دانشگاه مازندران

احتمال ۱

کوواریانس و ناهمبستگی

مدرس: دکتر اصغرزاده نشلی

A.Aghazadeh

کواریانس (Covariance):

اگر X و Y دو متغیر تصادفی با میانگین‌های μ_X و μ_Y باشند، آن‌گاه کواریانس X و Y را با $Cov(X, Y)$ یا $\sigma_{X,Y}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

فرمول محاسباتی کواریانس:

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E[XY - \mu_Y X - \mu_X Y + \mu_X \mu_Y)] \\ &= E(XY) - \mu_Y E(X) - \mu_X E(X) + \mu_X \mu_Y \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

A.Agharzadeh

مثال ۱.

با توجه به جدول احتمال توام X و Y، کواریانس X و Y را بیابید.

		x: ۰	۱	۲	
y	۰	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۱۲}$	$\frac{۷}{۱۲}$
	۱	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۱}{۶}$	۰	$\frac{۷}{۱۸}$
	۲	$\frac{۱}{۳۶}$	۰	۰	$\frac{۱}{۳۶}$
		$\frac{۵}{۱۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۱۲}$	

پاسخ: با استفاده از احتمال‌های توام داریم

$$E(XY) = (۰\times۰\times\frac{۱}{۶})+(۰\times۱\times\frac{۲}{۹})+(۰\times۲\times\frac{۱}{۳۶})+(۱\times۰\times\frac{۱}{۳})+(۱\times۱\times\frac{۱}{۶})+(۲\times۰\times\frac{۱}{۱۲}) = \frac{۱}{۶}$$

و با استفاده از احتمال‌های حاشیه‌ای داریم

$$\begin{aligned} E(X) &= (۰\times\frac{۵}{۱۲})+(۱\times\frac{۱}{۲})+(۲\times\frac{۱}{۱۲}) = \frac{۲}{۳} \\ E(Y) &= (۰\times\frac{۷}{۱۲})+(۱\times\frac{۷}{۱۸})+(۲\times\frac{۱}{۳۶}) = \frac{۴}{۹} \end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که

$$Cov(X, Y) = \frac{۱}{۶} - (\frac{۲}{۳})(\frac{۴}{۹}) = -\frac{۷}{۵۴}$$

A.Agharzadeh

مثال ۲.

کواریانس دو متغیر تصادفی را که چگالی توام آن‌ها به صورت زیر است را بیابید.

$$f(x,y)=\begin{cases} ۲ & x>۰,\ y>۰,\ x+y<۱ \\ ۰, & \text{o.w.} \end{cases}$$

پاسخ: با محاسبه امید ریاضی XY، X و Y

$$E(XY) = \int_۰^۱\int_۰^{۱-x} ۲xy\,dydx = \frac{۱}{۱۲}$$

$$E(X) = \int_۰^۱\int_۰^{۱-x} ۲x\,dydx = \frac{۱}{۳}$$

$$E(Y) = \int_۰^۱\int_۰^{۱-x} ۲y\,dydx = \frac{۱}{۳}$$

نتیجه می‌شود که

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{۱}{۱۲}-(\frac{۱}{۳})(\frac{۱}{۳})=\frac{-۱}{۳۶}$$

A.Agharzadeh

قضیه ۱:

اگر X و Y مستقل باشند، آن‌گاه

$$Cov(X, Y) = 0$$

اثبات: با توجه به استقلال X و Y داریم

$$E(XY) = E(X)E(Y) \Rightarrow Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

تذکر: عکس قضیه فوق برقرار نمی‌باشد. یعنی $Cov(X, Y) = 0$ استقلال X و Y را نتیجه نمی‌دهد.

A.Agharzadeh

مثال ۳.

