



# ماشینهای الکتریکی

۱

---

مدرس: دکتر گرگانی فیروزجاه

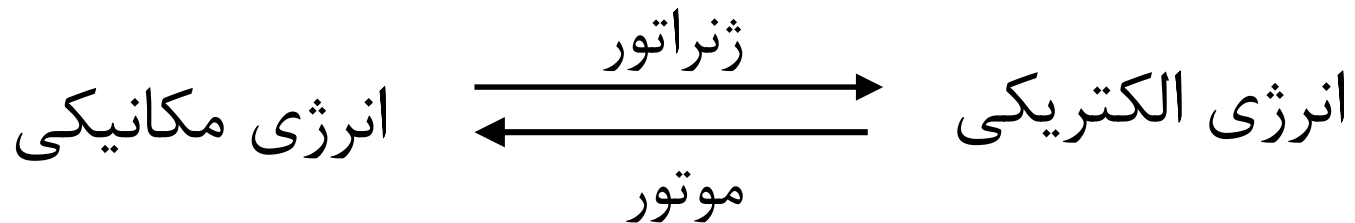
فصل اول

مدارهای مغناطیسی

# ماشینهای الکتریکی

- ماشین الکتریکی وسیله ای است برای تبدیل انرژی مکانیکی به الکتریکی یا بالعکس.

## ماشین های دوار ( با حرکت دورانی)



## ماشین های دارای حرکت خطی

در پاره ای از وسایل الکتریکی همانند کنتاکتورها ، رله ها ، عملگرها و ... انرژی الکتریکی ضمن تبدیل به انرژی مکانیکی سبب حرکت خطی می گردد. این وسایل نیز به نوعی ماشین الکتریکی محسوب می گردند.

# میدان مغناطیسی

□ در تمامی ماشین های الکتریکی رایج ( ژنراتورها ، موتورها ، ترانسفورماتورها ، ماشین های با حرکت خطی و ... ) تبدیل انرژی از طریق ( با واسطه ) میدان مغناطیسی انجام می شود..

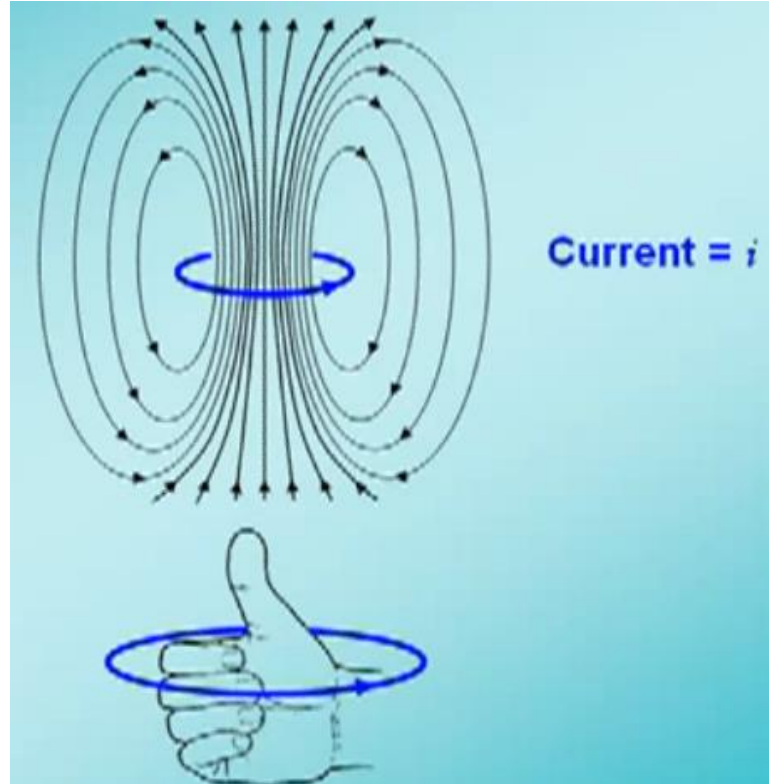
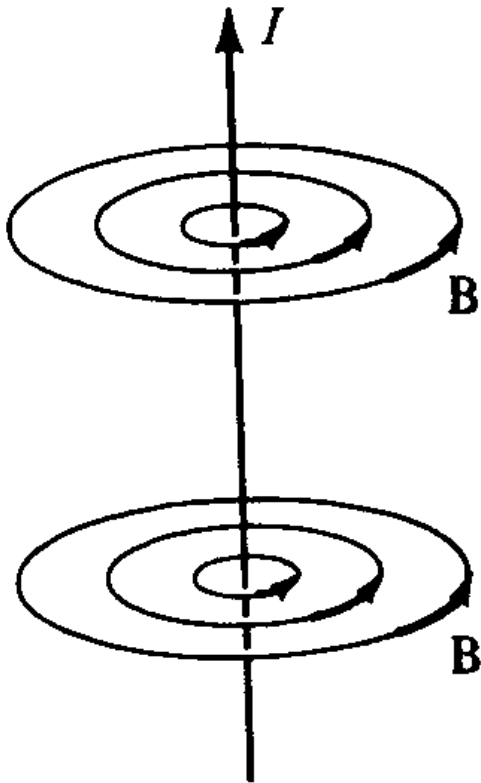
□ مقدار گشتاور و ولتاژ تولیدی در ماشین ها با شار یا چگالی شار مغناطیسی تناسب مستقیم دارد. بدین لحاظ بررسی کار ماشین ها مطالعه دقیق میدان ( شار ) و مواد مغناطیسی را ایجاب می نماید.

□ مواد مغناطیسی دارای نقش و اهمیت زیادی در ماشین های الکتریکی می باشند. از جمله :

— شکل و جهت دادن به شار مغناطیسی

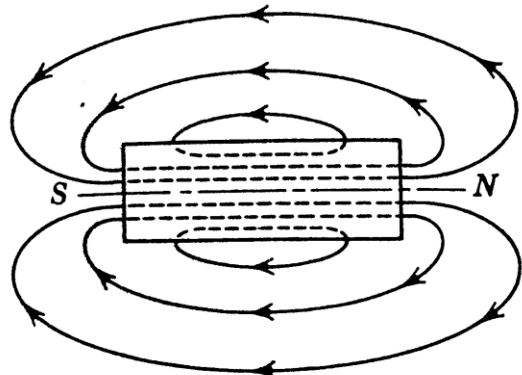
— فراهم نمودن امکان ایجاد چگالی شار مغناطیسی زیاد و در نتیجه چگالی انرژی و گشتاور زیاد به ازای واحد حجم ماشین. عبارتی دیگر تبدیل انرژی زیاد در ماشین های با اندازه های فعلی مدیون خاصیت مفید مواد مغناطیسی می باشد.

# تولید میدان مغناطیسی در اطراف سیم حامل جریان

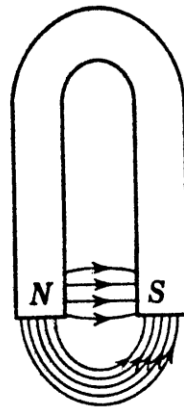


یک هادی (سیم) حامل جریان برق در اطراف خود میدان مغناطیسی ایجاد می کند.

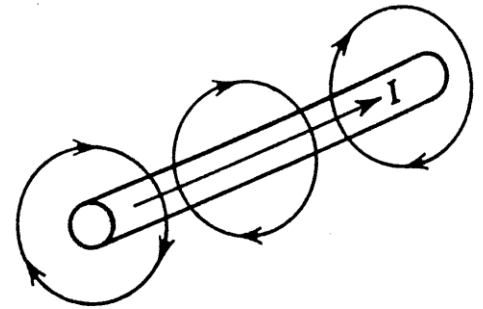
# میدان مغناطیسی اطراف چند شکل هندسی ساده



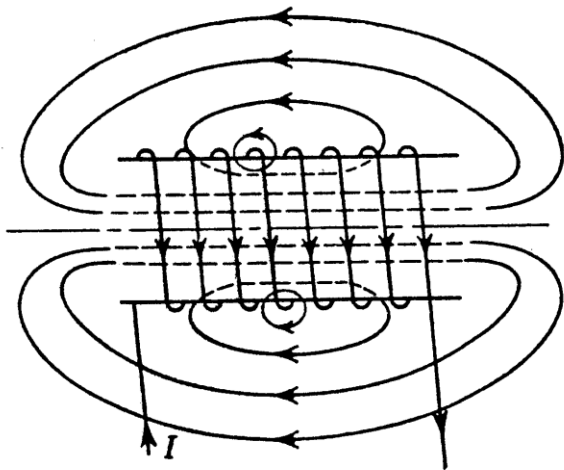
(a) آهنربای میله ای



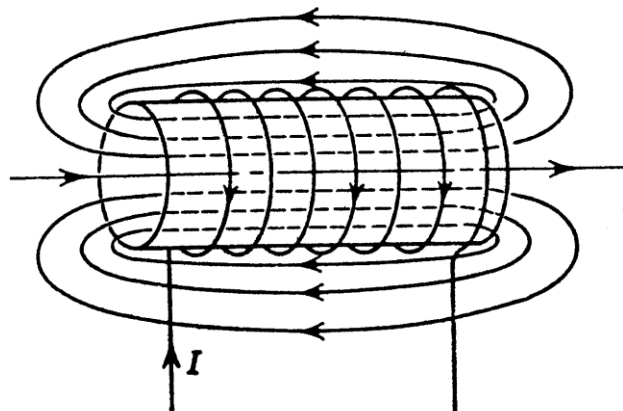
(b) آهنربای نعل اسبی



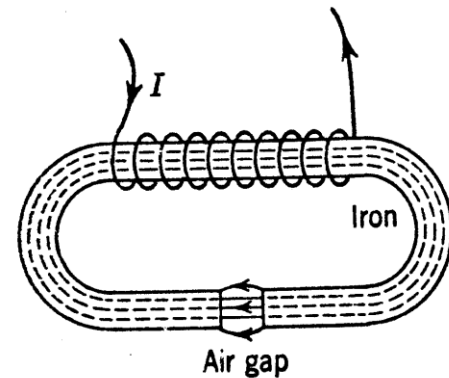
(c) سیم مستقیم حامل جریان



(d) سیم پیچ با هسته هوا



(e) سیم پیچ با هسته آهنی



(f) سیم پیچ و مدار مغناطیسی مرکب

# میدان مغناطیسی

- \* مدار یا سازه مغناطیسی ماشین های الکتریکی از مواد فرومغناطیس به تنهائی و یا از مواد فرومغناطیس و فاصله هوائی تشکیل می گردد.
- \* مدار مغناطیسی ساده — فقط ماده مغناطیسی — مثل هسته ترانسفورماتور.
- \* مدار مغناطیسی مرکب — متشکل از مواد فرومغناطیس و هوا — مثل مدارمغناطیسی ماشینهای دوار , کنتاکتورها و ....

عامل ایجاد شار مغناطیسی ( تحریک در مدارهای مغناطیسی ):

— آهنربای دائم در ماشینهای کوچک یا موارد خاص.

— سیم پیچ یا کویل حامل جریان ( پیچیده شده دور هسته فرومغناطیس ).

# رابطه H و I ( قانون آمپر )

$$\oint_C H \cdot dl = \sum i$$

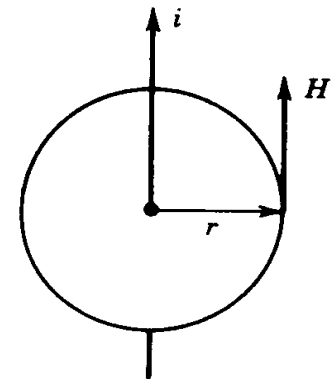
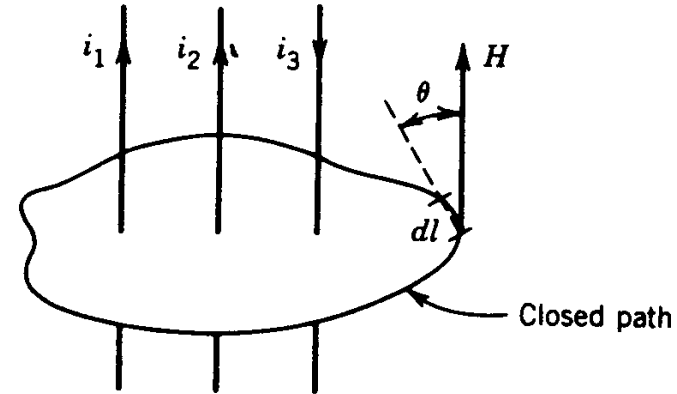
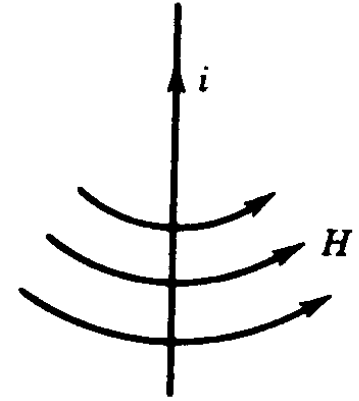
$$\oint_C H \cdot dl = \sum i = i_1 + i_2 - i_3$$

$$\oint_C H dl \cos \theta = \sum i$$

$$\oint_C H \cdot dl = i$$

$$H 2\pi r = i$$

$$H = \frac{i}{2\pi r} \text{ A/m}$$



# رابطه B و H

$$B = \mu H \quad \text{Weber / m}^2 \text{ or Tesla}$$

$$B = \mu_r \mu_0 H \quad \text{Weber / m}^2 \text{ or T}$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

$\mu_r$  برای مواد غیر فرومغناطیس نظیر هوا و هادیهای الکتریکی ( مس و آلومینیوم ) برابر یک و برای مواد فرومغناطیس بین چند صد تا چند هزار می باشد. برای مواد فرو مغناطیس مورد استفاده در ماشینهای الکتریکی معمولی  $\mu_r$  بین ۲۰۰۰ تا ۶۰۰۰ می باشد.

$i$ : جریان الکتریکی به A

$H$ : شدت میدان مغناطیسی به A/m

$l$ : طول مسیر به m

$B$ : چگالی شار مغناطیسی به T

$\mu_0$ : نفوذ پذیری مغناطیسی خلا ( تقریباً هوا )

$\mu$ : نفوذ پذیری مغناطیسی ماده

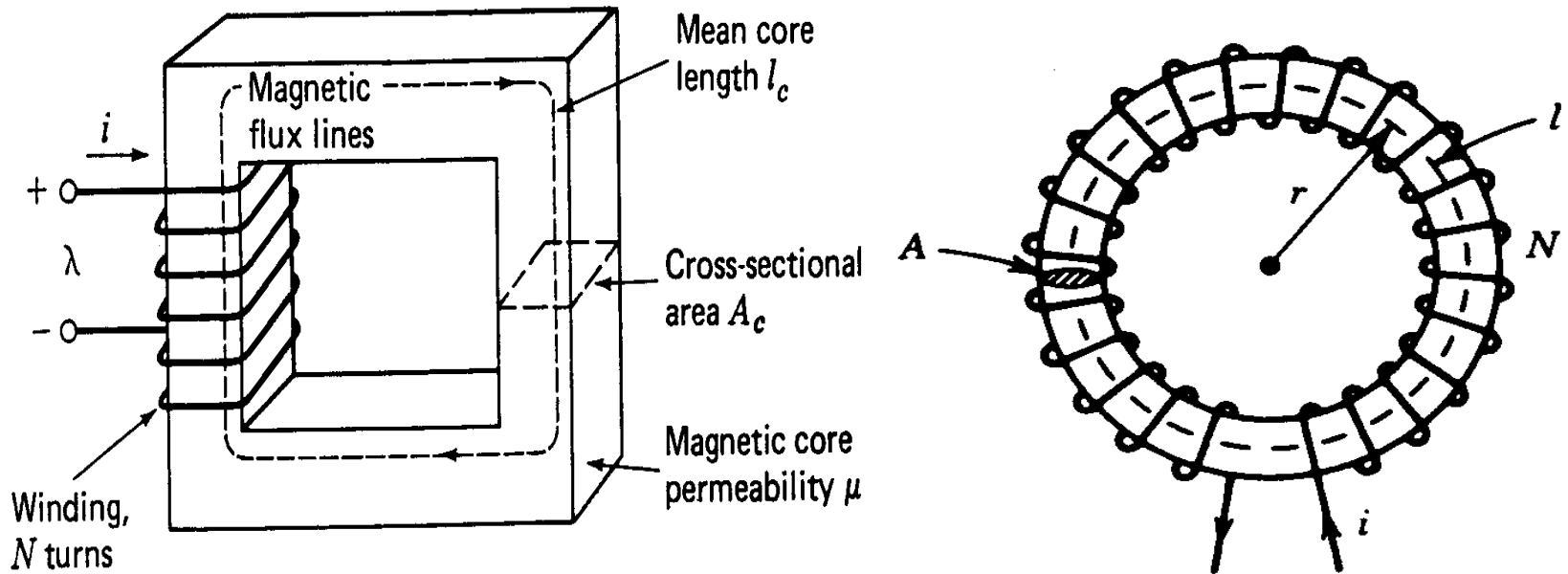
$\mu_r$ : نفوذ پذیری مغناطیسی نسبی ماده

$r$ : فاصله شعاعی نقطه میدان از مرکز سیم به m

با داشتن  $\mu_r$  بزرگ میتوان با جریان کم چگالی شار زیادی تولید نمود



# مدار معادل مغناطیسی



✓ تحلیل کامل و دقیق میدانهای مغناطیسی در مسائل مهندسی مستلزم حل معادلات ماکسول همراه با

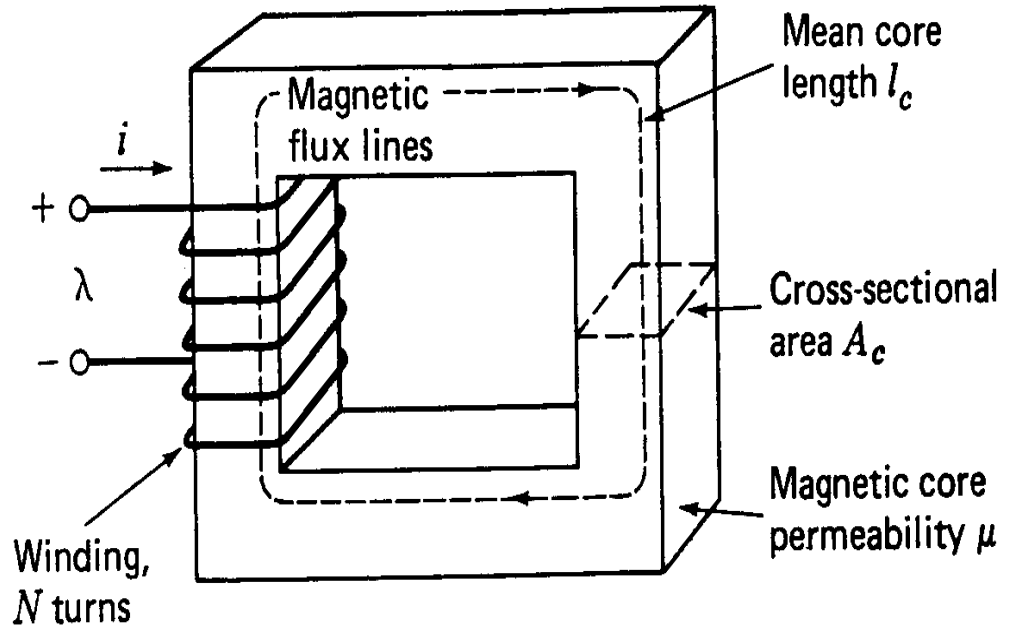
روابط مربوط به خواص مواد می باشد که عموماً دشوار و بعضاً ناممکن است.

✓ پاره ای فرضیات ساده ساز یافتن پاسخ های مفید مهندسی مسائل واقعی را میسر می سازد.

## فرضیات لازم برای تحلیل مدار مغناطیسی فوق :

۱. برای ماشین های الکتریکی مورد بحث در فرکانسها و اندازه های رایج جریان جابجائی در معادله ماکسول ( جمله مربوط به تشعشع الکترومغناطیسی ) نادیده گرفته می شود.
۲. توزیع چگالی شار در سطح مقطع هسته یکنواخت و برابر متوسط چگالی شار هسته در نظر گرفته می شود.
۳. چگالی شار متوسط منطبق بر مسیر میانی هسته فرض می شود و شدت میدان مغناطیسی H برای این مسیر یکسان و برابر مقدار متوسط در نظر گرفته می شود.
۴. هسته از نوع فرومغناطیس و  $\mu$  آن در مقایسه با هوا بسیار بالا است ( $\mu \gg \mu_0$ ) و تمام شار در داخل هسته محصور می گردد.
۵. بردار H در هر نقطه مماس بر امتداد مسیر و بردار B در هر نقطه عمود بر سطح فرض می شود.

برای مدار مغناطیسی زیر داریم :



$$\oint H \cdot dl = Ni$$

$$H l_c = Ni$$

$$H l = Ni = F$$

$$H = \frac{N}{l_c} i \quad \text{At / m}$$

$$B = \frac{\mu Ni}{l_c} \quad T$$

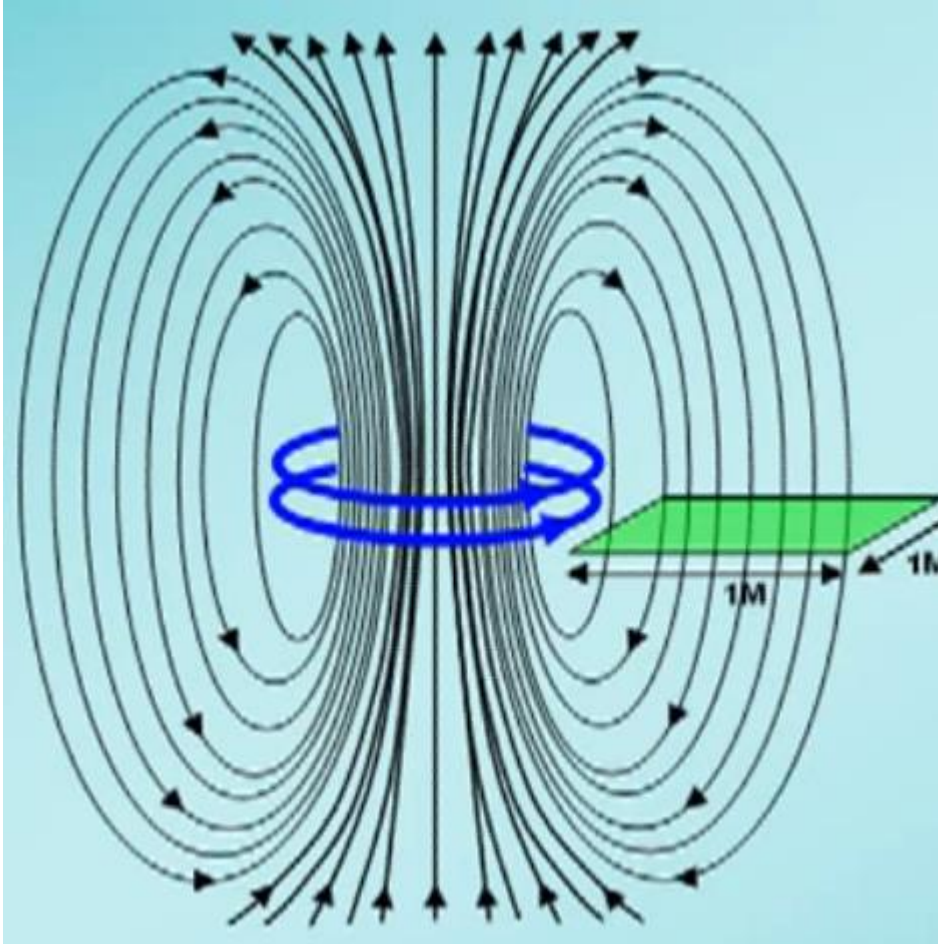
$$\phi = \frac{\mu Ni}{l_c} A_c = \frac{Ni}{l_c / \mu A_c} = \frac{Ni}{R} = \frac{F}{R}$$

$$\phi = \int B dA$$

$$\phi = B A_c \quad Wb$$

$$R = \frac{l_c}{\mu A_c} = \frac{l}{p}$$

# چگالی شار مغناطیسی



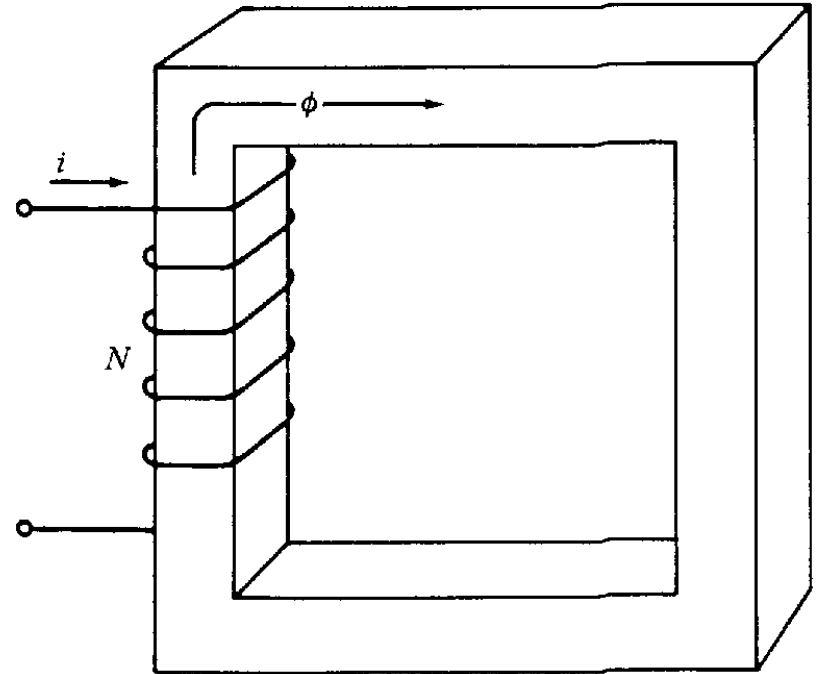
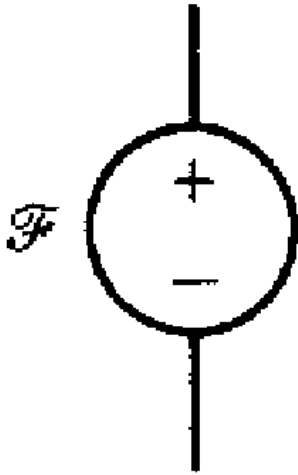
$$\Phi = \frac{Ni}{l} \mu_0 \mathcal{A}$$

$$\Phi = \mathcal{H} \mu_0 \mathcal{A}$$

$$\frac{\Phi}{\mathcal{A}} = \mathcal{H} \mu_0$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{H} \mu_0$$

# مدار معادل و قانون اهم مغناطیسی



$$\phi = \frac{Ni}{\mathcal{R}} = \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{R}}$$

$$\mathcal{R} = \frac{l_c}{\mu A_c} = \frac{1}{P}$$

$$\mathcal{I} = Ni$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{R} \phi$$

$$\phi = \frac{Ni}{\mathcal{R}} = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}}$$

$$\mathcal{R} = \frac{l_c}{\mu A_c} = \frac{1}{P}$$

$$\mathcal{F} = Ni$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} \phi$$

$N$ : تعداد دور سیم پیچ.

$i$ : جریان عبوری از سیم پیچ .

$\mathcal{F} = Ni$ : نیروی محرکه مغناطیسی ( mmf )

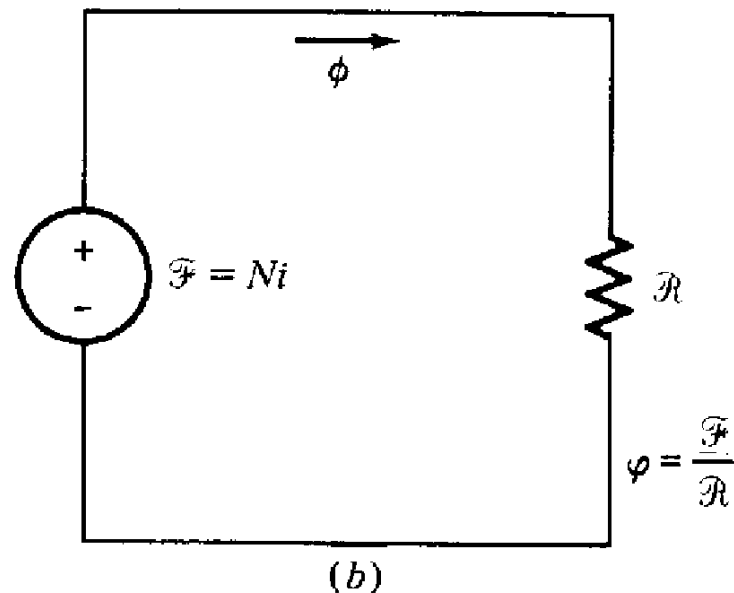
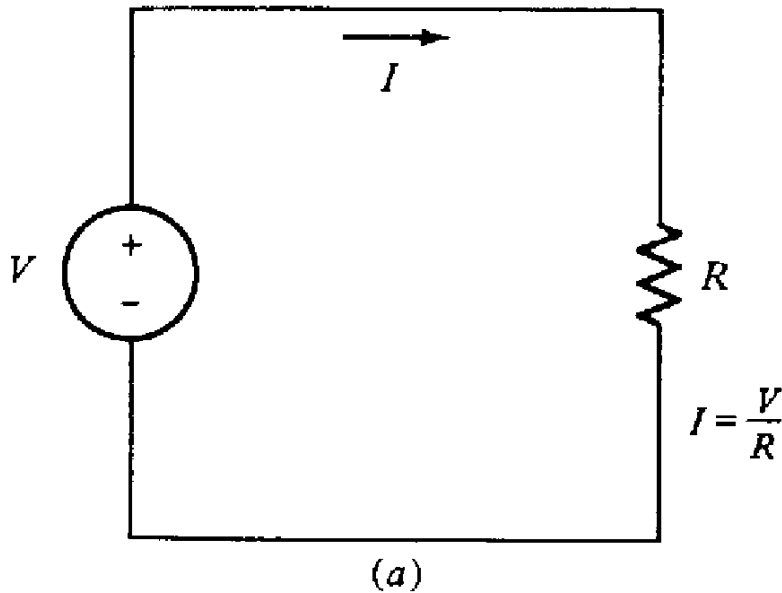
$\phi$ : شار مغناطیسی.

$l_c$ : طول متوسط هسته .

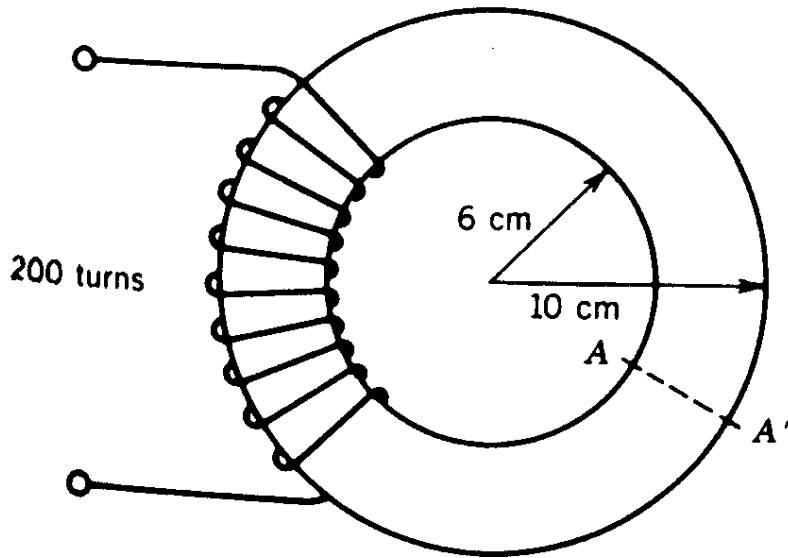
$A_c$ : سطح مقطع هسته.

