t + 2\delta\right) + \sin\left((2\omega_m - 240\pi)t + 2\delta\right)\right)$$
$$+20\left(\sin\left((4\omega_m + 240\pi)t + 4\delta\right) + \sin\left((4\omega_m - 240\pi)t + 4\delta\right)\right)$$

همانطور که میدانیم متوسط تابع سینوسی $\sin(\omega t + \theta)\omega \neq 0$ برابر صفر بوده و فقط به ازای مقادیر زیر متوسط غیر صفر خواهد بود.

$$2\omega_m = 0 \quad , \quad 4\omega_m = 0$$
$$2\omega_m + 240\pi = 0 \quad , \quad 2\omega_m - 240\pi = 0$$
$$4\omega_m + 240\pi = 0 \quad , \quad 4\omega_m - 240\pi = 0$$

بنا براین به ازای سرعتهای $\omega_m = 0$ و $\omega_m = \pm 120\pi$ و $\omega_m = \pm 60\pi$ رتور گشتاور متوسط غیر صفر حاصل می شود

حل ب : به ازای $\omega_m = 0$ ویا حالت سکون داریم:

$$\frac{dT_{av}}{d\delta} = 0 \rightarrow 60\cos 2\delta + 160\cos 4\delta = 0 \rightarrow \delta = 25.83^{\circ}$$

$$T_{av,max} = 30\sin(2 \times 25.83^{\circ}) + 40\sin(4 \times 25.83^{\circ})$$

$$T_{av,max} = 62.45N.m$$

و به ازای گشتاور فوق توان مکانیکی متناظر برابر است با:

$$P_{max} = T_{av,max} \cdot \omega_m = o \times 62.45 = 0$$

و به ازای $\omega_m = \pm 120\pi = \pm 377 rad/sec$ داریم:

$$T_{av} = 15\sin 2\delta \rightarrow T_{av,max} = 15N.m$$

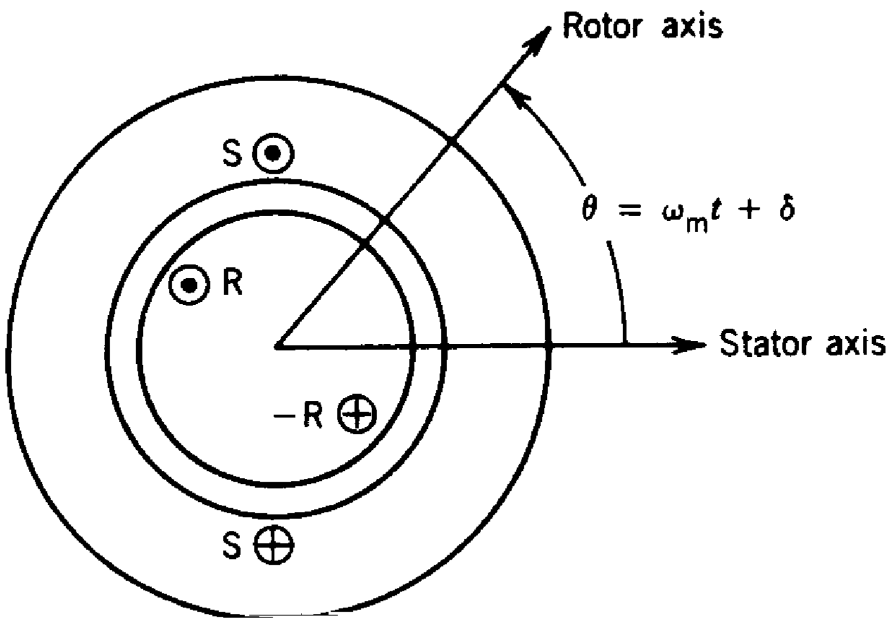
$$P_{max} = T_{av,max} \cdot \omega_m = 15 \times 377 = 5655w$$

و به ازای $\omega_m = \pm 60\pi = \pm 188.5 rad/sec$ خواهیم داشت :

$$T_{av} = 20\sin 4\delta \rightarrow T_{av,max} = 20N.m$$

$$P_{max} = T_{av,max} \cdot \omega_m = 20 \times 188.5 = 3770w$$

ماشین دوار با روتور استوانه ای(روتور با قطب صاف)



شکل روبرو مقطعی از یک ماشین الکتریکی دوار۲

قطبی ساده را وبا رتور استوانه ای نشان می دهد.

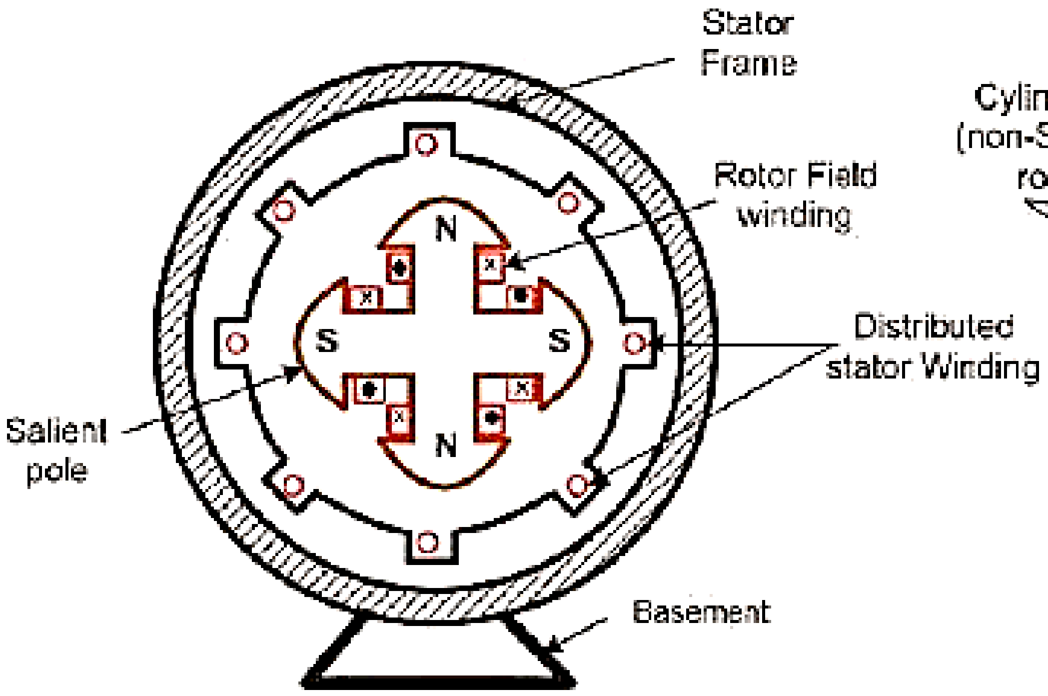
گاهی به رتورهای استوانه ای لفظ رتورهای قطب

صاف یا رتور گرد ویا رتور غیر برجسته نیز اطلاق

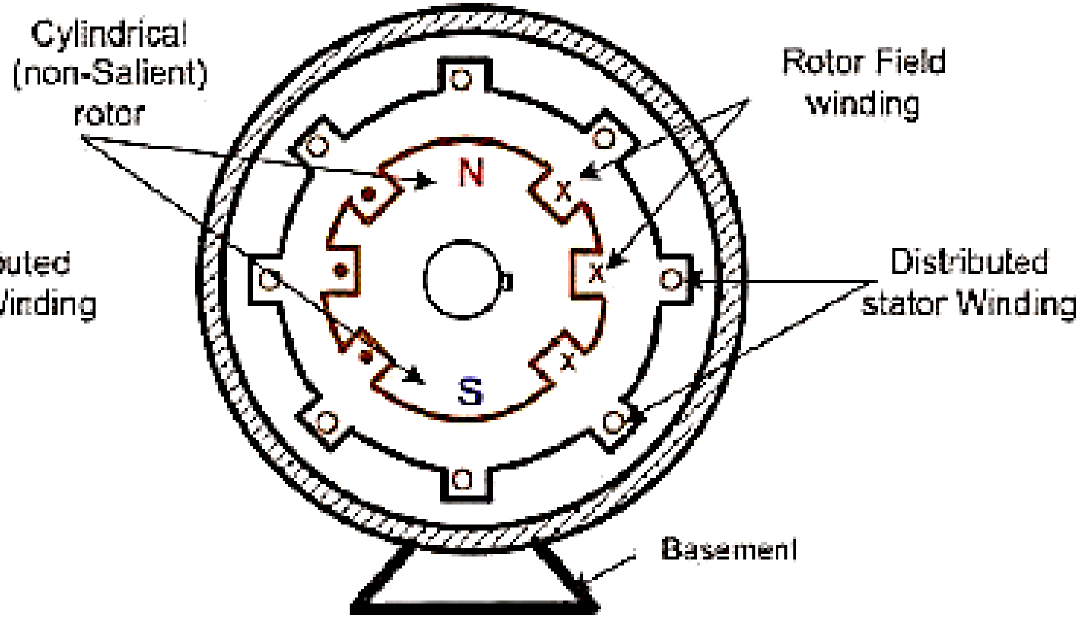
می گردد.