اگر توزیع احتمال توام X و Y به صورت زیر باشد، نشان دهید:

با این‌که دو متغیر تصادفی مستقل نیستند، کواریانس آن‌ها صفر است.

		x			
		-۱	۰	۱	
y	-۱	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۲}{۳}$
	۰	۰	۰	۰	۰
	۱	$\frac{۱}{۶}$	۰	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$
		$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	

پاسخ: با استفاده از احتمال‌های حاشیه‌ای داریم

$$E(X) = (-۱ \times \frac{۱}{۳}) + (۰ \times \frac{۱}{۳}) + (۱ \times \frac{۱}{۳}) = ۰$$

$$E(Y) = (-۱ \times \frac{۲}{۳}) + (۰ \times ۰) + (۱ \times \frac{۱}{۳}) = \frac{-۱}{۳}$$

و

$$E(XY) = \left((-۱)(-۱)\frac{۱}{۶}\right) + \left(۰(-۱)\frac{۱}{۳}\right) + \left(۱(-۱)\frac{۱}{۶}\right) + \left((-۱)(۱)\frac{۱}{۶}\right) + \left((۱)(۱)\frac{۱}{۶}\right) = ۰$$

A.Agharzadeh

مثال ۳.

ادامه پاسخ: بنابراین $Cov(X, Y) = ۰ - ۰(\frac{-۱}{۳}) = ۰$ (کواریانس صفر است). اما دو متغیر تصادفی مستقل نیستند. برای مثال برای $x = -۱$ و $y = -۱$ داریم

$$f_{X,Y}(-۱, -۱) = \frac{۱}{۶},\ f_X(-۱) = \frac{۱}{۳},\ f_Y(-۱) = \frac{۲}{۳} \quad \Rightarrow f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x).f_Y(y)$$

A.Agharzadeh

خواص کواریانس:

۱. $Cov(X, c) = ۰$،

۲. $Cov(X, X) = Var(X)$،

۳. کواریانس نسبت به مرکز اندازه‌گیری حساس نیست: $Cov(X + a, Y + b) = Cov(X, Y)$،

۴. کواریانس نسبت به واحدهای اندازه‌گیری حساس است: $Cov(aX, bY) = ab\,Cov(X, Y)$،

۵. $Cov(\sum_{i=۱}^{m} a_i X_i, \sum_{j=۱}^{n} b_j Y_j) = \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} a_i b_j Cov(X_i, Y_j)$.

A.Agharzadeh

اثبات خاصیت پنجم:

$$
\begin{aligned}
Cov\Big(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} b_j Y_j\Big) &= E\Big[\Big(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i - \sum_{i=1}^{m} a_i \mu_{X,i}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j Y_j - \sum_{j=1}^{n} b_j \mu_{Y,j}\Big)\Big] \\
&= E\Big[\sum_{i=1}^{m} a_i (X_i - \mu_{X,i}) \sum_{j=1}^{n} b_j (Y_j - \mu_{Y,j})\Big] \\
&= E\Big[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j (X_i - \mu_{X,i})(Y_j - \mu_{Y,j})\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j E\big[(X_i - \mu_{X,i})(Y_j - \mu_{Y,j})\big] \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j Cov(X_i, Y_j)
\end{aligned}
$$

A.Aghazadeh

مثال ۴.

کواریانس زیر را محاسبه کنید.

$$Cov(a_1X_1 + a_2X_2, b_1Y_1 + b_2Y_2)$$

پاسخ:

$$\begin{aligned} Cov(a_1X_1 + a_2X_2, b_1Y_1 + b_2Y_2) &= a_1b_1Cov(X_1, Y_1) + a_1b_2Cov(X_1, Y_2) \\ &+ a_2b_1Cov(X_2, Y_1) + a_2b_2Cov(X_2, Y_2) \end{aligned}$$

قضیه ۲:

اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، داریم

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2Cov(X, Y)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} Var(X+Y) &= E[(X+Y)^2] - E^2[(X+Y)] \\ &= E[X^2 + Y^2 + 2XY] - E^2(X) - E^2(Y) - 2E(X)E(Y) \\ &= E(X^2) - E^2(X) + E(Y^2) - E^2(Y) + 2[E(XY) - E(X)E(Y)] \\ &= Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y) \end{aligned}$$

