جلسه ۱۱

قبل از اینکه قضیه بعدی را ارائه دهیم، به مفاهیم مبانی آنالیز ریاضی برمی‌گردیم و مهم‌ترین موضوع در آنجا ارائه مفاهیم فضاهای متریک از جمله درونی بودن نقاط، مجموعه‌های باز، نقطه حدی و مجموعه‌های بسته می‌توان نام برد. حال در اینجا نیز $L(R^n, R^m)$ یک مجموعه‌ای است در واقع یک فضای برداری است که دارای یک نرم است و همچنین به واسطه این نرم می‌توان برای عناصرش متریک تعریف کرد. به عبارتی این فضای برداری یک فضای متریک است، بنابراین در این فضا می‌خواهیم مفهوم باز بودن یک مجموعه را پیاده نماییم.

از طرفی دیگر در درس مبانی آنالیز ریاضی با کمک مجموعه‌های باز توانستیم موضوع پیوستگی توابع را معین نماییم. یعنی به عنوان یادآوری اگر نگاشت f از فضای متریک X به فضای متریک Y باشد درصورتی این تابع خاصیت پیوستگی دارد که ... .

چند نقطه‌ای که برای خاصیت پیوستگی خالی مانده را در واقع برای شما خالی گذاشتم که یک نیم نگاهی به فصل چهارم کتاب رودین در درس مبانی آنالیز ریاضی داشته باشید.

حال در قضیه بعدی این مفاهیم را بکار بگیریم.

قضیه ۸.۱ فرض کنید Ω مجموعه تمام عملگرهای خطی معکوس‌پذیر بر R^n باشد. روابط زیر ثابت می‌شود

آ) هرگاه $A \in \Omega$، $B \in L(R^n)$ و

(نقطه به معنی ضرب است)

$$\|B-A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1 \qquad (1)$$

آنگاه $B \in \Omega$. (در اینجا $L(R^n, R^n) = L(R^n)$ است)

ب) Ω یک زیرمجموعه باز $L(R^n)$ است و نگاشت $A \to A^{-1}$ بر Ω پیوسته می‌باشد.

اثبات. همانطور که قبلاً بیان گردید برای عملگر A و معکوس آن داریم که $\|A\| < \infty$ و $\|A^{-1}\| < \infty$ پس فرض کنیم $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\alpha}$ که α یک عدد مثبت است و نیز فرض کنید $\|B-A\| = \beta$.

با توجه به فرض شماره (1) می‌توان نتیجه گرفت که $\beta < \alpha$. حال روابط زیر را در نظر بگیرید

$$\alpha|x| = \alpha|A^{-1}Ax| \leq \alpha|A^{-1}(Ax)| \leq \alpha\|A^{-1}\| \cdot |Ax| = |Ax|$$
$$= |(A-B+B)x| = |Ax - Bx + Bx|$$

$$= |(A-B)x + Bx| \le |(A-B)x| + |Bx| \le \beta|x| + |Bx|$$

حال در جمع بندی طرفین می‌توان عبارت زیر را نوشت که $\alpha|x| \le \beta|x|+|Bx|$ ، پس برای هر $x \in R^n$

$$(\alpha-\beta)|x| \le |Bx|. \qquad (۲)$$

چون طبق فرض $\alpha-\beta>0$ است، نامساوی (۲) نشان می‌دهد که اگر $Bx=0$ شود، لزوماً $x=0$ است. قبلاً نشان دادیم که این مفهوم به معنی این است که B یک به یک است، هر تابعی که یک به یک باشد پس معکوس‌پذیر خواهد بود. یعنی $B\in\Omega$.

از فرض (۱) به $B\in\Omega$ رسیدیم. ($\|B-A\| < \frac{1}{\alpha} \Rightarrow B \in \Omega$)

به عبارتی هر عنصری که فاصله آن از عنصر A کمتر از $\frac{1}{\alpha}$ باشد، در Ω است، پس Ω مجموعه باز است.