$\mathcal{R}$ : رلوکتانس یا مقاومت مغناطیسی هسته.

# مقایسه مدار معادل مغناطیسی با مدار الکتریکی



مدار الکتریکی	مدار مغناطیسی
$E = \text{emf}$	$\mathcal{F} = Ni$ = mmf
$I = E/R$ جریان الکتریکی	$\phi = \mathcal{F}/\mathcal{R}$ شار مغناطیسی
$R = \frac{l}{\sigma A}$ مقاومت الکتریکی	$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A}$ مقاومت مغناطیسی



مثال : چنبره شکل مقابل با مقطع دایره ای از جنس فرو مغناطیس و دارای  $\mu_r = 2000$  می باشد.  
برای داشتن چگالی شار متوسط 1.2 تسلا مطلوب است :

۱. شار هسته.

۲. جریان مورد نیاز.

حل :

$$l_c = 2\pi \left( \frac{10+6}{2} \right) \times 10^{-2} = 0.503 \text{ m}$$

$$A_c = \pi (2 \times 10^{-2})^2 = 1.26 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\mathcal{R} = \frac{0.503}{4\pi \times 10^{-7} \times 2000 \times 1.26 \times 10^{-3}} = 158839 \text{ At/Wb}$$

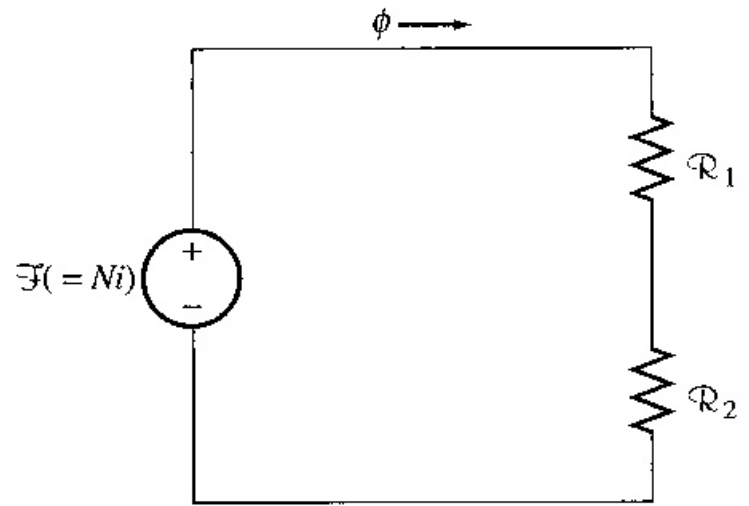
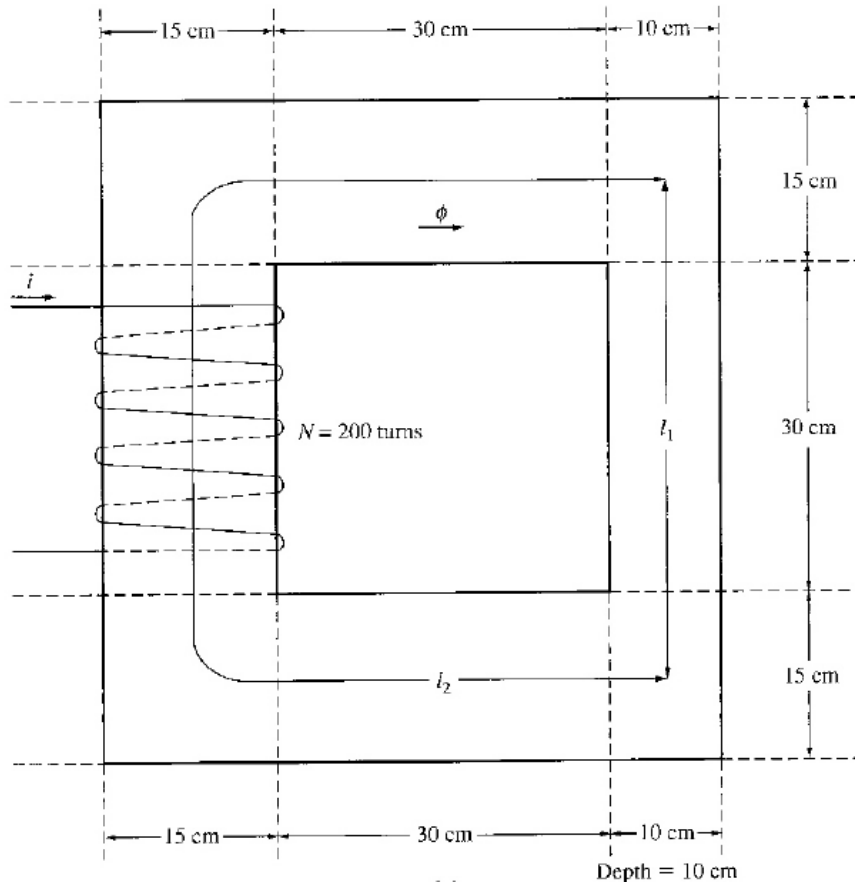
$$\phi = B A_c = 1.2 \times 1.26 \times 10^{-3} = 1.512 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

$$i = \frac{\phi \mathcal{R}}{N} = \frac{1.512 \times 10^{-3} \times 158839}{200} = 1.2 \text{ A}$$



**Example:** A ferromagnetic core is shown. Three sides of this core are of uniform width, while the fourth side is somewhat thinner. The depth of the core (into the page) is 10cm, and the other dimensions are shown in the figure. There is a 200 turn coil wrapped around the left side of the core. Assuming relative permeability  $\mu_r$  of 2500, **how much flux will be produced by a 1A input current?**

**Solution:** 3 sides of the core have the same area, while the 4th side has a different area. Thus the core can be divided into 2 regions: (1) the single thinner side (2) the other 3 sides taken together



\* برای مدارهای مغناطیسی خطی که  $\mu_r$  ثابت است مقدار رلوکتانس  $\mathcal{R}$  نیز مستقل از شدت میدان مغناطیسی و ثابت می ماند.

\* در اینگونه موارد تحلیل مدار به کمک قانون اهم مغناطیسی ممکن و ساده می باشد.

$$\mathcal{R} = \frac{l_c}{\mu A_c}, \quad p = \frac{I}{\mathcal{R}} = \frac{\mu A_c}{l_c}, \quad \phi = \frac{Ni}{\mathcal{R}} = \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{R}} = \mathcal{T} p$$

روابط فوق مشابه روابط مربوط به مدارهای الکتریکی می باشد.

$$R = \frac{l}{\sigma A}, \quad G = \frac{l}{R} = \frac{\sigma A}{l}, \quad I = \frac{E}{R} = E G$$

# روابط حاکم بر ترکیب سری و موازی رلوکتانسها

رلوکتانس و شار مغناطیسی در مدارهای مغناطیسی خطی از قوانین مشابه مقاومت و جریان در مدارهای الکتریکی تبعیت می کنند. قواعد و تکنیکهای مدارهای سری ، موازی یا سری — موازی ، ترکیب سری یا موازی مقاومتها ، قاعده تقسیم جریان و ... در مدارهای مغناطیسی نیز قابل استفاده می باشد.

ترکیب سری رلوکتانسها

$$\frac{1}{P_{eq}} = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} + \dots$$

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \dots$$

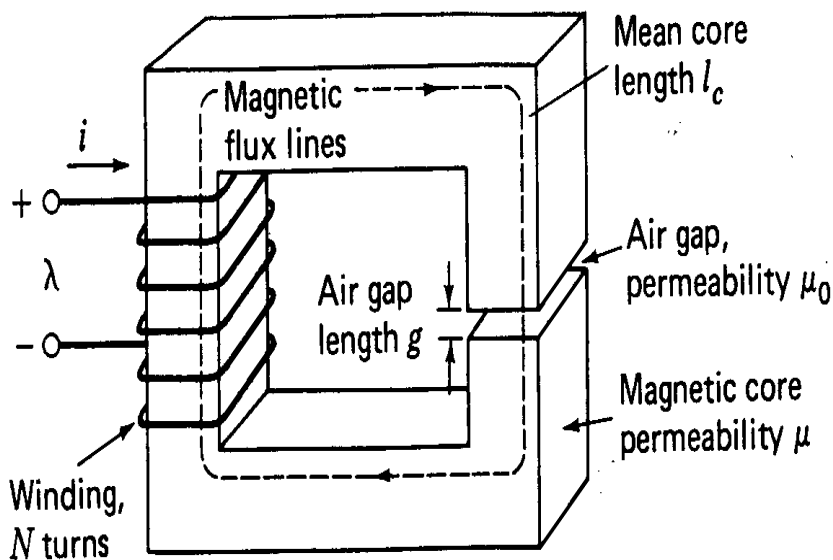
ترکیب موازی رلوکتانسها

$$P_{eq} = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

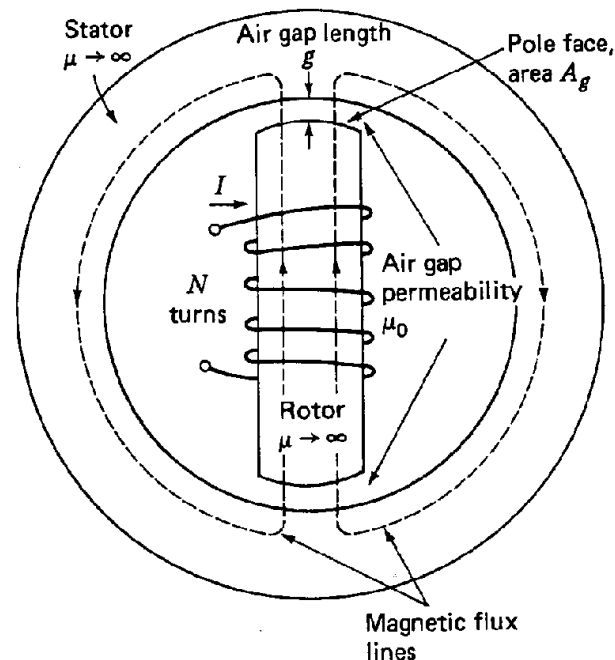
$$\frac{1}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} + \frac{1}{\mathcal{R}_3} + \dots$$

# مدارهای مغناطیسی مرکب (با فاصله هوایی)

در ماشین های الکتریکی دوار و وسایلی همانند کنتاکتورها ، رله های الکترومغناطیسی و ... که دارای قسمت های متحرک هستند ، مدار مغناطیسی علاوه بر مواد ( هسته ) فرومغناطیس فواصل هوایی را نیز شامل میگرددد. نمونه این نوع مدارها در شکل های زیر آمده است :



Magnetic circuit with air gap.



# اثر خمیدگی شار

خطوط شار مغناطیسی در عبور از فاصل هوائی تا حدودی به سمت بیرون خمیده می شوند. به این پدیده خمیدگی میدان یا خمیدگی شار (Flux Fringing) می گویند.

$$\mathcal{R}_c = \frac{l_c}{\mu_c A_c}, \mathcal{R}_g = \frac{l_g}{\mu_g A_g}$$

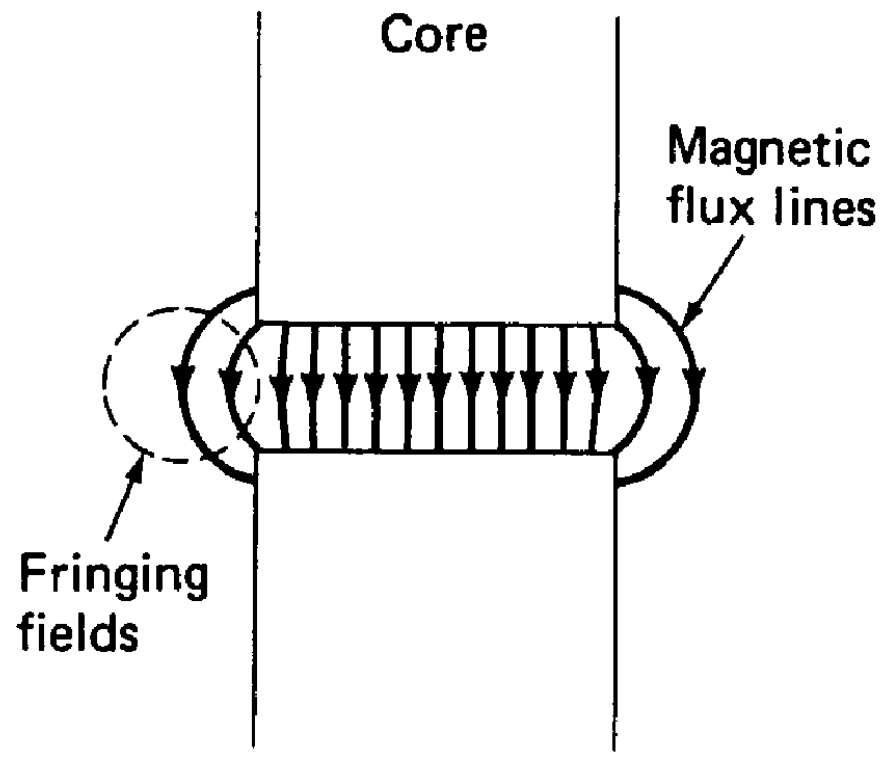
$$\phi = \frac{Ni}{\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_g}$$

$$B_c = \frac{\phi}{A_c}, B_g = \frac{\phi}{A_g}$$

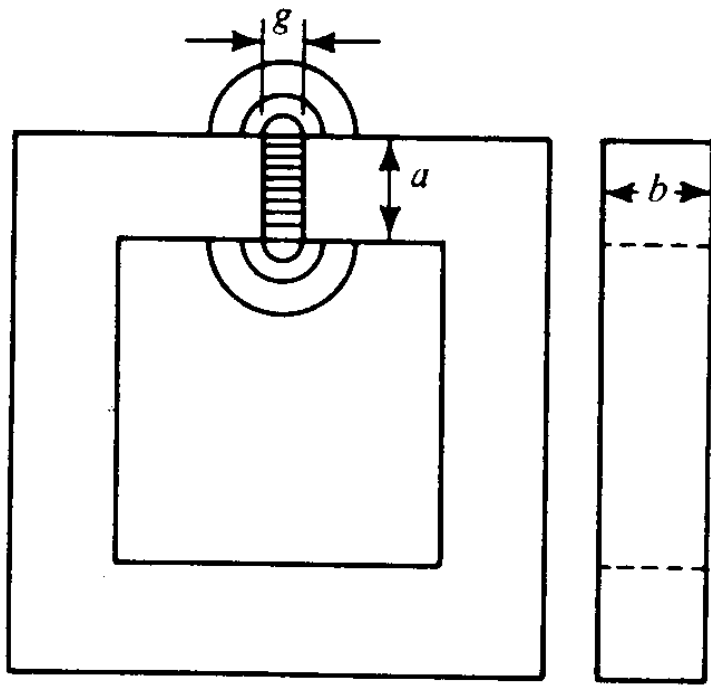
در صورت نادیده گرفتن اثر خمیدگی شار در فاصله هوائی

$$A = A_g = A_c \Rightarrow$$

$$B_g = B_c = \frac{\phi}{A_c}$$



# سطح موثر در محاسبه خمیدگی شار



$$A_{core} = a \times b$$

$$A_g = (a + g) \times (b + g)$$

در مواردی افزایش سطح موثر فاصله هوایی بصورت درصدی از سطح مقطع هسته مجاور بیان میگردد.

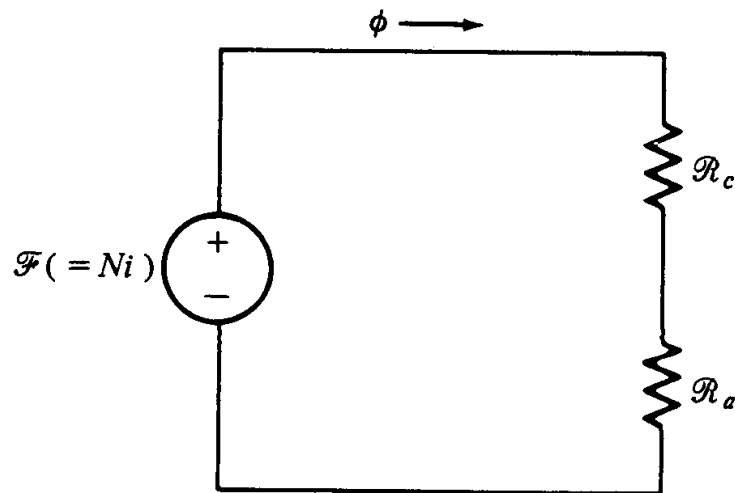
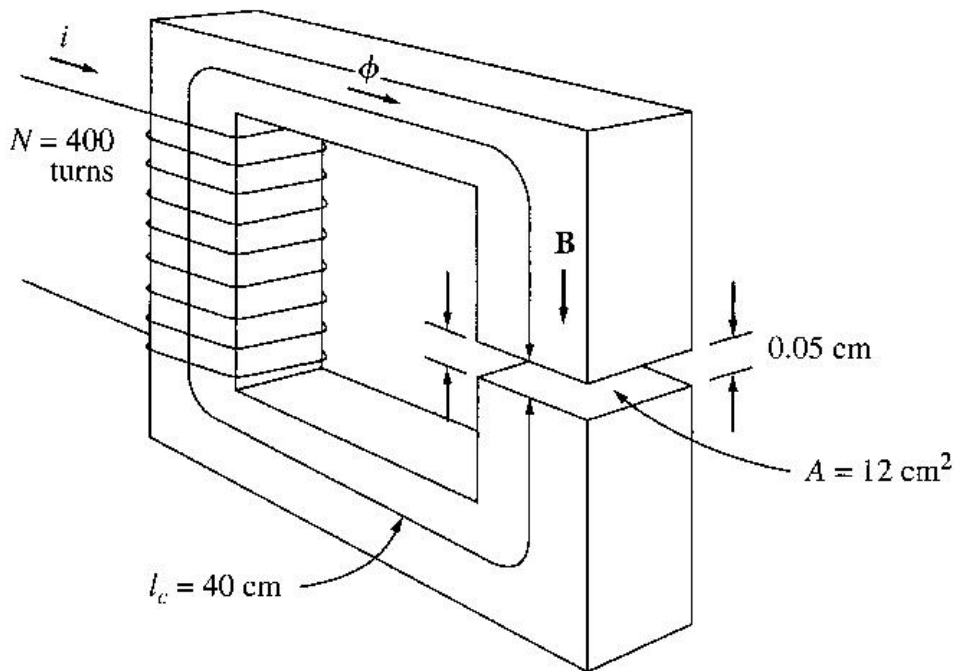
مثال 2: در شکل زیر یک هسته فرو مغناطیس همراه با فاصله هوایی نشان داده شده است. نفوذپذیری

مغناطیسی هسته  $\mu_r = 4000$  می باشد. سطح مقطع فاصله هوایی بخاطر خمیدگی شار ۵ درصد بیش از سطح مقطع هسته فرض میشود. مطلوب است محاسبه:

۱- رلوکتانس کل مسیر شار ( آهن و هوا )

۲- جریان مورد نیاز برای تولید چگالی شار  $5/5$  تسلا در فاصله هوایی.

۳- چگالی شار در هسته





$$\mathcal{R}_c = \frac{l_c}{\mu_c \mu_0 A_c} = \frac{0.4}{(4000)(4\pi \times 10^{-7})(0.0012)} = 66300 \text{ A.t/Wb}$$

$$A_a = 1.05 \times 12 = 12.6 \text{ cm}^2, \quad \mathcal{R}_a = \frac{l_a}{\mu_0 A_a} = \frac{0.0005}{(4\pi \times 10^{-7})(0.00126)} = 316000 \text{ A.t/Wb}$$

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_a = 66300 + 316000 = 382300 \text{ A.t/Wb}$$

توجه: علیرغم آنکه طول فاصله هوایی ۸۰۰ برابر از طول هسته کوچکتر است رلوکتانس آن به مراتب ( حدود ۵ برابر ) از رلوکتانس هسته بیشتر است و بخش زیادی از آمپردور اعمال شده صرف فائق آمدن بر رلوکتانس فاصله هوایی میگردد. درعمل تلاش می گردد فاصله هوایی در مدار مغناطیسی ماشین ها به حداقل ممکن

کاهش یابد.

قسمت ۲

$$\mathcal{T} = Ni = \phi \mathcal{R}_{eq} = B_a A_a \mathcal{R}_{eq}$$

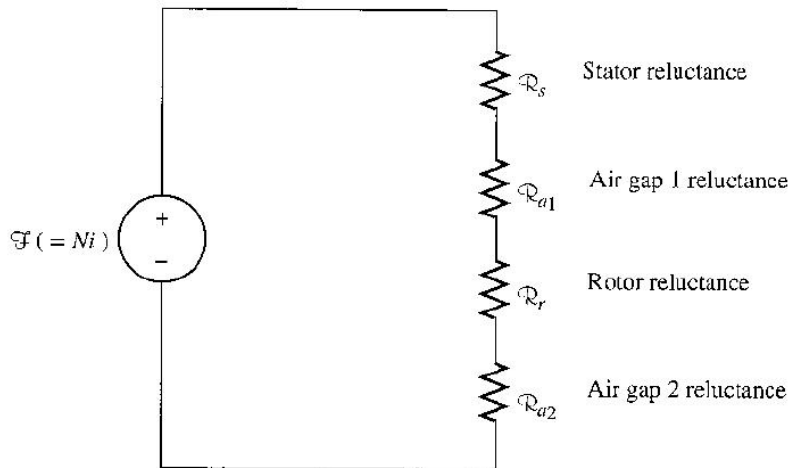
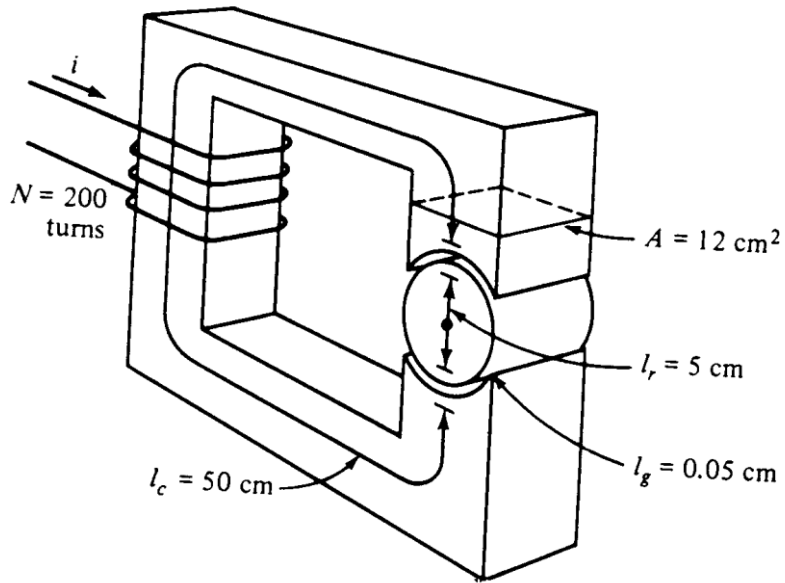
$$i = \frac{B_a A_a \mathcal{R}_{eq}}{N} = \frac{0.5 \times 0.00126 \times 382300}{400} = 0.602$$

توجه: از آنجاکه شار فاصله هوایی با لحاظ کردن اثر خمیدگی شار مورد نظر است، سطح موثر فاصله هوایی بکار رفته است.

قسمت ۳

$$\phi_c = \phi_a = \phi, \quad B_c = \frac{A_a}{A_c} B_a = 1.05 \times 0.5 = 0.525 \text{ T}$$





مثال ۳: در شکل زیر شماتیک ساده روتور و استاتور یک ماشین dc نشان داده شده است. طول متوسط استاتور ۵۰ cm و طول متوسط روتور ۵ cm و سطح مقطع متوسط هر یک ۱۲ cm<sup>2</sup> میباشد. طول فواصل هوایی 0.05 cm و سطح مقطع موثر آن با احتساب اثر خمیدگی شار ۱۴ cm<sup>2</sup> می باشد. استاتور و روتور دارای  $\mu_r = 2000$  هستند و جریان سیم پیچ ۱ آمپر است. مطلوب است محاسبه:

- ۱- چگالی شار متوسط در فاصله هوایی ۲- چگالی شار متوسط در روتور و استاتور

حل -

رلوکتانس کل مسیر شار

$$\mathfrak{R}_{eq} = \mathfrak{R}_s + \mathfrak{R}_r + \mathfrak{R}_{a1} + \mathfrak{R}_{a2} = 751000 \text{ A.t / Wb}$$

نیروی محرکه مغناطیسی اعمال شده به هسته

$$F = Ni = (200 \text{ turns})(1 \text{ A})$$

کل شار هسته برابر است با:

$$\varphi = \frac{F}{R} = \frac{200 \text{ A. turns}}{751000 \text{ A. turns / Wb}} =$$

$$0.000266 \text{ Wb}$$

چگالی شار در فاصله هوایی برابر است با:

$$B = \frac{\varphi}{A} = \frac{0.000266 \text{ Wb}}{0.0014 \text{ m}^2} = 0.19 \text{ T}$$

$$\mathfrak{R}_s = \frac{l_s}{\mu_r \mu_0 A_s}$$

$$= \frac{0.5}{(2000)(4\pi \times 10^{-7})(0.0012)} = 166000 \text{ A.t / Wb}$$

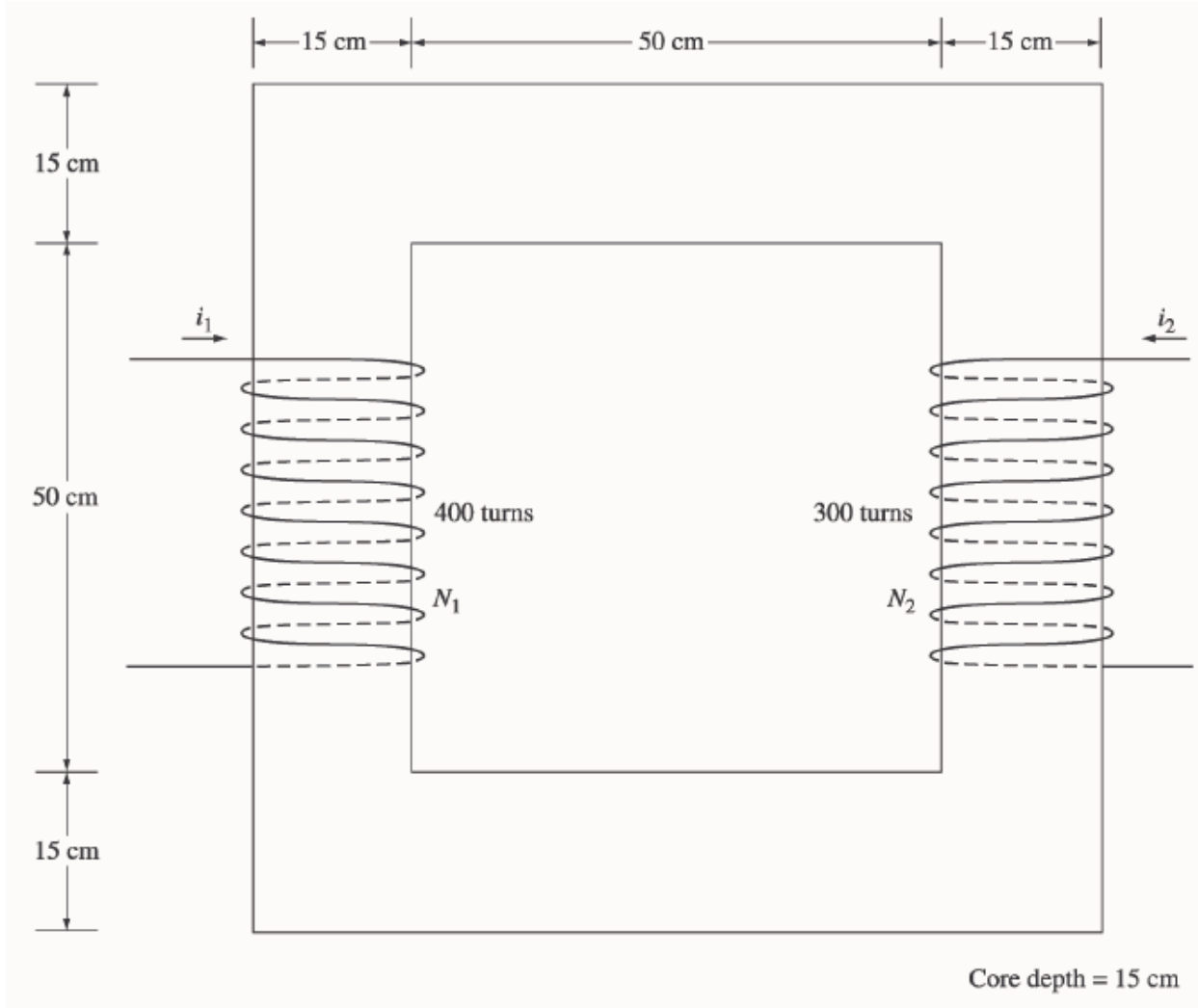
$$\mathfrak{R}_r = \frac{l_r}{\mu_r \mu_0 A_r}$$

$$= \frac{0.05}{(2000)(4\pi \times 10^{-7})(0.0012)} = 16600 \text{ A.t / Wb}$$

$$\mathfrak{R}_{a1} = \mathfrak{R}_{a2} = \frac{l_a}{\mu_0 A_a}$$

$$= \frac{0.0005}{(4\pi \times 10^{-7})(0.0014)} = 284000 \text{ A.t / Wb}$$

A two-legged core is shown in Figure P1-4. The winding on the left leg of the core ( $N_1$ ) has 400 turns, and the winding on the right ( $N_2$ ) has 300 turns. The coils are wound in the directions shown in the figure. If the dimensions are as shown, then what flux would be produced by currents  $i_1 = 0.5$  A and  $i_2 = 0.75$  A? Assume  $\mu_r = 1000$  and constant.