A.Agharzadeh

قضیه ۳:

متغیر تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_n$ را در نظر بگیرید، آن‌گاه

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i\right)^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)\right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} E(X_i - \mu_i)^2 + 2\sum\sum_{i<j} E\left[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right] \end{aligned}$$

فرمول کلی:

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + 2\sum\sum_{i<j} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

A.Agharzadeh

نکته:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum\sum_{i<j} a_i a_j$$

در حالتی‌که $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مستقل باشند، داریم

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\, Var(X_i)$$

A.Agharzadeh

مثال ۵.

اگر متغیرهای تصادفی X، Y و Z دارای میانگین‌های $\mu_X = ۲,\ \mu_Y = -۳,\ \mu_Z = ۴$، واریانس‌های $\sigma_X^۲ = ۱$ ، $\sigma_Y^۲ = ۵$, $\sigma_Z^۲ = ۲$ و کواریانس‌های $Cov(X, Y) = -۲,\ Cov(X, Z) = -۱,\ Cov(Y, Z) = ۱$ باشند، میانگین و واریانس $W = ۳X - Y + ۲Z$ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$E(W) = E(۳X - Y + ۲Z) = ۳E(X) - E(Y) + ۲E(Z) = ۳(۲) - (-۳) + ۲(۴) = ۱۷$$

و

$$\begin{aligned} Var(W) &= Var(۳X - Y + ۲Z) \\ &= ۹Var(X) + Var(Y) + ۴Var(Z) - ۶Cov(X, Y) + ۱۲Cov(X, Z) \\ &\quad - ۴Cov(Y, Z) \\ &= ۹(۱) + ۵ + ۴(۲) - ۶(-۲) + ۱۲(-۱) - ۴(۱) = ۱۸ \end{aligned}$$

A.Agharzadeh

مثال ۶.

اگر متغیرهای تصادفی X، Y و Z دارای میانگین‌های $\mu_X = ۳,\ \mu_Y = ۵,\ \mu_Z = ۲$، واریانس‌های $\sigma_X^۲ = ۸\ \sigma_Y^۲ = ۱۲$ ، $\sigma_Z^۲ = ۱۸$ و کواریانس‌های $Cov(X, Y) = ۱,\ Cov(X, Z) = -۳,\ Cov(Y, Z) = ۲$ باشند، مطلوبست کواریانس $U = X + ۴Y + ۲Z$ و $V = ۳X - Y - Z$.

پاسخ:

$$
\begin{aligned}
Cov(U, V) &= Cov(X + ۴Y + ۲Z, ۳X - Y - Z) \\
&= ۳Var(X) - Cov(X, Y) - Cov(X, Z) + ۱۲Cov(Y, X) - ۴Var(Y) \\
&\quad - ۴Cov(Y, Z) + ۶Cov(Z, X) - ۲Cov(Z, Y) - ۲Var(Z) \\
&= ۳Var(X) - ۴Var(Y) - ۲Var(Z) + ۱۱Cov(X, Y) \\
&\quad + ۵Cov(X, Z) - ۶Cov(Y, Z) \\
&= ۳(۸) - ۴(۱۲) - ۲(۱۸) + ۱۱(۱) + ۵(-۳) - ۶(۲) = -۷۶
\end{aligned}
$$

A Aghazadeh

ضریب همبستگی

ضریب همبستگی بین دو متغیر X و Y به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

A.Agharzaden

خواص ضریب همبستگی

۱. ضریب همبستگی نسبت به واحد اندازه‌گیری و مبدا اندازه‌گیری حساس نمی‌باشد به عبارت دیگر

$$\rho(aX + b, cY + d) = \pm\rho(X, Y)$$

۲. $-۱ \leq \rho \leq ۱$

۳. با احتمال ۱، رابطه خطی $Y = aX + b$ بین X و Y برقرار است، اگر و تنها اگر $\rho(X, Y) = \pm ۱$. برای $\rho(X, Y) = ۱$ شیب خط $a > ۰$ و برای $\rho(X, Y) = -۱$، شیب خط $a < ۰$ است.