سیم پیچ های رتور واستاتور دو شیار موجود

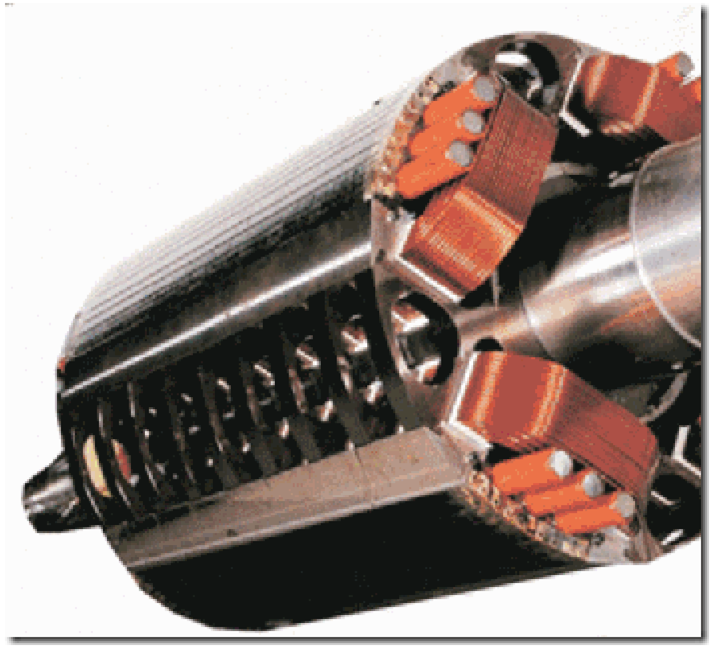
جاسازی شده اند.