(ب) به رابطه (۲) برمی‌گردیم و در آن رابطه به جای x مقدار $B^{-1}y$ قرار می‌دهیم. ($Bx=y$)

$$(\alpha-\beta)|B^{-1}y| \le |B(B^{-1}y)| = |BB^{-1}y| = |y|$$

$$\to \quad |B^{-1}y| \le \frac{1}{\alpha-\beta}|y|$$

چون B^{-1} یک عملگر است و دارای نرم است، برای بدست آوردن نرم آن از دو طرف سوپریمم برای همه $|y|\le 1$ است می‌گیریم، برای چنین yهایی سمت راست کمتر از $\frac{1}{\alpha-\beta}$ است

$$\|B^{-1}\| \le \frac{1}{\alpha-\beta} \qquad (۳)$$

با توجه به اینکه می‌دانیم ترکیب یک عملگر با وارون آن، برابر عملگر همانی I است، پس

$$B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}I - A^{-1} = B^{-1}AA^{-1} - A^{-1} = (B^{-1}A - I)A^{-1}$$
$$= B^{-1}(A-B)A^{-1}$$

حال در این رابطه نرم می‌گیریم و با توجه به قضیه ۱.۷ (پ)

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| = \|B^{-1}(A-B)A^{-1}\| \le \|B^{-1}\|\,\|A-B\|\,\|A^{-1}\|$$

(چون فرض کردیم $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\alpha}$ ، $\|B-A\| = \beta$ و از رابطه (۳) $\|B^{-1}\| \le \frac{1}{\alpha-\beta}$) پس روی هم رفته

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \le \frac{\beta}{\alpha(\alpha-\beta)}$$

این رابطه به معنی پیوستگی تابع $A \to A^{-1}$ است زیرا اگر $B \to A$ آنگاه $\beta \to 0$ پس سمت راست نامساوی به صفر میل خواهد کرد، پس $B^{-1} \to A^{-1}$.

۱.۰.۹ ماتریسها

در قسمت قبل با فضای متریک $L(R^n, R^m)$ آشنا شدیم، حال به حالت کلی‌تر می‌خواهیم برای فضای برداری $L(X, Y)$ که X و Y هر دو فضای برداری هستند بحث نماییم. فرض کنید $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ و $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ بترتیب پایه های فضاهای برداری X و Y باشند. می دانیم که با این پایه‌ها هر یک از عناصر فضای برداری X و Y دارای مختصات با این پایه‌ها می باشند. یعنی هر عنصر $x \in X$ دارای مختصات $c_1, c_2, \dots, c_n$ به صورتی دارد که

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

و هر عنصر $y \in Y$ نیز دارای مختصات $d_1, d_2, \dots, d_m$ به صورتی دارد که

$$y = \sum_{j=1}^{m} d_j y_j .$$

حال اگر $A \in L(X, Y)$ درنظر گرفته شود، می‌دانیم که برای هر $1 \leq j \leq n$، Ax_j عضوی از فضای برداری Y است، بنابراین دارای مختصات $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ است یعنی

$$Ax_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \qquad (1 \leq j \leq n) \qquad (1)$$

پس برای هر $1 \leq j \leq n$، m مختص داریم، اگر این موضوع را برای تمام عناصر پایه X انجام دهیم $n \times m$ مختص خواهیم داشت که با جمع آوری آنها ماتریس زیر بدست می‌آید

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

چون این ماتریس از اثر A بوجود آمده، این ماتریس را بطور خلاصه با نماد $[A]$ نشان می‌دهیم. یعنی اگر A بخواهد بر یک عنصر X اثر بگذارد، می‌توان به جای آن از ضرب ماتریس در بردار x استفاده کرد، چون x نیز یک بردار به حساب می‌آید یعنی

$$Ax = [A]x = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} . \qquad (3)$$

با توجه به رابطه (۱) a_{ij} مختصات Ax_j نسبت به پایه داده شده در Y است
و در واقع ستون jام ماتریس (۲) است. پس با توجه به رابطه (۳) برد A به وسیله بردارهای
ستونی $[A]$ پیموده می شود.

به جمله اول در این بخش برمی گردیم و می دانیم که هر عنصر Y دارای مختصات می باشد. پس
برای هر $x\in X$ که مختصات آن $c_1, c_2, \ldots, c_n$ است، می خواهیم مختصات Ax را
پیدا کنیم.

$$Ax = A\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j Ax_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right)$$

چون A خطی است — با توجه به رابطه (۱)

حال دو جمعوند را جابجا می کنیم.

$$Ax = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j\right) y_i$$ (عبارت داخل پرانتز با توجه به (۳) می باشد) (۴)

(یعنی سطر iام ماتریس را در c_j ها ضرب کردیم) لذا برای $1 \leq i \leq n$، $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j$
مختصات Ax خواهد بود.

