قابلیت اعتماد متغیرهای تصادفی طول عمر گسسته

مدرس: دکتر اصغرزاده نشلی

دانشگاه مازندران

قابیت اعتماد متغیرهای تصادفی طول عمر گسسته

در دنیای واقعی وضعیت‌هایی وجود دارد که در آن‌ها می‌توان متغیر تصادفی طول عمر گسسته را در نظر گرفت. به عنوان مثال

- تعداد دوران و چرخش‌هایی که یک بلبرینگ قبل از خرابی داشته است.
- تعداد دفعاتی که یک کامپیوتر قبل از خرابی خاموش و روشن شده است.
- تعداد دفعاتی که یک کلید قبل از خرابی استفاده شده است.

در این حالات متغیر تصادفی طول عمر T یک متغیر تصادفی گسسته است که مقادیر $\{0, 1, 2, \ldots\}$ را می‌پذیرد. در حالت گسسته مفاهیم قابلیت اعتماد همانند حالت پیوسته است و یا اینکه در برخی موارد تغییرات جزئی دارد.

تابع جرم احتمال T:

$$f(t) = f_T(t) = P(T = t), \qquad t = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

تابع توزیع T:

$$F(t) = F_T(t) = P(T \leq t) = \sum_{s=۰}^{t} f(s), \qquad t = ۰, ۱, ۲ \ldots$$

تابع قابلیت اعتماد T:

$$R(t) = ۱ - F(t) = P(T > t) = \sum_{x=t+۱}^{\infty} f(x), \qquad t = ۰, ۱, ۲ \ldots$$

تابع نرخ خرابی (خطر) T:

$$h(t) = P(T = t | T \geq t) = \frac{P(T = t)}{P(T \geq t)} = \frac{f(t)}{R(t - ۱)}, \qquad t = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

تابع توزیع $F(t)$ و تابع جرم احتمال $f(t)$ را می‌توان به‌صورت زیر از $h(t)$ پیدا کرد:

$$1-h(t)=1-\frac{f(t)}{R(t-1)}=\frac{P(T\geq t)-f(t)}{P(T\geq t)}$$

$$=\frac{P(T\geq t)-P(T=t)}{P(T\geq t)}=\frac{P(T\geq t+1)}{P(T\geq t)}$$

$$\Longrightarrow 1-h(t)=\frac{P(T\geq t+1)}{P(T\geq t)} \Longrightarrow \boxed{P(T\geq t+1)=[1-h(t)]\,P(T\geq t), \qquad t=0,1,2\ldots}$$

برای $t=0$:

$$P(T\geq 1)=[1-h(0)]\,P(T\geq 0)=1-h(0)$$

برای $t=1$:

$$P(T\geq 2)=[1-h(1)]\,P(T\geq 1)=[1-h(1)]\,[1-h(0)]$$

برای $t=2$:

$$P(T\geq 3)=[1-h(2)]\,P(T\geq 2)=[1-h(2)]\,[1-h(1)]\,[1-h(0)]$$

لذا در حالت کلی داریم:

$$P(T\geq t)=\prod_{i=0}^{t-1}[1-h(i)], \qquad t=1,2,\ldots$$

تابع جرم احتمال از روی $h(t)$

لذا تابع جرم احتمال از روی $h(t)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
f(t) &= P(T \geq t) - P(T \geq t+1) = \prod_{i=0}^{t-1}[1-h(i)] - \prod_{i=0}^{t}[1-h(i)] \\
&= \prod_{i=0}^{t-1}[1-h(i)] - \prod_{i=0}^{t-1}[1-h(i)]\,[1-h(t)] \\
&= \prod_{i=0}^{t-1}[1-h(i)]\Big[1-(1-h(t))\Big] = h(t)\prod_{i=0}^{t-1}[1-h(i)] \\
\Longrightarrow f(t) &= h(t)\prod_{i=0}^{t-1}[1-h(i)]
\end{aligned}$$