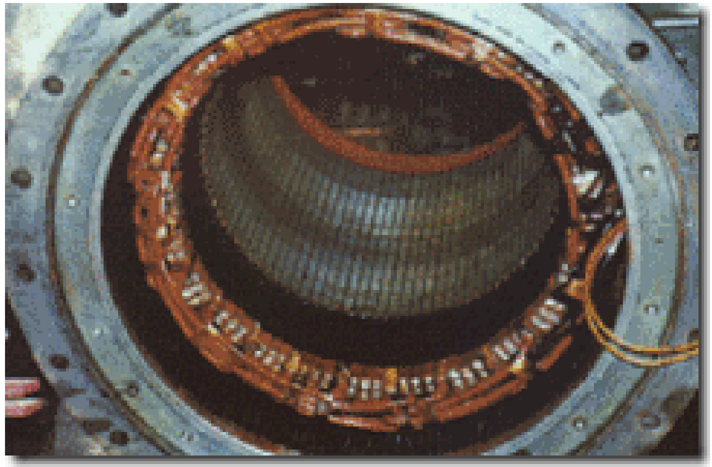


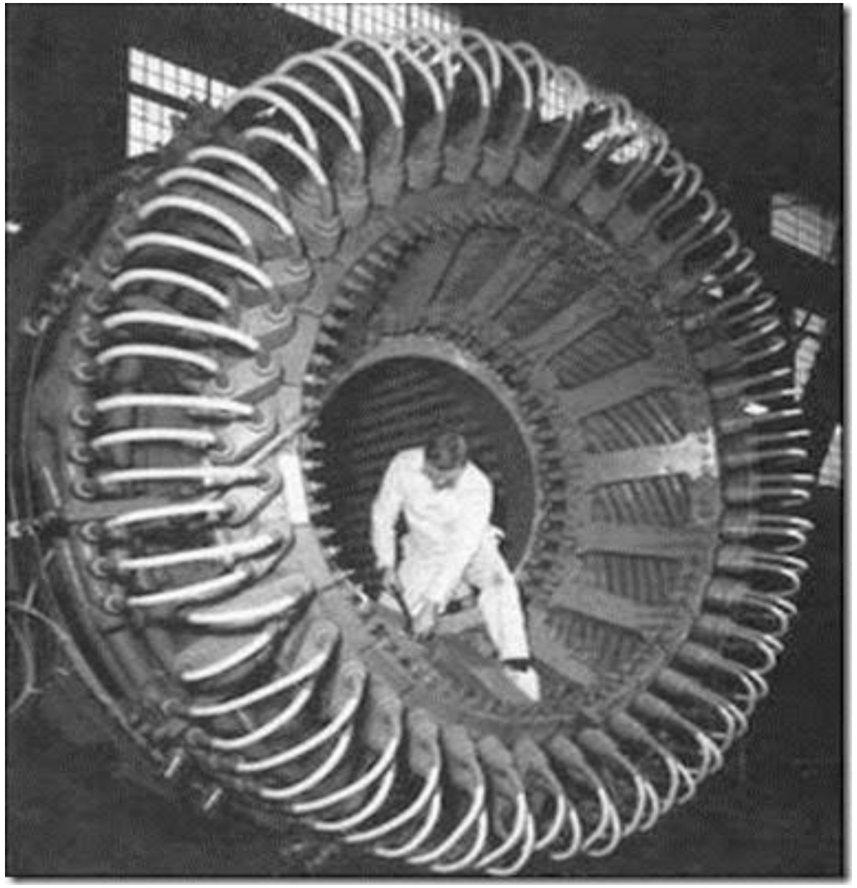
Salient Pole

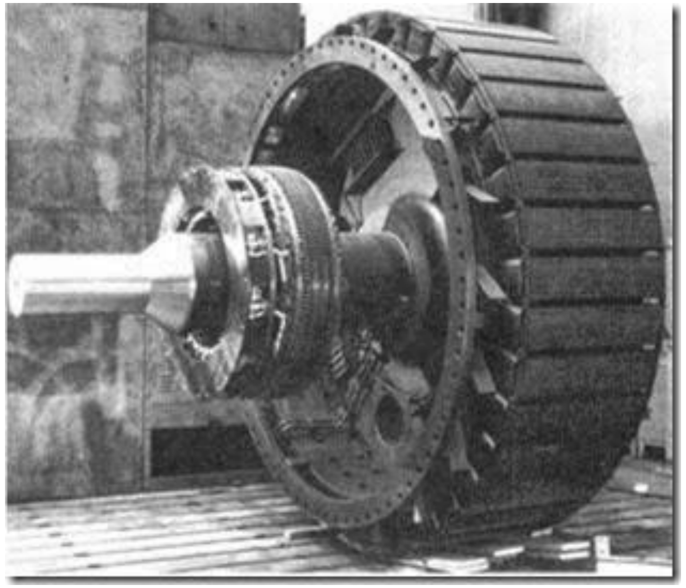


Non-Salient Pole

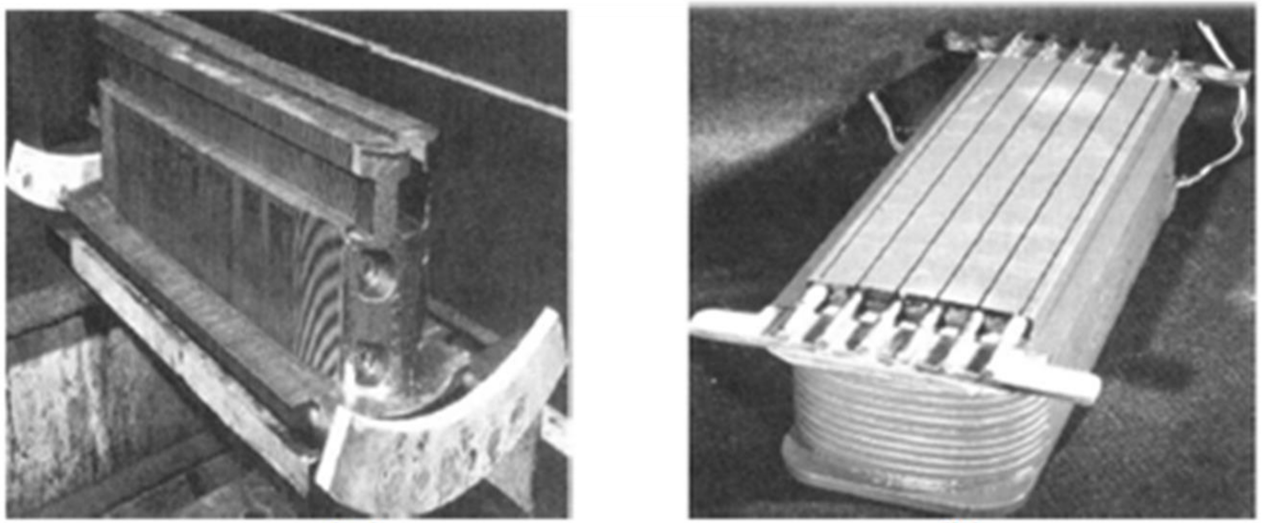








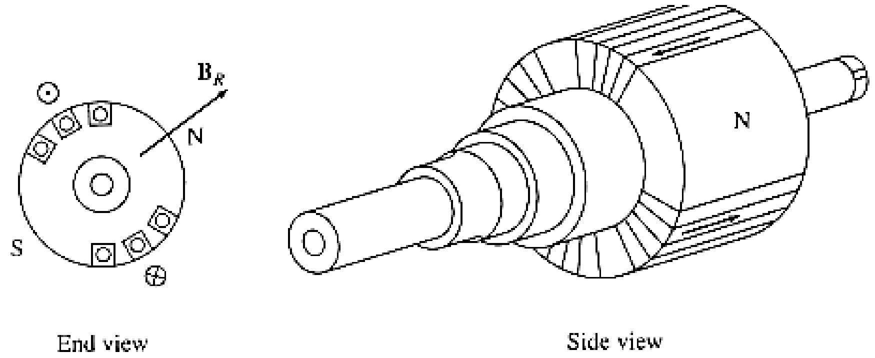
Stator and rotor of a salient pole alternator



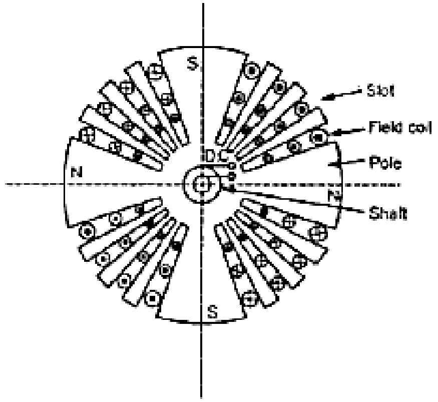
(a) (b)

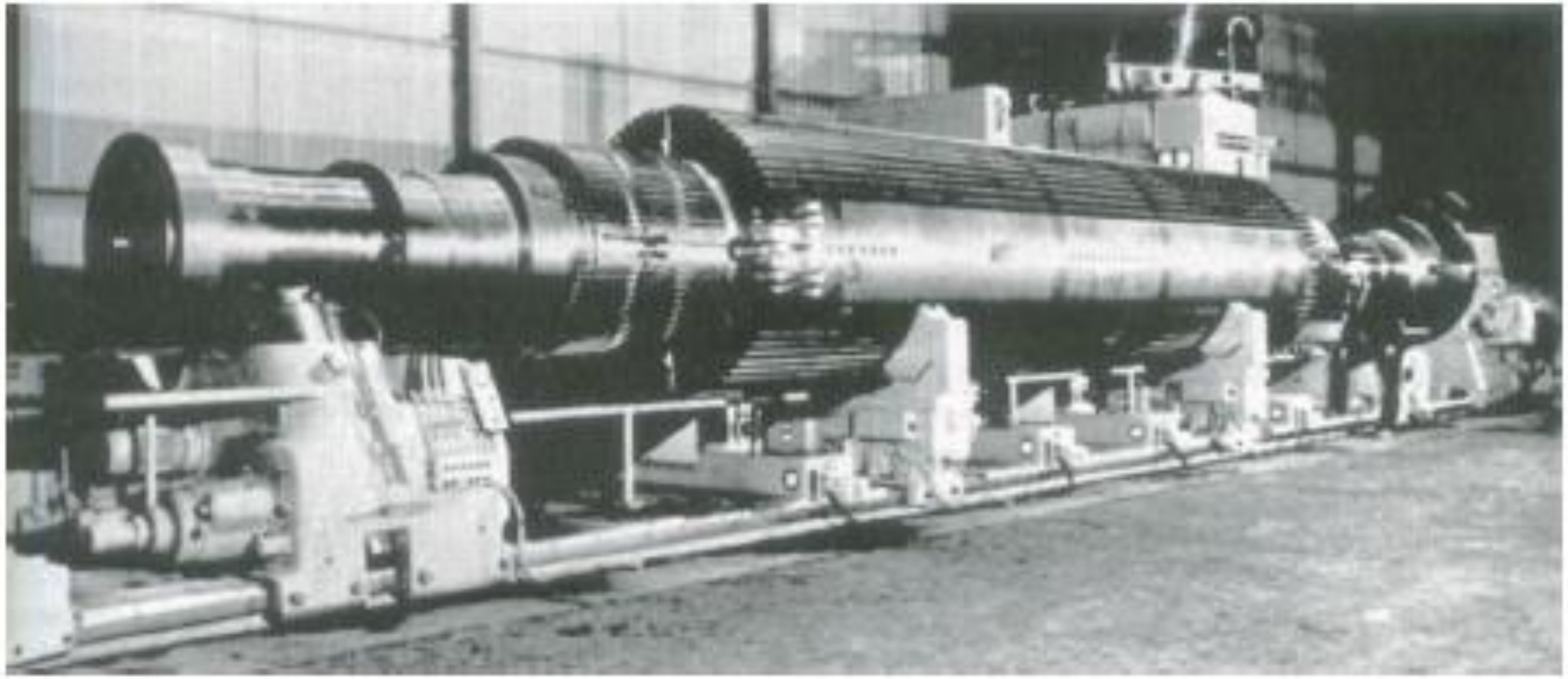
(a) Pole body (b) Pole with field coils of a salient pole alternator

Slip ring and Brushes



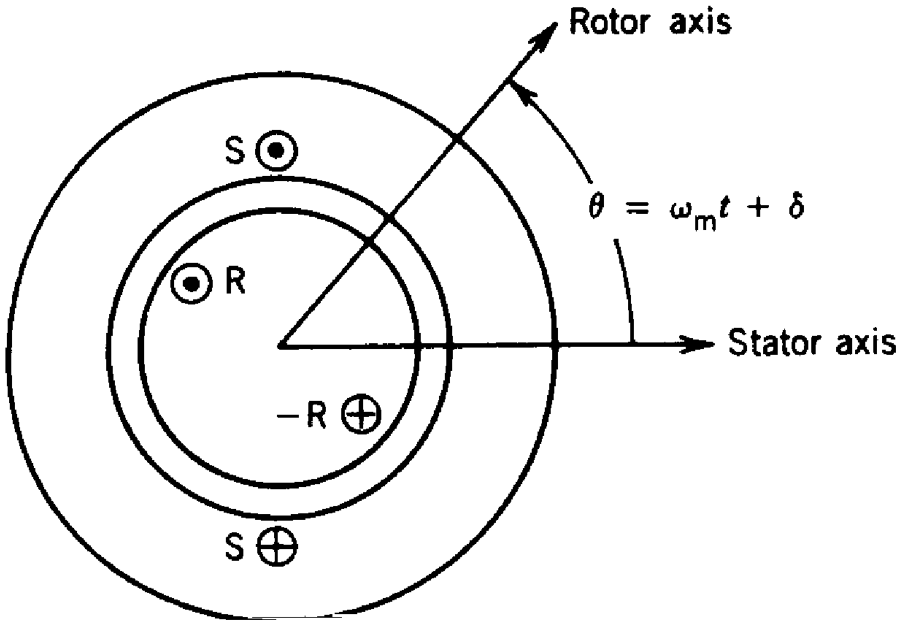
Rotor of a Non salient pole alternator





Rotor of a Non salient pole alternator

ماشین دوار با روتور استوانه ای(روتور با قطب صاف)



$i_s =$ جریان در سیم پیچ استاتور

$i_r =$ جریان در سیم پیچ رتور

$\omega_m =$ سرعت زاویه ای چرخش رتور

$\theta =$ زاویه مکانیکی گردش رتور

$L_{ss} =$ اندوکتانس خودی استا تور

$L_{rr} =$ اندوکتانس خودی رتور

$L_{sr} =$ اندوکتانس متقا بل بین سیم پیچ استاتور و رتور

$L_{rs} =$ اندوکتانس متقا بل بین سیم پیچ رتور و استاتور

$L_{sr} = L_{rs}$ (در سیستم های الکترومغناطیسی خطی)

در ماشین های واقعی سیم پیچ ها به صورت گسترده درون شیارهای رتور واستاتور تعبیه گشته اند.اگر از اثر شیارها صرف نظر شود.مقاومت مغناطیسی(رلوکتانس) مسیر مغناطیسی به وضعیت مکانی رتور(θ) بستگی ندارد(چرا؟).