نتیجه. با انتخاب عضو $A\in L(X,Y)$ توانستیم نمایش ماتریسی $[A]$ را
بدست آوریم، یعنی بین عناصر $L(X,Y)$ و مجموعه ماتریسهای m در n یک تناظر
یک به یک برقرار گردد.

نکته. طبیعی است که بدست آوردن مختصات در پیدا کردن ماتریس $[A]$ نقش موثری را
دارد. ولی این نکته را باید بدانیم که بدست آوردن مختصات بستگی به ارائه پایه های فضا
دارد. اگر پایه های فضا را تغییر دهیم، در نتیجه مختصات نیز تغییر خواهد کرد. پس $[A]$
بستگی به A دارد و نیز بستگی به پایه های X، Y خواهد داشت.

در قسمت بعد می خواهیم نمایش ماتریسی BA را بدست آوریم که $B\in L(Y,Z)$ است.
پس فرض کنید Z سومین فضای برداری با پایه های $\{z_1, z_2, \ldots, z_p\}$ باشد و برای هر
y_i، فرض کنید $b_{1i}, b_{2i}, \ldots, b_{pi}$ مختصات آن باشند.

$$By_i = \sum_{k=1}^{p} b_{ki} z_k \qquad (۵)$$

از طرفی می‌دانیم که BA ~~[illegible]~~ تبدیلی است از X به Z ، پس برای هر $1 \le j \le n$ می‌توانیم مختصات $(BA)x_j$ را بدست آوریم . فرض کنیم این مختصات برابر $c_{1j}, \dots, c_{pj}$ باشند پس

$$(BA)x_j = \sum_{k=1}^{p} c_{kj} z_k \qquad (۶)$$

$$(BA)x_j = B(Ax_j) = B\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} By_i$$

از (۱) — چون B خطی است

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\Big(\sum_{k=1}^{p} b_{ki} z_k\Big)$$

با توجه به (۵)

حال جمع‌ها را تغییر می‌دهیم

$$(BA)x_j = \sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}\Big) z_k$$

با مقایسه طرفین این رابطه با رابطه (۶) می‌توان نتیجه گرفت که $c_{kj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}$ است .

پس مختصات $(BA)x_j$ بوسیله ضرب مختصات ضرب مختصات a_{ij} و b_{ki} بدست آمده است

به عبارتی با مختصات c_{kj} یک ماتریس $[BA]$ حاصل شده که این مختصات از حاصل ضرب $[B]$ در $[A]$ بدست آمده است . یعنی می‌توان بیان کرد که $[B][A]$ برابر $[BA]$ است ، که قاعده ضرب معمولی دو ماتریس خواهد بود

با کمک مختصات ارائه شده در رابطه (۴) برای عنصر Ax ، می‌توانیم نامساوی شوارتز را به صورت زیر داشته باشیم

$$|Ax|^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j\Big)^2 \le \sum_{i=1}^{m}}_{\text{نامساوی شوارتز}}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{n} c_j^2\Big)$$

چون $|x|^2 = \sum_{j=1}^{n} c_j^2$ است ، پس داریم

$$|Ax|^2 \le \sum_{i,j} a_{ij}^2 |x|^2$$

حال اگر بخواهیم از طرفین ریشه گرفته و سپس برای $|x| \geq 1$ از طرفین سوپریمم بگیریم تا به نرم $\|A\|$ برسیم ، می‌دانیم که

$$|Ax| \le \Big\{\sum_{i,j} a_{ij}^2 |x|^2\Big\}^{1/2} \qquad (۹)$$

سمت راست همواره از مقدار $\{\sum_{i,j} a_{ij}^2\}^{1/2}$ کمتر است، پس

$$\|A\| \leq \left\{\sum_{i,j} a_{ij}^2\right\}^{1/2} \qquad (7)$$

چون a_{ij} ها عناصر ماتریس $[A]$ اعداد حقیقی یا مختلط هستند، به عبارتی اسکالر هستند.