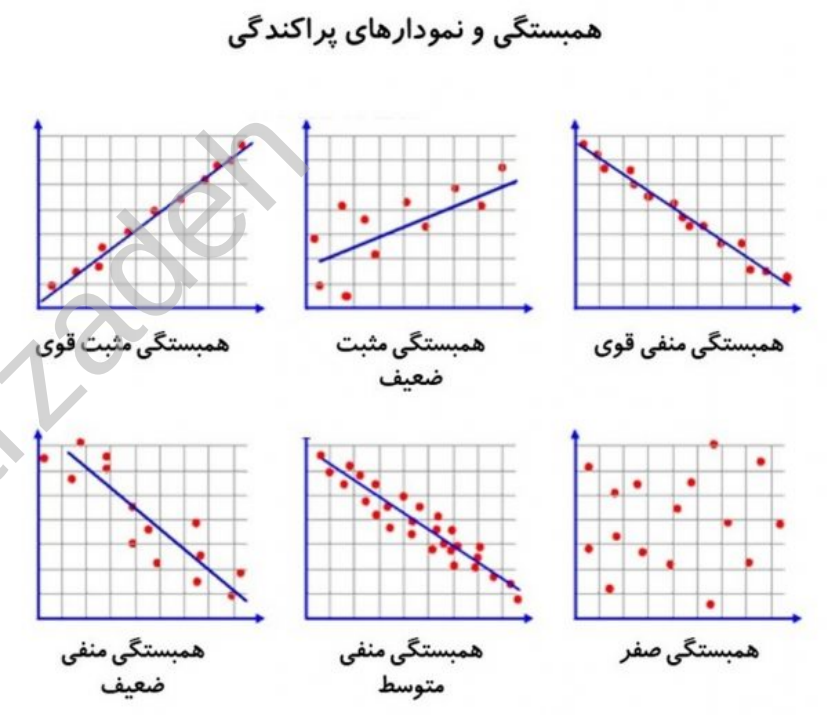
ضریب همبستگی همواره عددی بین ۱ و ۱− است. این ضریب دو بخش دارد: مقدار عددی و علامت. مقدار عددی نشان می‌دهد چقدر رابطه خطی بین دو متغیر قدرتمند است. علامت نشان می‌دهد جهت این رابطه مثبت است یا منفی.

اگر ضریب همبستگی مثبت باشد، به این مفهوم است که افزایش در مقادیر یک متغیر با افزایش در مقادیر متغیر دیگر همراه است. همین‌طور کاهش در مقادیر یک متغیر با کاهش در مقادیر متغیر دیگر همراه است. در این حالت اگر نمودار پراکندگی دو متغیر رسم شود، می‌توان خطی با شیب مثبت را از بین نقاط برازش داد (شکل-۱). به همین ترتیب اگر ضریب همبستگی منفی باشد، می‌توان خطی با شیب منفی را از بین نقاط برازش داد (شکل-۱).