می توان فرض کرد که اندوکتانس خودی(L_{ss}, L_{rr}) ثابت بوده وتابعی از θ نمی باشند.لذا گشتاور رلوکتانسی شکل نمی گیرد.

اندوکتانس متقابل(L_{sr}) تابعی از θ بوده و لذا گشتاور حاصله در ماشین های دوار با رتوراستوانه ای به قرار زیر است(چرا؟)

$$T = i_s i_r \frac{dL_{sr}}{d\theta}$$

و داریم:

$$L_{sr} = M\cos\theta$$

جریان های رتور واستاتور:

$$i_s = I_{sm} cos\omega_s t$$

$$i_r = I_{rm}\cos\left(\omega_r t + \alpha\right)$$

وضعیت رتور در هر لحظه:

$$\theta = \omega_m t + \delta$$

ω_m سرعت زاویه ای رتور بوده و δ وضعیت رتور در $t=0$ است.

$$\begin{aligned} T &= -I_{sm} I_{rm} M cos\omega_s t\cos(\omega_r t + \alpha)\sin(\omega_m t + \delta) \\ &= -\frac{I_{sm} I_{rm} M}{4}\left[\sin\{(\omega_m + (\omega_s + \omega_r))t + a + \delta\}\right. \\ &+ \sin\{(\omega_m - (\omega_s + \omega_r))t - a + \delta\} \\ &+ \sin\{(\omega_m + (\omega_s - \omega_r))t - a + \delta\} \\ &+ \sin\{(\omega_m - (\omega_s - \omega_r))t + a + \delta\} \end{aligned}$$

شرط بر قراری گشتاور متوسط:

$$\omega_m = \pm(\omega_s \pm \omega_r)$$

گشتاور متوسط به شرطی حاصل می شود که ماشین در جهت عقربه ساعت یا خـلاف آن بچرخد وسرعت چرخش باید مساوی مجموع یا تفاضل سرعت های زاویه ای جریان های رتور واستاتور باشند.

موتورهای سنکرون $\omega_r = 0 \;, \omega_m = \omega_s \;, \alpha = 0$

موتورهای آسنکرون $\omega_m = \omega_s - \omega_r$

الف: $\omega_r = 0 \ , \omega_m = \omega_s \ , \alpha = 0$

در این حالت جریان رتور (I_R) یک جریان DC است وسرعت چرخش همان سرعت سنکرون است.

رابطه گشتاور:

$$T = -\frac{I_{sm}I_R M}{2}\{\sin(2\omega_s t + \delta) + sin\delta\}$$

گشتاور لحظه ای نوسانی یا ضربانی است وگشتاور متوسط به قرار زیر است:

$$T_{avg} = -\frac{I_{sm}I_R M}{2} sin\delta$$

اگر ماشین تحت سرعت سنکرون ($\omega_m = \omega_s$) بچرخد گشتاور متوسط یک جهته تولید می کند وتبدیل انرژی دائماً تحت سرعت سنکرون انجام می شود.در واقع این امر اصول اساسی عملکرد موتور سنکرون را نشان می دهد.

- موتورهای سنکرون عموماً دارای سیم پیچی بر روی رتور بوده که با منبع DC تغذیه می شود واستاتور آن حاوی سیم پیچ است که توسط منبع AC بر قرار می گردد.
- اگر $\omega_m = 0$ باشد.گشتاور متوسط حاصل نشده ولذا موتور های سنکرون خود راه اندز نیستند.
- اگر استاتور حاوی یک سیم پیچ باشد.موتور سنکرون را تک فاز گویند وبا آنکه گشتاور متوسط حاصل می شود.اما گشتاور لحظه ای ضربانی یا نوسانی خواهد بود. این ضربان ها باعث ارتعاش،نوسانات سرعت،صدا وتلف انرژی می گردد.
- گشتاور ضربانی ویا نوسانی را می توان با سه فاز کردن موتور از بین برد واکثر موتورهای سنکرون بزرگ سه فاز هستند.

$$= -\frac{I_{sm}I_{rm}M}{4}[\sin\{(\omega_m + (\omega_s + \omega_r))t + a + \delta\}$$
$$+ \sin\{(\omega_m - (\omega_s + \omega_r))t - a + \delta\}$$
$$+ \sin\{(\omega_m + (\omega_s - \omega_r))t - a + \delta\}$$
$$+ \sin\{(\omega_m - (\omega_s - \omega_r))t + a + \delta\}$$

ب: $\omega_m = \omega_s - \omega_r$

در این حالت از هر دو سیم پیچ رتور واستاتور جریان AC می گذرد والبته فرکانس های این دو جریان با هم متفاوت است.باید دانست در این حالت موتور دیگر تحت سرعت سنکرون نمی چرخد وبه آن سرعت آسنکرون گویندبه عبارت دیگر:

$$\omega_m \neq \omega_s \quad , \quad \omega_m \neq \omega_r$$

گشتاور حاصله به قرار زیر است:

$$T = -\frac{I_{sm}I_{rm}M}{4}[\sin(2\omega_s t + \alpha + \delta) + \sin(-2\omega_r t - \alpha + \delta)$$
$$+ (2\omega_s t - 2\omega_r t - \alpha + \delta) + \sin(\alpha + \delta)]$$

گشتاور لحظه ای،ضربانی است ومتوسط آن به قرار زیر است:

$$T_{avg} = -\frac{L_{sm}L_{rm}M}{4}\sin(\alpha + \delta)$$

- نکات فوق اصول مربوط به موتورهای القایی را مطرح می سازد که در آنها جریان استاتور AC بوده وجریان القا شده در رتور نیز AC است.
- موتورهای القایی تک فاز خود راه انداز نیستند.زیرا در $\omega_m = 0$ گشتاور متوسط پدید نمی آید واگر به نحوی سرعت موتور به $\omega_m = \omega_s - \omega_r$ برسد.گشتاور متوسط ظاهر می شود.
- باید دانست جهت حذف گشتاور ضربانی از موتورهای القایی سه فاز استفاده می شود.

در این بخش تمرکز ما بر روی موتورها استوار بود که در آن ها انرژی الکتریکی به انرژی مکانیکی مبدل می شود.اما عملکرد ژنراتورها نیز مشابه موتورها است وفقط جهت توان از شبکه به موتور باجهت توان از ژنراتور به شبکه متفاوت می باشد.لذا درک عمیق اصول تبدیل انرژی در موتور ما رابه نحوه کار ژنراتور نیز رهنمون می گردد.

مثال : در ماشین شکل زیر $L_{ss}=0.15\ H\ ,\ L_{rr}=0.06\ H\ ,\ L_{sr}=0.08\cos\theta\ \ H$

a)جریان در سیم پیچ استاتور سینوسی و دارای مقدار موثر **5A** و فرکانس **60Hz** است. رتور با سرعت **3600rpm** می چرخد. مقدار لحظه ای، مقدار موثر و فرکانس ولتاژ القا شده در سیم پیچ رتور را محاسبه کنید.