پس سمت راست (7) یک مقدار مشخص و متناهی است.

۱ ۰ ۱۰ مشتق‌گیری

در این بخش می‌خواهیم مفهوم مشتق یک تابع چندمتغیره را که در واقع قلمرو این تابع R^n است مورد بحث قرار دهیم. اگر $n=1$ باشد همان مشتق معرفی شده در درس مبانی آنالیز ریاضی است. از حالت $n=1$ می‌خواهیم کمک بگیریم یعنی از مشتق معمولی توابع می‌خواهیم معنی ببریم و طوری آن را نمایش دهیم که بتوان برای حالت کلی‌تر یعنی n های بزرگتر از یک قابل نمایش و تعمیم باشد.

حال فرض کنید تابع f یک تابع حقیقی با قلمرو $(a,b)\subset R^1$ باشد و $x\in(a,b)$ و در صورتی این تابع در نقطه x مشتق‌پذیر خواهد بود که حد زیر بدست آید. یعنی حد آن مشخص گردد

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

این مقدار را که همانطور شما می‌دانید در صورت وجود برابر $f'(x)$ نشان می‌دهیم یعنی مشتق تابع f در نقطه x می‌باشد. طبیعی است که کسر $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ برابر $f'(x)$ دقیقاً برابر نیست بلکه به آن نزدیک است پس

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+r(h)$$

که $r(h)$ را باقی‌مانده می‌نامیم، یعنی $\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h}=0$. در نتیجه سمت چپ برابر مجموع دو جمله سمت راست است. حال $f'(x)h$ به دلیل اینکه $f'(x)$ یک مقدار مشخص است را به صورت یک تبدیل خطی عمل می‌کند که می‌تواند مقدار h را به $f'(x)h$ ببرد. پس مهم هست که بدانیم، مشتق تابع f در نقطه x، یعنی $f'(x)$ نه تنها یک عدد حقیقی است، بلکه می‌تواند یک عملگر خطی بر R^1 که h را به $f'(x)h$ می‌برد، تلقی نماییم.

صفحه ۱۷

به عبارتی می‌توان بیان نمود که هر عدد حقیقی را می‌توان به عنوان یک عملگر خطی تصور کرد که اثر آن بر اعداد دیگر بصورت ضرب نمایشی پیدا می‌کند. پس بین اعداد حقیقی R^1 و مجموعه عملگرهای $L(R^1)$ تناظر یک به یک برقرار می‌گردد.

در اینجا به یک مثال توجه کنید

$$g(x) = (e^x, x^2) \qquad (۱)$$

در واقع در این مثال، تابع g از بازه $(a,b)\subset R^1$ به عنوان قلمرو و برد آن زیر مجموعه R^2 است.

اگر بخواهیم مشتق این تابع را حساب کنیم برابر زوج مرتب زیر است

$$g'(x) = (e^x, 2x) \qquad (۲)$$

یعنی مشتق تک تک مؤلفه‌های آن. اگر به جای دو مؤلفه‌ای، تابع سه مؤلفه‌ای یا بیشتر را مثال بزنیم، محل مشتق بصورت بالا ساده خواهد بود. بنابراین با مقایسه (۱) و (۲) می‌توان بیان نمود که مشتق یک تابع برداری مانند (۱)، برابر یک تابع برداری (۲) است.

بصورت کلی‌تر در فضای R^m، اگر تابع f از بازه $(a,b)\subset R^1$ به R^m یک تابع برداری باشد مشتق آن در صورت وجود، یک بردار خواهد بود، یعنی برای هر $x\in R^1$ مقدار مشتق f در این نقطه برداری مانند y از R^m است. بنابراین در صورتی گوییم تابع f در نقطه x دارای مشتق است، هرگاه بتوانیم بردار y ای از R^m پیدا کنیم که

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - y\right\} = 0 \qquad (۳)$$

می‌توان این رابطه را به صورت زیر تعبیر دیگری داد.

$$f(x+h) - f(x) = hy + r(h) \qquad (۴)$$

که تابع برداری r طوری است که اگر $h\to 0$ آنگاه $\frac{r(h)}{h}\to 0$. به عبارتی در سمت راست رابطه دو جمله داریم، جمله دوم که باقی‌مانده است و جمله hy که آن را جزء اصلی می‌نامیم. همانطور که قبلاً گفتیم بردار y نقش تبدیل خطی را بازی می‌کند و اثرش بر مقدار h بصورت ضرب نمایشی پیدا کرده است.

