آمار ریاضی ۱
فصل چهارم: معیارهای ارزیابی برآوردگرها

استاد: دکتر اکبر اصغرزاده

۱. نااریبی: برآوردگر $T = t(X_1, \ldots, X_n)$ را یک برآوردگر نااریب برای $\alpha(\theta)$ گویند هرگاه

$$E(T) = \alpha(\theta), \quad \forall\, \theta \in \Theta.$$

اگر این ویژگی برقرار نباشد، در آن‌صورت برآوردگر T را یک برآوردگر اریب برای $\alpha(\theta)$ گویند و مقدار $E(T) - \alpha(\theta)$ را مقدار اریبی برآوردگر T گویند که آنرا با $bias_\theta(T)$ نمایش می‌دهند. لذا

$$bias_\theta(T) = E(T) - \alpha(\theta).$$

مثال. اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$، برآوردگرهای گشتاوری و ML پارامترهای μ و σ^2 عبارتند از $\bar{X}$ و $S_b^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.

الف) آیا $\hat{\mu} = \bar{X}$ برای μ نااریب است؟

ب) آیا $\hat{\sigma^2} = S_b^2$ برای σ^2 نااریب است؟

حل الف. داریم

$$E(\hat{\mu}) = E(\bar{X}) = E(\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} X_i) = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} E(X_i)$$
$$= \frac{۱}{n}\mu = n\mu = \mu$$
$$\Rightarrow \ E(\hat{\mu}) = \mu \ \text{یا} \ E(\bar{X}) = \mu.$$

لذا $\bar{X}$ برای μ نااریب است.

ب. داریم

$$E(\hat{\sigma^۲}) = E(S_b^۲) = E\Big(\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(X_i - \bar{X})^۲\Big) = ?$$

می‌دانیم در توزیع نرمال

$$\frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲} \sim \chi^۲_{(n-۱)}, \qquad \Big(S^۲ = \frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(X_i - \bar{X})^۲\Big)$$
$$\Rightarrow \ (n-۱)S^۲ = nS_b^۲$$

لذا

$$\frac{nS_b^۲}{\sigma^۲} \sim \chi^۲_{(n-۱)} \Rightarrow E\left(\frac{nS_b^۲}{\sigma^۲}\right) = n-۱$$
$$\Rightarrow \frac{n}{\sigma^۲}E(S_b^۲) = n-۱$$
$$\Rightarrow E(S_b^۲) = \frac{n-۱}{n}\sigma^۲ \neq \sigma^۲.$$

لذا $S_b^۲$ یک برآوردگر اریب برای $\sigma^۲$ است و مقدار اریبی آن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$bias_{\sigma^۲}(S_b^۲) = E(S_b^۲) - \sigma^۲ = \frac{n-۱}{n}\sigma^۲ - \sigma^۲ = -\frac{\sigma^۲}{n}.$$

تذکر. از روی برآوردگر اریب $S_b^۲$ می‌توان به‌صورت زیر یک برآورگر نااریب برای $\sigma^۲$ ساخت. داریم

$$E(S_b^۲) = \frac{n-۱}{n}\sigma^۲ \Rightarrow E(\frac{n}{n-۱}S_b^۲) = \frac{n}{n-۱}E(S_b^۲) = \frac{n}{n-۱}\frac{n-۱}{n}\sigma^۲ = \sigma^۲.$$

برآوردگر نااریبی که از روی S_b^2 به‌دست می‌آید را **برآوردگر اصلاح شده** گویند. لذا برآوردگر اصلاح شده‌ای که نااریب می‌باشد عبارتست از:

$$\frac{nS_b^2}{n-1} = \frac{(n-1)S^2}{n-1} = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

برای n های بزرگ داریم

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} E(S_b^2) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}\sigma^2 \\ &= \sigma^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \sigma^2 \times 1 = \sigma^2.\end{aligned}$$

یعنی S_b^2 مجانبا نااریب است (برای n های بزرگ نااریب است).

مثال. اگر $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} Exp(\theta)$ که

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0, \; \theta > 0.$$

الف) برآوردگر ML پارامتر $\alpha(\theta) = \frac{1}{\theta}$ را بیابید.

ب) آیا برآورگر به‌دست آمده در قسمت الف نااریب است؟ درصورت اریب بودن یک برآوردگر اصلاح شده‌ای که نااریب برای $\frac{1}{\theta}$ باشد را بیابید.