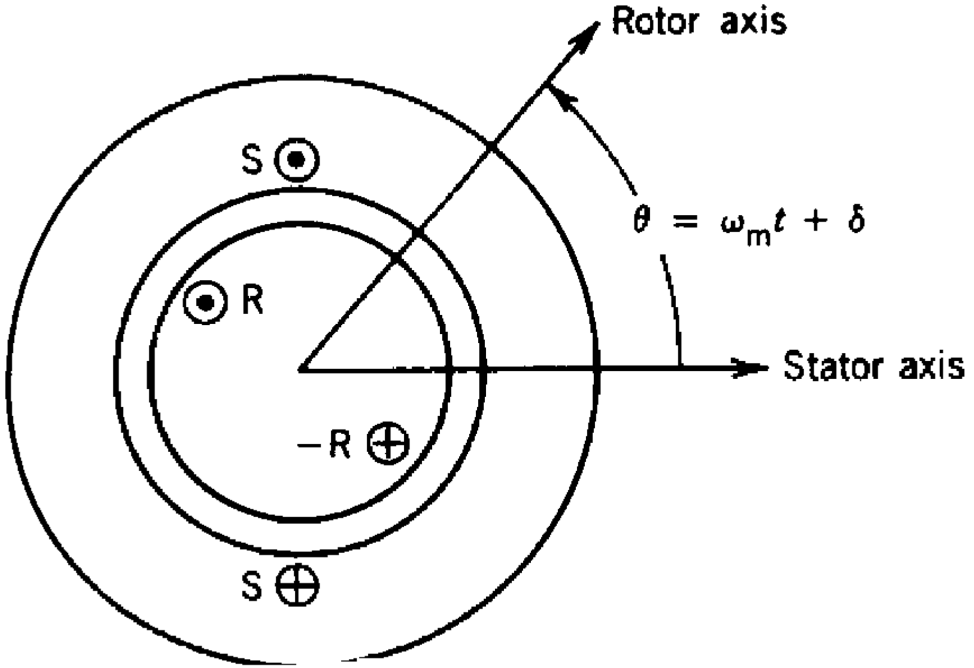
solution to part a)

$$e_2=\frac{d\lambda_2}{dt}=\frac{d}{dt}(L_{sr}\,i_s)$$

$$\theta=\omega_m t+\delta=(\frac{3600\times 2\pi}{60})t+\delta$$

$$=\ 120\pi t+\delta$$

$$i_s=\sqrt{2}\times 5\sin\omega t=7.07\sin 120\pi t$$



$$e_2 = \frac{d}{dt}[0.08\cos(120\pi t+\delta)\times 7.07\sin 120\pi t]$$

$$= 0.08 \times 7.07\frac{d}{dt}[\cos(120\pi t+\delta)\ \ \sin 120\pi t]$$

$$= 0.08\times 7.07\times 120\pi\times[\cos(120\pi t+\delta)\cos 120\pi$$

$$-\sin(120\pi t+\delta)\ \sin 120\pi t]$$

$$\cos A\cos B - \sin A\sin B = \cos(A+B)$$

$$e_2 = 213.2\ \cos(240\pi t+\delta)$$

$$E_{2rms} = \frac{E_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{213.2}{\sqrt{2}} = 150.8\,V\ ,\quad f_2 = \frac{240\pi}{2\pi} = 120\,Hz$$

مثال (ادامه حل) : در ماشین شکل زیر

$$L_{ss}=0.15\ H\ ,\ L_{rr}=0.06\ H\ ,\ L_{sr}=0.08\cos\theta\ \ H$$

b)چنانچه سیم پیچ استاتور و سیم پیچ رتور بطور سري متصل و جریان سینوسي با مقدار موثر5A و فرکانس 60Hz از آنها عبور کند، به ازاي چه مقاديري ازسرعت، گشتاور با مقدار متوسط غیرصفر به رتور اعمال خواهد شد؟ ماکزیمم مقدار گشتاور را در این سرعتها بدست آورید.

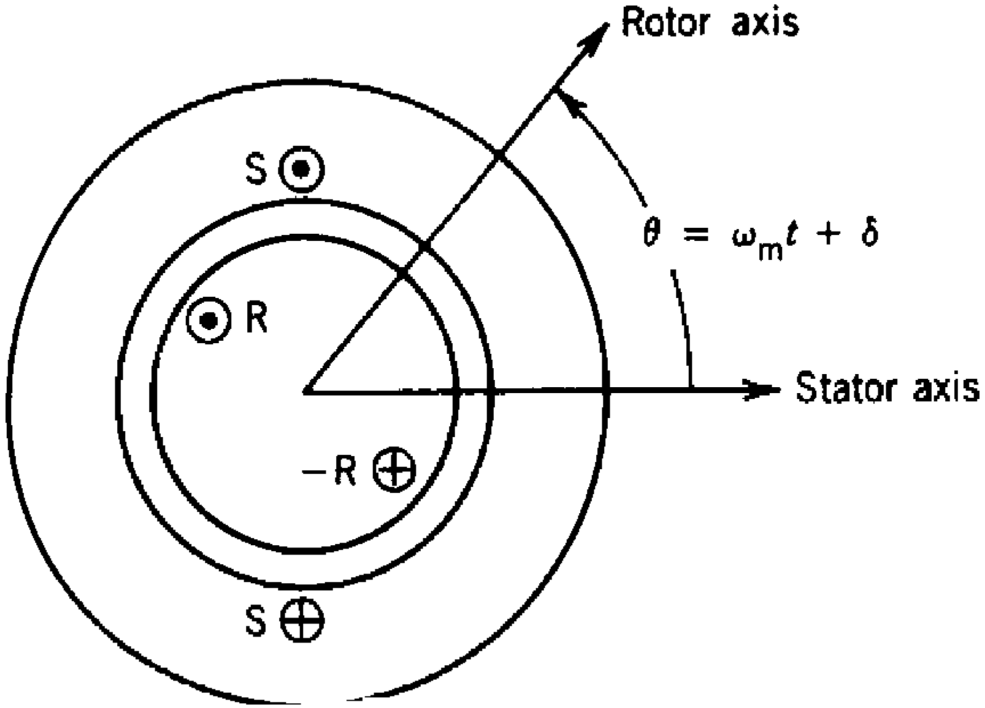
$$solution\ to\ part\ \ b)$$

$$T=i_s\, i_r\,\frac{dL_{sr}}{d\theta}$$

$$i_s=i_r=\sqrt{2}\times 5\sin\omega t$$

$$=i\ \ =7.07\sin 120\pi t$$

$$\theta=\ \ \omega_m t\ \ +\delta$$



$$T = i^2 \frac{dL_{sr}}{d\theta} = 50 \sin^2 \omega t \, [-0.08 \sin(\omega_m t + \delta)]$$

$$= -4\left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2}\right) \sin(\omega_m t + \delta)$$

$$= -2 \sin(\omega_m t + \delta)$$

$$+ \sin(\omega_m t + 2\omega t + \delta)$$

$$+ \sin(\omega_m t - 2\omega t + \delta)$$

$$T_{avg} \neq 0 \quad when:$$

$$1) \ \omega_m = 0 \ , \ T_{avg} = -2 \sin \delta , \quad T_{\max} = 2 \ N m$$

$$2) \ \omega_m = \pm 2\omega = \pm 240\pi \ rad/s \ or \ 7200 \ rpm$$

$$T_{avg} = 1 \sin \delta , \quad T_{\max} = 1 \ N m$$

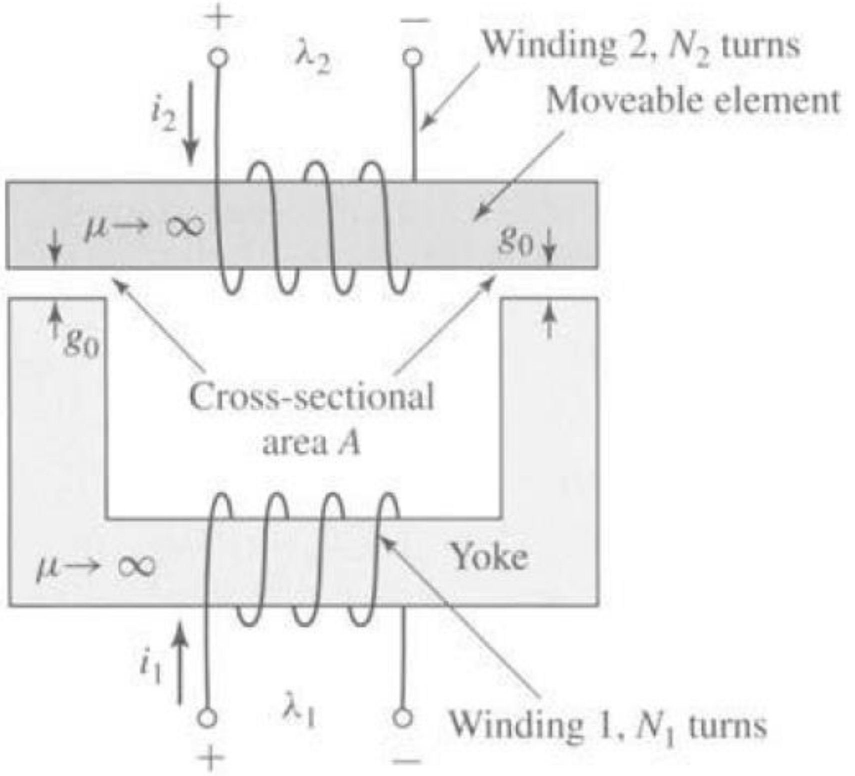
The two-winding magnetic circuit of Fig. 3.36 has a winding on a fixed yoke and a second winding on a moveable element. The moveable element is constrained to motion such that the lengths of both air gaps remain equal.