SOLUTION The two coils on this core are wound so that their magnetomotive forces are additive, so the total magnetomotive force on this core is

$$\mathcal{F}_{\text{TOT}} = N_1 i_1 + N_2 i_2 = (400 \text{ t})(0.5 \text{ A}) + (300 \text{ t})(0.75 \text{ A}) = 425 \text{ A} \cdot \text{t}$$

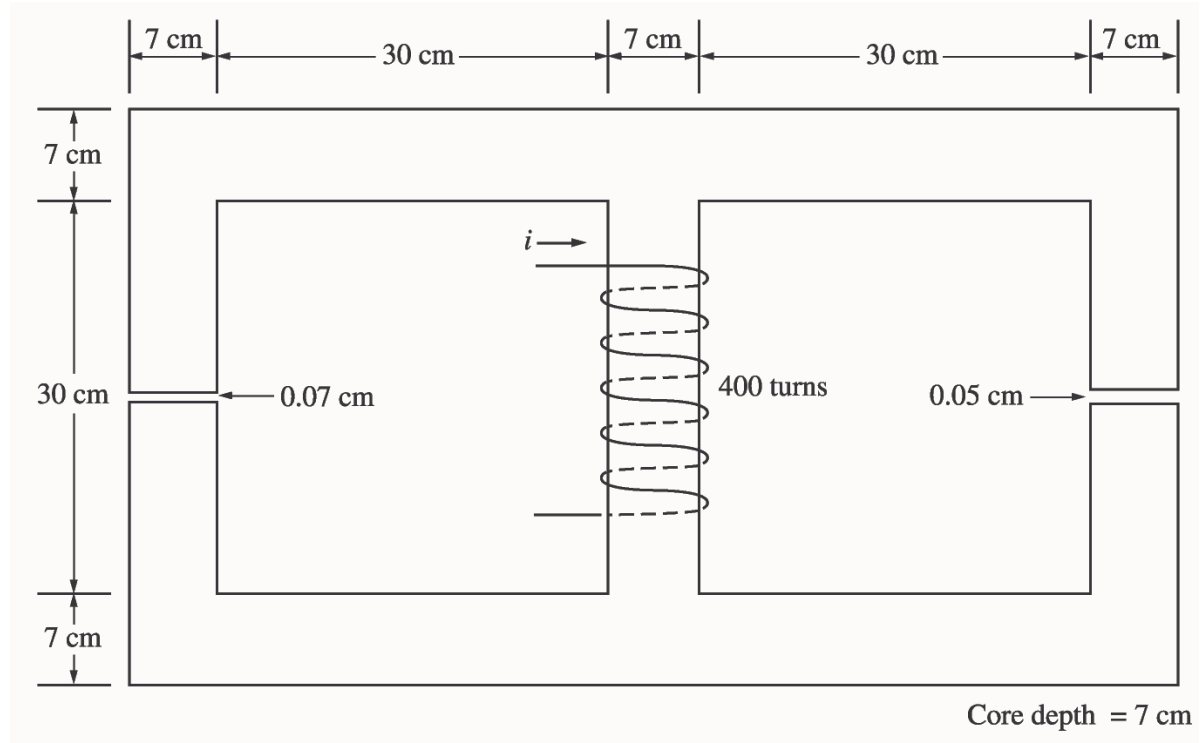
The total reluctance in the core is

$$\mathcal{R}_{\text{TOT}} = \frac{l}{\mu_r \mu_0 A} = \frac{2.60 \text{ m}}{(1000)(4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})(0.15 \text{ m})(0.15 \text{ m})} = 92.0 \text{ kA} \cdot \text{t/Wb}$$

and the flux in the core is:

$$\phi = \frac{\mathcal{F}_{\text{TOT}}}{\mathcal{R}_{\text{TOT}}} = \frac{425 \text{ A} \cdot \text{t}}{92.0 \text{ kA} \cdot \text{t/Wb}} = 0.00462 \text{ Wb}$$

**Example:** A ferromagnetic core with a relative permeability of 2000 is shown in Figure P1-3. The dimensions are as shown in the diagram, and the depth of the core is 7 cm. The air gaps on the left and right sides of the core are 0.070 and 0.050 cm, respectively. Because of fringing effects, the effective area of the air gaps is 5 percent larger than their physical size. If there are **400 turns in the coil wrapped around the center leg of the core** and if the current in the coil is 1.0 A, what is the flux in each of the left, center, and right legs of the core? What is the flux density in each air gap?



SOLUTION This core can be divided up into five regions. Let  $\mathcal{R}_1$  be the reluctance of the left-hand portion of the core,  $\mathcal{R}_2$  be the reluctance of the left-hand air gap,  $\mathcal{R}_3$  be the reluctance of the right-hand portion of the core,  $\mathcal{R}_4$  be the reluctance of the right-hand air gap, and  $\mathcal{R}_5$  be the reluctance of the center leg of the core. Then the total reluctance of the core is

$$\mathcal{R}_{TOT} = \mathcal{R}_5 + \frac{(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4)}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4}$$

$$\mathcal{R}_1 = \frac{l_1}{\mu_r \mu_0 A_1} = \frac{1.11 \text{ m}}{(2000)(4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})(0.07 \text{ m})(0.07 \text{ m})} = 90.1 \text{ kA} \cdot \text{t/Wb}$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{l_2}{\mu_0 A_2} = \frac{0.0007 \text{ m}}{(4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})(0.07 \text{ m})(0.07 \text{ m})(1.05)} = 108.3 \text{ kA} \cdot \text{t/Wb}$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{l_3}{\mu_r \mu_0 A_3} = \frac{1.11 \text{ m}}{(2000)(4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})(0.07 \text{ m})(0.07 \text{ m})} = 90.1 \text{ kA} \cdot \text{t/Wb}$$

$$\mathcal{R}_4 = \frac{l_4}{\mu_0 A_4} = \frac{0.0005 \text{ m}}{(4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})(0.07 \text{ m})(0.07 \text{ m})(1.05)} = 77.3 \text{ kA} \cdot \text{t/Wb}$$

$$\mathcal{R}_5 = \frac{l_5}{\mu_r \mu_0 A_5} = \frac{0.37 \text{ m}}{(2000)(4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})(0.07 \text{ m})(0.07 \text{ m})} = 30.0 \text{ kA} \cdot \text{t/Wb}$$

The total reluctance is

$$\mathcal{R}_{\text{TOT}} = \mathcal{R}_5 + \frac{(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4)}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4} = 30.0 + \frac{(90.1 + 108.3)(90.1 + 77.3)}{90.1 + 108.3 + 90.1 + 77.3} = 120.8 \text{ kA} \cdot \text{t/Wb}$$

The total flux in the core is equal to the flux in the center leg:

$$\phi_{\text{center}} = \phi_{\text{TOT}} = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_{\text{TOT}}} = \frac{(400 \text{ t})(1.0 \text{ A})}{120.8 \text{ kA} \cdot \text{t/Wb}} = 0.0033 \text{ Wb}$$

The fluxes in the left and right legs can be found by the “flux divider rule”, which is analogous to the current divider rule.

$$\phi_{\text{left}} = \frac{(\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4)}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4} \phi_{\text{TOT}} = \frac{(90.1 + 77.3)}{90.1 + 108.3 + 90.1 + 77.3} (0.0033 \text{ Wb}) = 0.00193 \text{ Wb}$$

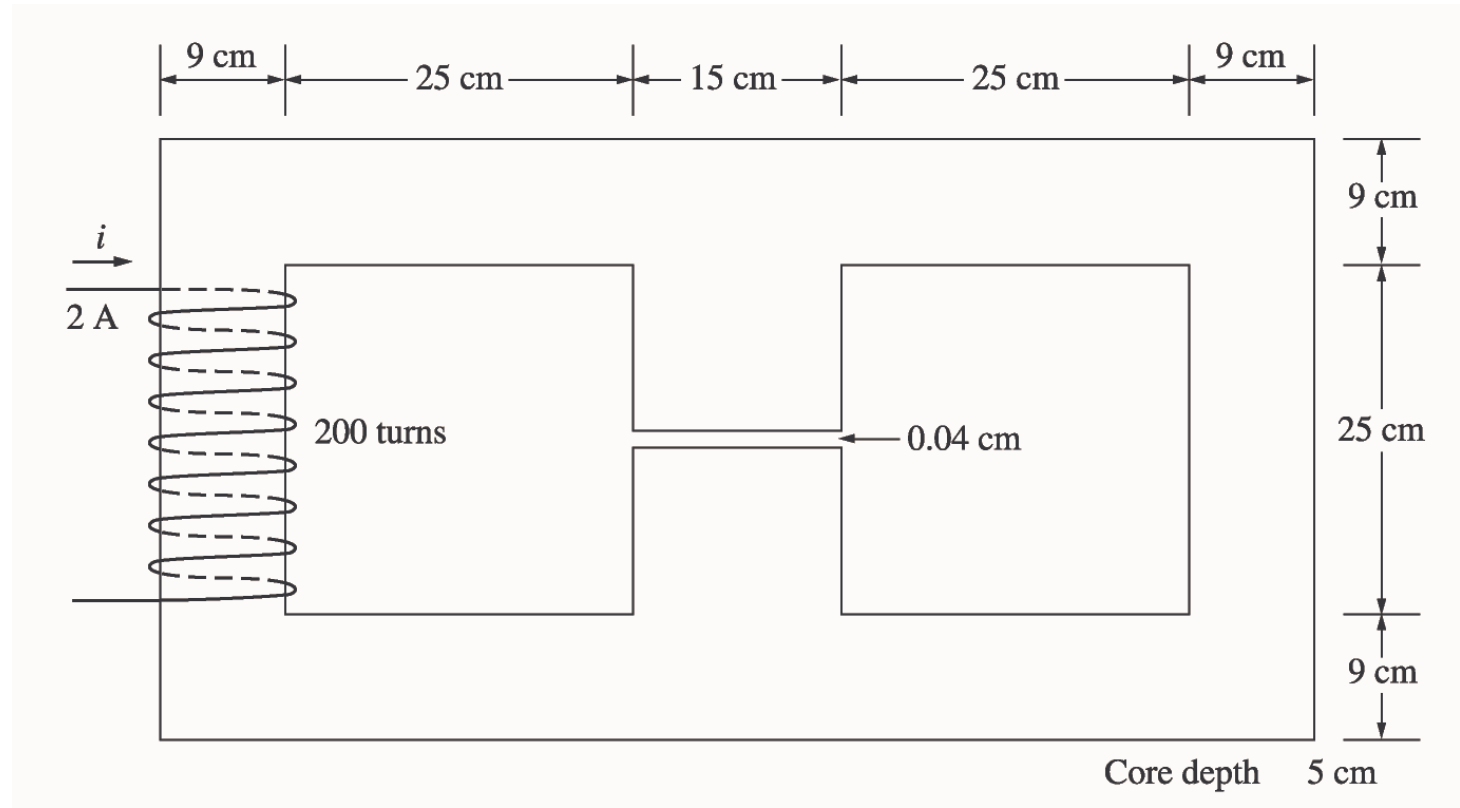
$$\phi_{\text{right}} = \frac{(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4} \phi_{\text{TOT}} = \frac{(90.1 + 108.3)}{90.1 + 108.3 + 90.1 + 77.3} (0.0033 \text{ Wb}) = 0.00229 \text{ Wb}$$

The flux density in the air gaps can be determined from the equation  $\phi = BA$ :

$$B_{\text{left}} = \frac{\phi_{\text{left}}}{A_{\text{eff}}} = \frac{0.00193 \text{ Wb}}{(0.07 \text{ cm})(0.07 \text{ cm})(1.05)} = 0.375 \text{ T}$$

$$B_{\text{right}} = \frac{\phi_{\text{right}}}{A_{\text{eff}}} = \frac{0.00229 \text{ Wb}}{(0.07 \text{ cm})(0.07 \text{ cm})(1.05)} = 0.445 \text{ T}$$

A core with three legs is shown in Figure P1-5. Its depth is 5 cm, and there are 200 turns on the leftmost leg. The relative permeability of the core can be assumed to be 1500 and constant. What flux exists in each of the three legs of the core? What is the flux density in each of the legs? Assume a 4% increase in the effective area of the air gap due to fringing effects.





**SOLUTION** This core can be divided up into four regions. Let  $R_1$  be the reluctance of the left-hand portion of the core,  $R_2$  be the reluctance of the centre leg of the core,  $R_3$  be the reluctance of the centre air gap, and  $R_4$  be the reluctance of the right- and portion of the core. Then the total reluctance of the core is

$$R_{TOT} = R_1 + \frac{(R_2 + R_3)R_4}{R_2 + R_3 + R_4}$$

$$R_1 = \frac{l_1}{\mu_r \mu_0 A_1} = \frac{1.08 \text{ m}}{(1500)(4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})(0.09 \text{ m})(0.05 \text{ m})} = 127.3 \text{ kA} \cdot \text{t/Wb}$$

$$R_2 = \frac{l_2}{\mu_r \mu_0 A_2} = \frac{0.34 \text{ m}}{(1500)(4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})(0.15 \text{ m})(0.05 \text{ m})} = 24.0 \text{ kA} \cdot \text{t/Wb}$$

$$R_3 = \frac{l_3}{\mu_0 A_3} = \frac{0.0004 \text{ m}}{(4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})(0.15 \text{ m})(0.05 \text{ m})(1.04)} = 40.8 \text{ kA} \cdot \text{t/Wb}$$

$$R_4 = \frac{l_4}{\mu_r \mu_0 A_4} = \frac{1.08 \text{ m}}{(1500)(4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})(0.09 \text{ m})(0.05 \text{ m})} = 127.3 \text{ kA} \cdot \text{t/Wb}$$

The total reluctance is

$$\mathcal{R}_{TOT} = \mathcal{R}_1 + \frac{(\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3)\mathcal{R}_4}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4} = 127.3 + \frac{(24.0 + 40.8)127.3}{24.0 + 40.8 + 127.3} = 170.2 \text{ kA} \cdot \text{t/Wb}$$

The total flux in the core is equal to the flux in the left leg:

$$\phi_{\text{left}} = \phi_{TOT} = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_{TOT}} = \frac{(200 \text{ t})(2.0 \text{ A})}{170.2 \text{ kA} \cdot \text{t/Wb}} = 0.00235 \text{ Wb}$$

The fluxes in the center and right legs can be found by the “flux divider rule”, which is analogous to the current divider rule.

$$\phi_{\text{center}} = \frac{\mathcal{R}_4}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4} \phi_{TOT} = \frac{127.3}{24.0 + 40.8 + 127.3} (0.00235 \text{ Wb}) = 0.00156 \text{ Wb}$$

$$\phi_{\text{right}} = \frac{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4} \phi_{TOT} = \frac{24.0 + 40.8}{24.0 + 40.8 + 127.3} (0.00235 \text{ Wb}) = 0.00079 \text{ Wb}$$

The flux density in the legs can be determined from the equation  $\phi = BA$  :

$$B_{\text{left}} = \frac{\phi_{\text{left}}}{A} = \frac{0.00235 \text{ Wb}}{(0.09 \text{ cm})(0.05 \text{ cm})} = 0.522 \text{ T}$$

$$B_{\text{center}} = \frac{\phi_{\text{center}}}{A} = \frac{0.00156 \text{ Wb}}{(0.15 \text{ cm})(0.05 \text{ cm})} = 0.208 \text{ T}$$

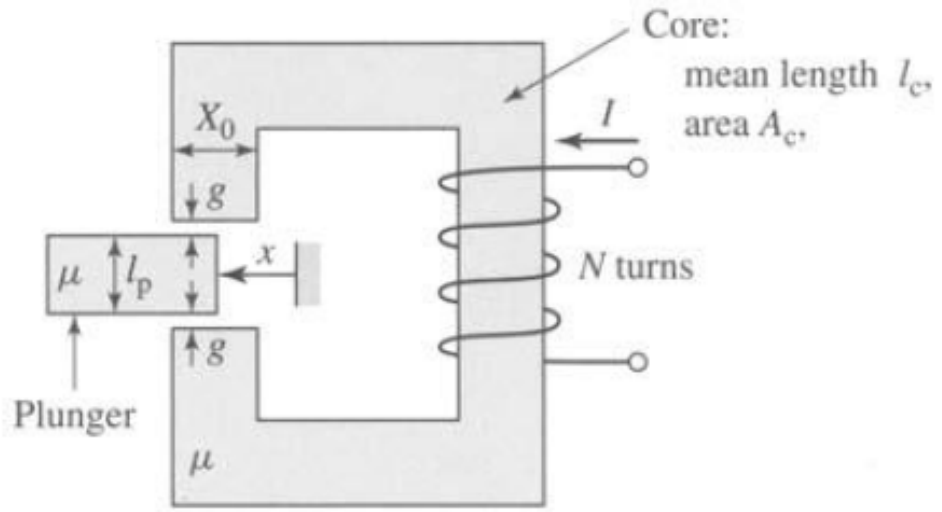
$$B_{\text{right}} = \frac{\phi_{\text{right}}}{A} = \frac{0.00079 \text{ Wb}}{(0.09 \text{ cm})(0.05 \text{ cm})} = 0.176 \text{ T}$$

The magnetic circuit of Fig. 1.25 consists of a core and a moveable plunger of width  $l_p$ , each of permeability  $\mu$ . The core has cross-sectional area  $A_c$  and mean length  $l_c$ . The overlap area of the two air gaps  $A_g$  is a function of the plunger position  $x$  and can be assumed to vary as

$$A_g = A_c \left( 1 - \frac{x}{X_0} \right)$$

You may neglect any fringing fields at the air gap and use approximations consistent with magnetic-circuit analysis.

- a. Assuming that  $\mu \rightarrow \infty$ , derive an expression for the magnetic flux density in the air gap  $B_g$  as a function of the winding current  $I$  and as the



plunger position is varied ( $0 \leq x \leq 0.8X_0$ ). What is the corresponding flux density in the core?

- b. Repeat part (a) for a finite permeability  $\mu$ .

part (a):

$$H_g = \frac{NI}{2g}; \quad B_c = \left( \frac{A_g}{A_c} \right) B_g = B_g \left( 1 - \frac{x}{X_0} \right)$$

part (b): Equations

$$2gH_g + H_c(l_c + l_p) = NI \quad B_g A_g = B_c A_c$$

and

$$B_g = \mu_0 H_g; \quad B_c = \mu H_c$$

can be combined to give

$$2g \frac{B_g}{\mu_0} + \frac{B_c}{\mu} (l_c + l_p) = NI \rightarrow$$

$$2g \frac{B_g}{\mu_0} + \frac{B_g}{\mu} \frac{A_g}{A_c} (l_c + l_p) = NI \rightarrow B_g = \frac{NI}{2g \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu} \frac{A_g}{A_c} (l_c + l_p)}$$

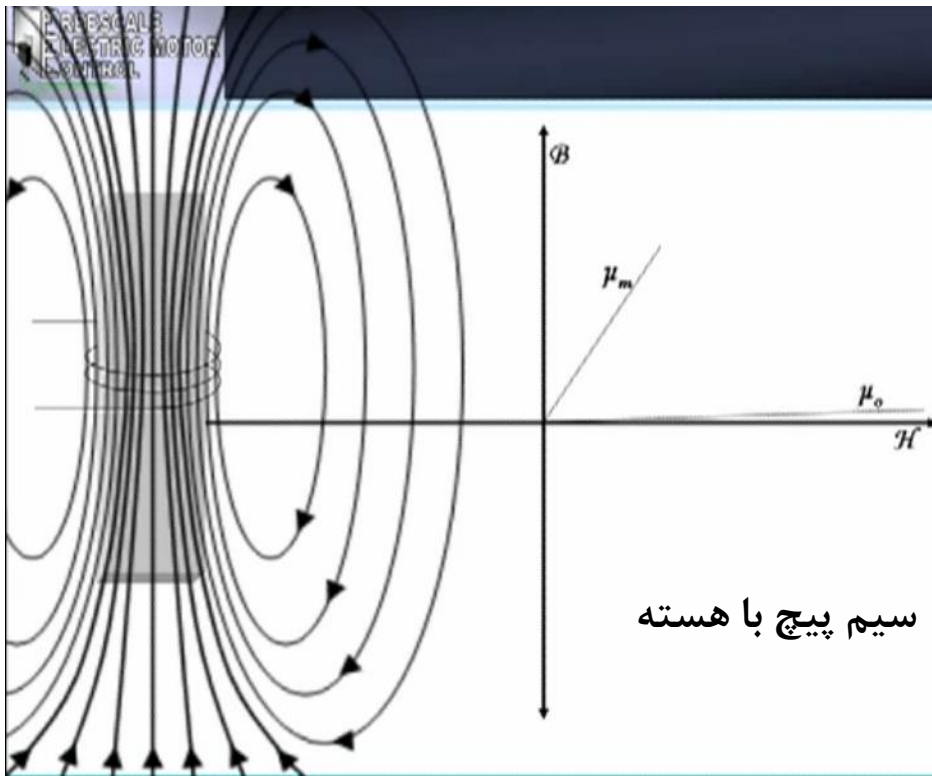
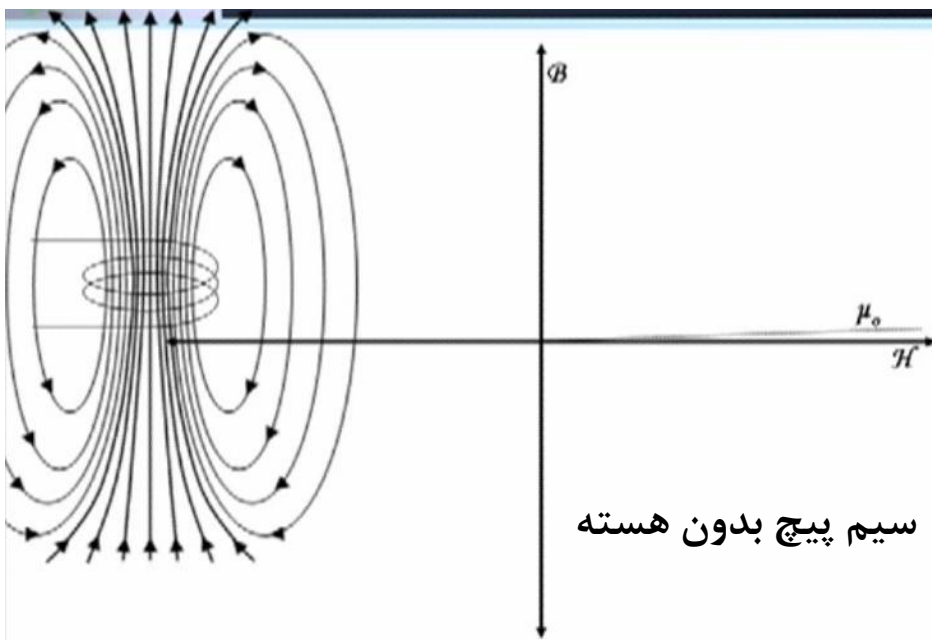
# مشخصه مغناطیسی ( منحنی $B - H$ )

□ در مواد غیر فرومغناطیس ، رابطه خطی بین چگالی شار ( $B$ ) و جریان کویل ( $i$ ) برقرار است. به عبارت دیگر، آنها نفوذپذیری ثابت دارند (برای مثال: هوا). اما برای مواد فرومغناطیسی، نفوذپذیری ثابت نمی باشد.

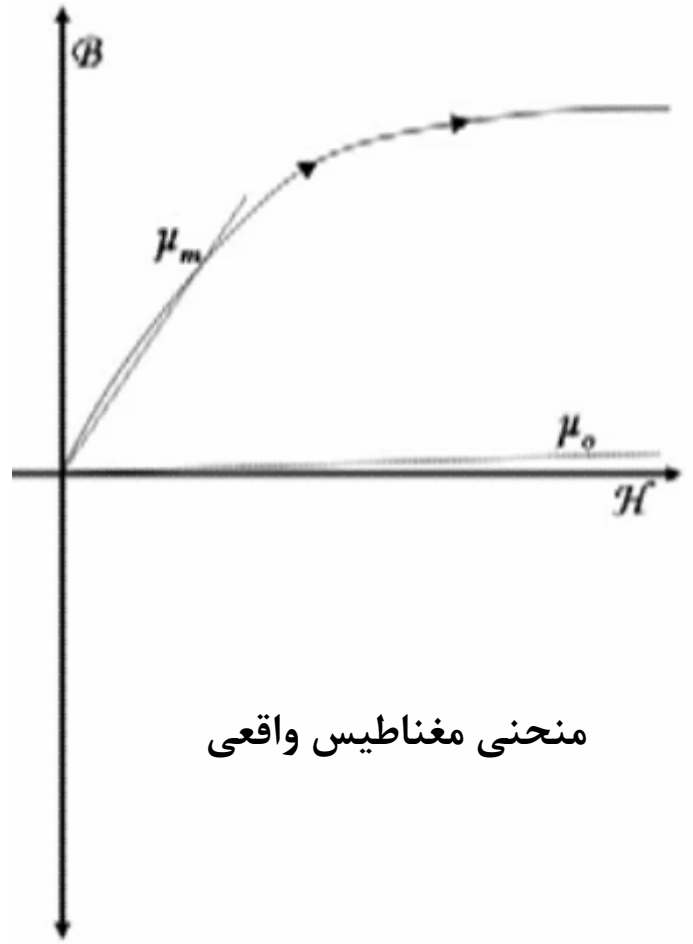
□ برای مواد مغناطیسی، مقدار بزرگتری از  $B$  نسبت به هوا ایجاد می شود و نفوذپذیری آنها بسیار بیشتر از  $\mu_0$  می باشد. نفوذ پذیری در این مواد خطی نمی باشد ولی در رنج وسیعی به جریان وابسته می باشد.

□ نفوذپذیری ، نشانه خاصیت مغناطیسی یک ماده می باشد که به توانایی ماده برای عبور شار مغناطیسی از آن مرتبط است.

□ در ماشینهای الکتریکی ، تاحدودی به یک رابطه خطی بین  $B$  و  $I$  مورد نیاز است که معمولا با محدود کردن جریان به دست می آید.

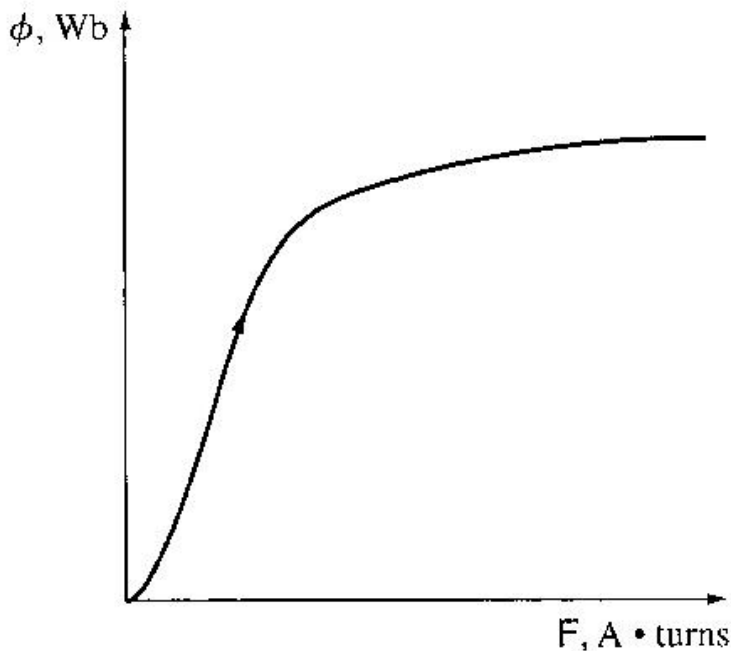


# مشخصه مغناطیسی



# مشخصه مغناطیسی ( منحنی B - H )

به منحنی مغناطیسی (یا منحنی اشباع) نگاه کنید. توجه نمایید که منحنی مطابق بر افزایش جریان DC عبوری از یک کویل دور یک هسته فرومغناطیسی می باشد.



□ افزایش کوچکی در  $mmf$  به یک افزایش بزرگ در شار منجر می شود (ناحیه غیر اشباع).

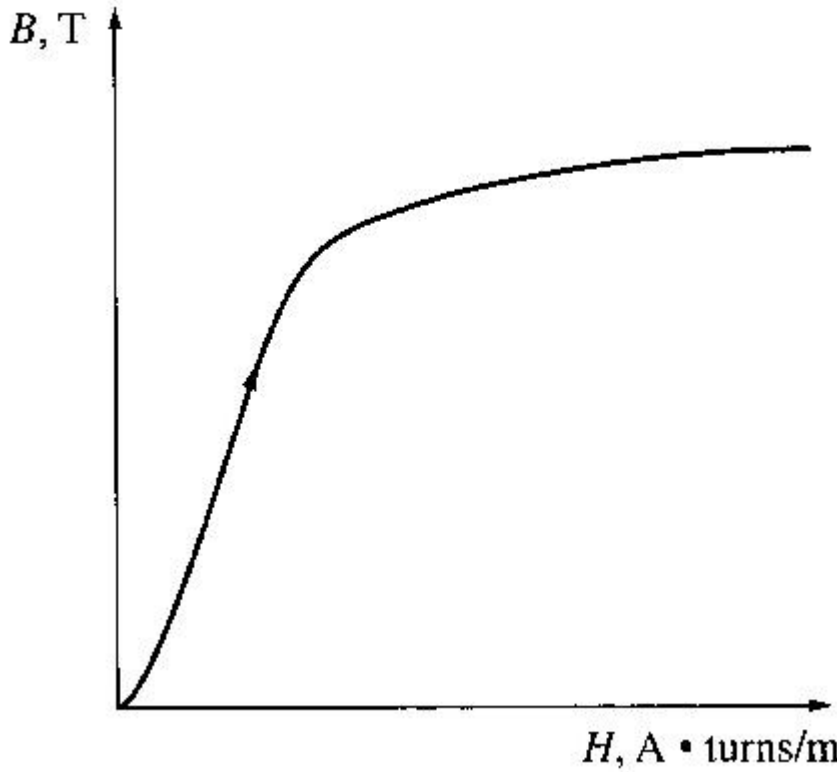
□ بعد از یک نقطه مشخص، افزایش بیشتر  $mmf$  به افزایش کمتری از شار می انجامد (ناحیه گذر یا زانو ((knee region)).

□ سر انجام به نقطه ای می رسیم که هیچ تغییری در شار با افزودن  $mmf$  ایجاد نمی گردد (ناحیه اشباع).

# مشخصه مغناطیسی ( منحنی B - H )

□ از رابطه  $\Phi = BA$  و  $H = Ni/lc = F/lc$  می بینیم که در هر هسته مورد مطالعه شدت میدان مغناطیسی متناسب است با  $mmf$  و چگالی شار مغناطیسی متناسب است با شار.

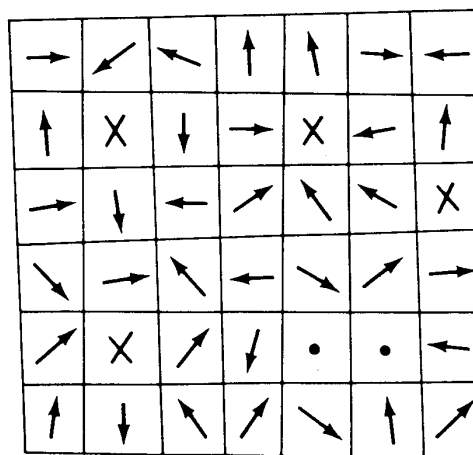
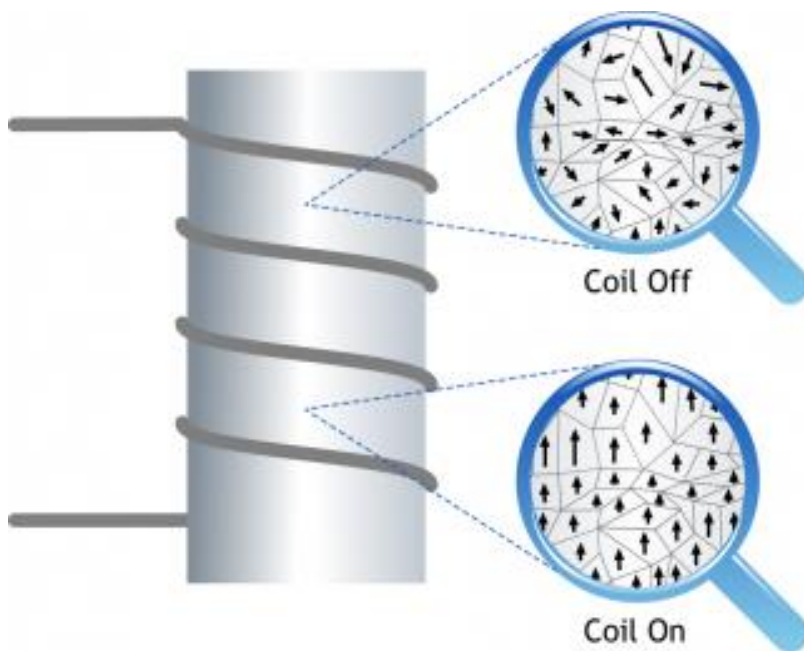
□ نفوذپذیری، شیب منحنی B-H در ناحیه غیر اشباع می باشد



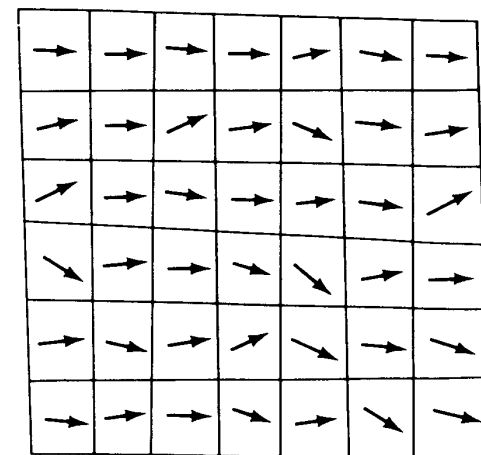
زنراتورها و موتورها برای تولید ولتاژ و گشتاور به شار مغناطیسی وابسته می باشند. بنابراین نیاز به تولید شار به هر اندازه ممکن دارند. به این دلیل بیشتر در محدوده زانو یا ناحیه گذر کار می کنند. این خاصیت غیر خطی به ماشینها رفتار عجیبی را می بخشد.