پس برای هر بردار $y\in R^m$ می‌توانیم در واقع یک تبدیل خطی را از فضا $L(R^1,R^m)$ داشت. پس در واقع آن y را مشتق f در نقطه x بدانیم یعنی $f'(x)=y$

پس $f'(x)$ نقش یک تبدیل خطی را بازی می‌کند یعنی عضوی از فضای $L(R^1,R^m)$ است.

حال اگر f یک نگاشتی مشتق‌پذیر از $(a,b)\subset R^1$ به توی R^m باشد و $x\in(a,b)$ آنگاه $f'(x)$ تبدیلی خطی از R^1 به توی R^m است که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h}{h}=0 \qquad (۵)$$

این همان رابطه (۳) است که به جای $f'(x)=y$ قرار گرفته است. بنابراین رابطه (۵) در صورت برقراری آن به معنی مشتق تابع $f:(a,b)\to R^m$ است.

۱۰۱ مشتق توابع چند متغیره

همانطور که از ابتدای این فصل آمده است، در اینجا و با توجه به نقش تبدیل خطی می‌خواهیم مشتق توابع چند متغیره f از مجموعه باز E از R^n به توی R^m کشف نماییم. نباید این تعریف مشتق با مطالب قبل در خصوص مشتق توابع برداری تفاوتی داشته باشد فقط تفاوت آن این است که متغیر آن به جای یک متغیر، از چند متغیر خواهد بود.

از رابطه (۳) کمک می‌گیریم و معادل آن رابطه (۵)، و می‌نویسیم در صورتی تابع f در نقطه $x\in R^n$ مشتق‌پذیر است، هرگاه تبدیل خطی مانند A از R^n به توی R^m (در رابطه (۵) بیانگر بردار y به عنوان تبدیل خطی) وجود داشته باشد بطوریکه حد زیر بدست آید

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)-f(x)-Ah|}{|h|}=0 \qquad (۶)$$

و می‌نویسیم $f'(x)=A$ و گوییم f در نقطه x مشتق‌پذیر است. هرگاه f در تمام نقاط E مشتق‌پذیر باشد، گوییم f بر E مشتق‌پذیر است.

حال صورت و مخرج کسر (۶) را بررسی می‌کنیم. چون $h\in R^n$ و قرار است که $|h|$ به صفر میل کند، پس بدلیل باز بودن E می‌توان h هایی را در نظر گرفت که $x+h\in E$

بنابراین $f(x+h)\in R^m$ و $Ah\in R^m$ (یعنی $A\in L(R^n,R^m)$) است پس

$$f(x+h)-f(x)-Ah\in R^m$$

در صورت (۱) نرم همان قدر مطلق در R^m بوده و در مخرج قدر مطلق در R^n خواهد بود.

قضیه ۱۰.۱۲. فرض کنید E و f همانهایی باشند که در تعریف (ا ث) اشاره کرده‌ایم و $x\in E$ و فرض کنید رابطه (۱) برای دو مقدار $A=A_1$ و $A=A_2$ برقرار باشد در این صورت $A_1=A_2$.
(معنی آن این است که در صورتیکه تابع f در نقطه x مشتق‌پذیر باشد، مقدار مشتق آن یکتاست)

اثبات. فرض کنید $B=A_1-A_2$. (می‌خواهیم ثابت کنیم $B=0$، یعنی $A_1=A_2$) داریم

$$|Bh|\leq|(A_1-A_2)h|=|f(x+h)-f(x)-A_1h+f(x)-f(x+h)-A_2h|$$

$$\leq|f(x+h)-f(x)-A_1h|+|f(x+h)-f(x)-A_2h|$$

می‌دانیم که اگر در سمت راست بر $|h|$ تقسیم نموده و $|h|\to 0$ آنگاه با توجه به رابطه (۱)، سمت راست به صفر میل است یعنی

$$\frac{|f(x+h)-f(x)-A_1h|}{|h|}\to 0 \qquad \frac{|f(x)-f(x)-A_2h|}{|h|}\to 0$$

پس سمت چپ نیز $\frac{|Bh|}{|h|}\to 0$. رابطه بدست آمده برای $h\to 0$ است چون h بردار هست در R^n، می‌تواند از هر سمت به $0\leftarrow h$ میل کند ما می‌توانیم به جای آن $h=tk$ قرار دهیم که $t\to 0$ و t حقیقی است. پس