حل الف. تابع درست‌نمایی نمونه و لگاریتم آن عبارتند از:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}}$$
$$= \theta^{-n} \, e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = -n \ln \theta - \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$l'(\theta) = -\frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i \;\Rightarrow\; l'(\theta) = 0 \;\Rightarrow\; \hat{\theta} = \bar{X}.$$

از خاصیت پایایی MLE، برآوردگر ML پارامتر $\frac{۱}{\theta}$ می‌شود

$$\widehat{\alpha(\theta)} = \frac{۱}{\hat{\theta}} = \frac{۱}{\bar{X}}.$$

ب. محاسبه $E(\frac{۱}{\bar{X}})$:

می‌دانیم که

$$X_۱, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Exp(\theta) = \Gamma(\alpha = ۱, \beta = \theta)$$
$$\Rightarrow \; Y = \sum_{i=۱}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \theta).$$

پس

$$E\left(\frac{۱}{\bar{X}}\right) = E\left(\frac{n}{n\bar{X}}\right) = E\left(\frac{n}{\sum_{i=۱}^{n} X_i}\right) = E(\frac{n}{Y}) = nE(\frac{۱}{Y}).$$

از طرفی داریم

$$E(\frac{1}{Y}) = \int \frac{1}{y}\, f_Y(y)\, dy$$
$$= \int_0^\infty \frac{1}{y}\,\frac{1}{\theta^n\,\Gamma(n)} y^{n-1}\, e^{-y/\theta}\, dy = \frac{1}{\theta^n\,\Gamma(n)} \int_0^\infty y^{n-2}\, e^{-y/\theta}\, dy$$
$$= \frac{1}{\theta^n\,\Gamma(n)} \theta^{n-1}\,\Gamma(n-1) = \frac{1}{\theta}\,\frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)} = \frac{1}{(n-1)\theta}.$$

پس

$$E(\frac{1}{\bar{X}}) = nE(\frac{1}{Y}) = \frac{n}{(n-1)\theta} \neq \frac{1}{\theta}.$$

لذا $\frac{1}{\bar{X}}$ برآوردگر اریب برای $\frac{1}{\theta}$ است.

نکته. در بالا برای اثبات تساوی $\int_0^\infty y^{n-2}\, e^{-y/\theta}\, dy = \theta^{n-1}\Gamma(n-1)$ می‌توان از روش‌های زیر استفاده کرد.

روش اول.

$$Y \sim gamma(\alpha, \beta), \quad \Rightarrow\ f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} y^{\alpha-1}\, e^{-y/\beta}, \quad y > 0.$$

$$\int_0^\infty f_Y(y)\, dy = 1 \ \Rightarrow\ \int_0^\infty y^{\alpha-1}\, e^{-y/\beta}\, dy = \Gamma(\alpha)\beta^\alpha.$$

روش دوم.

$$\int_{۰}^{\infty} y^{n-۲}\, e^{-y/\theta}\, dy \quad (t=\frac{y}{\theta}\ \rightarrow\ t=t\,\theta\ \rightarrow\ dy=\theta dt)$$
$$=\int_{۰}^{\infty} (\theta t)^{n-۲}\, e^{-t}\, \theta\, dt=\theta^{n-۱}\int_{۰}^{\infty} t^{n-۲}\, e^{-t}\, dt=\theta^{n-۱}\,\Gamma(n-۱).$$

روش سوم:

$$X\sim gamma(\alpha,\beta)\ \Rightarrow\ E(X^r)=\frac{\beta^r\,\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)},$$
$$E(\frac{۱}{Y})=E(Y^{-۱})=\frac{\theta^{-۱}\Gamma(n-۱)}{\Gamma(n)}=\frac{۱}{(n-۱)\theta}.$$

برآوردگر نااریب برای $\frac{۱}{\theta}$:

$$E\left(\frac{n-۱}{n}\frac{۱}{\bar{X}}\right)=\frac{n-۱}{n}E(\frac{۱}{\bar{X}})=\frac{n-۱}{n}\,\frac{n}{n-۱}\,\frac{۱}{\theta}=\frac{۱}{\theta}.$$

لذا برآوردگر نااریب برای $\frac{۱}{\theta}$ می‌شود

$$\frac{n-۱}{n\bar{X}}=\frac{n-۱}{Y}=\frac{n-۱}{\sum_{i=۱}^{n}X_i}.$$

۲. واریانس: بین دو برآوردگر نااریب، برآوردگری بهتر است که واریانس کمتری داشته باشد.

مثال. اگر $X_۱, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} U(۰, \theta)$ که $\theta > ۰$. برآوردهای گشتاوری و ML پارامتر θ را بیابید و از روی آن‌ها دو برآوردگر نااریب برای θ بسازید. از میان این دو برآوردگر نااریب کدامیک بهتر می‌باشد؟

حل. قبلا اثبات شد برآورد ML پارامتر θ می‌شود $\hat{\theta} = X_{(n)}$. حال برای محاسبه برآورد گشتاوری θ داریم

$$E(X) = \bar{X} \;\Rightarrow\; \frac{\theta}{۲} = \bar{X} \Rightarrow \; \theta = ۲\bar{X}, \;\; \Rightarrow \; \tilde{\theta} = ۲\bar{X}.$$

بررسی نااریب بودن $\hat{\theta}$ و $\tilde{\theta}$:

$$E(\tilde{\theta}) = E(۲\bar{X}) = ۲E(\bar{X}) = ۲E(X_۱) = ۲\frac{\theta}{۲} = \theta.$$