# توجیه پدیده اشباع پذیری هسته های فرومغناطیس



(a)

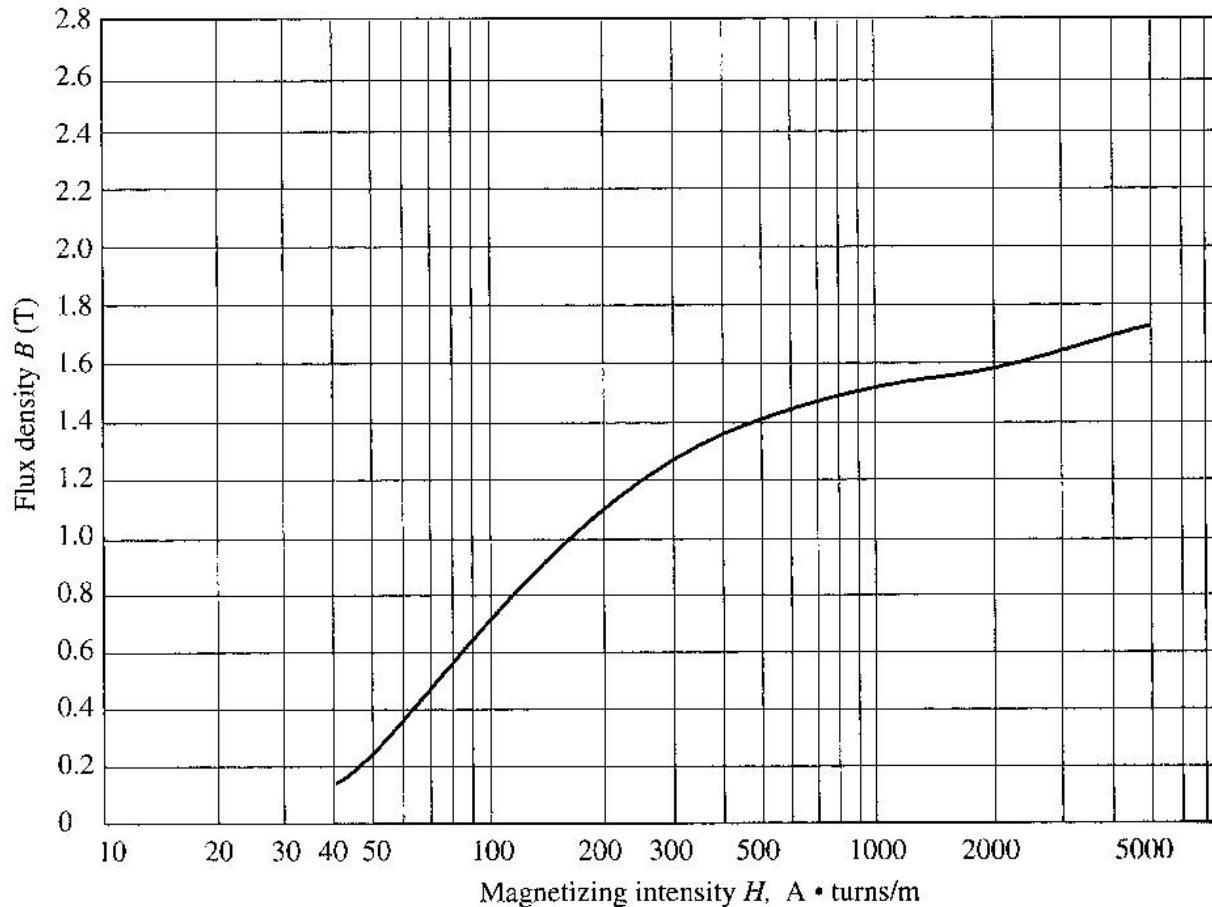


(b)



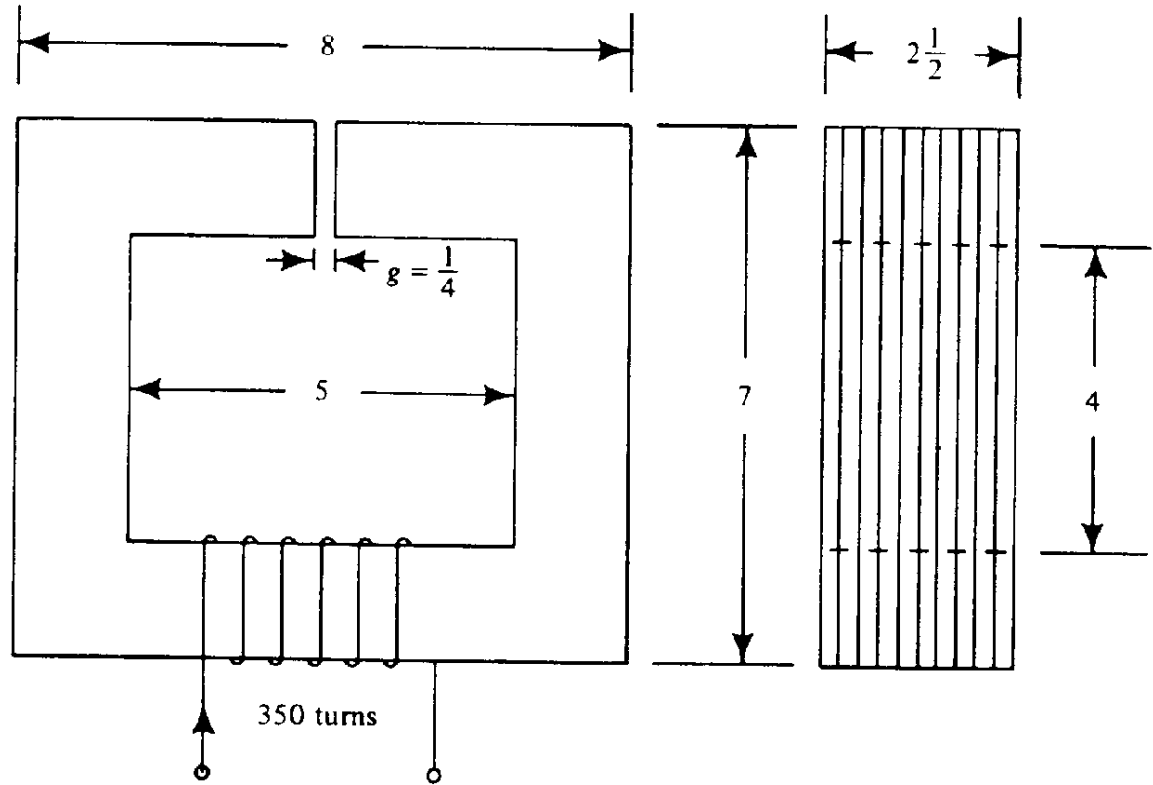
طول مسیر هسته یک میدان مغناطیسی مربع شکل  $55\text{cm}$  و سطح مقطع آن  $150\text{cm}^2$  است. پیچکی با  $200$  دور سیم حول یک ساق آن پیچیده شده است. هسته آزماده ای با منحنی مغناطیسی نشان داده شده در شکل زیر ساخته شده است. (چپمن ص ۳۷ و ۳۸ و ۳۹)

الف: برای ایجاد شار  $0.012$  در هسته چه جریانی لازم است؟ ب: تراوایی نسبی در این جریان چقدر است؟ ج: رلوکتانس چقدر است؟





مثال: شکل‌های زیر مدار مغناطیسی و منحنی  $H - B$  هسته (متشکل از ورقه های فولادی) مربوطه را نشان می دهد. تاثیر مواد غیر مغناطیسی بین ورقه های هسته با اعمال ضریب انباشتگی 0.93 لحاظ میشود. از شار پراکندگی صرف نظر میگردد لیکن اثر خمیدگی شار در فاصله هوایی در نظر گرفته می شود. برای داشتن شار  $5 \times 10^{-4} \text{ Wb}$  در هسته چه مقدار جریان تحریک لازم است.

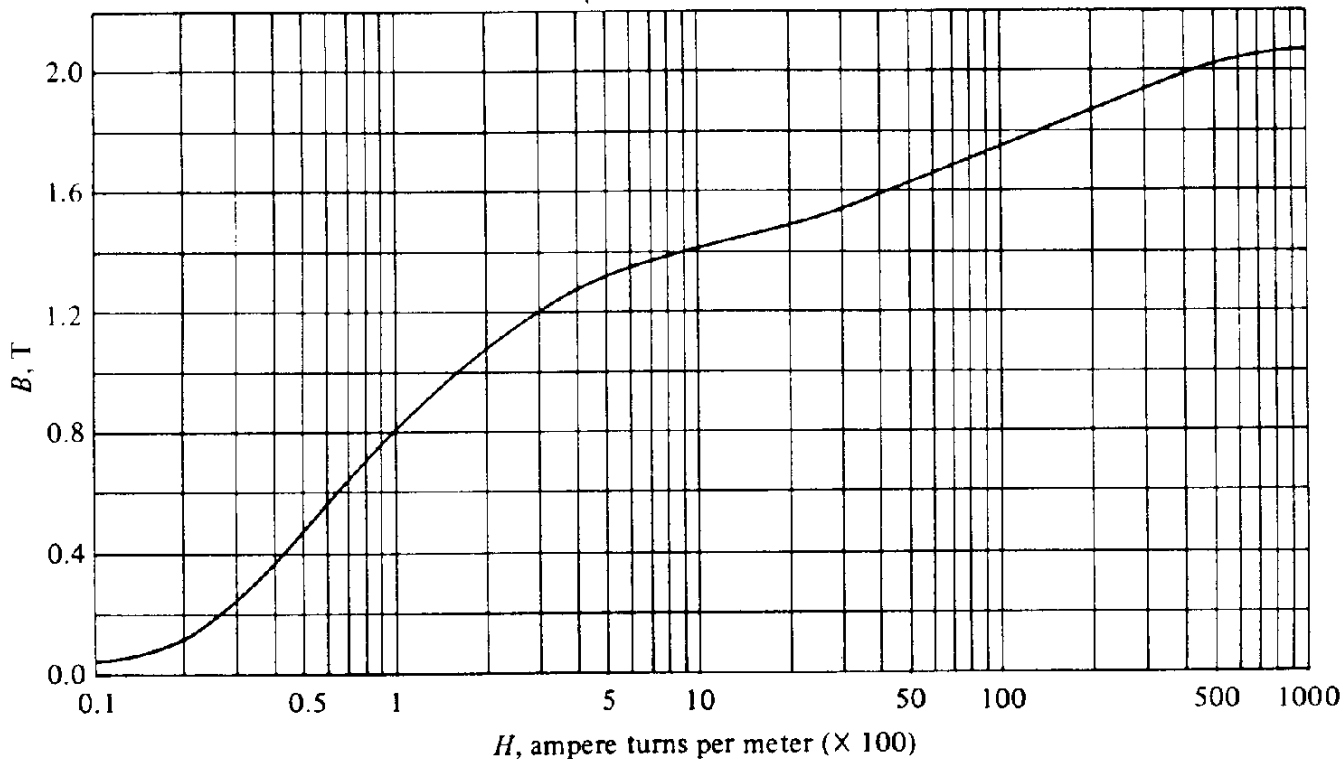


Laminated electromagnet with air gap. Dimensions are in centimeters.

✓ با توجه به نادیده گرفتن شار پراکندگی مسیر موازی برای شار وجود ندارد و تمامی شار به مسیر اصلی یعنی آهن و فاصله هوایی که بطور سری قرار گرفته اند محدود میگردد.

✓ از آنجا که روی ورقه های فولادی با لایه ای از مواد عایقی پوشانده میشود به هنگام انباشتن این ورقه ها و تشکیل هسته ، سطح مقطع ظاهری هسته از مقدار خالص آن ( مواد فرومغناطیس ) بیشتر است. بر این اساس ضریب انباشتگی به شرح زیر تعریف میگردد:

**ضریب انباشتگی = نسبت سطح خالص مواد آهنی به کل سطح مقطع هسته**



DC magnetization curve for M-19 fully processed 29-gauge steel.



$$A_{iron} = (1.5 \times 2.5 \times 0.93) \times 10^{-4} = 3.49 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$l_{iron} = 2(6.5 + 5.5) \times 10^{-2} = 0.24 \text{ m}$$

$$B_{iron} = \frac{\phi}{A_{iron}} = \frac{5.0 \times 10^{-4}}{3.49 \times 10^{-4}} = 1.43 \text{ T}$$

from the  $B-H$  curve  $\Rightarrow H_{iron} = 1000 \text{ At/m}$

$$\mathfrak{F}_{iron} = H_{iron} l_{iron} = 1000 \times 0.24 = 240 \text{ At}$$

$$A_{air} = (a + g)(b + g) = (1.5 + 0.25)(2.5 + 0.25) \times 10^{-4} \\ = 4.81 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$B_{air} = \frac{\phi}{A_{air}} = \frac{5 \times 10^{-4}}{4.81 \times 10^{-4}} = 1.04 \text{ T}$$

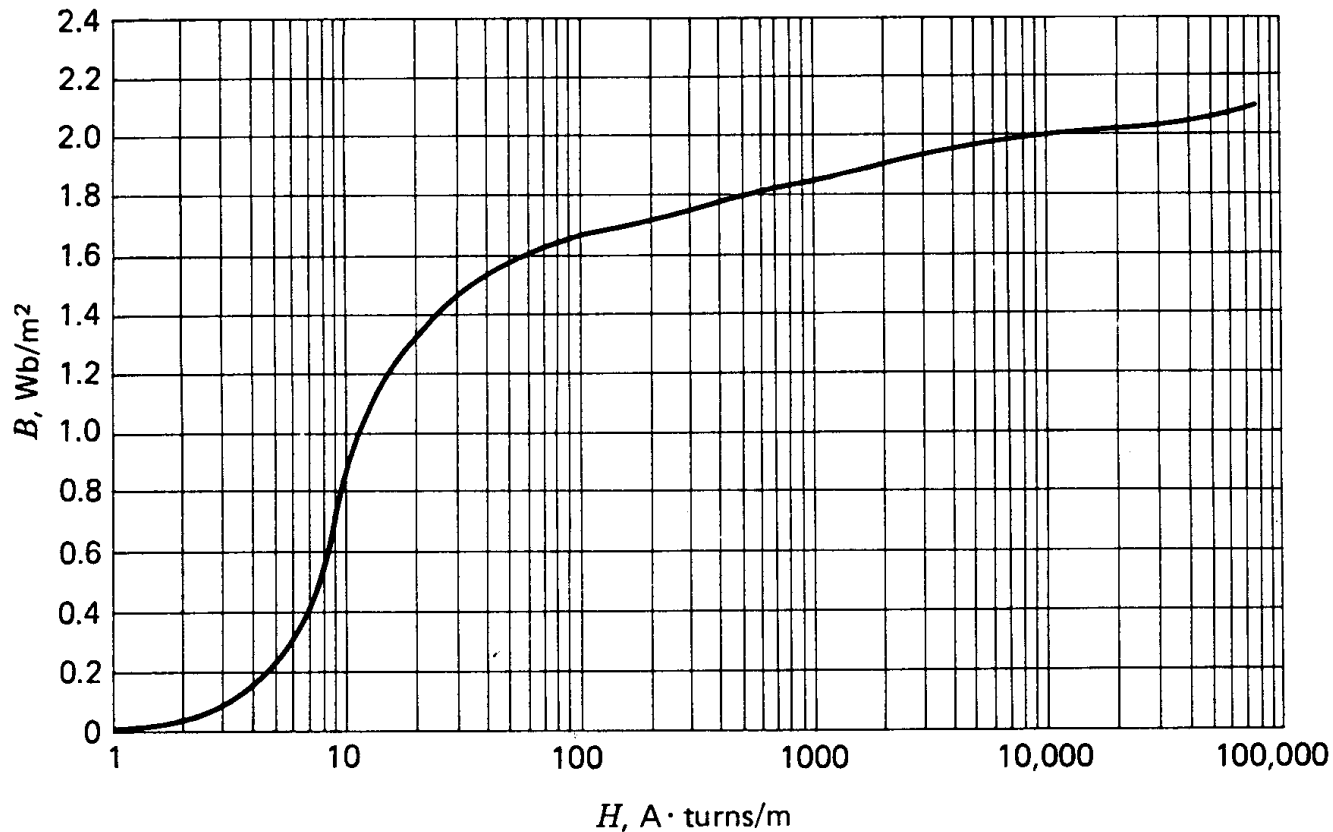
$$H_{air} = \frac{B_{air}}{\mu_0} = \frac{1.04}{4\pi \times 10^{-7}} = 8.27 \times 10^5 \text{ At/m}$$

$$\mathfrak{F}_{air} = H_{air} g = 8.27 \times 10^5 \times 0.25 \times 10^{-2} = 2070 \text{ At}$$

$$\mathfrak{F}_{total} = \mathfrak{F}_{iron} + \mathfrak{F}_{air} = 240 + 2070 = 2310 \text{ At} \quad , \quad i = \frac{\mathfrak{F}_{total}}{N} = \frac{2310}{350} = 6.6 \text{ A}$$

# تحلیل مدار مغناطیسی غیر خطی به روش خط بار

شکل ۱-۱ کتاب P.C.Sen، مدار مغناطیسی یک رله ساده را نشان می دهد. تعداد دور سیم پیچ ۵۰۰ دور، جریان تحریک ۴ A، طول متوسط هسته ۳۶۰ mm، طول فاصله هوایی ۱ mm و جنس هسته از نوع فولاد ریخته گری (با منحنی B-H مطابق شکل زیر) می باشد. چگالی شار در فاصله هوایی را محاسبه نمائید؟



$$Ni = H_g l_g + H_c l_c = \frac{B_g}{\mu_0} l_g + H_c l_c \rightarrow Ni = \frac{B_g}{\mu_0} l_g + H_c l_c$$

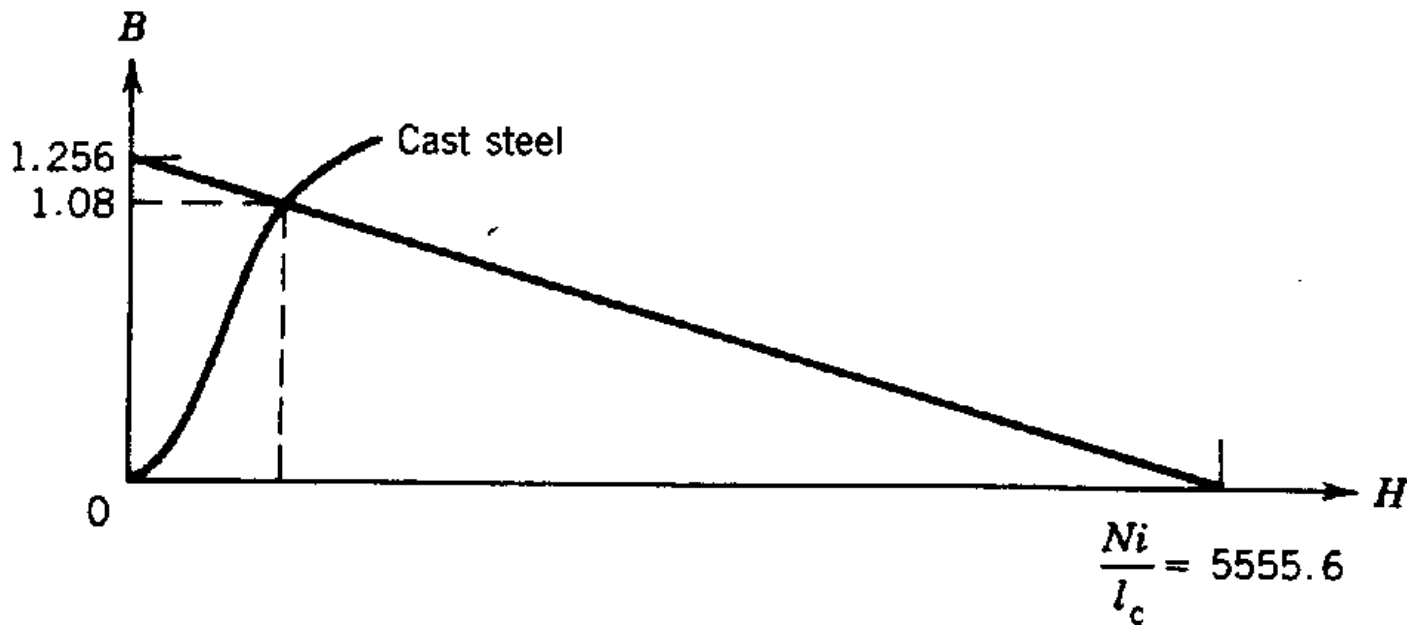
$$B_g = B_c \Rightarrow B_c = \left( -\mu_0 \frac{l_c}{l_g} \right) H_c + \left( \frac{Ni \mu_0}{l_g} \right)$$

$$y = m x + c$$

$$m = -\mu_0 \frac{l_c}{l_g} = -4\pi \times 10^{-7} \frac{360}{3} = -2.26 \times 10^{-4}$$

$$c = \frac{Ni \mu_0}{l_g} = \frac{500 \times 4 \times -4\pi \times 10^{-7}}{2 \times 10^{-3}} = 1.256 T$$

نقطه تلاقی خط بار و محور ( H = 0 , B = 1.256 )



محل تلاقی خط بار و منحنی مغناطیسی هسته مترادف با چگالی شار  $B = 1.08$  T می باشد. با داشتن مقدار  $B$  و سطح مقطع هسته و هوا مقادیر  $\Phi$  برای هر یک از این قسمتها قابل محاسبه می باشد.



# تحلیل مدار مغناطیسی غیر خطی به روش سعی و خطا (Trail and error)

مراحل حل مسئله به روش سعی و خطا :

۱. فرض نمودن ( حدس زدن ) مقدار چگالی شار در مدار و تحلیل مدار به طریق مسئله نوع اول.

$$۲. محاسبه  $H_c$  به کمک منحنی B-H و  $H_g = \frac{B_g}{\mu_0}$$$

$$۳. محاسبه  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c + \mathcal{F}_g$  ،  $\mathcal{F}_g = H_g l_g$  ،  $\mathcal{F}_c = H_c l_c$$$

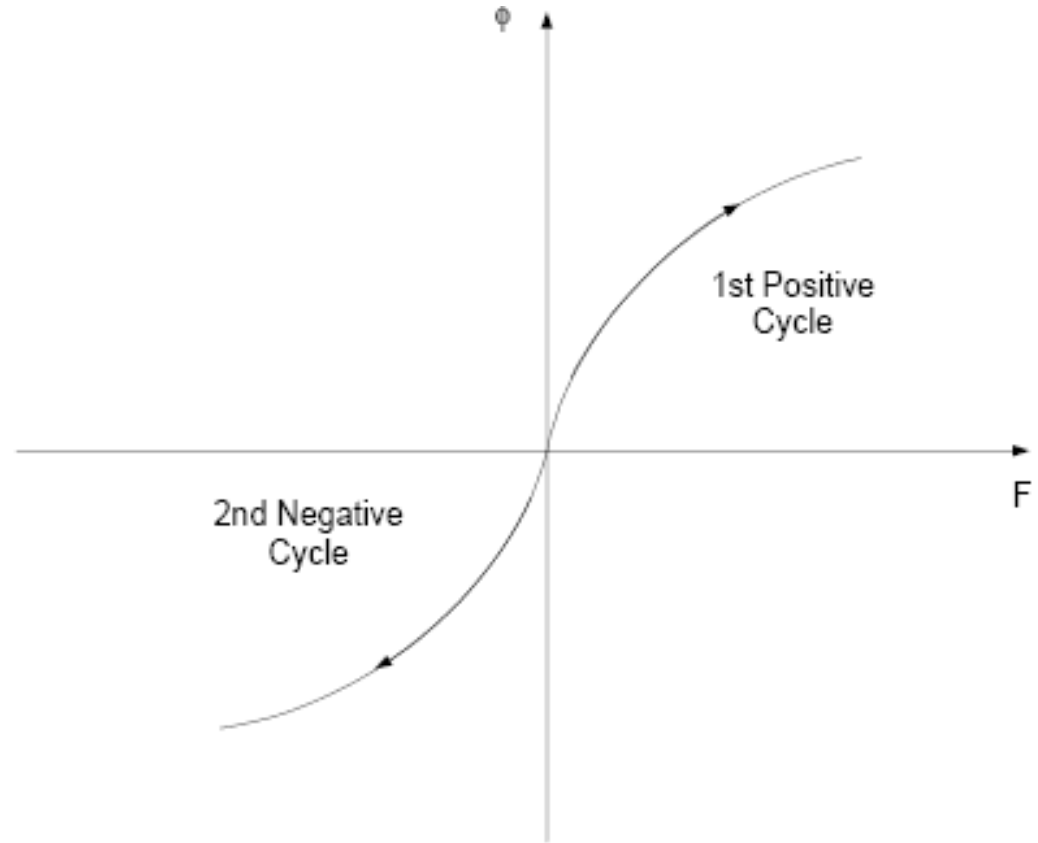
$$۴. محاسبه  $i = \frac{\mathcal{F}}{N}$$$

۵. اگر جریان حاصل نسبت به جریان داده شده متفاوت باشد مقدار جدیدی برای چگالی شار فرض نموده و مراحل فوق آنقدر تکرار می‌گردد تا جریان بدست آمده و جریان داده شده به اندازه کافی ( براساس شاخص دقت مورد نیاز ) نزدیک باشند.

تذکر : بدیهی است اگر از قسمت آهنی صرفنظر نموده و تمام mmf به فواصل هوایی اعمال گردد چگالی شار بدست آمده حداکثر مقدار چگالی شار ممکن خواهد بود و قاعدتاً حدس اولیه برای B باید مساوی یا کوچکتر از این مقدار باشد.

# تلفات انرژی در هسته فرومغناطیس

تمامی بحثهای قبلی بر اساس عبور جریان DC از کویل می باشد. بر اساس درک ما از مطالب قبلی منحنی مغناطیسی برای یک سیستم AC، از لحاظ تئوری به صورت زیر پیش بینی می گردد.

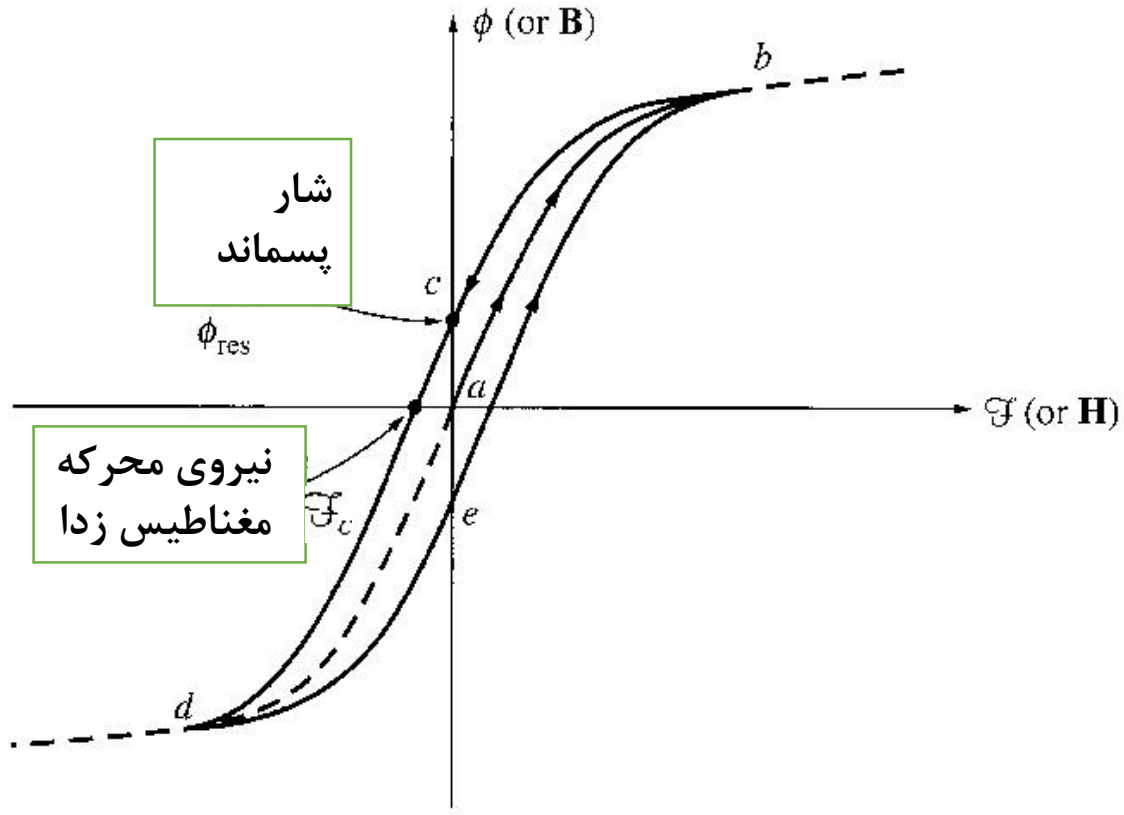
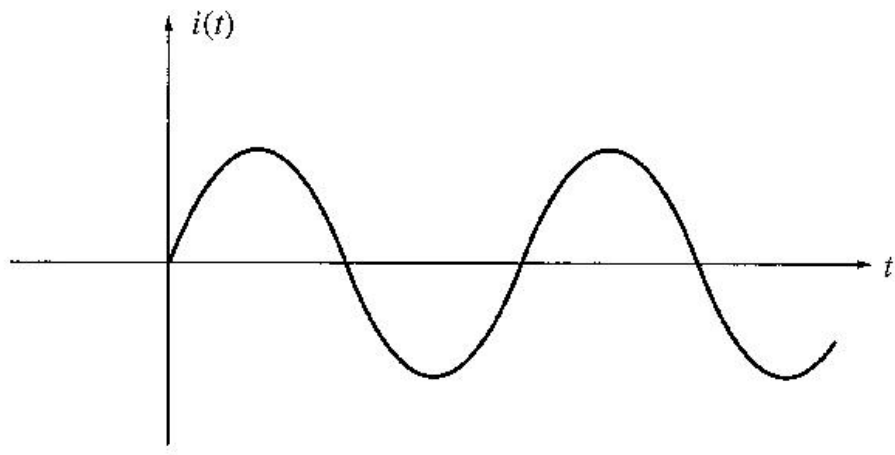


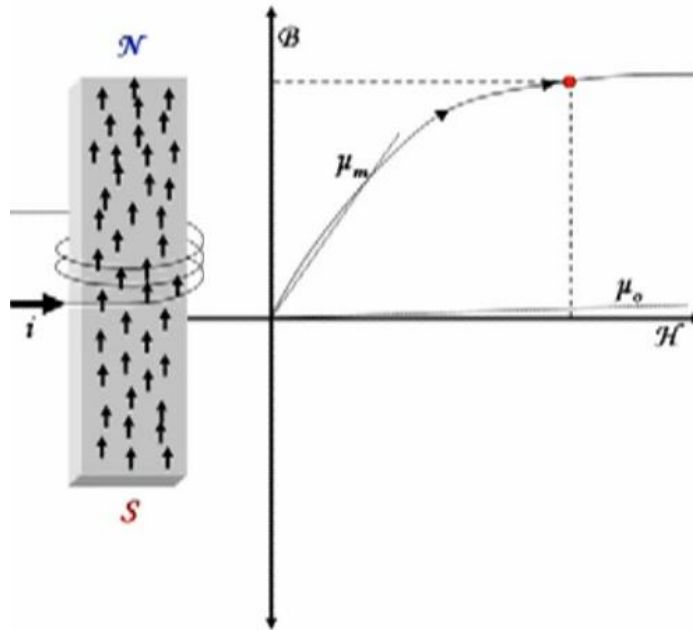
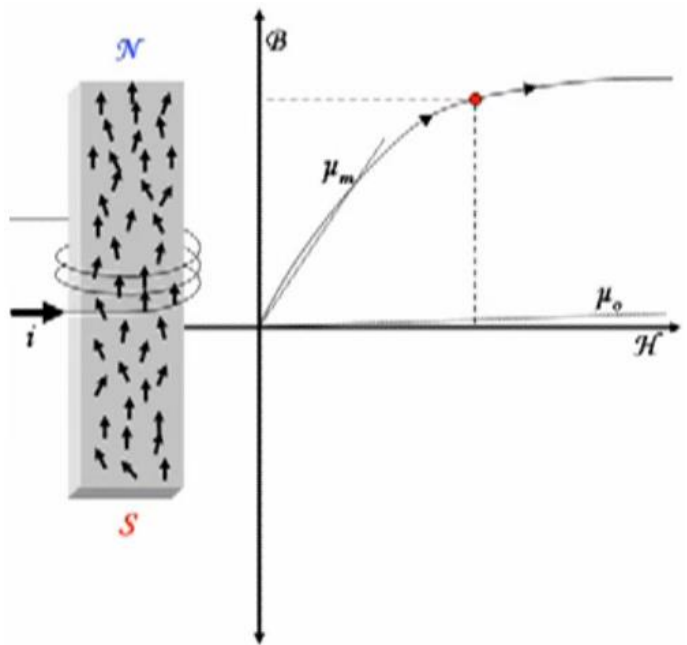
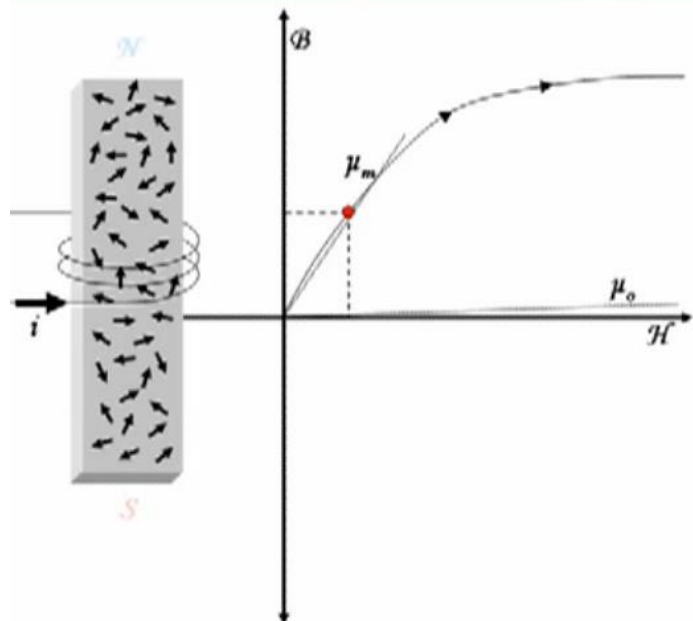
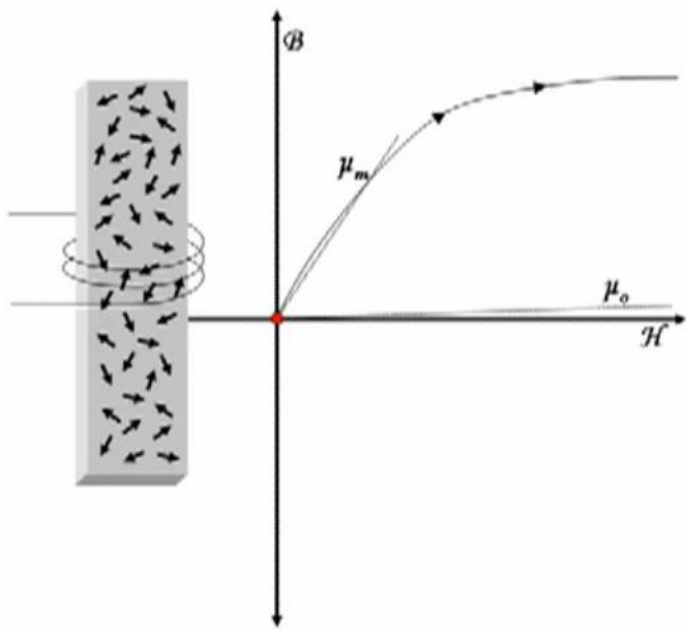
متأسفانه فرض بالا در زمانی صحیح می باشد که یک ماده مغناطیسی "کامل" داشته باشیم که هیچگونه شار پس ماندی در حین سیکل منفی باقی نماند.