a. Find the self-inductances of windings 1 and 2 in terms of the core dimensions and the number of turns.

b. Find the mutual inductance between the two windings.

c. Calculate the coenergy $W'_{\mathrm{fld}}(i_1, i_2)$.

d. Find an expression for the force acting on the moveable element as a function of the winding currents.



part (a):

$$L_{11} = \frac{\mu_0 N_1^2 A}{2g_0}; \quad L_{22} = \frac{\mu_0 N_2^2 A}{2g_0}$$

part (b):

$$L_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{2g_0};$$

part (c):

$$W'_{\text{fld}} = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 + L_{12} i_1 i_2 = \frac{\mu_0 A}{4g_0} (N_1 i_1 + N_2 i_2)^2$$

part (d):

$$f_{\text{fld}} = \left. \frac{\partial W'_{\text{fld}}}{\partial g_0} \right|_{i_1, i_2} = -\frac{\mu_0 A}{4g_0^2} (N_1 i_1 + N_2 i_2)^2$$

Two coils, one mounted on a stator and the other on a rotor, have self- and mutual inductances of

$$L_{11} = 3.5 \text{ mH} \quad L_{22} = 1.8 \text{ mH} \quad L_{12} = 2.1 \cos\theta \text{ mH}$$

where θ is the angle between the axes of the coils. The coils are connected in series and carry a current

$$i = \sqrt{2} I \sin \omega t$$

a. Derive an expression for the instantaneous torque T on the rotor as a function of the angular position θ.

b. Find an expression for the time-averaged torque T_{avg} as a function of θ.

c. Compute the numerical value of T_{avg} for $I = 10$ A and $\theta = 90°$.

d. Sketch curves of T_{avg} versus θ for currents $I = 5, 7.07$, and 10 A.

e. A helical restraining spring which tends to hold the rotor at $\theta = 90°$ is now attached to the rotor. The restraining torque of the spring is proportional to the angular deflection from $\theta = 90°$ and is -0.1 N $\cdot$ m when the rotor is turned to $\theta = 0°$. Show on the curves of part (d) how you could find the angular position of the rotor-plus-spring combination for coil currents $I = 5, 7.07$, and 10 A. From your curves, estimate the rotor angle for each of these currents.

f. Write a MATLAB script to plot the angular position of the rotor as a function of rms current for $0 \leq I \leq 10$ A.

part (a):

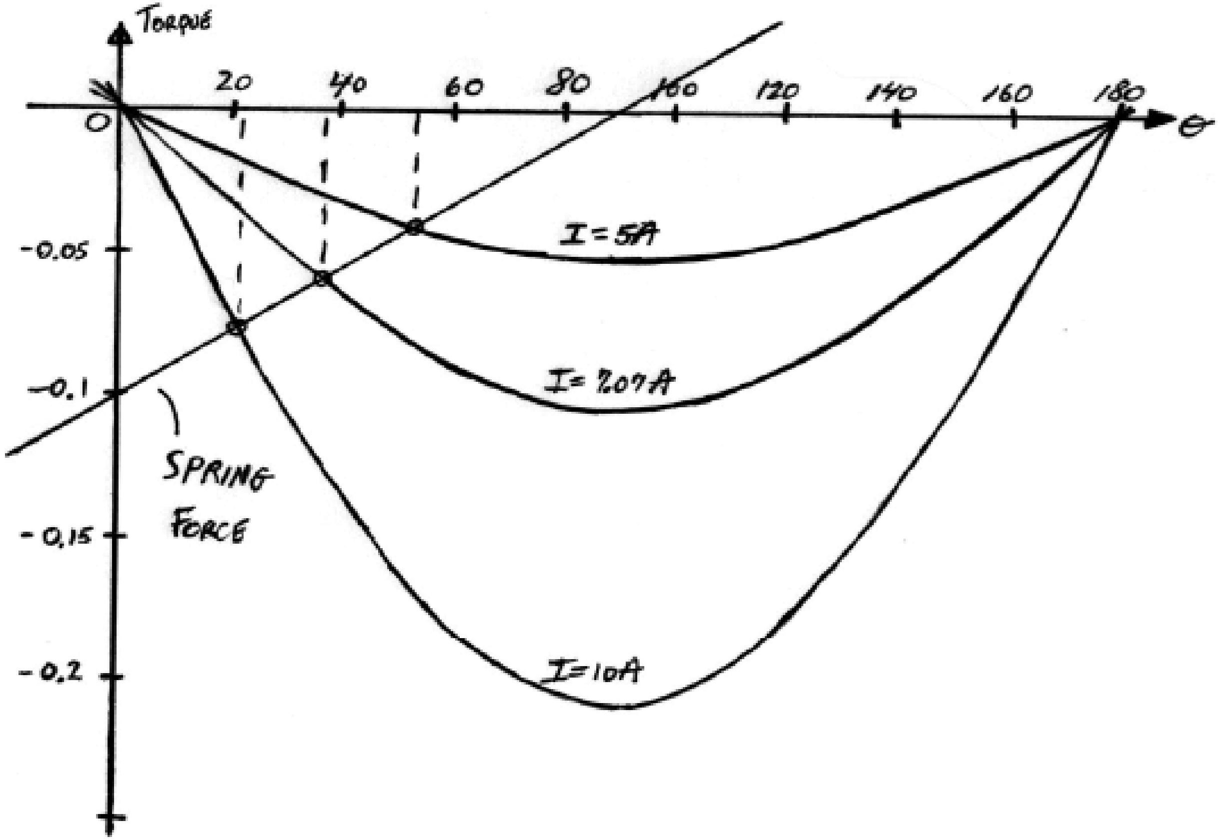
$$W'_{\text{fld}} = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2 + L_{12}i_1i_2 = I^2\left(L_{11} + L_{22} + 2L_{12}\right)\sin^2\omega t$$

$$T_{\text{fld}} = \left.\frac{\partial W'_{\text{fld}}}{\partial\theta}\right|_{i_1,i_2} = -4.2\times 10^{-3} I^2 \sin\theta\sin^2\omega t \quad \text{N}\cdot\text{m}$$

part (b):

$$T_{\text{fld}} = -2.1\times 10^{-3} I^2 \sin\theta \quad \text{N}\cdot\text{m}$$

part (c): $T_{\text{fld}} = -0.21$ N·m.



part (e): The curve of spring force versus angle is plotted as a straight line on the plot of part (d). The intersection with each curve of magnetic force versus angle gives the equilibrium angle for that value of current. For greater accuracy, MATLAB can be used to search for the equilibrium points. The results of a MATLAB analysis give:

I	θ
5	52.5°
7.07	35.3°
10	21.3°

Two windings, one mounted on a stator and the other on a rotor, have self- and mutual inductances of

$$L_{11} = 4.5\,\text{H} \quad L_{22} = 2.5\,\text{H} \quad L_{12} = 2.8\cos\theta\ \text{H}$$

where θ is the angle between the axes of the windings. The resistances of the windings may be neglected. Winding 2 is short-circuited, and the current in winding 1 as a function of time is $i_1 = 10\sin\omega t$ A.

a. Derive an expression for the numerical value in newton-meters of the instantaneous torque on the rotor in terms of the angle θ.

b. Compute the time-averaged torque in newton-meters when $\theta = 45^\circ$.

c. If the rotor is allowed to move, will it rotate continuously or will it tend to come to rest? If the latter, at what value of θ_0?

part (a):

$$T_{\mathrm{fld}} = i_1 i_2 \frac{dL_{12}}{d\theta} = -2.8 i_1 i_2 \sin\theta \quad \mathrm{N{\cdot}m}$$

$$\lambda_2 = 0 \Rightarrow i_2 = -\left(\frac{L_{12}}{L_{22}}\right) i_1 = -1.12 i_1 \cos\theta$$

Therefore, for $i_1 = 10\sin\omega t$,

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{fld}} &= -3.14 i_1^2 \sin\theta\cos\theta = -314\sin^2(\omega t)\sin\theta\cos\theta \\ &= -78.5\,(1-\cos(2\omega t))\,\sin(2\theta) \quad \mathrm{N{\cdot}m} \end{aligned}$$

part (b):

$$< T_{\mathrm{fld}} >= -78.5 \quad \mathrm{N{\cdot}m}$$

part (c): It will not rotate. It will come to rest at angular positions where

$$< T_{\mathrm{fld}} >= 0 \quad \text{and} \quad \frac{d < T_{\mathrm{fld}} >}{d\theta} = 0$$

i.e. at $\theta = 90^\circ$ or $\theta = 270^\circ$.