(۲) $\qquad \frac{|B(tk)|}{|tk|}\to 0 \qquad t\to 0$ ، k ثابت است

چون B خطی است داریم $\frac{|tB(k)|}{|tk|}\to 0$. رابطه (۲) در واقع از t مستقل است چون می‌توان از صورت و مخرج ساده کرد. به عبارتی $\frac{|Bk|}{|k|}\to 0$. چون k ثابت است پس $Bk=0$

بنابراین $0=Bh=Btk=tBk$ ، $B=0$.

پس می‌توان پذیرفت که در رابطه (۱) مقدار $f'(x)$ یک تبدیل خطی از R^n به توی R^m است. در اینجا $f'(x)$ نیز مشتق f در نقطه x به دلیل چند متغیره بودن f تعبیر مشتق کلی می‌نماییم.

حال با چنین تعبیری که مشتق یک تابع f از مجموعه باز $E\subset R^n$ به توی R^m به
عنوان یک تبدیل خطی از R^n به R^m است، یعنی $f'(x)=A\in L(R^n,R^m)$.
حال می‌خواهیم بدانیم که A به عنوان عنصری از این فضا و به عنوان یک تبدیل خطی در نظر
گرفته و مشتق آن را بررسی کنیم. (البته مشتق تبدیل خطی A که برابر $f'(x)$ است،
به معنی مشتق دوم تابع f در نقطه x نیست، خوب دقت شود)
در صفحات قبل نمایش یک تبدیل خطی را با ماتریس نشان دادیم و نیز بیان کردیم که اگر دو تبدیل خطی
A و B داشته باشیم و بخواهیم این دو تابع را باهم به صورت ترکیب نمایش دهیم نیز $B\circ A$
بدان معنی است که BA نمایش داده می‌شود و اثر بر یک نقطه به صورت اثر حاصل ضرب دو
ماتریس $[B][A]$ در این نقطه است یعنی

$$(B\circ A)(x)=BAx=[B][A]x \qquad (۳)$$

پس دقت شود که علامت ترکیب در سمت چپ به علامت ضرب دو ماتریس در سمت راست
تبدیل شده است. حال می‌خواهیم در قضیه بعد در مورد ترکیب دو تابع چند متغیره بحث نماییم.

قضیه ۹.۱۵ فرض کنیم E مجموعه بازی در R^n باشد و f مجموعه E را به توی R^m بنگارد،
f در $x_0\in E$ مشتق پذیر باشد، g مجموعه بازی شامل $f(E)$ را به توی R^k بنگارد و g در
نقطه $f(x_0)$ مشتق پذیر باشد. در این صورت نگاشت F از مجموعه E به توی R^k که با

$$F(x)=g(f(x))$$

توصیف شده است در x_0 مشتق پذیر است و

$$F'(x_0)=g'(f(x_0))\,f'(x_0) \qquad (۴)$$

(رابطه (۴) بیان دیگری از (۳) است. چون طبق فرض قضیه سمت چپ و راست (۴) ماتریس هستند)

اثبات. قرار می‌دهیم $B=g'(y_0)$، $A=f'(x_0)$ و $y_0=f(x_0)$. با توجه به باز بودن دو
مجموعه E و $f(E)$، عناصر $h\in R^n$، $k\in R^m$ وجود دارند که $x_0+h\in E$ و $f(x_0)+k$ عضو
$f(E)$ می‌گردند بنابراین $f(x_0+h)$ و $g(y_0+k)$ معین و قابل تعریف هستند. تعریف می‌کنیم

$$u(h)=f(x_0+h)-f(x_0)-Ah$$
$$v(k)=g(y_0+k)-g(y_0)-Bk \qquad (۵)$$