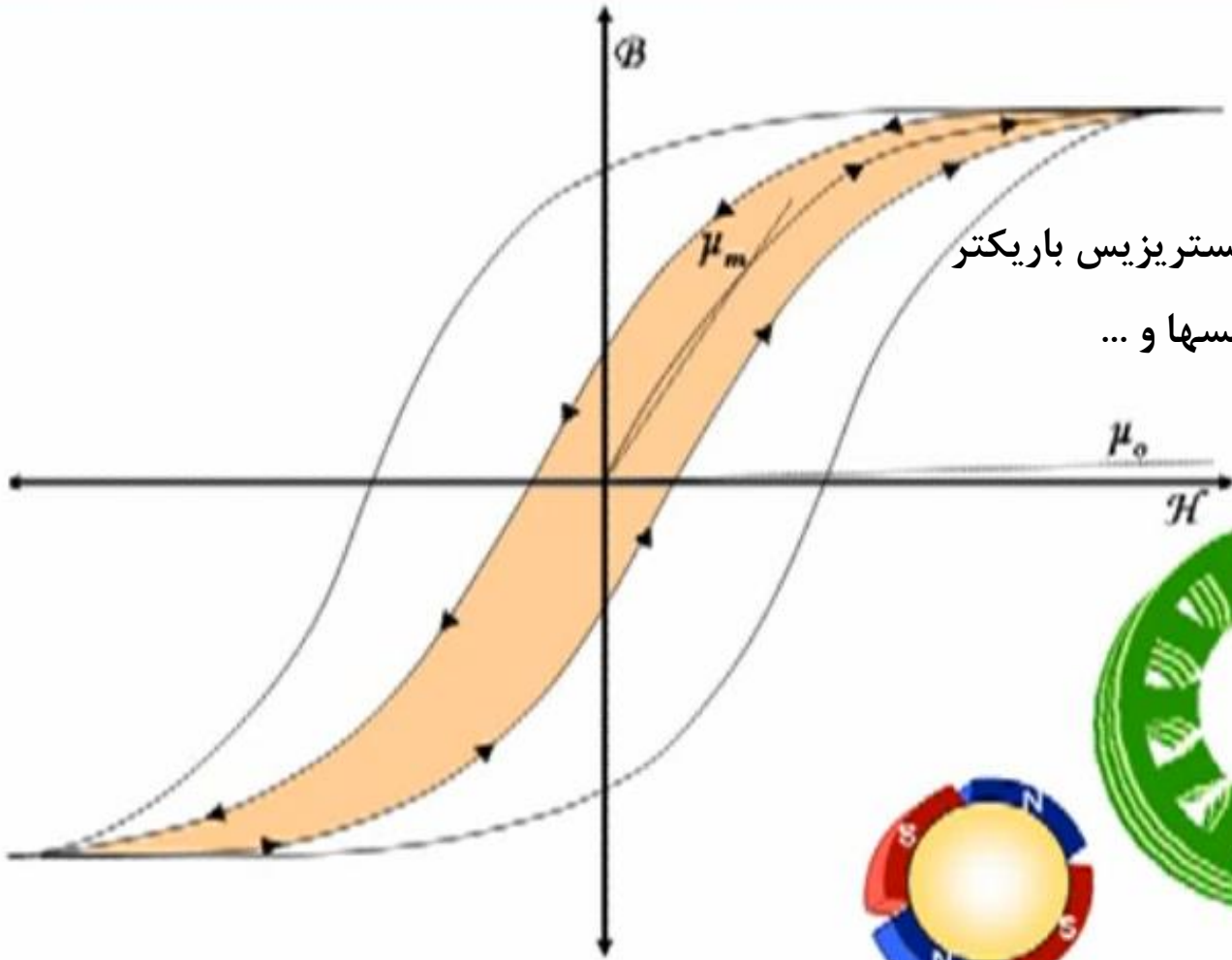
# حلقه هیستریزیس



Part 2 Magnetic Fields Introduction a.flv







مواد با منحنی هیستریزیس باریکتر  
برای موتورها، ترانسها و ...

مواد با منحنی هیستریزیس پهن تر  
برای هسته های مغناطیس داریم



# انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی

$$p = \frac{dW}{dt} = ei, \quad dW = p dt = ei dt$$

$$e = \frac{d\lambda}{dt}$$

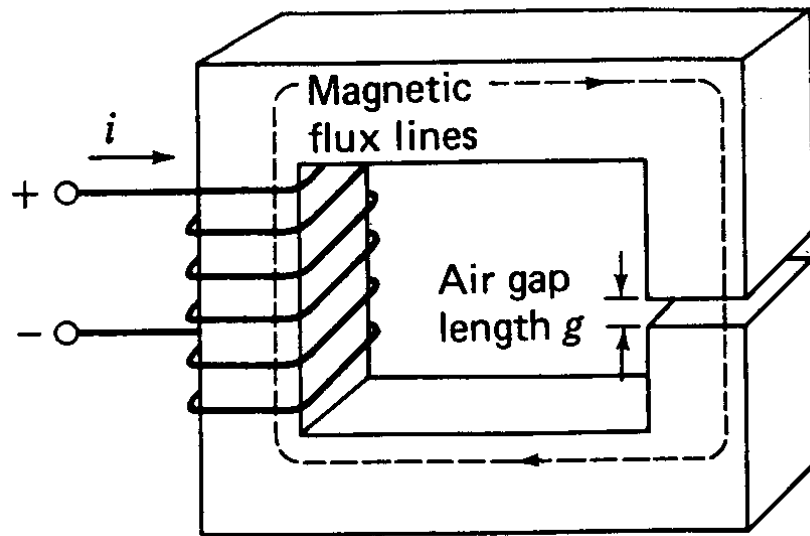
$$dW_{field} = dW_f = i d\lambda$$

$$W_f = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} i d\lambda, \quad \lambda = N\phi$$

$$W_f = \int_{\phi_1}^{\phi_2} N i d\phi, \quad d\phi = A_c dB$$

$$W_f = \int_{B_1}^{B_2} N A_c i dB, \quad i = \frac{H l_c}{N}$$

$$W_f = \int_{B_1}^{B_2} A_c l_c H dB = (Vol) \int_{B_1}^{B_2} H dB$$



- ✓ از مقاومت اهمی سیم پیچ صرفنظر میشود.
- ✓ از شار پراکندگی صرفنظر میشود.
- ✓ از تلفات هسته صرفنظر میشود.

$$W_f = \text{انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی}$$

$$W_h = Vol \int H dB$$

$$P_h = f W_h = ( Vol ) f \times A_{loop}$$

$$P_h = k_h ( Vol ) f B_{max}^n$$

حجم هسته = Vol

انرژی تلف شده در هسته در یک سیکل کامل = W<sub>h</sub>

تلفات هیستریزیس = P<sub>h</sub>

ضریب تلفات هیستریزیس (وابسته به جنس ماده) = k<sub>h</sub>

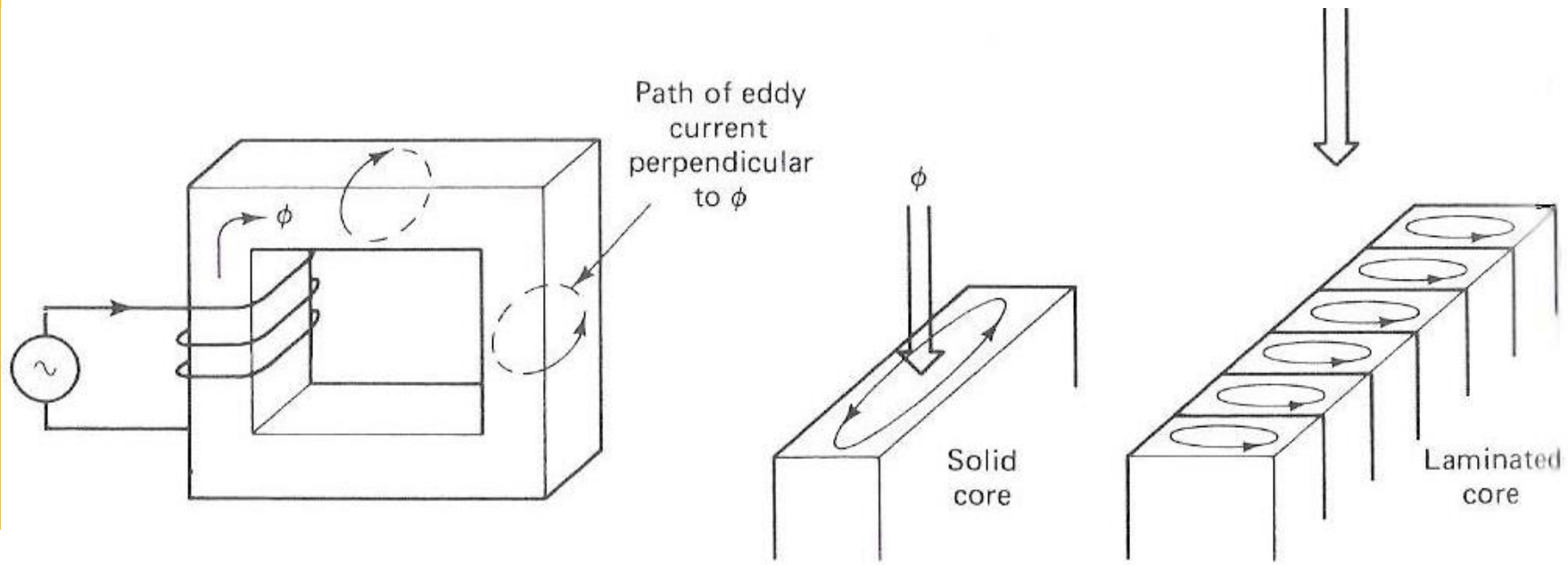
فرکانس برق = f

ماکزیمم چگالی شار درون هسته = B<sub>max</sub>

عددی بین 1.5 تا 2.5 (عموماً 1.6) = n

# Eddy Current Loss

1. A time-changing flux induces voltage within a ferromagnetic core.
2. These voltages cause swirls of current to flow within the core – eddy currents.
3. Energy is dissipated (in the form of heat) because these eddy currents are flowing in a resistive material (iron)
4. The amount of energy lost to eddy currents is proportional to the **size of the paths they follow** within the core.
5. To reduce energy loss, ferromagnetic core should be broken up into small strips, or laminations, and build the core up out of these strips. An insulating oxide or resin is used between the strips, so that the current paths for eddy currents are limited to small areas.



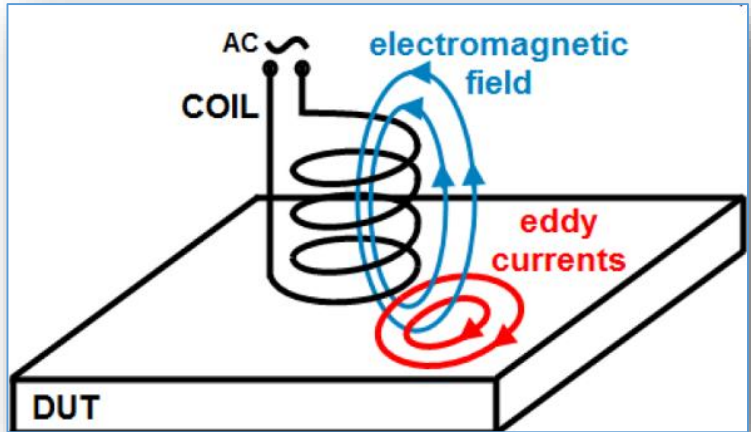
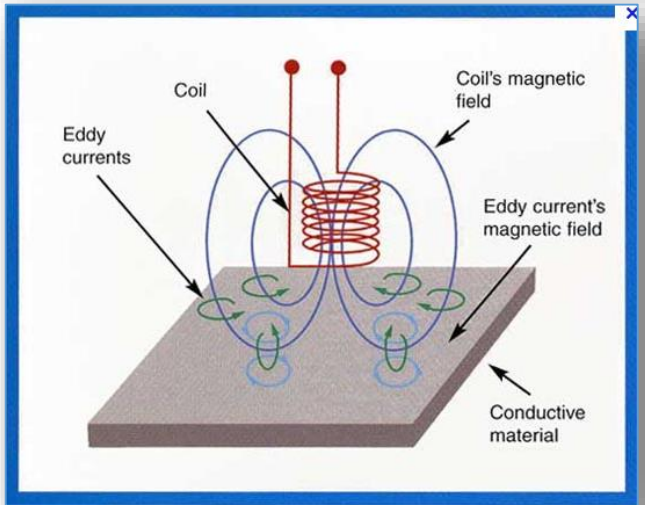
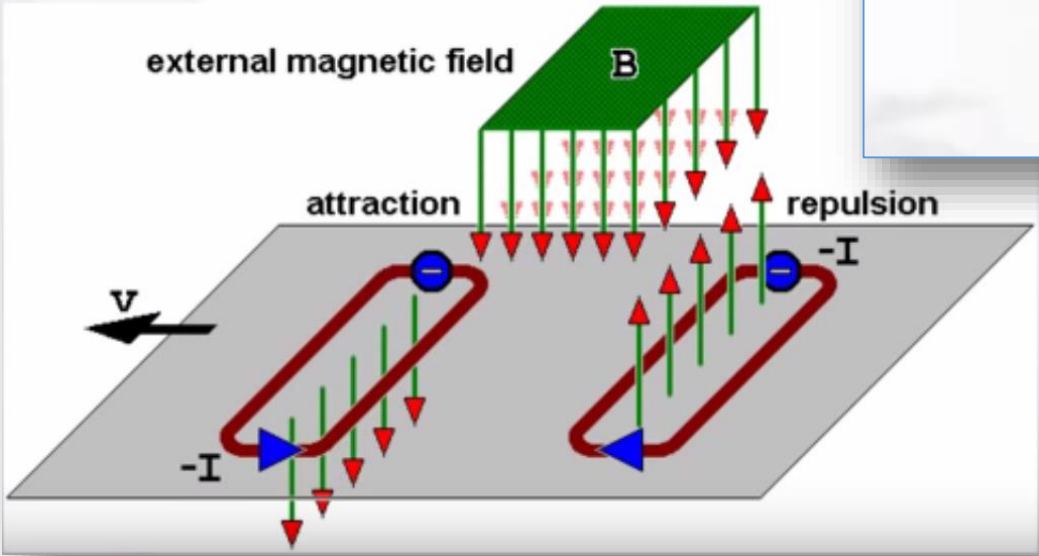




# Eddy current

The magnitude of eddy currents is given by

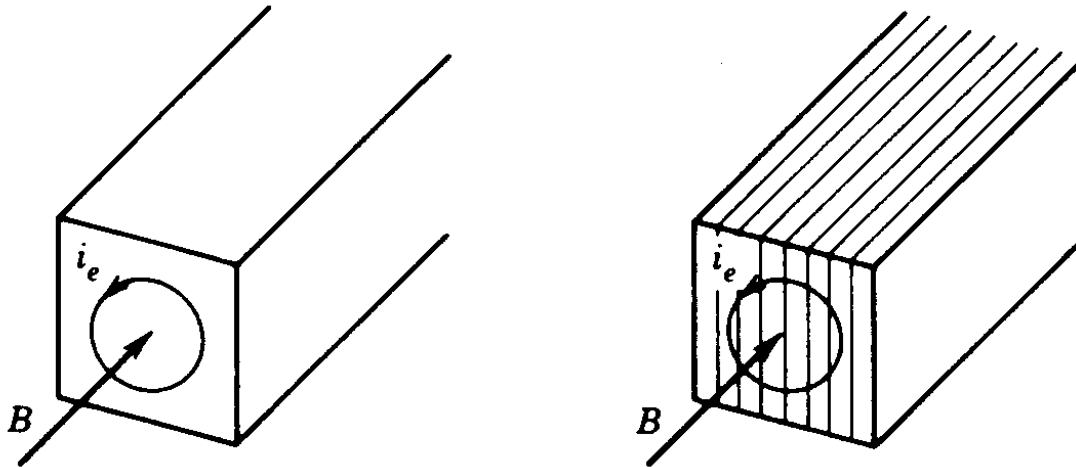
$$I = \frac{-1}{R} \frac{d\phi_B}{dt}$$



## وضعیت جریان فوکو در :

هسته یکپارچه ( شکل سمت چپ )

هسته مورق ( شکل سمت راست )



$$P_e = k_e (Vol) f^2 B_{\max}^2$$

اثرات نامطلوب جریانهای فوکو :

۱- بر اساس قاعده لنز mmf تولید شده توسط جریانهای فوکو با mmf تحریک اصلی مدار مخالفت نموده و شار را تضعیف میکند. این اثر تضعیفی بویژه در قسمتهای مرکزی هسته شدیدتر است. اثر این موضوع عدم استفاده بهینه از مواد مغناطیسی است.

۲- برقرار شدن جریانهای فوکو در هسته سبب ایجاد گرما و اتلاف انرژی میگردد.

## تلفات آهنی یا تلفات هسته

تلفات هیستریزیس و فوکو را مجموعاً تلفات آهنی یا تلفات هسته نامیده می شود.

$$P_{core} = P_{iron} = P_c = P_h + P_e =$$

$$k_h (Vol) f B_{max}^n + k_e (Vol) f^2 B_{max}^2$$

□ تلفات هیستریزیس با فرکانس و تلفات فوکو با مجذور فرکانس تناسب دارد.

□ تلفات هیستریزیس در هسته های ماشین ها حدوداً با چگالی شار به توان ۱.۶ و تلفات فوکو با توان ۲

چگالی شار متناسب است. چنانچه بطور تقریب هردو این تلفات را با توان ۲ چگالی شار متناسب

$$P_c \propto B_{max}^2 \quad \text{بگیریم در آنصورت:}$$

□ تلفات آهنی ماشینها با حجم ( و وزن ) هسته متناسب می باشد. این نکته از لحاظ طراحی بهینه

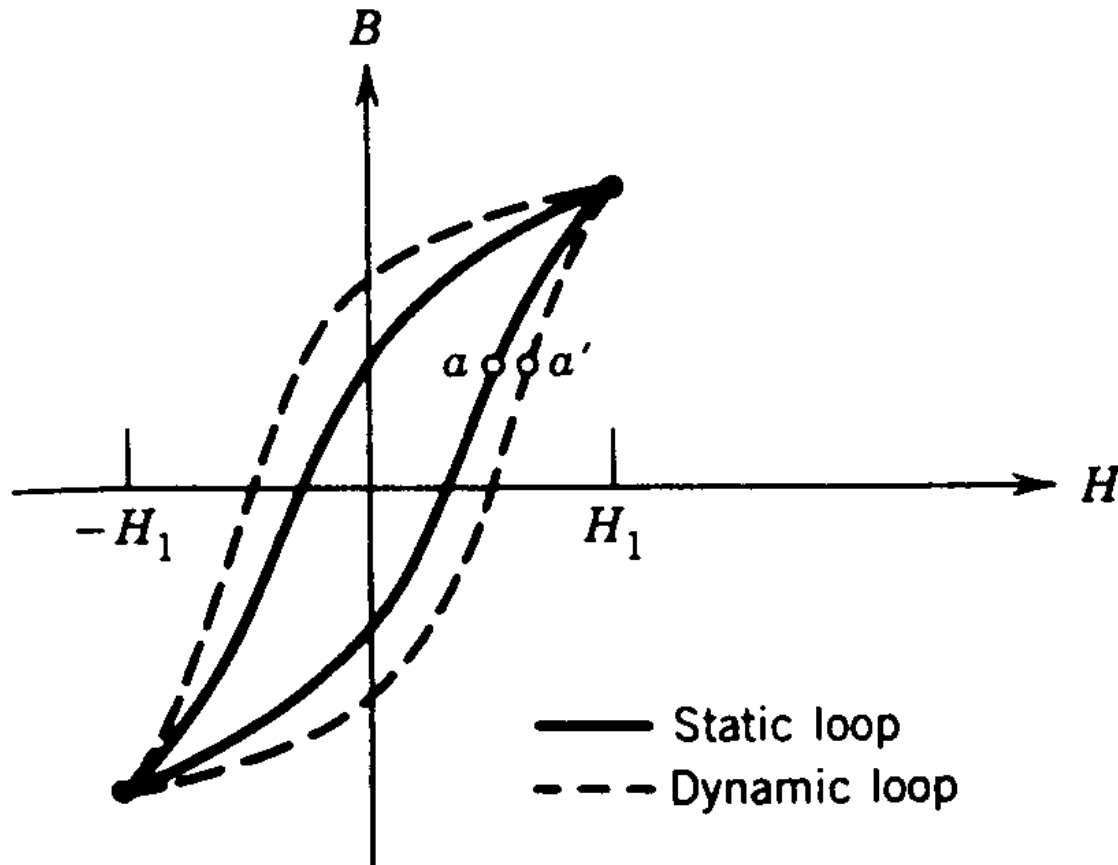
ماشین مهم می باشد.

□ تلفات هیستریزیس با فرکانس و تلفات فوکو با مجذور فرکانس متناسب است و در فرکانسهای بالا (

تجهیزات مخابراتی و ... ) استفاده از هسته های معمولی حتی بصورت ورقه های نازک مقدور نیست.

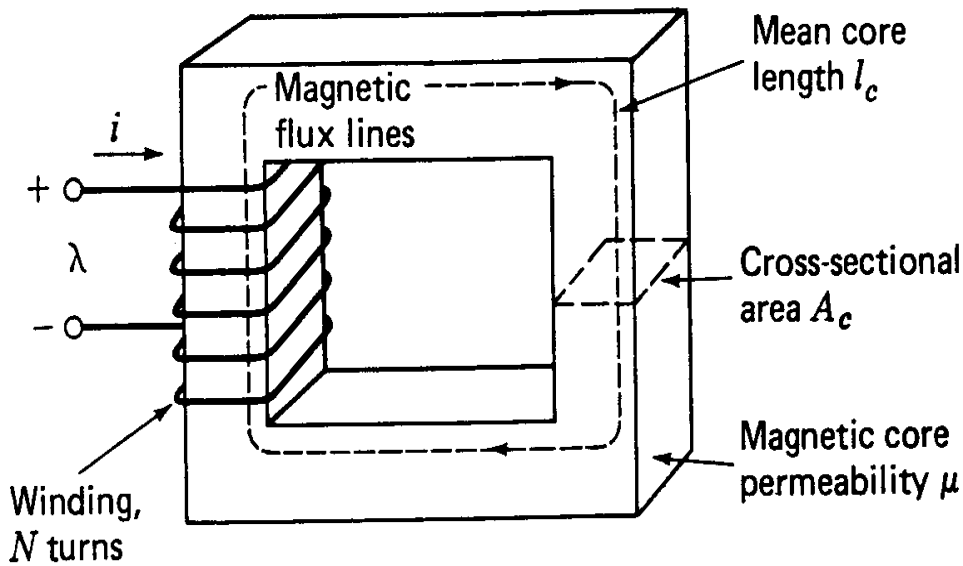
# حلقه هیستریزیس دینامیک

حلقه هیستریزیس معمولی تحت تاثیر جریان فوکو بزرگتر شده ( مطابق شکل زیر ) و به حلقه هیستریزیس دینامیک یا حلقه انرژی موسوم است.  
 سطح داخل این حلقه متناسب با تلفات آهنی ( هیستریزیس + فوکو ) در واحد حجم در هر سیکل می باشد.



# پیوند خوردگی شار

خطوط شار مغناطیسی روی خود بسته می شوند و می توانند با مدارهای الکتریکی (سیم پیچ ها و ... ) پیوند بخورند. به شار پیوند خورده ( درگیر شده ) با مدار، شار دور و به این پدیده پیوند خوردگی شار ( Flux Linkage ) گفته می شود.



شاری که با یک مدار پیوند می خورد ممکن است ناشی از عبور جریان از همان مدار باشد و یا شار یک میدان بیرونی و ناشی از سیم پیچها یا آهنربائی دیگر

اگر تمام دورهای یک سیم پیچ  $N$  دوری با شار مشابه ای پیوند بخورد شار دور عبارتست از :

$$\lambda = N \phi$$

# اندوکتانس یا ضریب القا ( اندوکتانس )

برای یک مدار الکتریکی که در آن جریان و شار مغناطیسی پیوند می خورند پارامتر اندوکتانس تعریف می شود. در مدار مغناطیسی خطی نسبت شار دور به جریان ( شار دور به ازای یک آمپر ) اندوکتانس نامیده می شود. اندوکتانس حاصل از شار دور ناشی از جریان خودی اندوکتانس خودی و اندوکتانس حاصل از شار دور تولید شده توسط مدارهای دیگر اندوکتانس متقابل نامیده می شود.

$$\phi = \frac{N i}{\mathfrak{R}}, \quad \lambda = N \phi = \frac{N^2 i}{\mathfrak{R}} = L i$$

فرآیند محاسبه اندوکتانس

$$L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} = \frac{\mu_0 \mu_r A_c N^2}{l_c}$$

عبور جریان از سیم پیچ

برقراری شار در مدار مغناطیسی

$$e = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d}{dt} (L i) = L \frac{d i}{dt} + i \frac{d L}{dt}$$

پیوند خوردن شار با سیم پیچ

$$e = L \frac{d i}{dt}$$

تعریف ضریب خود القا برای مدار مغناطیسی خطی

القا برق در سیم پیچ براساس قانون فاراده

$$L = \frac{\lambda}{i} = \frac{N \phi}{i} = \frac{N A_c B}{H l_c} =$$

رابطه emf در مدار مغناطیسی ایستا و خطی که

مقدار L ثابت است

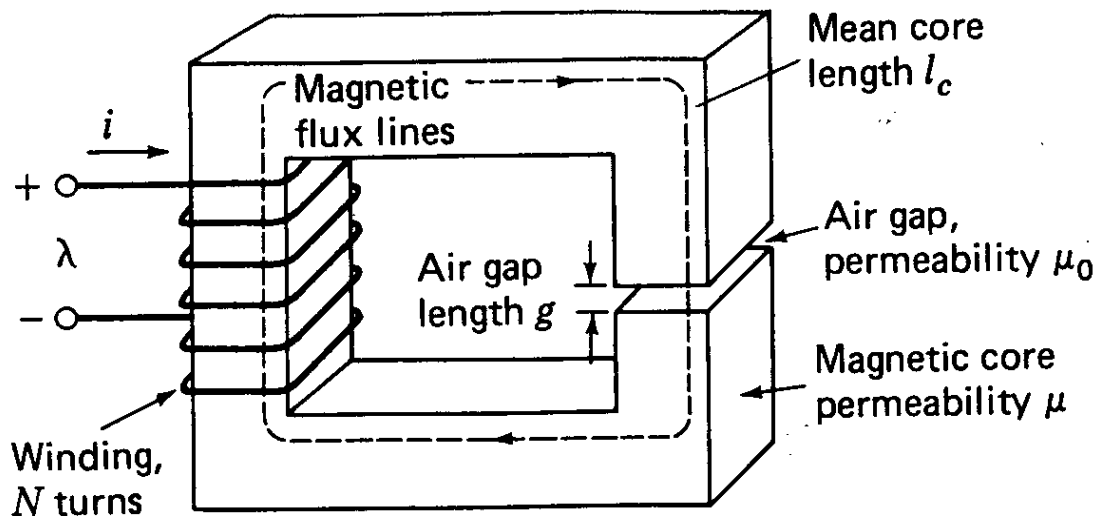
$$L = \frac{N^2 A_c B}{H l_c} = \left( \frac{N^2 A_c}{l_c} \right) \left( \frac{B}{H} \right)$$

L در مدار مغناطیسی غیر خطی به کمک منحنی B-H





# اندوکتانس در مدار تک سیم پیچه با فاصله هوایی و هسته ایده آل



$$\mu_r \rightarrow \infty$$

$$\mathcal{R}_{core} \rightarrow 0$$

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_g = \frac{g}{\mu_0 A_c}$$

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{\mu_0 A_c N^2}{g}$$

The inductor of Fig. 1.27 has a core of uniform circular cross-section of area  $A_c$ , mean length  $l_c$  and relative permeability  $\mu_r$  and an  $N$ -turn winding. Write an expression for the inductance  $L$ .