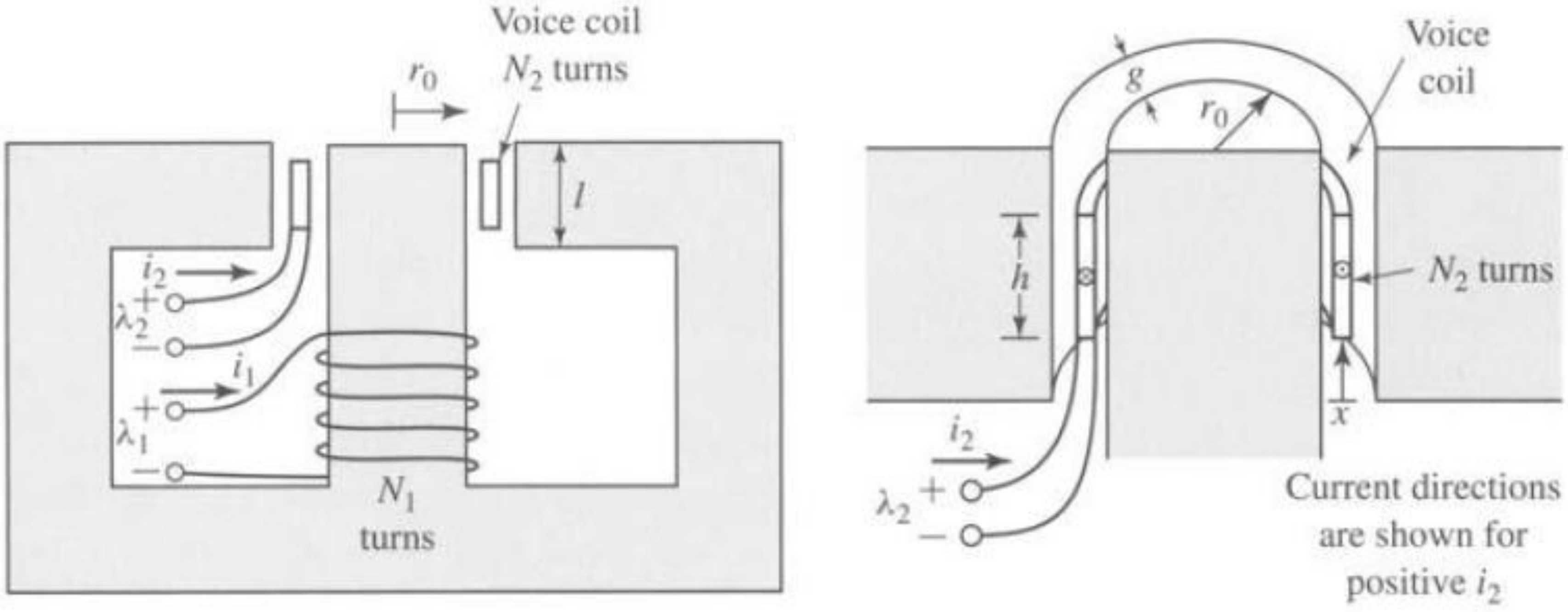
A loudspeaker is made of a magnetic core of infinite permeability and circular symmetry, as shown in Figs. 3.37a and b. The air-gap length g is much less than the radius r_0 of the central core. The voice coil is constrained to move only in the x direction and is attached to the speaker cone, which is not shown in the figure. A constant radial magnetic field is produced in the air gap by a direct current in coil 1, $i_1 = I_1$. An audio-frequency signal $i_2 = I_2 \cos \omega t$ is then applied to the voice coil. Assume the voice coil to be of negligible thickness and composed of N_2 turns uniformly distributed over its height h. Also assume that its displacement is such that it remains in the air gap $(0 \leq x \leq l - h)$.

a. Calculate the force on the voice coil, using the Lorentz Force Law (Eq. 3.1).

b. Calculate the self-inductance of each coil.

c. Calculate the mutual inductance between the coils. (Hint: Assume that current is applied to the voice coil, and calculate the flux linkages of coil 1. Note that these flux linkages vary with the displacement x.)

d. Calculate the force on the voice coil from the coenergy W'_{fld}.



(a) (b)

part (a): Winding 1 produces a radial magnetic which, under the assumption that $g << r_0$,

$$B_{r,1} = \frac{\mu_0 N_1}{g}\, i_1$$

The z-directed Lorentz force acting on coil 2 will be equal to the current in coil 2 multiplied by the radial field $B_{r,1}$ and the length of coil 2.

$$f_z = 2\pi r_0 N_2 B_{r,1} i_2 = \frac{2\pi r_0 \mu_0 N_1 N_2}{g}\, i_1 i_2$$

part (b): The self inductance of winding 1 can be easily written based upon the winding-1 flux density found in part (a)

$$L_{11} = \frac{2\pi r_0 l \mu_0 N_1^2}{g}$$

The radial magnetic flux produced by winding 2 can be found using Ampere's law and is a function of z.

$$B_{\mathrm{z}} = \begin{cases} 0 & 0 \leq z \leq x \\ -\frac{\mu_0 N_2 i_2 (z-x)}{gh} & x \leq z \leq x+h \\ -\frac{\mu_0 N_2 i_2}{g} & x+h \leq z \leq l \end{cases}$$

Based upon this flux distribution, one can show that the self inductance of coil 2 is

$$L_{22} = \frac{2\pi r_0 \mu_0 N_2^2}{g}\left(l - x - \frac{2h}{3}\right)$$

part (c): Based upon the flux distribution found in part (b), the mutual inductance can be shown to be

$$L_{12} = \frac{2\pi r_0 \mu_0 N_1 N_2}{g}\left(x + \frac{h}{2} - l\right)$$

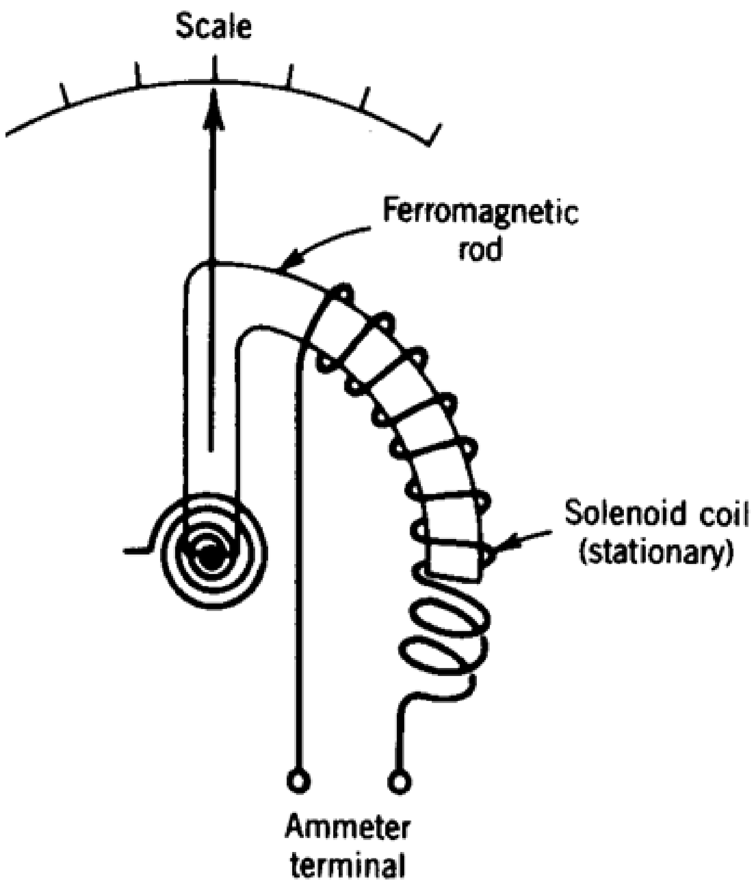
part (d):

$$f_{\text{fld}} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2 + L_{12}i_1 i_2\right] = -\frac{\pi r_0 \mu_0 N_2^2}{g}i_2^2 + \frac{2\pi r_0 \mu_0 N_1 N_2}{g}i_1 i_2$$

Note that this force expression includes the Lorentz force of part (a) as well as a reluctance force due to the fact that the self inductance of coil 2 varies with position x. Substituting the given expressions for the coil currents gives:

$$f_{\text{fld}} = -\frac{\pi r_0 \mu_0 N_2^2}{g}I_2^2 \cos^2 \omega t + \frac{2\pi r_0 \mu_0 N_1 N_2}{g}I_1 I_2 \cos \omega t$$

یک آمپرمتر با آهن گردان در شکل زیر نشان داده شده است. هرگاه از سیم پیچ (سولنوئید)جریان بگذرد ،میله خمیده فرو مغناطیسی بر ضد گشتاور فنر تحت فشاربدرون سیم پیچ (سولنوئید) کشیده میشود . اندوکتانس سیم پیچ (سولنوئید) برابر است با : $L = 4.5 + 18\theta$ که θ زاویه انحراف بر حسب رادیان بوده و ضریب ثابت فنر $0.65 \times 10^{-3} \mathrm{N.m/rad}$ است .