لذا $\tilde{\theta}$ برای θ نااریب است.

$$E(\hat{\theta}) = E(X_{(n)}) = ?$$

روش اول برای محاسبه $E[X_{(n)}]$ (روش مستقیم): تابع چگالی $Y = X_{(n)}$ به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= n f_X(y) \left[F_X(y)\right]^{n-1} \\ &= n\frac{1}{\theta}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1} = \frac{n\, y^{n-1}}{\theta^n}, \quad 0 < y < \theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ E(\hat{\theta}) = E(Y) &= \int_0^\theta y \frac{n\, y^{n-1}}{\theta^n}\, dy \\ &= \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta y^n\, dy = \frac{n}{\theta^n}\, \frac{y^{n+1}}{n+1}\Big|_0^\theta = \frac{n}{n+1}\theta \neq \theta. \end{aligned}$$

لذا $\hat{\theta}$ یک برآوردگر اریب برای θ است. یک برآوردگر نااریب برای θ به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\widehat{\theta'} = \frac{n+1}{n}\hat{\theta} = \frac{n+1}{n}X_{(n)}.$$

روش دوم. استفاده از روابط بین توزیع‌ها:

$$X_i \sim U(۰,\theta),\;\; i=۱,\ldots,n \;\Rightarrow\; \frac{X_i}{\theta} \sim U(۰,۱),$$
$$\Rightarrow\; \frac{X_{(n)}}{\theta} \sim beta(n,۱),$$
$$\Rightarrow\; E(\frac{X_{(n)}}{\theta}) = \frac{n}{n+۱}, \quad \Rightarrow\; E(X_{(n)}) = \frac{n\theta}{n+۱}.$$

لذا $\tilde{\theta} = ۲\bar{X}$ و $\widehat{\theta'} = \frac{n+۱}{n}X_{(n)}$ هردو برآوردگر نااریب θ می‌باشند.

سؤال. از میان دو برآوردگر $\tilde{\theta}$ و $\widehat{\theta'}$ کدامیک بهتر است؟

جواب: برآوردگری که واریانس کمتری داشته باشد.

$$Var(\tilde{\theta}) = Var(۲\bar{X}) = ۴Var(\bar{X}) = \underbrace{\frac{۴\sigma^۲}{n}}_{\text{واریانس جامعه } \sigma^۲} = \frac{۴\theta^۲}{۱۲n} = \frac{\theta^۲}{۳n}.$$

$$Var(\widehat{\theta'}) = Var\Big(\frac{n+۱}{n}X_{(n)}\Big) = (\frac{n+۱}{n})^۲ Var(Y) \qquad (Y = X_{(n)})$$

$$Var(Y) = E(Y^{۲}) - E^{۲}(Y), \qquad E(Y) = \frac{n}{n+۱}\theta.$$

$$E(Y^{۲}) = \int_{۰}^{\theta} y^{۲}\,\frac{ny^{n-۱}}{\theta^n}\,dy = \frac{n}{\theta^n}\int_{۰}^{\theta} y^{n+۱}\,dy$$

$$= \frac{n}{\theta^n}\,\frac{y^{n+۲}}{n+۲}\Big|_{۰}^{\theta} = \frac{n}{n+۲}\theta^{۲}.$$

$$Var(Y) = \frac{n}{n+۲}\theta^{۲} - \left(\frac{n}{n+۱}\theta\right)^{۲} = \theta^{۲}\left[\frac{n}{n+۲} - \frac{n^{۲}}{(n+۱)^{۲}}\right]$$

$$= \frac{n[(n+۱)^{۲} - n(n+۲)]}{(n+۲)(n+۱)^{۲}}$$

$$= \frac{n}{(n+۲)(n+۱)^{۲}}\theta^{۲}.$$

$$\Rightarrow Var(\widehat{\theta'}) = \frac{(n+۱)^{۲}}{n^{۲}}\,\frac{n}{(n+۲)(n+۱)^{۲}}\theta^{۲} = \frac{\theta^{۲}}{n(n+۲)}.$$

لذا داریم:

$$\begin{cases} Var(\tilde{\theta}) = \frac{\theta^۲}{۳n}, \\ Var(\widehat{\theta'}) = \frac{\theta^۲}{n(n+۲)}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Var(\widehat{\theta'}) \leq Var(\tilde{\theta}) &\Leftrightarrow \frac{\theta^۲}{n(n+۲)} \leq \frac{\theta^۲}{۳n} \\ &\Leftrightarrow n(n+۲) \geq ۳n \\ &\Leftrightarrow n^۲ + ۲n - ۳n \geq ۰ \\ &\Leftrightarrow n^۲ - n = \underbrace{n(n-۱) \geq ۰}_{\text{همیشه برقرار است}}. \end{aligned}$$

لذا $\widehat{\theta'}$ برآوردگر بهتری است، چون واریانس کمتری دارد.