The inductor of Fig. 1.27 has the following dimensions:

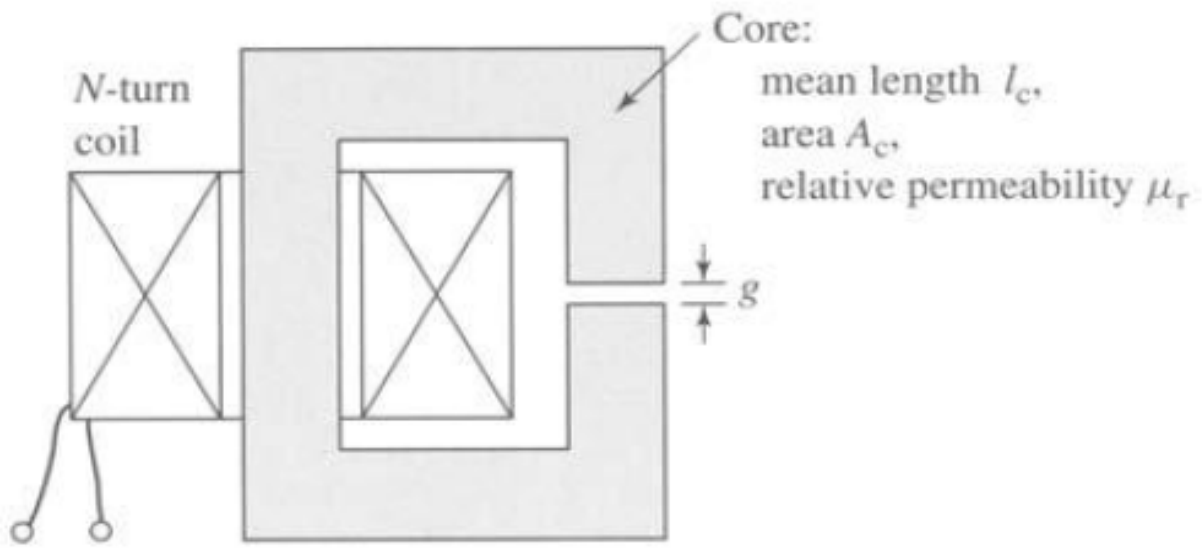
$$A_c = 1.0 \text{ cm}^2$$

$$l_c = 15 \text{ cm}$$

$$g = 0.8 \text{ mm}$$

$$N = 480 \text{ turns}$$

Neglecting leakage and fringing and assuming  $\mu_r = 1000$ , calculate the inductance.



**Figure 1.27** Inductor for Problem 1.12.



The inductor of Problem 1.13 is to be operated from a 60-Hz voltage source. (a) Assuming negligible coil resistance, calculate the rms inductor voltage corresponding to a peak core flux density of 1.5 T. (b) Under this operating condition, calculate the rms current and the peak stored energy.

Problem 1.12

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A_c}{g + l_c / \mu_r}$$

$$\phi = \frac{N i}{\mathfrak{R}}, \quad \lambda = N \phi = \frac{N^2 i}{\mathfrak{R}} = L i$$

$$\mathfrak{R} = \frac{l_c}{\mu_0 \mu_r A_c} + \frac{g}{\mu_0 A_c}$$

$$L = \frac{N^2}{\frac{l_c}{\mu_0 \mu_r A_c} + \frac{g}{\mu_0 A_c}} = \frac{\mu_0 A_c N^2}{\frac{l_c}{\mu_r} + g}$$

Problem 1.13

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A_c}{g + l_c / \mu_r} = 30.5 \text{ mH}$$

Problem 1.14

part (a):

$$V_{\text{rms}} = \frac{\omega N A_c B_{\text{peak}}}{\sqrt{2}} = 19.2 \text{ V rms}$$

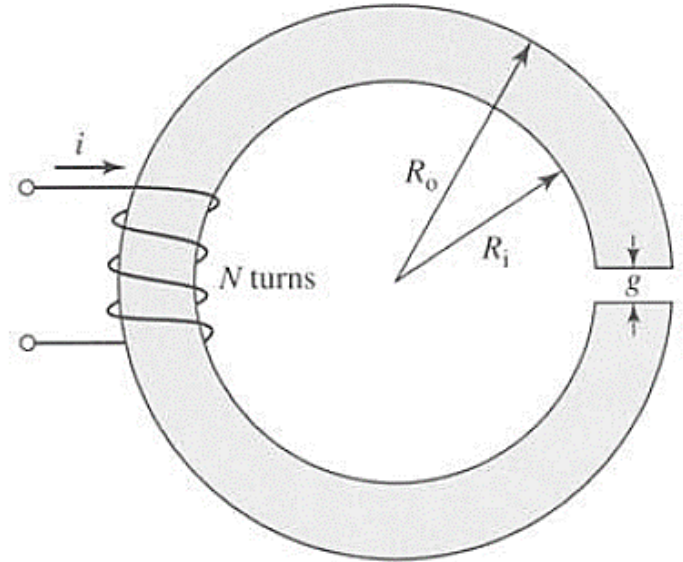
part (b):

$$I_{\text{rms}} = \frac{V_{\text{rms}}}{\omega L} = 1.67 \text{ A rms}; \quad W_{\text{peak}} = 0.5 L (\sqrt{2} I_{\text{rms}})^2 = 8.50 \text{ mJ}$$

The magnetic circuit of Fig. 1.26 consists of rings of magnetic material in a stack of height  $h$ . The rings have inner radius  $R_i$  and outer radius  $R_o$ . Assume that the iron is of infinite permeability ( $\mu \rightarrow \infty$ ) and neglect the effects of magnetic leakage and fringing. For:

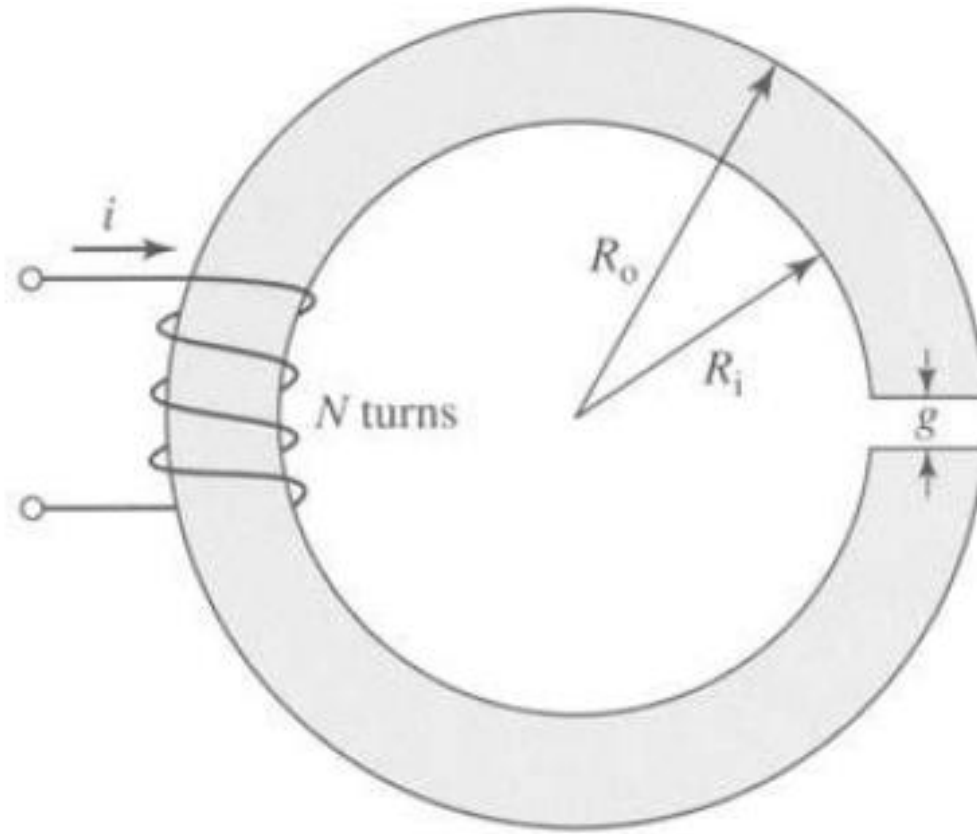
- $R_i = 3.4 \text{ cm}$
- $R_o = 4.0 \text{ cm}$
- $h = 2 \text{ cm}$
- $g = 0.2 \text{ cm}$

calculate:



**Figure 1.26** Magnetic circuit for Problem 1.9.

- a. the mean core length  $l_c$  and the core cross-sectional area  $A_c$ .
  - b. the reluctance of the core  $\mathcal{R}_c$  and that of the gap  $\mathcal{R}_g$ .
- For  $N = 65$  turns, calculate:
- c. the inductance  $L$ .
  - d. current  $i$  required to operate at an air-gap flux density of  $B_g = 1.35\text{T}$ .
  - e. the corresponding flux linkages  $\lambda$  of the coil.



**Figure 1.26** Magnetic circuit for Problem 1.9.

part (a):

$$l_c = 2\pi(R_o - R_i) - g = 3.57 \text{ cm}; \quad A_c = (R_o - R_i)h = 1.2 \text{ cm}^2$$

part (b):

$$\mathcal{R}_g = \frac{g}{\mu_0 A_c} = 1.33 \times 10^7 \text{ A/Wb}; \quad \mathcal{R}_c = 0 \text{ A/Wb};$$

part (c):

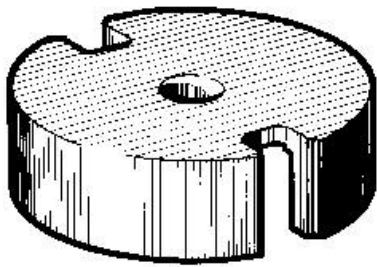
$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}_g + \mathcal{R}_c} = 0.319 \text{ mH}$$

part (d):

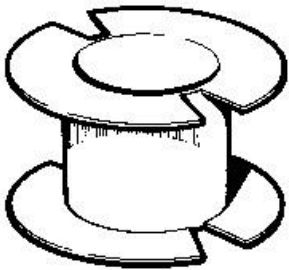
$$I = \frac{B_g(\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_g)A_c}{N} = 33.1 \text{ A}$$

part (e):

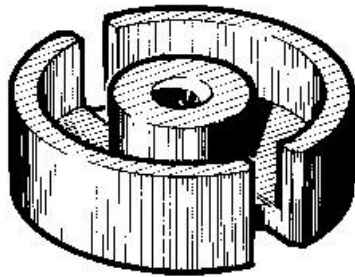
$$\lambda = NB_g A_c = 10.5 \text{ mWb}$$



Pot Core



Coilformer



Pot Core

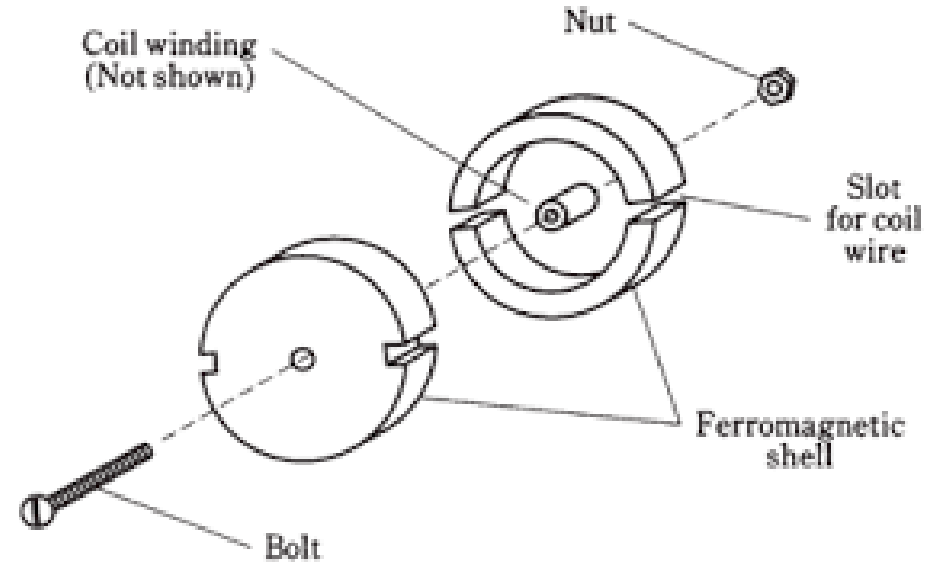
ECA.Ir



## pot core

### هسته پتانسیومتری

هسته فریت مغناطیسی که به شکل پتانسیومتر است .  
 یک میله مغناطیسی در مرکز و صفحه ای مغناطیسی  
 به عنوان پوشش دارد . در این هسته ها پیچکهای  
 ترانسفورماتور یا چوک روی میله مرکزی پیچیده می  
 شوند.



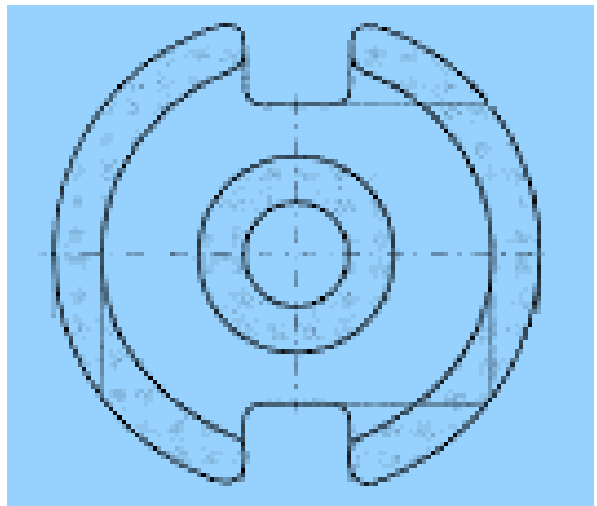
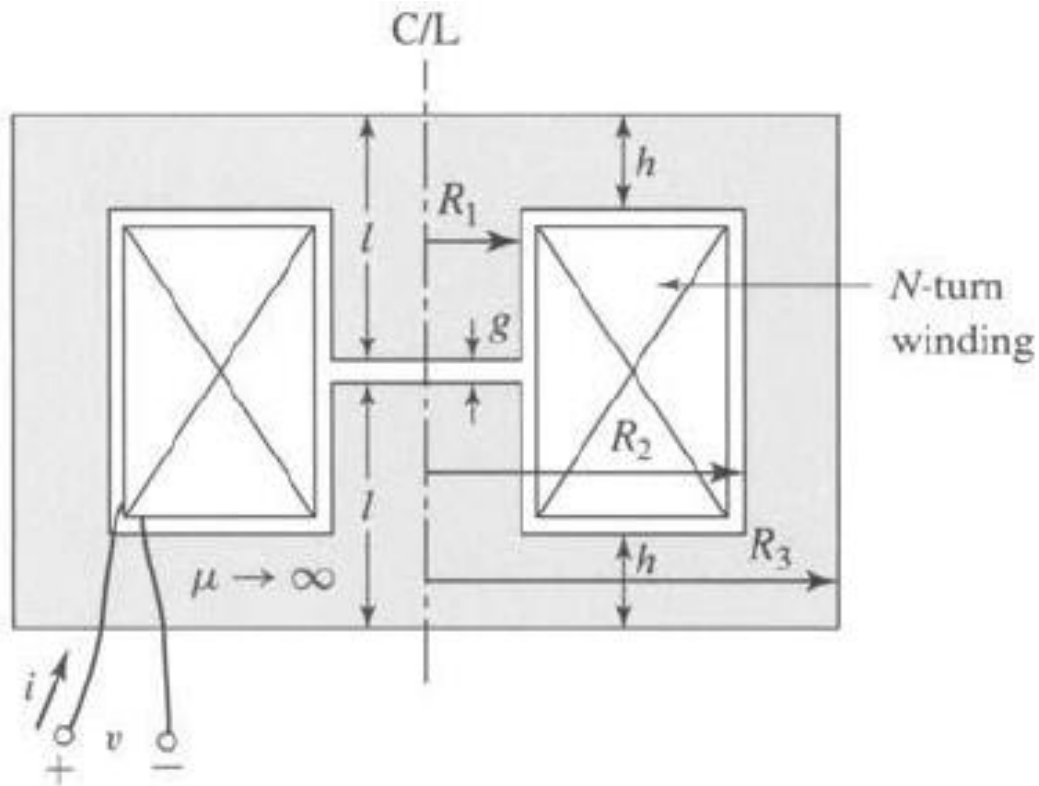
Consider the magnetic circuit of Fig. 1.28. This structure, known as a *pot-core*, is typically made in two halves. The  $N$ -turn coil is wound on a cylindrical bobbin and can be easily inserted over the central post of the core as the two halves are assembled. Because the air gap is internal to the core, provided the core is not driven excessively into saturation, relatively little magnetic flux will “leak” from the core, making this a particularly attractive configuration for a wide variety of applications, both for inductors such as that of Fig. 1.27 and transformers.

Assume the core permeability to be  $\mu = 2500\mu_0$  and  $N = 200$  turns. The following dimensions are specified:

$$R_1 = 1.5 \text{ cm} \quad R_2 = 4 \text{ cm} \quad l = 2.5 \text{ cm}$$

$$h = 0.75 \text{ cm} \quad g = 0.5 \text{ mm}$$

- Find the value of  $R_3$  such that the flux density in the outer wall of the core is equal to that within the central cylinder.
- Although the flux density in the radial sections of the core (the sections of thickness  $h$ ) actually decreases with radius, assume that the flux density remains uniform. (i) Write an expression for the coil inductance and (ii) evaluate it for the given dimensions.
- The core is to be operated at a peak flux density of 0.8 T at a frequency of 60 Hz. Find (i) the corresponding rms value of the voltage induced in the winding, (ii) the rms coil current, and (iii) the peak stored energy.
- Repeat part (c) for a frequency of 50 Hz.



**Figure 1.28** Pot-core inductor for Problem 1.15.

part (a):

$$R_3 = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = 4.27 \text{ cm}$$

part (b):

$$L = \frac{\mu_0 A_g N^2}{g + \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right) l_c} = 251 \text{ mH}$$

part (c): For  $\omega = 2\pi 60 \text{ rad/sec}$  and  $\lambda_{\text{peak}} = N A_g B_{\text{peak}} = 0.452 \text{ Wb}$ :

$$(i) \quad V_{\text{rms}} = \omega \lambda_{\text{peak}} = 171 \text{ V rms}$$

$$(ii) \quad I_{\text{rms}} = \frac{V_{\text{rms}}}{\omega L} = 1.81 \text{ A rms}$$

$$(iii) \quad W_{\text{peak}} = 0.5L(\sqrt{2}I_{\text{rms}})^2 = 0.817 \text{ J}$$

part (d): For  $\omega = 2\pi 50 \text{ rad/sec}$  and  $\lambda_{\text{peak}} = N A_g B_{\text{peak}} = 0.452 \text{ Wb}$ :

$$(i) \quad V_{\text{rms}} = \omega \lambda_{\text{peak}} = 142 \text{ V rms}$$

$$(ii) \quad I_{\text{rms}} = \frac{V_{\text{rms}}}{\omega L} = 1.81 \text{ A rms}$$

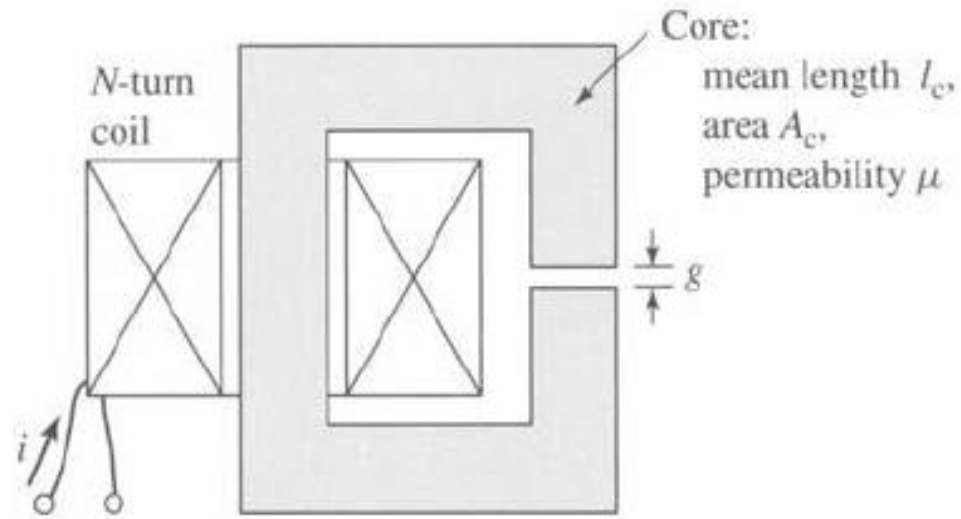
$$(iii) \quad W_{\text{peak}} = 0.5L(\sqrt{2}I_{\text{rms}})^2 = 0.817 \text{ J}$$





An inductor is to be designed using a magnetic core of the form of that of Fig. 1.29. The core is of uniform cross-sectional area  $A_c = 5.0 \text{ cm}^2$  and of mean length  $l_c = 25 \text{ cm}$ .

- Calculate the air-gap length  $g$  and the number of turns  $N$  such that the inductance is  $1.4 \text{ mH}$  and so that the inductor can operate at peak currents of  $6 \text{ A}$  without saturating. Assume that saturation occurs when the peak flux density in the core exceeds  $1.7 \text{ T}$  and that, below saturation, the core has permeability  $\mu = 3200\mu_0$ .
- For an inductor current of  $6 \text{ A}$ , use Eq. 3.21 to calculate (i) the magnetic stored energy in the air gap and (ii) the magnetic stored energy in the core. Show that the total magnetic stored energy is given by Eq. 1.47.



**Figure 1.29** Inductor for Problem 1.17.

$$dW_e = ei dt$$

$$dW_f = i d\lambda \quad \rightarrow \quad W_f = \int_0^\lambda i d\lambda$$

$$Ni = H_c l_c + H_g l_g$$

$$\lambda = N\Phi = NAB$$

$$\rightarrow W_f = \int \frac{H_c l_c + H_g l_g}{N} NA dB \quad \xrightarrow{H_g = \frac{B}{\mu_0}} \quad W_f = \int \left( H_c l_c + \frac{B}{\mu_0} l_g \right) A dB$$

$$= \int \left( H_c dB A l_c + \frac{B}{\mu_0} dB l_g A \right)$$

$$= \int H_c dB \times \text{volume of magnetic material}$$

$$+ \frac{B^2}{2\mu_0} \times \text{volume of air gap}$$

$$= w_{fc} \times V_c + w_{fg} \times V_g$$

$$= W_{fc} + W_{fg}$$

part (a):

$$N = \frac{LI}{A_c B_{sat}} = 99 \quad \text{turns}; \quad g = \frac{\mu_0 NI}{B_{sat}} - \frac{\mu_0 l_c}{\mu} = 0.36 \quad \text{mm}$$

part (b): From Eq.3.21

$$W_{gap} = \frac{A_c g B_{sat}^2}{2\mu_0} = 0.207 \quad \text{J}; \quad W_{core} = \frac{A_c l_c B_{sat}^2}{2\mu} = 0.045 \quad \text{J}$$

Thus  $W_{tot} = W_{gap} + W_{core} = 0.252 \text{ J}$ . From Eq. 1.47,  $(1/2)LI^2 = 0.252 \text{ J}$ .

A proposed energy storage mechanism consists of an  $N$ -turn coil wound around a large nonmagnetic ( $\mu = \mu_0$ ) toroidal form as shown in Fig. 1.30. As can be seen from the figure, the toroidal form has a circular cross section of radius  $a$  and toroidal radius  $r$ , measured to the center of the cross section. The geometry of this device is such that the magnetic field can be considered to be zero everywhere outside the toroid. Under the assumption that  $a \ll r$ , the  $H$  field inside the toroid can be considered to be directed around the toroid and of uniform magnitude

$$H = \frac{Ni}{2\pi r}$$

For a coil with  $N = 1000$  turns,  $r = 10$  m, and  $a = 0.45$  m:

- Calculate the coil inductance  $L$ .
- The coil is to be charged to a magnetic flux density of 1.75 T. Calculate the total stored magnetic energy in the torus when this flux density is achieved.
- If the coil is to be charged at a uniform rate (i.e.,  $di/dt = \text{constant}$ ), calculate the terminal voltage required to achieve the required flux density in 30 sec. Assume the coil resistance to be negligible.

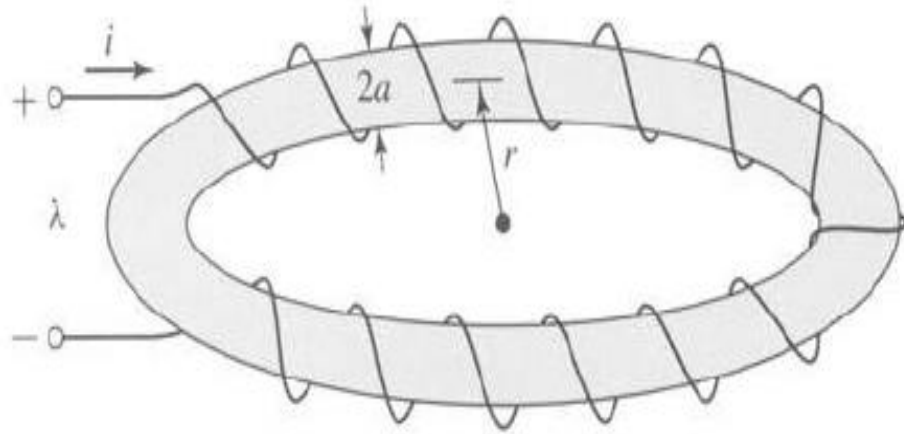


Figure 1.30 part (a):

$$L = \frac{\mu_0 \pi a^2 N^2}{2\pi r} = 56.0 \text{ mH}$$

part (b): Core volume  $V_{\text{core}} \approx (2\pi r)\pi a^2 = 40.0 \text{ m}^3$ . Thus

$$W = V_{\text{core}} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 4.87 \text{ J}$$

part (c): For  $T = 30 \text{ sec}$ ,

$$\frac{di}{dt} = \frac{(2\pi r B)/(\mu_0 N)}{T} = 2.92 \times 10^3 \text{ A/sec}$$

$$v = L \frac{di}{dt} = 163 \text{ V}$$

The coils of the magnetic circuit shown in Fig. 1.36 are connected in series so that the mmf's of paths *A* and *B* both tend to set up flux in the center leg *C* in the same direction. The coils are wound with equal turns,  $N_1 = N_2 = 100$ .

The dimensions are:

Cross-section area of *A* and *B* legs =  $7 \text{ cm}^2$

Cross-section area of *C* legs =  $14 \text{ cm}^2$

Length of *A* path =  $17 \text{ cm}$

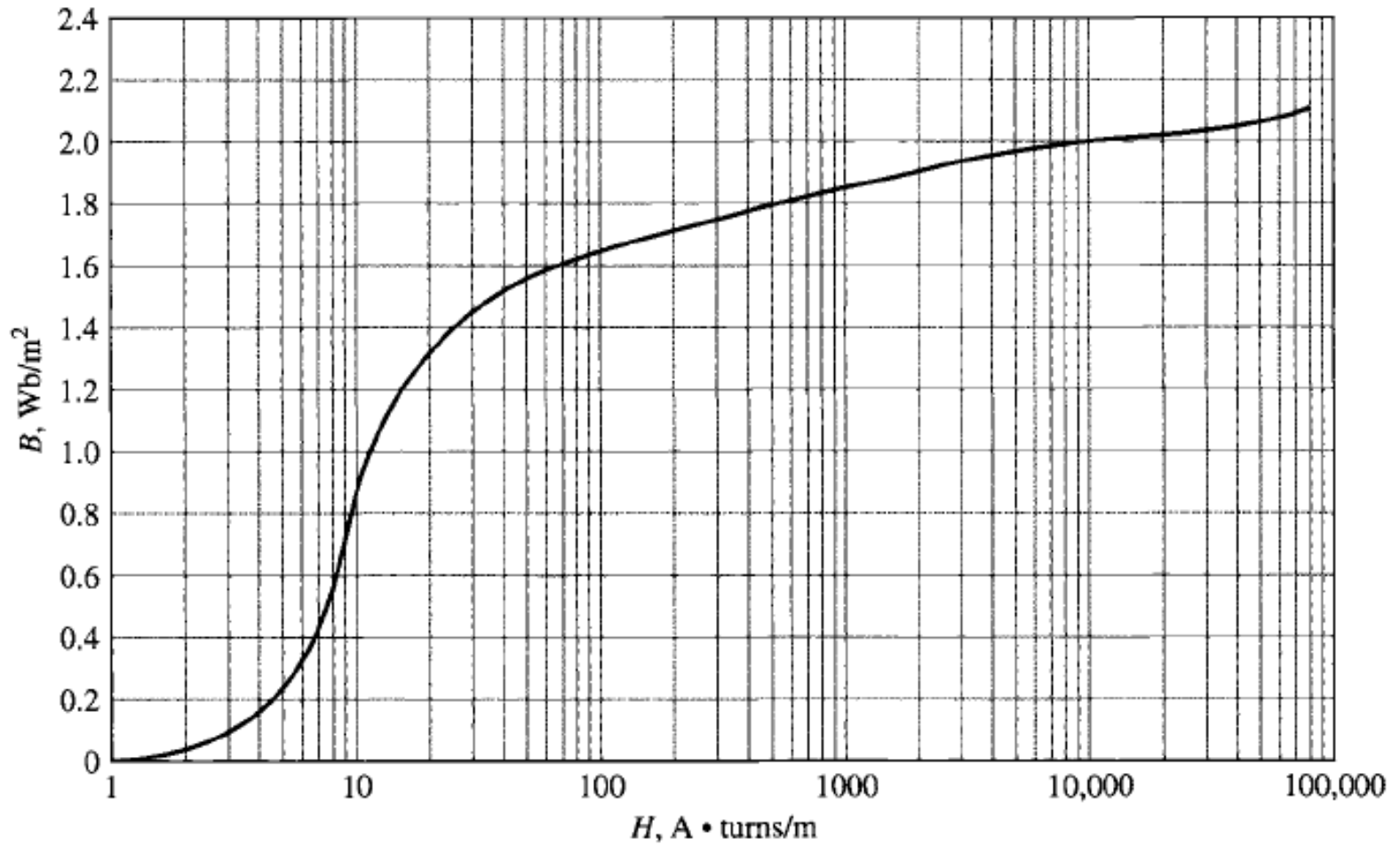
Length of *B* path =  $17 \text{ cm}$

Length of *C* path =  $5.5 \text{ cm}$

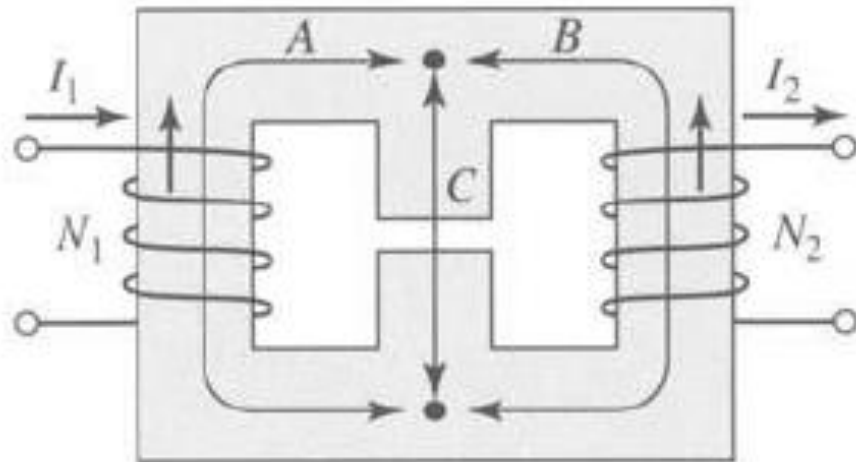
Air gap =  $0.4 \text{ cm}$

The material is M-5 grade, 0.012-in steel, with a stacking factor of 0.94. Neglect fringing and leakage.