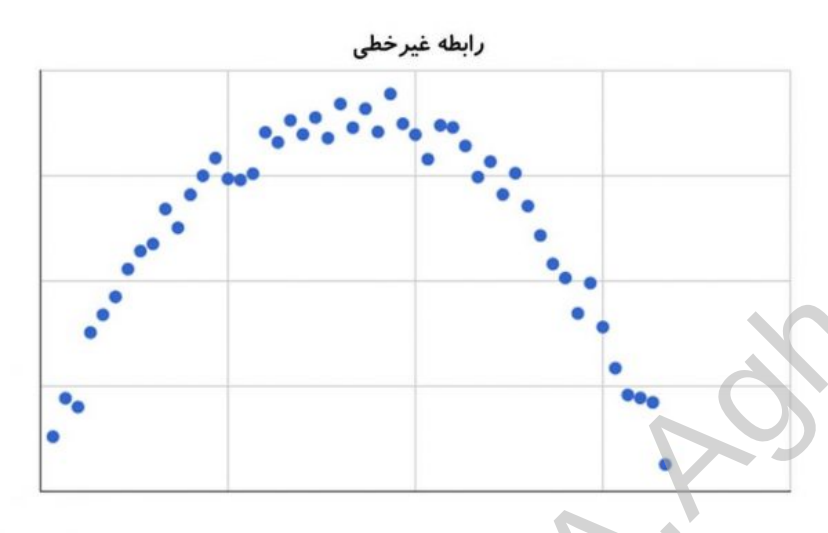
هرچه مقدار مطلق ضریب همبستگی (صرف نظر از علامت) به ۱ نزدیک باشد، نشان می‌دهد شدت رابطه خطی بین دو متغیر قوی‌تر است. در مقابل ضریب همبستگی نزدیک صفر نشان می‌دهد که رابطه خطی بسیار ضعیفی بین متغیرهای X و Y برقرار است. در این حالت اگر نمودار پراکندگی دو متغیر رسم شود، این‌طور به نظر می‌رسد نقاط به شکل تصادفی در صفحه رسم شده‌اند (شکل-۱).

اگر بین دو متغیر رابطه غیرخطی برقرار باشد، همچنان این امکان وجود دارد ضریب همبستگی نزدیک صفر باشد که نشان‌دهنده نبود رابطه خطی بین دو آن است (شکل-۲). به همین دلیل در هنگام تحلیل بهتر است نمودار پراکندگی بین متغیرها رسم شود تا به وجود این روابط پی برد.

A.Aghazadeh



(آ) شکل ۱.



(ب) شکل ۲.

A.Agharzadeh

اثبات: ۱.

$$\rho(aX+b, cY+d) = \frac{Cov(aX+b, cY+d)}{\sqrt{Var(aX+b)\,Var(cY+d)}}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} Cov(aX+b, cY+d) &= ac\,Cov(X, Y) \\ Var(aX+b) &= a^{۲}\,Var(X) \\ Var(cY+d) &= c^{۲}\,Var(Y) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \rho(aX+b, cY+d) &= \frac{ac\,Cov(X, Y)}{|a||c|\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}} = \frac{ac}{|ac|}\rho(X, Y) \\ &= \begin{cases} \rho(X, Y), & ac > ۰ \\ -\rho(X, Y), & ac < ۰ \end{cases} \end{aligned}$$

A.Agharzadeh

۲. متغیر تصادفی W را به صورت زیر تعریف کنید

$$W = \frac{X}{\sigma_X} - \rho\frac{Y}{\sigma_Y}$$

با توجه به رابطه $Var(W) \geq ۰$ ، داریم

$$\begin{aligned} ۰ \leq Var(\frac{X}{\sigma_X} - \rho\frac{Y}{\sigma_Y}) &= Var(\frac{X}{\sigma_X}) + Var(\rho\frac{Y}{\sigma_Y}) - ۲Cov(\frac{X}{\sigma_X}, \rho\frac{Y}{\sigma_Y}) \\ &= \frac{Var(X)}{\sigma_X^۲} + \rho^۲\frac{Var(Y)}{\sigma_Y^۲} - ۲\frac{\rho}{\sigma_X\sigma_Y}Cov(X, Y) \\ &= ۱ + \rho^۲ - ۲\rho^۲ \end{aligned}$$

و لذا

$$۱ + \rho^۲ - ۲\rho^۲ = ۱ - \rho^۲ \geq ۰ \Rightarrow \rho^۲ \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq \rho \leq ۱$$