الف: ثابت کنید که آمپر متر مقدار مؤثر (rms) جریان را نشان میدهد.

ب: اگر جریان مؤثر ده آمپر باشد ،زاویه انحراف بر حسب درجه چقدر است

ج: اگر مقاومت سیم پیچ (سولنوئید) برابر ۰/۰۰۱۵ اهم باشد و جریان ۱۰ آمپر مؤثر با فرکانس ۶۰ هرتز از آن بگذرد،افت ولتاژ در دو سر پایانه آمپرمتر را به دست آورید.

حل الف: باتوجه به رابطه گشتاور میله خمیده در اثر عبور جریان i برابر است با:

$$T_f = \frac{1}{2} i^2 \frac{dl}{d\theta} = \frac{1}{2} i^2 \frac{d(4.5 + 18\theta) \times 10^{-6}}{d\theta} = 9 \times 10^{-6} i^2$$

از طرفی گشتاور ناشی از فنر عبارت است از :

$$T_k = 0.65 \times 10^{-3} \theta$$

در حالت تعادل باید $T_k = T_{f,av}$ باشد ولذا

$$0.65 \times 10^{-3} \theta = \frac{1}{T} \int_0^T 9 \times 10^{-6} i^2 \, dt$$

$$\theta = \frac{0.0138}{T} \int_0^T i^2 \, dt$$

که T دوره تناوب جریان i میباشد از طرفی $\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 \, dt}$ تعریف مقدار مؤثر جریان متناوب i است لذا:

$$\theta = 0.0138 {I^2}_{rms}$$

بنابراین θ به ازای یک جریان مناسب θ مقدار مؤثر جریان را نشان خواهد داد.

حل ب : با توجه به نتیجه بند الف داریم

$$\theta = 0.0138 I^2{}_{rms} = 0.0138 \times 10^2 = 1.38\, rad/sec$$

که اگر آن را به درجه تبدیل کنیم

$$\theta = 1.38 \frac{180}{\pi} = 79.07^0$$

حل ج : ابتدا امپدانس سیم پیچ را میابیم

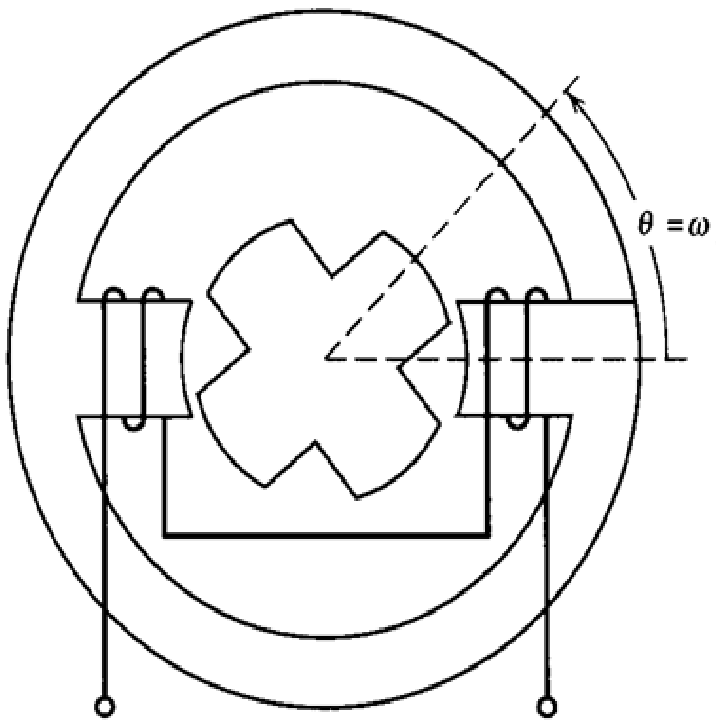
$$L = (4.5 + 18\theta)\mu H = (4.5 + 18 \times 1.38)\mu H = 29.34\mu H$$

$$X_L = 2\pi f L = 2\pi \times 60 \times 29.34 \times 10^{-6} = 0.011\Omega$$

$$Z = R + jX_L = 0.015 + j0.011$$

ودر نهایت خواهیم داشت

$$V_{rms} = I_{rms} |\, Z\, | = 10\sqrt{0.015^2 + 0.011^2} = 0.187\, V$$



یک موتور رلوکتانس با چهار قطب موتوری در شکل (م و ۳–۱۰) نشان داده شده است

رلوکتانس(R) سیستم مغناطیسی میتواند تابع سینوسی θ فرض شود و داریم:

$$R(\theta) = 2 \times 10^5 - 10^5 \cos(4\theta)\Omega$$

سیم پیچ حاوی ۲۰۰ دور و مقاومت ناچیز می باشد و به یک منبع تکفاز ۱۲۰ ولتی و ۶۰ هرتزی متصل است.

الف: شار را بر حسب زمان بیابید.

ب: نشان دهید که گشتاور حاصله به قرار زیر است:

$$T = \frac{1}{2}\varphi^2 \frac{dR}{d\theta}$$

ج: سرعت موتور ω_m را در صورتی تعیین کنید که ماشین یک گشتاور متوسط را تولید کند.

حل الف: با توجه به داده های مسئله داریم:

$$v = 120\sqrt{2}\ \mathrm{Cos}\,2\pi f t = 120\sqrt{2}\ Cos120\pi t$$

$$V_{max} = N\,\omega_m \varphi_{max}$$

$$\varphi_{max} = \frac{N\,\omega_m}{V_{max}} = \frac{120\sqrt{2}}{200 \times 120\pi} = 2.25 \times 10^{-3}$$

$$\varphi = 2.25 \times 10^{-3} Sin120\pi t$$

حل ب : از آنجایی که فقط استاتور سیم پیچ دارد لذا:

$$T_f = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta} \qquad \text{و} \qquad L = \frac{\lambda}{i} = \frac{N\varphi}{i} = \frac{N\left(\frac{Ni}{R}\right)}{i} = \frac{N^2}{R}$$

$$T_f = \frac{1}{2} i^2 \frac{d\left(\frac{N^2}{R}\right)}{d\theta} = \frac{1}{2}(Ni)^2 \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{2}(Ni)^2 \frac{-1}{R^2}.\frac{dR}{d\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{Ni}{R}\right)^2 \frac{dR}{d\theta} = \frac{1}{2}\varphi^2 \frac{dR}{d\theta}$$

حل ج: با توجه به روابط مثلثاتی خواهیم داشت

$$T=\frac{1}{2}\varphi^2\frac{dR}{d\theta}=\frac{1}{2}(2.25\times10^{-3}sin120\pi t)^2\times\frac{d}{d\theta}\left(2\times10^5-10^5\cos\left(4\theta\right)\Omega\right)$$

$$=1.013\left(\frac{1-cos240\pi t}{2}\right)sin4\theta$$

$$T=0.507sin4\theta-0.507cos240\pi tsin4$$

$$=0.507sin4\theta-0.253\cos(240\pi t-4\theta)+0.253\cos(240\pi t+4\theta)$$

$$=0.507\sin(4\omega_m t+4\delta)-0.253\cos\left((240\pi-4\omega_m)t-4\delta\right)$$

$$+0.253\cos\left((240\pi+4\omega_m)t+4\delta\right)$$

پس گشتاور متوسط به ازای ω_m های زیر توجیه می شود

$$4\omega_m=0\quad,\quad\omega_m=0$$

$$240\pi-4\omega_m=0\quad,\quad\omega_m=60\pi$$

$$240\pi+4\omega_m=0\quad,\quad\omega_m=-60\pi$$