- How many amperes are required to produce a flux density of 1.2 T in the air gap?
- Under the condition of part (a), how many joules of energy are stored in the magnetic field in the air gap?
- Calculate the inductance.



**Figure 1.10** Dc magnetization curve for M-5 grain-oriented electrical steel 0.012 in thick. (Armco Inc.)



part (a): From the M-5 magnetization curve, for  $B = 1.2 \text{ T}$ ,  $H_m = 14 \text{ A/m}$ . Similarly,  $H_g = B/\mu_0 = 9.54 \times 10^5 \text{ A/m}$ . Thus, with  $I_1 = I_2 = I$

$$I = \frac{H_m(l_A + l_C - g) + H_g g}{N_1} = 38.2 \text{ A}$$

part (b):

$$W_{\text{gap}} = \frac{g A_{\text{gap}} B^2}{2\mu_0} = 3.21 \text{ Joules}$$

part (c):

$$\lambda = 2N_1 A_A B = 0.168 \text{ Wb}; \quad L = \frac{\lambda}{I} = 4.39 \text{ mH}$$

# اندوکتانس در مدار دو سیم پیچه با فاصله هوایی و هسته ایده آل



$$\mathcal{F} = Ni = N_1 i_1 + N_2 i_2$$

$$\phi = (N_1 i_1 + N_2 i_2) \frac{\mu_0 A_c}{g}$$

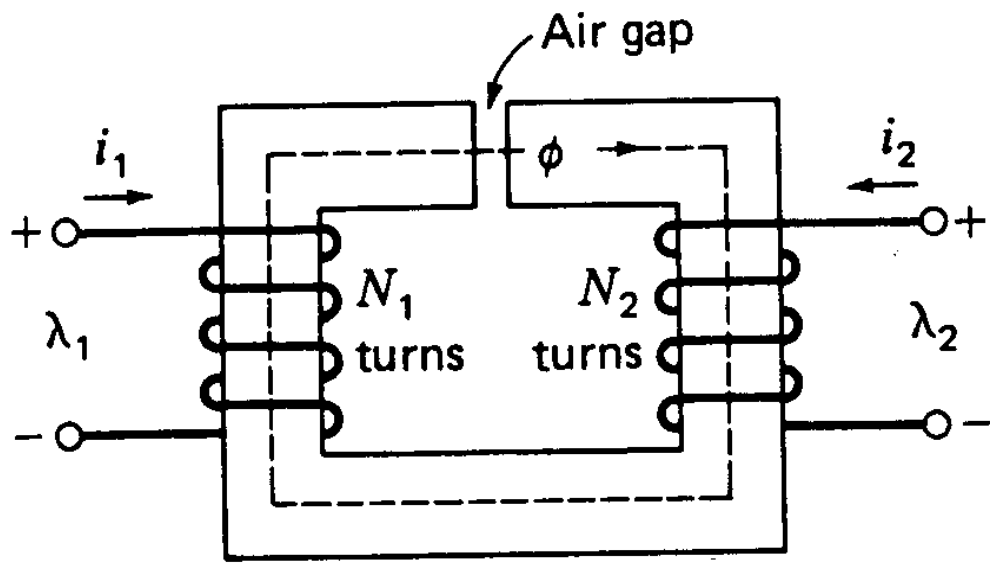
$$\lambda_1 = \lambda_{11} + \lambda_{12} = N_1 \phi$$

$$= N_1^2 \frac{\mu_0 A_c}{g} i_1 + N_1 N_2 \frac{\mu_0 A_c}{g} i_2$$

$$\lambda_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2$$

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_g = \frac{g}{\mu_0 A_c}$$

$$L_{11} = N_1^2 \frac{\mu_0 A_c}{g} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_{eq}}$$





$$e_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$e_2 = L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}$$

$$L_{12} = N_1 N_2 \frac{\mu_0 A_c}{g} = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_{eq}}$$

$\lambda_1$  : شار دور سیم پیچ ۱

$\lambda_2$  : شار دور سیم پیچ ۲

$L_{11}$  : اندوکتانس خودی سیم پیچ ۱

$L_{22}$  : اندوکتانس خودی سیم پیچ ۲

$$\lambda_2 = \lambda_{21} + \lambda_{22} = N_2 \phi$$

$$= N_1 N_2 \frac{\mu_0 A_c}{g} i_1 + N_2^2 \frac{\mu_0 A_c}{g} i_2$$

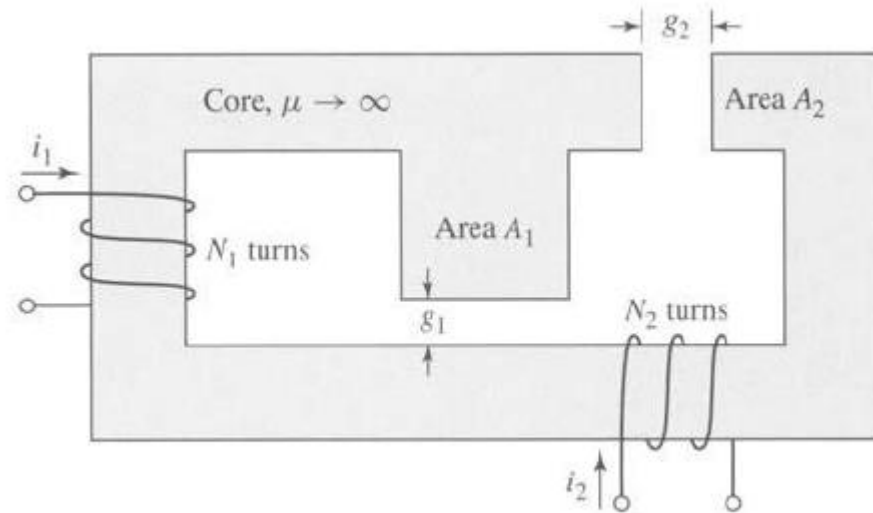
$L_{12} = L_{21}$  : اندوکتانس متقابل بین دو سیم پیچ

$$\lambda_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2 , L_{12} = L_{21}$$

$$L_{22} = N_2^2 \frac{\mu_0 A_c}{g} = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_{eq}}$$

The magnetic circuit of Fig. 1.32 has two windings and two air gaps. The core can be assumed to be of infinite permeability. The core dimensions are indicated in the figure.

- Assuming coil 1 to be carrying a current  $I_1$  and the current in coil 2 to be zero, calculate (i) the magnetic flux density in each of the air gaps, (ii) the flux linkage of winding 1, and (iii) the flux linkage of winding 2.
- Repeat part (a), assuming zero current in winding 1 and a current  $I_2$  in winding 2.
- Repeat part (a), assuming the current in winding 1 to be  $I_1$  and the current in winding 2 to be  $I_2$ .
- Find the self-inductances of windings 1 and 2 and the mutual inductance between the windings.



**Figure 1.32** Magnetic circuit for Problem 1.22.

part (a):

$$(i) \quad B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{g_1}; \quad B_2 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{g_2}$$

$$(ii) \quad \lambda_1 = N_1(A_1 B_1 + A_2 B_2) = \mu_0 N_1^2 \left( \frac{A_1}{g_1} + \frac{A_2}{g_2} \right) I_1$$

$$(iii) \quad \lambda_2 = N_2 A_2 B_2 = \mu_0 N_1 N_2 \left( \frac{A_2}{g_2} \right) I_1$$

part (b):

$$(i) \quad B_1 = 0; \quad B_2 = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{g_2}$$

$$(ii) \quad \lambda_1 = N_1 A_2 B_2 = \mu_0 N_1 N_2 \left( \frac{A_2}{g_2} \right) I_2$$

$$(iii) \quad \lambda_2 = N_2 A_2 B_2 = \mu_0 N_2^2 \left( \frac{A_2}{g_2} \right) I_2$$

part (c):

$$(i) \quad B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{g_1}; \quad B_2 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{g_2} + \frac{\mu_0 N_2 I_2}{g_2}$$

$$(ii) \quad \lambda_1 = N_1(A_1 B_1 + A_2 B_2) = \mu_0 N_1^2 \left( \frac{A_1}{g_1} + \frac{A_2}{g_2} \right) I_1 + \mu_0 N_1 N_2 \left( \frac{A_2}{g_2} \right) I_2$$

$$(iii) \quad \lambda_2 = N_2 A_2 B_2 = \mu_0 N_1 N_2 \left( \frac{A_2}{g_2} \right) I_1 + \mu_0 N_2^2 \left( \frac{A_2}{g_2} \right) I_2$$

part (d):

$$L_{11} = N_1^2 \left( \frac{A_1}{g_1} + \frac{A_2}{g_2} \right); \quad L_{22} = \mu_0 N_2^2 \left( \frac{A_2}{g_2} \right); \quad L_{12} = \mu_0 N_1 N_2 \left( \frac{A_2}{g_2} \right)$$



دانشگاه مازندران

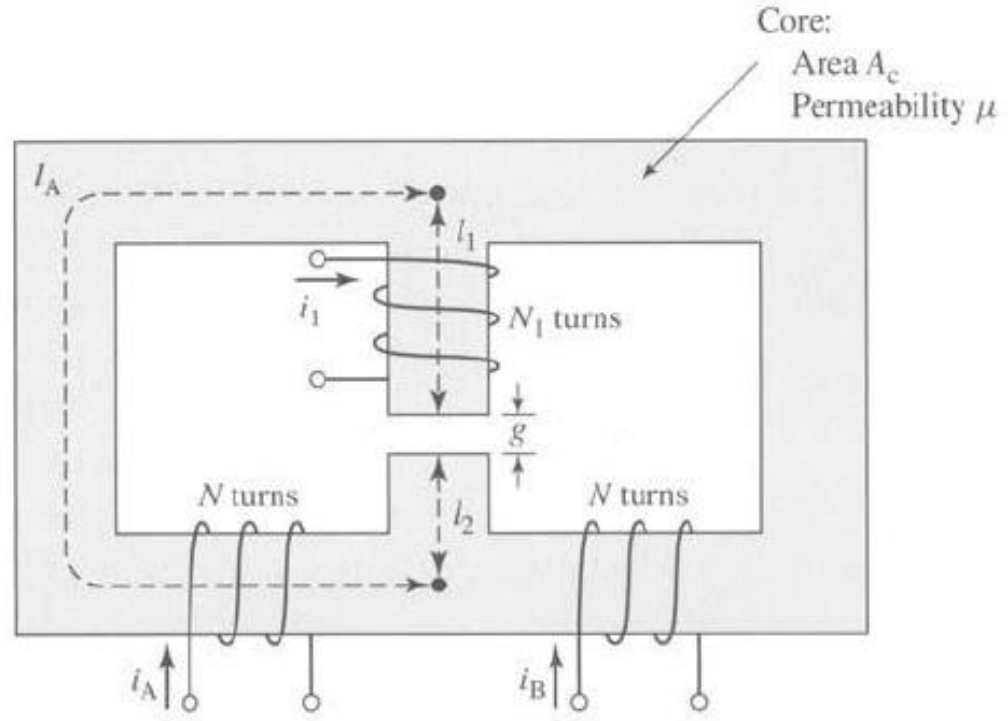
ماشین های الکتریکی ۱

فصل ۱

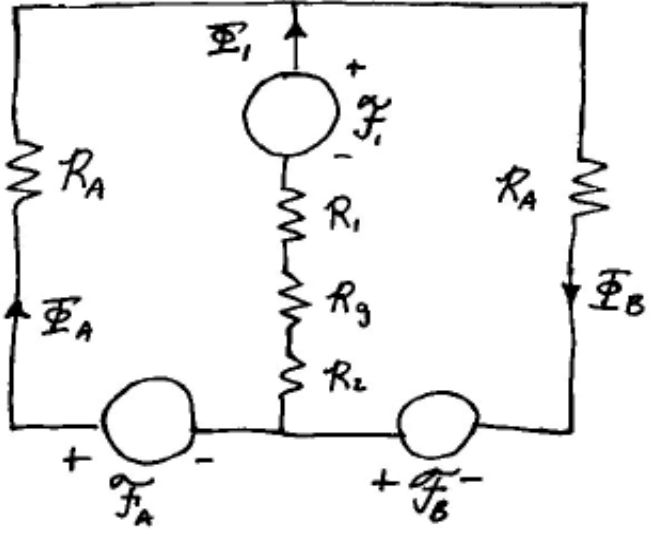
مدرس: دکتر گرگانی فیروزجاه

The symmetric magnetic circuit of Fig. 1.33 has three windings. Windings A and B each have  $N$  turns and are wound on the two bottom legs of the core. The core dimensions are indicated in the figure.

- Find the self-inductances of each of the windings.
- Find the mutual inductances between the three pairs of windings.
- Find the voltage induced in winding 1 by time-varying currents  $i_A(t)$  and  $i_B(t)$  in windings A and B. Show that this voltage can be used to measure the imbalance between two sinusoidal currents of the same frequency.



**Figure 1.33** Symmetric magnetic circuit for Problem 1.23.



(a):

$$\mathcal{R}_A = \frac{l_A}{\mu A_c}; \quad \mathcal{R}_1 = \frac{l_1}{\mu A_c}; \quad \mathcal{R}_2 = \frac{l_2}{\mu A_c}; \quad \mathcal{R}_g = \frac{g}{\mu_0 A_c}$$

$$L_{11} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_g + \mathcal{R}_A/2} = \frac{N_1^2 \mu A_c}{l_1 + l_2 + l_A/2 + g (\mu/\mu_0)}$$

$$L_{AA} = L_{BB} = \frac{N^2}{\mathcal{R}_A + \mathcal{R}_A || (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_g)} = \frac{N^2 \mu A_c}{l_A} \left[ \frac{l_A + l_1 + l_2 + g (\mu/\mu_0)}{l_A + 2(l_1 + l_2 + g (\mu/\mu_0))} \right]$$

part (b):

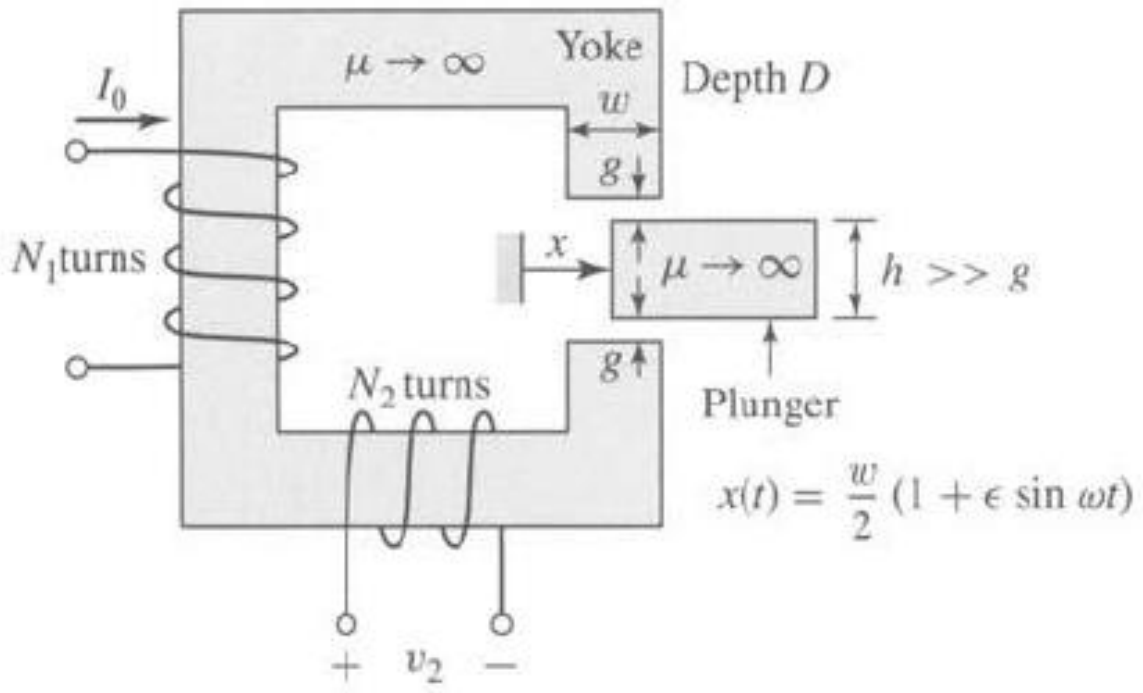
$$L_{AB} = L_{BA} = \frac{N^2 (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_g)}{\mathcal{R}_A (\mathcal{R}_A + 2(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_g))} = \frac{N^2 \mu A_c}{l_A} \left[ \frac{l_1 + l_2 + g (\mu/\mu_0)}{l_A + 2(l_1 + l_2 + g (\mu/\mu_0))} \right]$$

$$L_{A1} = L_{1A} = -L_{B1} = -L_{1B} = \frac{-NN_1}{\mathcal{R}_A + 2(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_g)} = \frac{-NN_1 \mu A_c}{l_A + 2(l_1 + l_2 + g (\mu/\mu_0))}$$

part (c):

$$v_1 = \frac{d}{dt} [L_{A1} i_A + L_{B1} i_B] = L_{A1} \frac{d}{dt} [i_A - i_B]$$

The reciprocating generator of Fig. 1.34 has a movable plunger (position  $x$ ) which is supported so that it can slide in and out of the magnetic yoke while maintaining a constant air gap of length  $g$  on each side adjacent to the yoke. Both the yoke and the plunger can be considered to be of infinite permeability. The motion of the plunger is constrained such that its position is limited to  $0 \leq x \leq w$ .



**Figure 1.34** Reciprocating generator for Problem 1.24.

There are two windings on this magnetic circuit. The first has  $N_1$  turns and carries a constant dc current  $I_0$ . The second, which has  $N_2$  turns, is open-circuited and can be connected to a load.

- Neglecting any fringing effects, find the mutual inductance between windings 1 and 2 as a function of the plunger position  $x$ .
- The plunger is driven by an external source so that its motion is given by

$$x(t) = \frac{w(1 + \epsilon \sin \omega t)}{2}$$

where  $\epsilon \leq 1$ . Find an expression for the sinusoidal voltage which is generated as a result of this motion.

part (a):

$$L_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{2g} [D(w - x)]$$

part (b):

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{d\lambda_2}{dt} = I_0 \frac{dL_{12}}{dt} = - \left( \frac{N_1 N_2 \mu_0 D}{2g} \right) \frac{dx}{dt} \\ &= - \left( \frac{N_1 N_2 \mu_0 D}{2g} \right) \left( \frac{\epsilon \omega w}{2} \right) \cos \omega t \end{aligned}$$

# قانون فاراده - ولتاژ القا شده در اثر میدان مغناطیسی متغیر با زمان

قانون فاراده می‌گوید که اگر از درون یک حلقه سیم شار متغیری بگذرد ولتاژی در آن القا می‌شود که با آهنگ زمانی تغییر شار تناسب مستقیم دارد.

$$e_{ind} = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

که در آن:

$e_{ind}$ : ولتاژ القا شده در پیچک

$N$ : تعداد حلقه سیم‌های پیچک

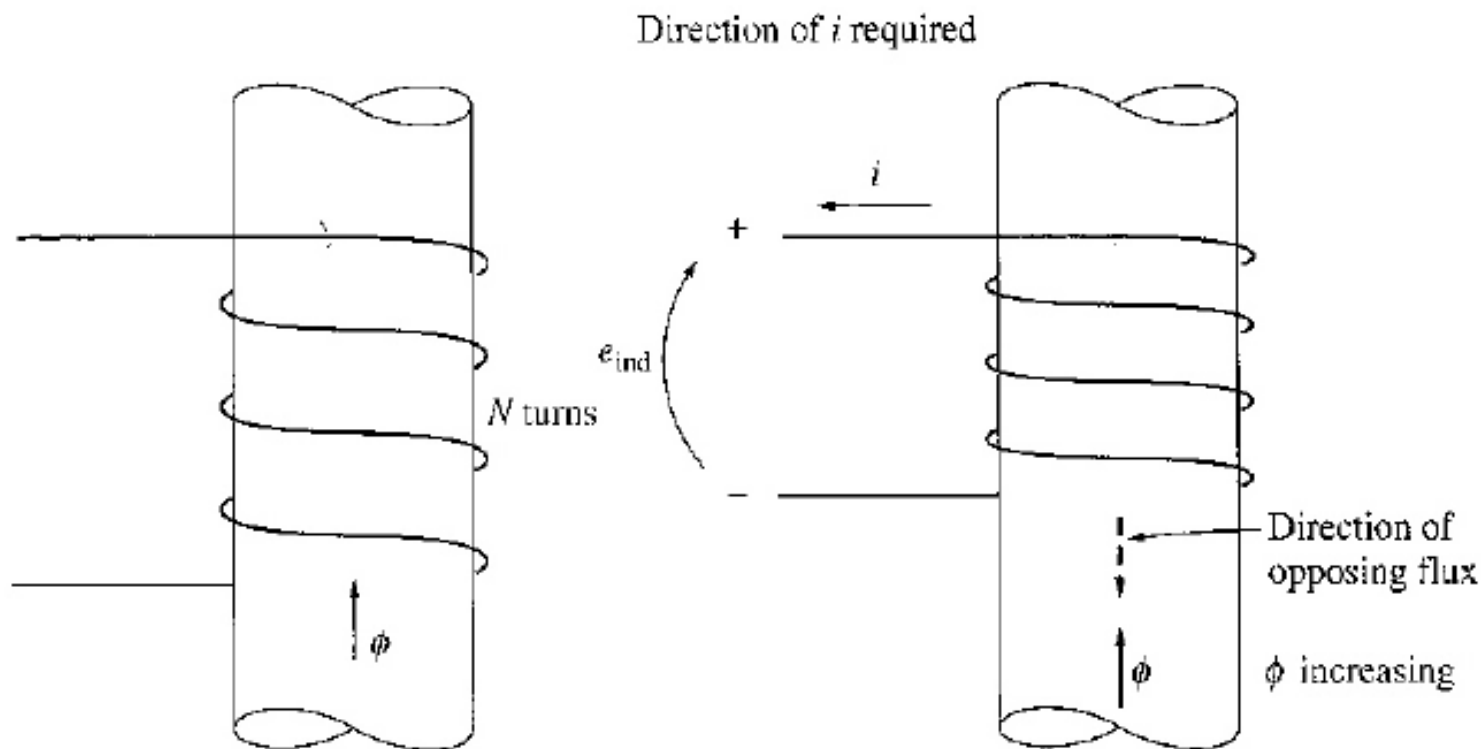
$\Phi$ : شار گذرنده از پیچک

علامت منفی بیانگر قانون لنز است

قانون لنز: جهت ولتاژ القا شده در پیچک چنان است که اگر سرهای پیچک اتصال کوتاه شود جریانی از آن می‌گذرد که شار ناشی از آن مخالف تغییر شار اصلی باشد. چون ولتاژ با عامل بوجود آورنده اش مخالفت می‌کند.

قانون فاراده اساسی ترین ویژگی میدانهای مغناطیسی است که در ترانسفورماتورها عمل می‌کند. کار قانون لنز در ترانسفورماتور پیش بینی قطب‌آورد القا شده در سیم پیچیهای ترانسفورماتور است.

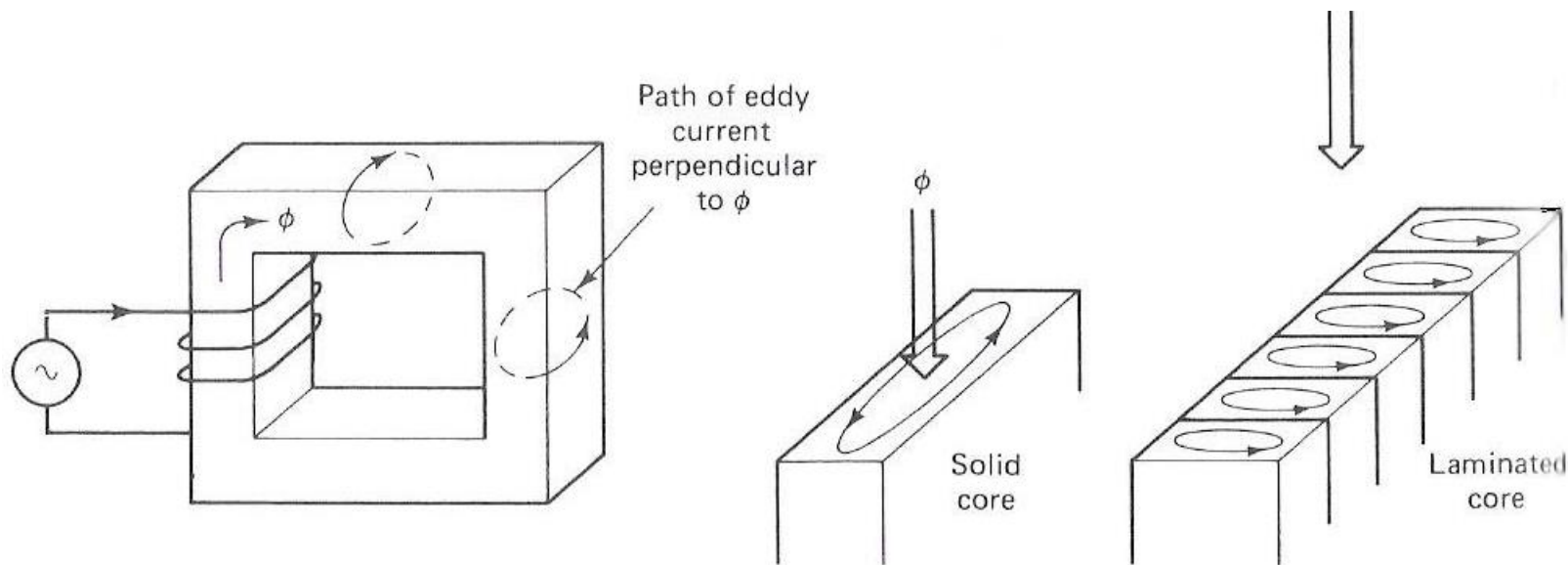




جهت جریان نشان داده شده در شکل شاری ایجاد می کند که با شار اصلی مخالفت میکند. پس ولتاژ پیچک باید به گونه ای باشد که در مدار خارجی جریانی در این جهت ایجاد شود. پس ولتاژ باید قطب‌آورد مشخص شده در شکل را داشته باشد.

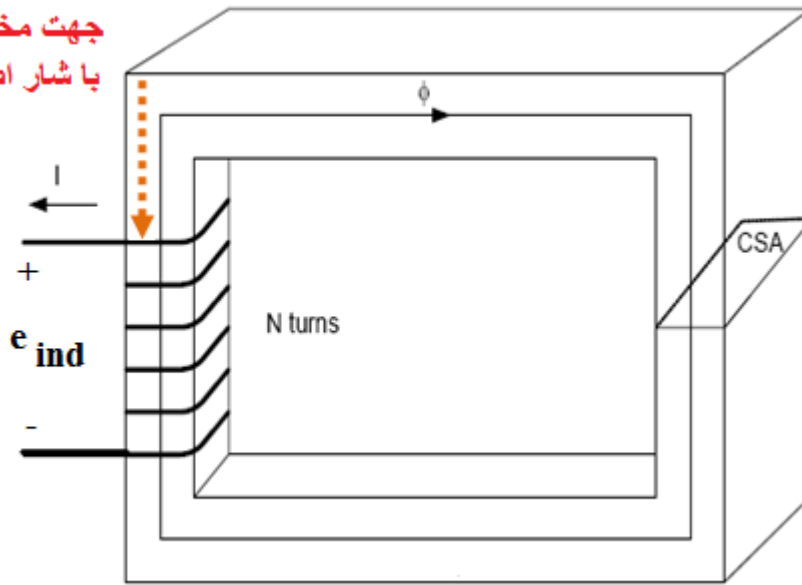
## قانون فاراده و تلفات جریان گردابی:

شار متغیر با زمان همانطور که در سیم پیچیده شده حول هسته ولتاژ ایجاد می کند در درون هسته فرومغناطیس نیز ولتاژ القا می کند. این ولتاژها یک جریان گردابی در درون هسته ایجاد می کنند. این جریانها از ماده مقاومت دار (آهن یا هسته) می گذرند، پس انرژی تلف می کنند و این انرژی تلف شده باعث گرم شدن هسته آهنی می شود.



بر اساس قاعده لنز  $mmf$  تولید شده توسط جریانهای فوکو با  $mmf$  تحریک اصلی مدار مخالفت نموده و شار را تضعیف میکند. این اثر تضعیفی بویژه در قسمتهای مرکزی هسته شدیدتر است.

جهت مخالف  
با شار اصلی



شکل (۱-۱۵) یک پیچک سیم پیچی را نشان می دهد که حول یک هسته آهنی پیچیده شده است. اگر شار درون هسته با معادله :

$$\Phi = 0.05 \sin 377t \text{ Wb}$$

باشد و تعداد حلقه ها ۱۰۰ باشد، در پایانه های پیچک چه ولتاژی تولید می شود؟ فرض کنید شار نشتی صفر باشد)

وقتی شار در جهت مرجع افزایش می یابد علامت ولتاژ باید به صورت نشان داده شده در شکل باشد و اندازه مقدار ولتاژ از رابطه زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} e_{\text{ind}} &= N \frac{d\Phi}{dt} = 100 \frac{d}{dt} (0.05 \sin 377t) \\ &= 1855 \cos 377t \text{ Volt} = 1855 \sin(377t + 90^\circ) \end{aligned}$$

# نیروی وارد شده به یک سیم:

میدان مغناطیسی بر سیم حامل جریان که درون میدان قرار می‌گیرد نیرو وارد می‌کند.

$$F = i(L \times B) = iLB \sin \theta$$



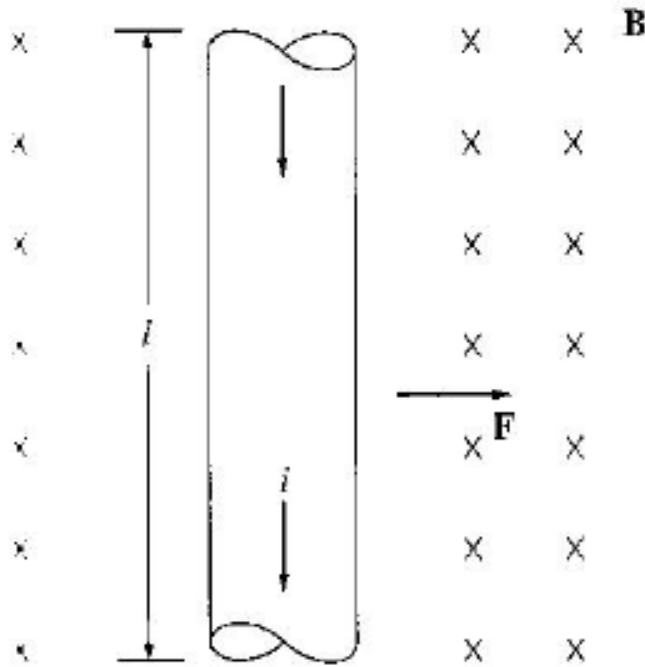
در رابطه بالا:

$i$ : اندازه جریان در سیم و جهت آن طبق تعریف همان جهت جریان است.

