روش تقریبهای متوالی — *The Successive Approximations Method (SAM)*

یکی از روشهای حل معادلات انتگرال، روش تقریبهای متوالی یا روش تکراری پیکارد (the Picard iteration method) هست.

بیان روش: معادله انتگرال فردهلم زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x،t)\, u(t)dt$$

در این روش دنباله $\{u_n\}$ را بصورت زیر ایجاد می کنیم

$u_0(x) =$ **هر تابع حقیقی مقدار**

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x،t)\, u_{n-1}(t)dt \qquad\qquad n \geq 1$$

تابع جواب $\boldsymbol{u(x)}$ برابراست با $\boldsymbol{u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)}$

نکته: هر چند در انتخاب $u_0(x)$ آزادیم ولی غالبا ۰، ۱ و $\boldsymbol{x}$ را انتخاب میکنیم.

مثال : $u(x) = x + e^x - \int_0^1 x\, t\, u(t)dt$

اینجا $u_0(x) = 0$ انتخاب میکنیم و طبق رابطه بازگشتی

$$u_n(x) = x + e^x - \int_0^x x\, t\, u_{n-1}(t)dt$$

ادامه میدهیم. خواهیم داشت

$$u_1(x) = x + e^x - \int_0^1 x\, t\, u_0(t)dt \quad \rightarrow \quad u_1(x) = x + e^x$$

$$u_2(x) = x + e^x - \int_0^1 x\, t\, u_1(t)dt \quad \rightarrow u_2(x) = x + e^x - \int_0^1 x\, t\, (t + e^t)dt \rightarrow$$

$$u_2(x) = e^x - \frac{x}{3}$$

$$u_3(x) = x + e^x - \int_0^1 x\, t\, u_2(t)dt \quad \rightarrow u_3(x) = e^x + \frac{x}{9}$$

$$\vdots$$

$$u_n(x) = x + e^x - \int_0^1 x\, t\, u_{n-1}(t)dt \quad \rightarrow \quad u_n(x) = \ e^x + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\, x$$

متعاقبا جواب با حد گیری حاصل میشود:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{u}_n(\boldsymbol{x}) \quad \to \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty} e^x + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} x = e^x \quad \to \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = e^x$$

تمرین: معادله انتگرال فردهلم مقابل را با انتخاب $u_0(x) = 0$ به روش تقریبهای متوالی حل کنید.

$$u(x) = \sin x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \cos t \;\; u(t) dt$$

مشابه همین کار را برای معادلات انتگرال ولترا می توان انجام داد.

مثال: $u(x) = 1 - \int_0^x (x - t)\, u(t) \; dt$

اینجا $u_0(x) = 1$ انتخاب میکنیم و طبق رابطه بازگشتی

$$u_n(x) = 1 - \int_0^x (x - t)\, u_{n-1}(t) dt$$

چند جمله اولیه آن

$$u_1(x) = 1 - \int_0^x (x - t) u_0(t) dt \quad \to \quad u_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$$

$$u_2(x) = 1 - \int_0^x (x - t)\, u_1(t) dt \quad \to u_2(x) = 1 - \int_0^x (x - t) \left(1 - \frac{t^2}{2!}\right) dt \to$$

$$u_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$u_3(x) = 1 - \int_0^x (x - t)\, u_2(t) dt \quad \to u_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

$$\vdots$$

$$u_n(x) = 1 - \int_0^x (x - t)\, u_{n-1}(t) dt \quad \to \quad u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

پس جواب این معادله انتگرال

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{u}_n(\boldsymbol{x}) \quad \to \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x \quad \to \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \cos x$$

تمرین: معادله انتگرال ولترا را با انتخاب $u_0(x) = x$ به روش تقریبهای متوالی حل کنید.

$$u(x) = 1 - x \sin x + x \cos x + \int_0^x t \, u(t) \, dt$$