A.Aghaarzadeh

۳. با توجه به اثبات خاصیت ۲، اگر $\rho^{۲} = ۱$، آن‌گاه $Var(W) = ۰$ و لذا

$$\rho = \pm ۱ \Leftrightarrow \rho^{۲} = ۱ \Leftrightarrow Var(W) = ۰ \Leftrightarrow P(W = \mu_W) = ۱$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{X}{\sigma_X} - \rho\frac{Y}{\sigma_Y} = \frac{\mu_X}{\sigma_X} - \rho\frac{\mu_Y}{\sigma_Y}\right) = ۱$$

$$\Leftrightarrow P\left(Y = -\frac{\sigma_Y}{\rho}\left[\frac{\mu_X}{\sigma_X} - \rho\frac{\mu_Y}{\sigma_Y} - \frac{X}{\sigma_X}\right]\right) = ۱$$

$$\Leftrightarrow P\left(Y = \frac{-\sigma_Y\mu_X}{\rho\sigma_X} + \mu_Y + \frac{\sigma_Y}{\rho\sigma_X}X\right) = ۱$$

$$\Leftrightarrow P\left(Y = \frac{-\sigma_Y^{۲}}{\sigma_{XY}}\mu_X + \mu_Y + \frac{\sigma_Y}{\rho\sigma_X}X\right) = ۱$$

که با در نظر گرفتن $a = \frac{\sigma_Y}{\rho\sigma_X}$ و $b = \frac{-\sigma_Y^{۲}}{\sigma_{XY}}\mu_X + \mu_Y$ ، اثبات کامل می‌شود. هم‌چنین با توجه به مثبت بودن σ_X و σ_Y، اگر $\rho = ۱$ آن‌گاه $a > ۰$ و اگر $\rho = -۱$، آن‌گاه $a < ۰$ می‌باشد.

A.Aghaizadeh

مثال ۷.

اگر Y به صورت: الف) $Y = X + ۱$ ب) $Y = -X + ۱$ تعریف شود، ضریب همبستگی X و Y را به دست آورید.

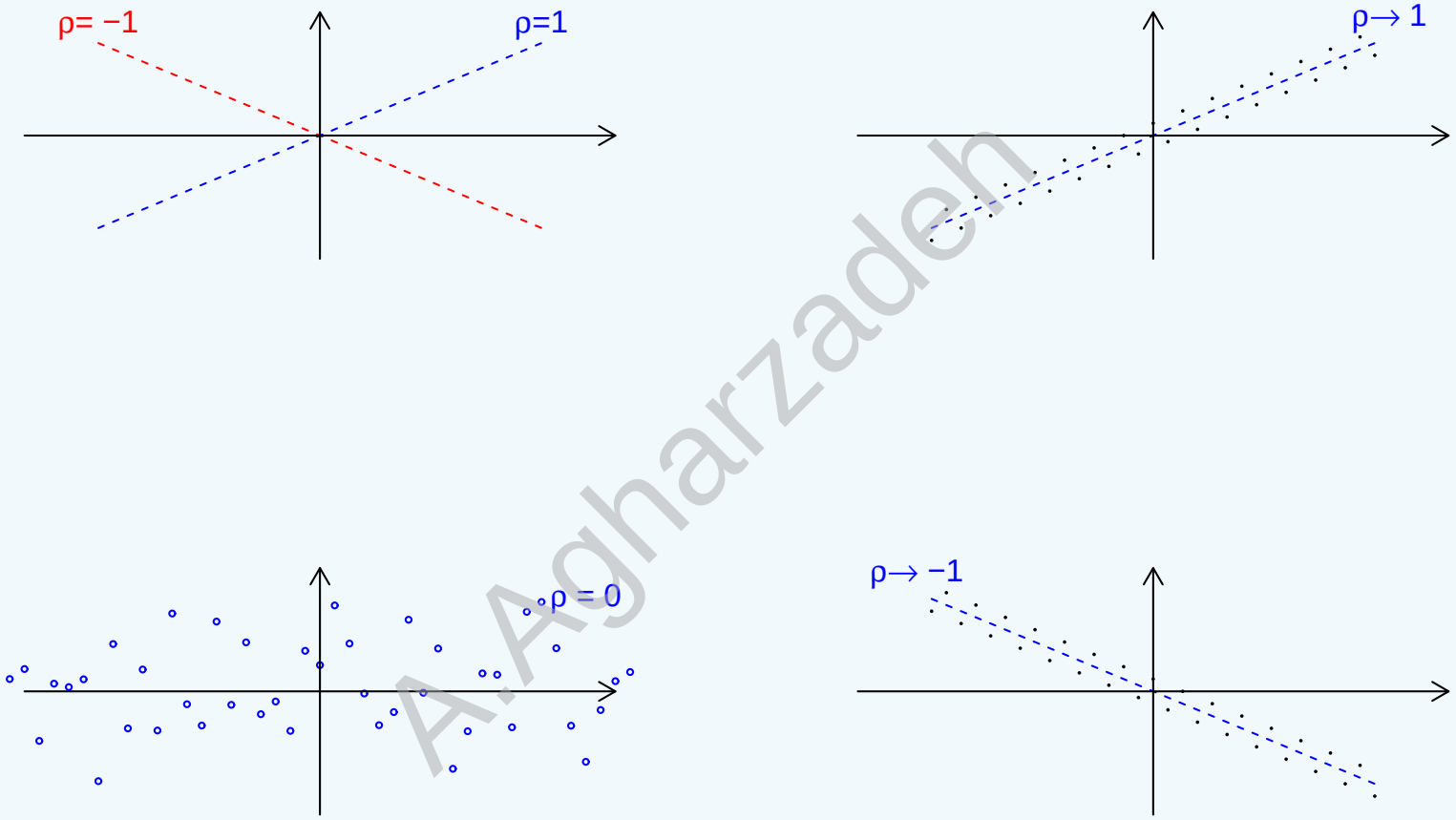
پاسخ: الف) با توجه به مقدار $a = ۱ > ۰$، بنابراین $\rho = ۱$ می‌باشد.