$L$ : طول سیم

$B$ : بردار چگالی شار مغناطیسی

$\theta$ : زاویه بین سیم و بردار چگالی شار



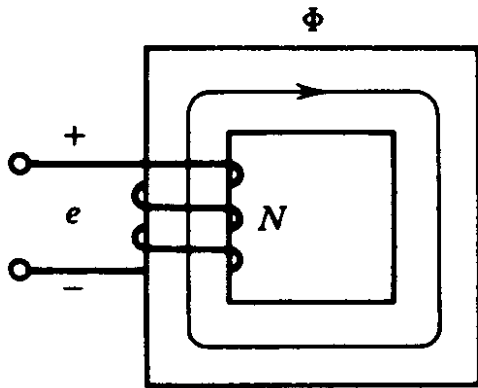
شکل روبرو یک سیم حامل جریان را در حضور یک میدان مغناطیسی نشان می دهد. چگالی شار مغناطیسی ۰.۲۵ تسلا و جهت آن بسوی داخل صفحه است. اگر طول سیم ۱ متر و جریان ۵ آمپر در جهت بالا به پایین صفحه باشد اندازه و جهت نیروی القا شده در سیم چقدر است؟

با توجه به قانون دست راست جهت نیرو به سمت راست است و اندازه نیرو برابر است با:

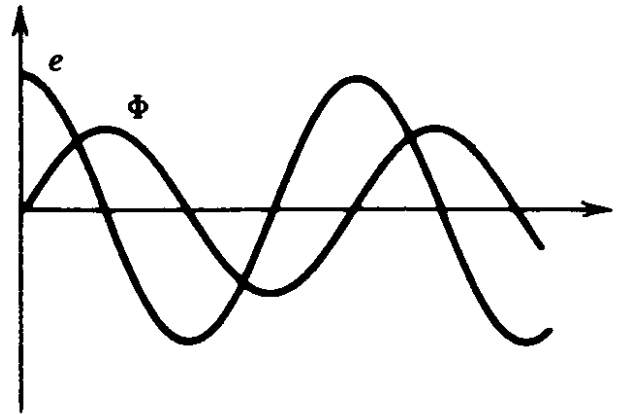
$$F = iLB \sin \theta = (.5 A)(1 m)(.25 T) \sin 90 = .125 N$$

# مدارهای مغناطیسی تحریک سینوسی

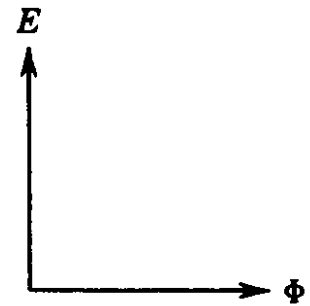
## (AC EXCITATION)



(a)



(b)



(c)

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \phi_{\max} \sin \omega t \\ &= A_c B_{\max} \sin \omega t\end{aligned}$$

✓ در شبکه های قدرت شکل موج ولتاژ و شار تقریباً تابعی سینوسی از زمان هستند.  
 ✓ از شار پراکندگی و مقاومت اهمی سیم پیچ صرف نظر میشود.



$$e(t) = N \frac{d\phi}{dt} = \omega N \phi_{\max} \cos \omega t = E_{\max} \cos \omega t$$

$\omega = 2\pi f$  = فرکانس زاویه ای

$$E_{\max} = \omega N \phi_{\max} = 2\pi f N A_c B_{\max}$$

$f$  = فرکانس برق

$$E_{rms} = \frac{E_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N \phi_{\max}$$

$\phi_{\max}$  = دامنه موج شار

$B_{\max}$  = دامنه موج چگالی شار هسته

$$= \sqrt{2} \pi f N \phi_{\max} = 4.44 f N \phi_{\max}$$

$E_{\max}$  = دامنه موج ولتاژ

$$= \sqrt{2} \pi f N A_c B_{\max} = 4.44 f N A_c B_{\max}$$

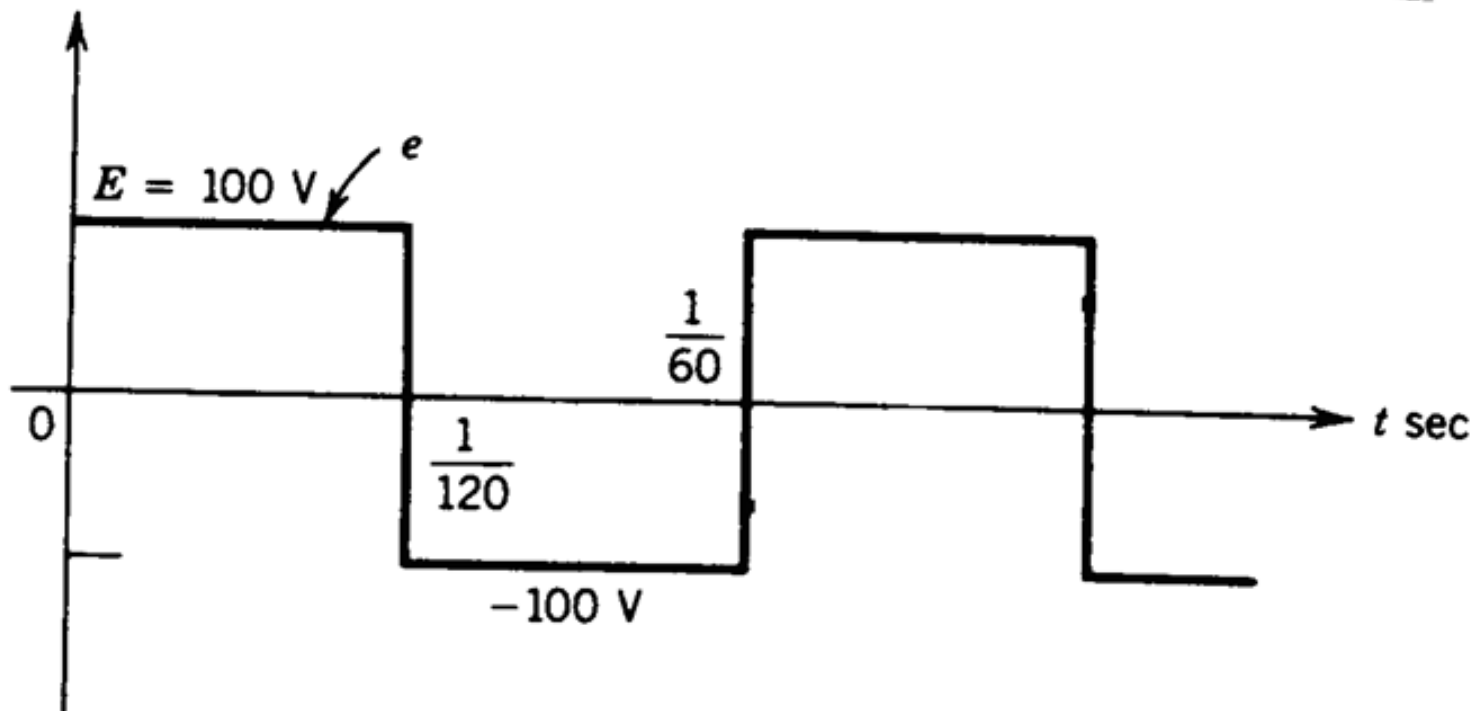
$$\phi_{\max} = \frac{1}{4.44 N} \cdot \frac{E_{rms}}{f}, \quad B_{\max} = \frac{1}{4.44 N A_c} \cdot \frac{E_{rms}}{f}$$

# تحریک مدار مغناطیسی با ولتاژ متناوب غیر سینوسی

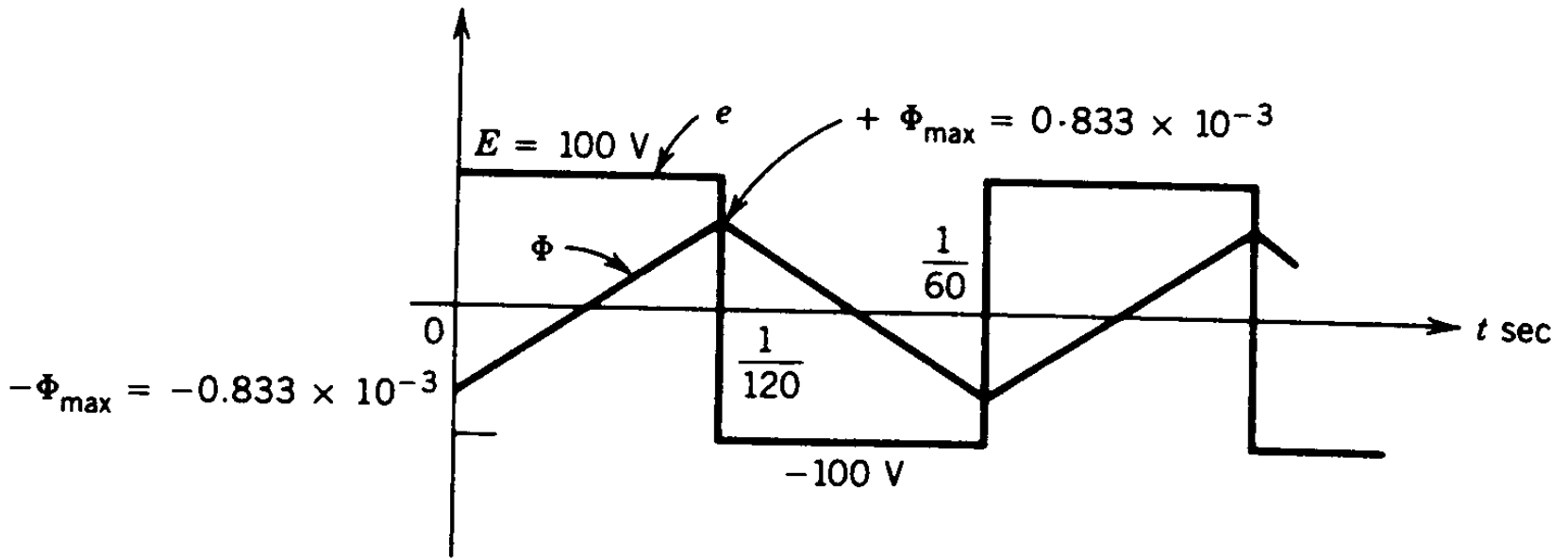
ولتاژ موج مربعی  $100\text{ V}$  و  $60\text{ Hz}$  مطابق شکل زیر به سیم پیچ  $500$  دوری یک مدار مغناطیسی با هسته فرومغناطیس بسته اعمال میگردد. سطح مقطع هسته  $0.001$  متر مربع میباشد و از مقاومت اهمی سیم پیچ و شار پراکندگی صرفنظر میشود.

الف) ماکزیمم مقدار شار را محاسبه و شکل موج شار را بعنوان تابعی از زمان رسم نمائید.

ب) چنانچه بخواهیم ماکزیمم چگالی شار از  $1.2$  تسلا فراتر نرود ماکزیمم مقدار  $E$  را محاسبه کنید.







(الف)

$$e = N \frac{d\phi}{dt}, \quad N \cdot d\phi = e dt, \quad N \Delta\phi = E \Delta t$$

$$500(2\phi_{\max}) = E \times \frac{1}{120} \Rightarrow \phi_{\max} = \frac{100}{1000 \times 120} = 0.833 \times 10^{-3}\text{ Wb}$$

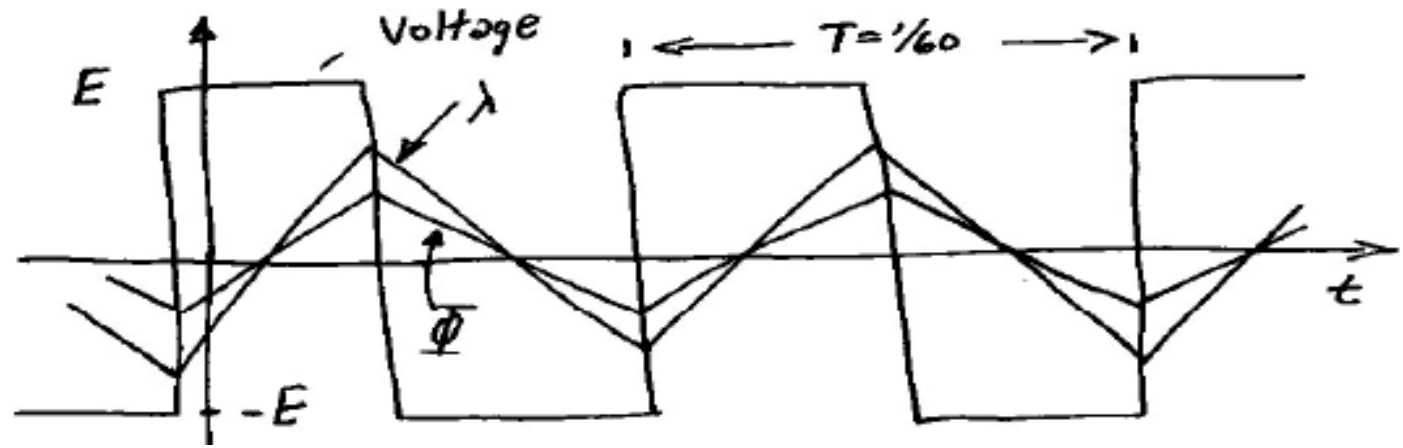
(ب)

$$B_{\max} = 1.2\text{ T} \Rightarrow \phi_{\max} = B_{\max} \times A = 1.2 \times 0.001 = 1.2 \times 10^{-3}\text{ Wb}$$

$$N(2\phi_{\max}) = E \times \frac{1}{120}, \quad E = 120 \times 500 \times 2 \times 1.2 \times 10^{-3} = 144\text{ V}$$

A square voltage wave having a fundamental frequency of 60 Hz and equal positive and negative half cycles of amplitude  $E$  is applied to a 1000-turn winding surrounding a closed iron core of  $1.25 \times 10^{-3} \text{m}^2$  cross section. Neglect both the winding resistance and any effects of leakage flux.

- Sketch the voltage, the winding flux linkage, and the core flux as a function of time.
- Find the maximum permissible value of  $E$  if the maximum flux density is not to exceed 1.15 T.

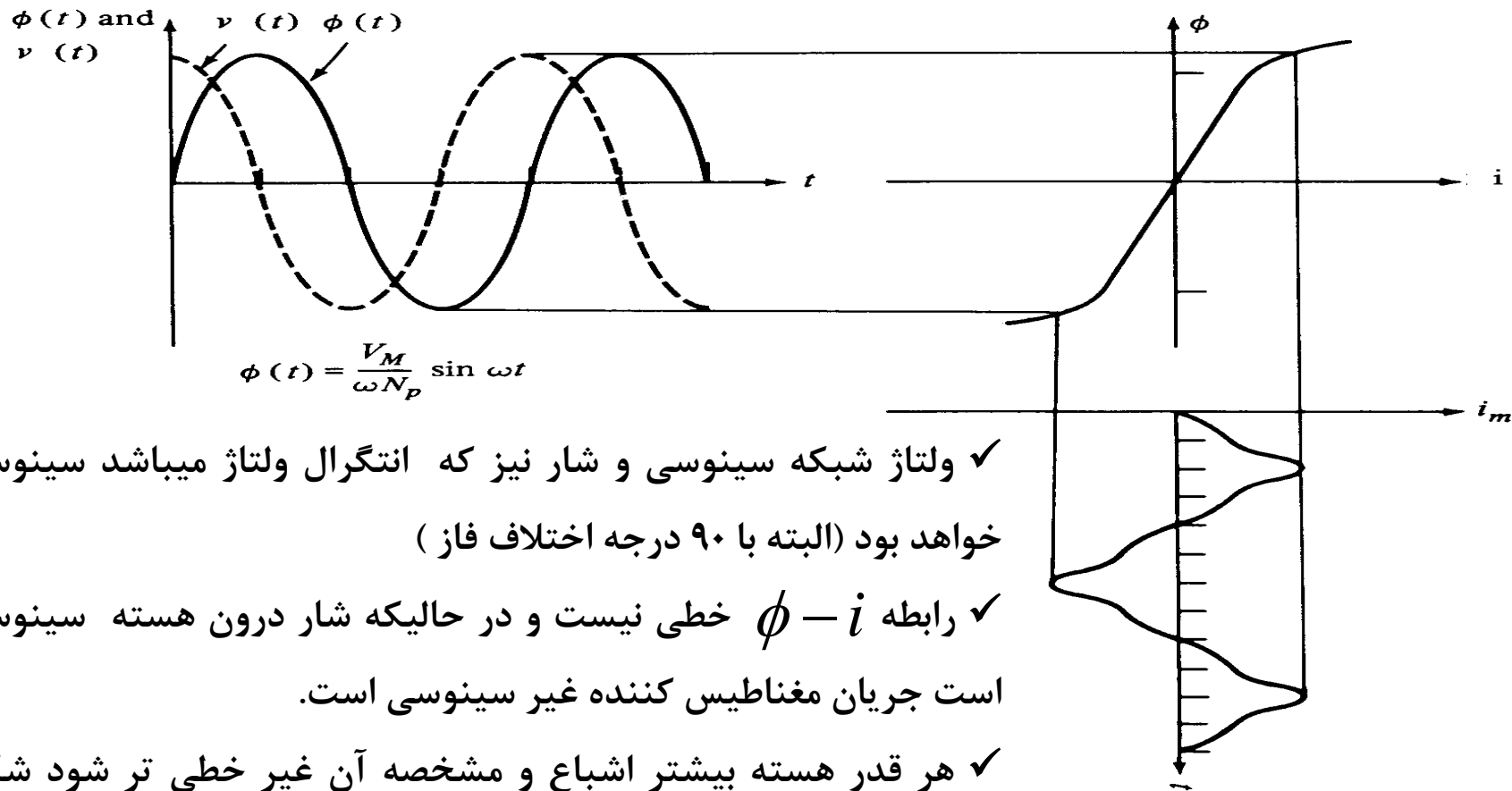


part (b):

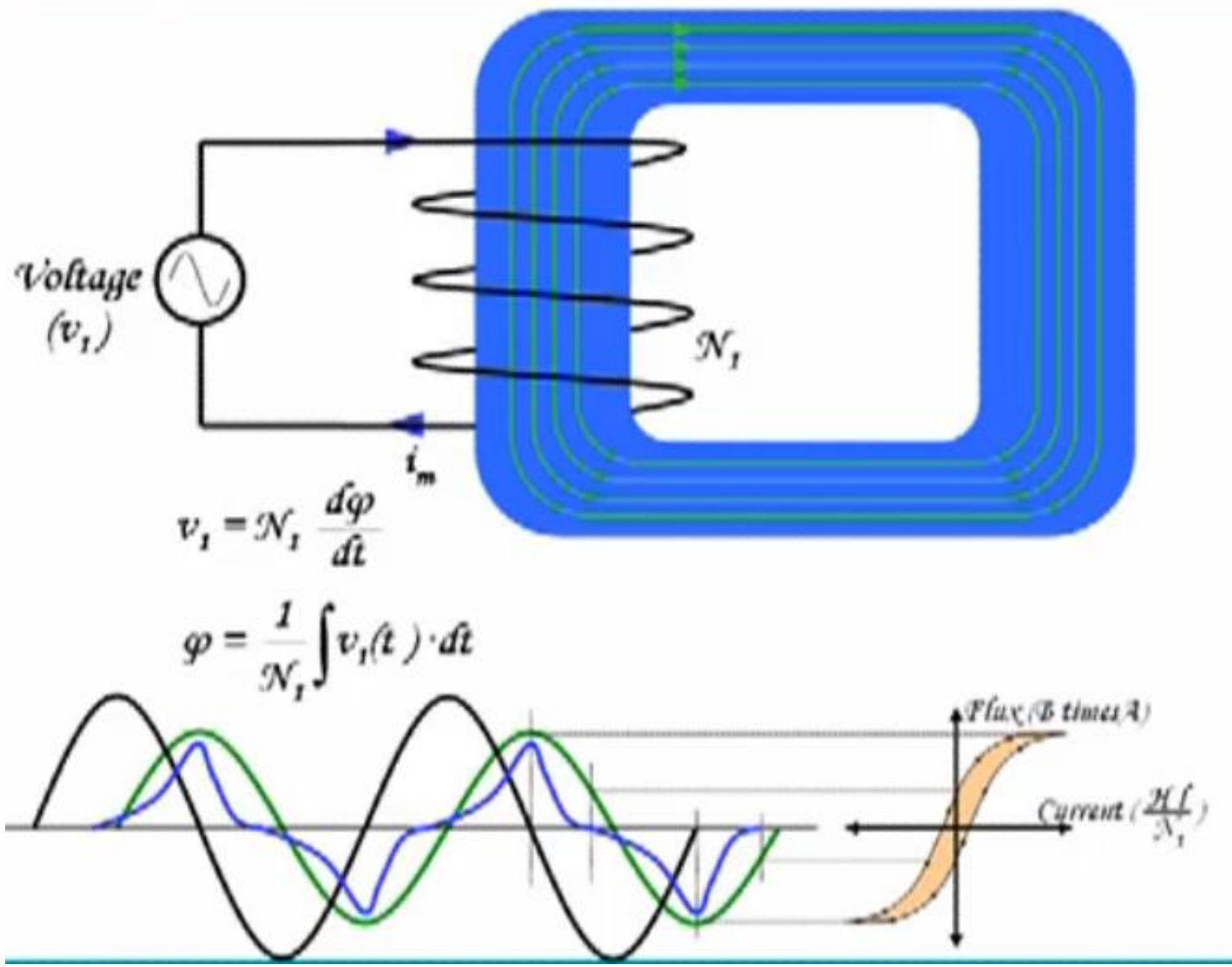
$$E_{\max} = 4fNA_c B_{\text{peak}} = 345 \text{ V}$$

# جریان مغناطیس کننده ( بدون لحاظ کردن هیستریزیس و تلفات آهنی )

در مدارهای مغناطیسی با هسته آهنی با مشخصه غیر خطی محاسبه تحلیلی جریان میسر نیست و لازم است از منحنی مغناطیسی هسته استفاده گردد. در صورت نادیده گرفتن تلفات هسته شکل موج جریان مغناطیس کننده به روش ترسیمی بدست می آید.



- ✓ ولتاژ شبکه سینوسی و شار نیز که انتگرال ولتاژ میباشد سینوسی خواهد بود (البته با ۹۰ درجه اختلاف فاز)
- ✓ رابطه  $\phi - i$  خطی نیست و در حالیکه شار درون هسته سینوسی است جریان مغناطیس کننده غیر سینوسی است.
- ✓ هر قدر هسته بیشتر اشباع و مشخصه آن غیر خطی تر شود شکل موج  $i_m$  غیر سینوسی تر خواهد شد.



## جریان تلفات هسته

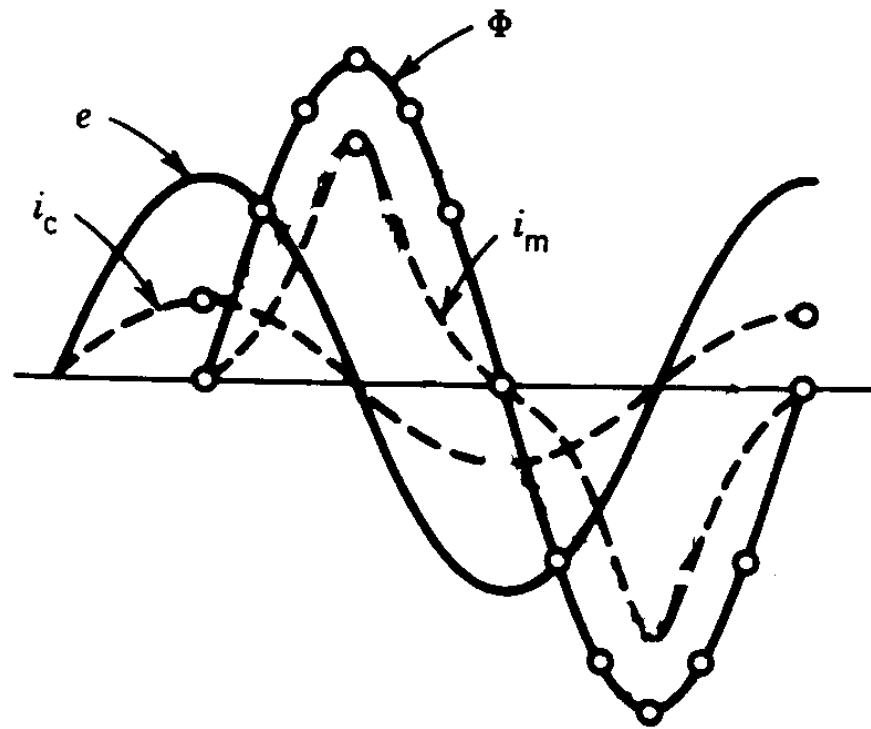
تلفات هسته شامل هیستریزیس و جریان فوکو می باشد که رویهم به صورت گرما در هسته ظاهر می شوند.

$$P_c = P_h + P_e$$

جریان تلفات هسته مربوط به توان اکتیو ( واقعی ) تلف شده ( همانند آنچه در یک مقاومت اهمی روی می دهد ) می باشد و با ولتاژ سیم پیچ هم فاز است. برای مدل کردن ( شبیه سازی ) این تلفات در یک مدار معادل از استفاده میشود که بطور موازی با منبع قرار می گیرد.

با داشتن تلفات هسته و ولتاژ داریم :

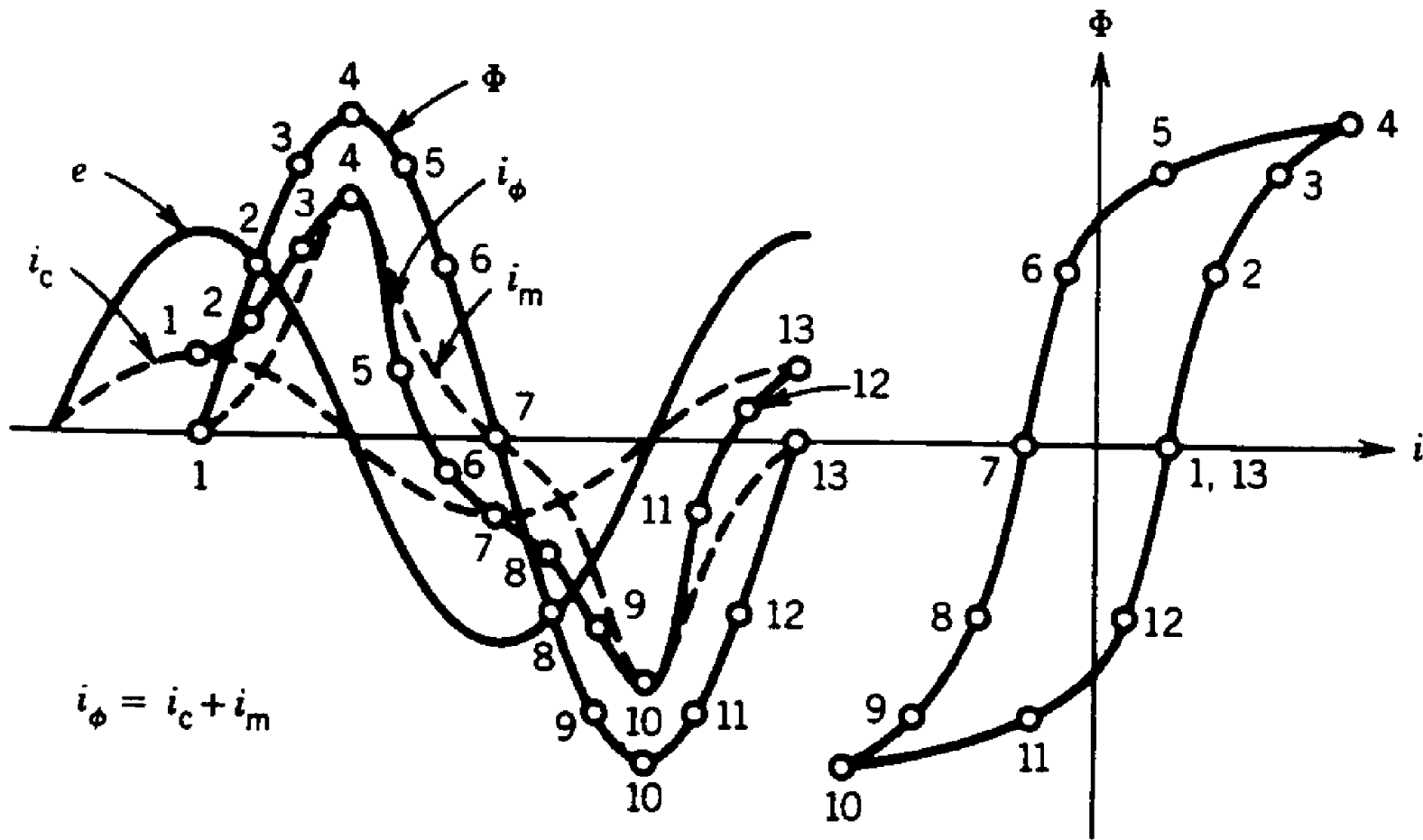
$$I_c = \frac{P_c}{E} , \quad R_c = \frac{E}{I_c} = \frac{E^2}{P_c}$$

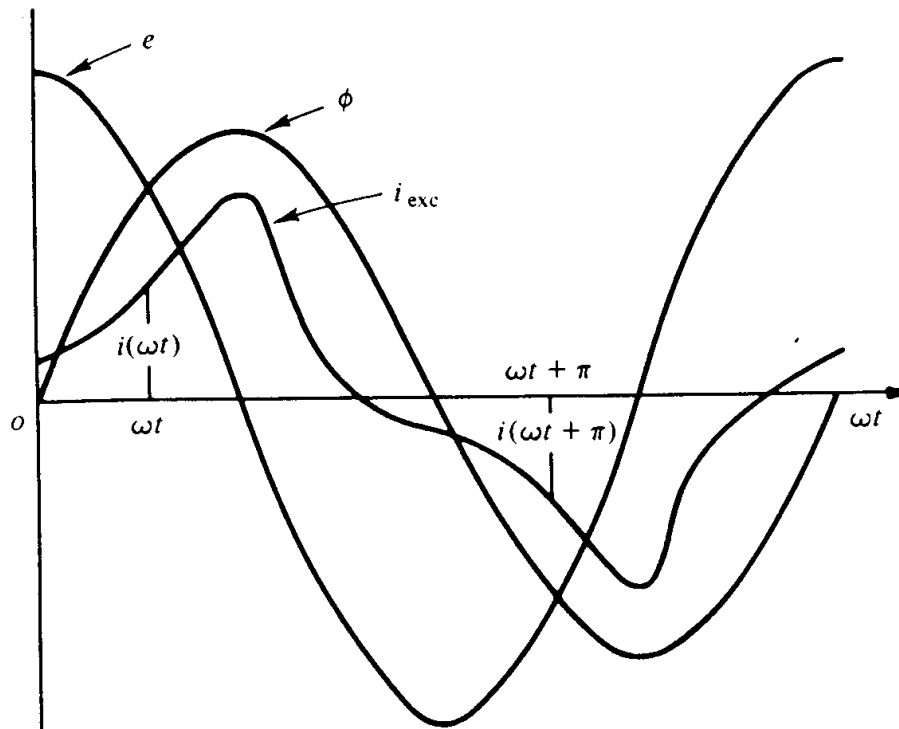


$i_{exc}$  یا  $i_{\phi}$  جریان تحریک ( Exciting Current )  
 $i_{mag}$  یا  $i_m$  جریان مغناطیس کننده ( Magnetizing Current )  
 $i_c$  جریان تلفات هسته ( Core Loss Current )



### شکل موج جریان تحریک- حلقه هیستریزیس دینامیک





Waves of induced voltage, flux, and exciting current.