میانگین طول عمر T

$$
\begin{aligned}
E(T) = \sum_{t=۰}^{\infty} t\, f(t) &= f(۱) + ۲\, f(۲) + ۳\, f(۳) + ۴\, f(۴) + \dots \\
&= f(۱) + f(۲) + f(۳) + f(۴) + \dots + \\
&\qquad f(۲) + f(۳) + f(۴) + \dots + \\
&\qquad\qquad f(۳) + f(۴) + \dots \\
&= P(T \geq ۱) + P(T \geq ۲) + P(T \geq ۳) + \dots
\end{aligned}
$$

لذا

$$
E(T) = \sum_{t=۱}^{\infty} P(T \geq t) = \sum_{t=۱}^{\infty} R(t-۱)
$$

$$
\Longrightarrow \boxed{E(T) = \sum_{t=۱}^{\infty} R(t-۱)}
$$

عمر باقیمانده

$$T_t = T - t | T \geq t$$

$$P(T_t \geq x) = P(T - t \geq x | T \geq t) = \frac{P(T - t \geq x,\ T \geq t)}{P(T \geq t)} = \frac{R(x + t - 1)}{R(t - 1)}$$

میانگین عمر باقیمانده

$$\begin{aligned} m(t) = E(T_t) = \sum_{x=0}^{\infty} P(T_t \geq x) &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{R(x+t-1)}{R(t-1)} \\ &= \frac{1}{R(t-1)} \sum_{x=0}^{\infty} R(x+t-1) \qquad (u = x + t - 1) \\ &= \frac{1}{R(t-1)} \sum_{u=t-1}^{\infty} R(u) \end{aligned}$$

مثال

فرض کنید متغیر طول عمر T دارای تابع جرم احتمال زیر است که در آن t تعداد ماه‌هایی است که یک سیستم پیش از اولین خرابی کار می‌کند.

$$f(t) = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۲}{۳}\right)^t, \qquad t = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

مطلوب است:

الف) تابع قابلیت اعتماد T

ب) تابع نرخ خطر T

ج) میانگین عمر باقیمانده T

حل

الف) $R(t) = P(T > t) = \sum_{x=t+۱}^{\infty} f(x) = \sum_{x=t+۱}^{\infty} \frac{۱}{۳}\left(\frac{۲}{۳}\right)^x$

$$= \frac{۱}{۳}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{t+۱} + \frac{۱}{۳}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{t+۲} + \cdots = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{t+۱}\left[۱ + \frac{۲}{۳} + \left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ + \left(\frac{۲}{۳}\right)^۳ + \ldots\right]$$

$$= \frac{۱}{۳}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{t+۱}\frac{۱}{۱-\frac{۲}{۳}} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^{t+۱} \Longrightarrow \boxed{R(t) = \left(\frac{۲}{۳}\right)^{t+۱}}$$

حل

$$\text{ب)}\quad h(t)=\frac{f(t)}{R(t-۱)}=\frac{\frac{۱}{۳}\left(\frac{۲}{۳}\right)^t}{\left(\frac{۲}{۳}\right)^t}=\frac{۱}{۳}\Longrightarrow \boxed{h(t)=\frac{۱}{۳}}$$

$$\text{ج)}\quad m(t)=\frac{\sum_{u=t-۱}^{\infty}R(u)}{R(t-۱)}=\frac{\sum_{u=t-۱}^{\infty}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{u+۱}}{\left(\frac{۲}{۳}\right)^t}=\frac{\left(\frac{۲}{۳}\right)^{t+۱-۱}+\left(\frac{۲}{۳}\right)^{t+۲-۱}+\left(\frac{۲}{۳}\right)^{t+۳-۱}+\dots}{\left(\frac{۲}{۳}\right)^t}$$

$$=۱+\frac{۲}{۳}+\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲+\left(\frac{۲}{۳}\right)^۳+\dots$$

$$=\frac{۱}{۱-\frac{۲}{۳}}=۳\Longrightarrow \boxed{m(t)=۳}$$

که مستقل از t (زمان) است. این نشان می‌دهد که در هر لحظه از زمان که سیستم فعال می‌باشد عملکرد سیستم بطور متوسط ۳ ماه است.