ب) با توجه به مقدار $a = -۱ < ۰$، بنابراین $\rho = -۱$ می‌باشد.

ناهمبستگی:

دو متغیر تصادفی X و Y را ناهمبسته می‌گوییم، هرگاه $\rho(X, Y) = ۰$ یا $Cov(X, Y) = ۰$.
در این حالت، هیچ رابطه کامل خطی بین X و Y وجود ندارد.

A.Agharzadeh



A.Agharzadeh

قضیه ۴:

اگر X و Y مستقل باشند، آن‌گاه X و Y ناهمبسته‌اند. اما عکس آن لزوما برقرار نیست.

اثبات: با توجه به مستقل بودن X و Y

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = ۰$$

مثال ۸.

فرض کنید $f(x, y) = ۶x, \quad ۰ < x < y < ۱$، مطلوبست:

الف) کواریانس X و Y ب) $\rho(X, Y)$ ج) $Cov(۳X + Y, Y + ۲)$

A. Aghaizadeh

مثال ۸.

پاسخ: الف)

$$f_X(x) = \int_x^{۱} f(x,y)dy = \int_x^{۱} ۶xdy = ۶x(۱-x)$$

$$f_Y(y) = \int_{۰}^{y} f(x,y)dx = \int_{۰}^{y} ۶xdx = ۳y^{۲}$$

$$E(X) = \int_{۰}^{۱} xf_X(x) = \int_{۰}^{۱} ۶x^{۲}(۱-x)dx = (۲x^{۳} - \frac{۳}{۲}x^{۴})\Big|_{۰}^{۱} = ۲ - \frac{۳}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$E(Y) = \int_{۰}^{۱} yf_Y(y)dy = \int_{۰}^{۱} ۳y^{۳}dy = \frac{۳}{۴}y^{۴}\Big|_{۰}^{۱} = \frac{۳}{۴}$$

$$E(XY) = \int_{۰}^{۱}\int_{x}^{۱} xyf(x,y)dydx = \int_{۰}^{۱}\int_{x}^{۱} ۶x^{۲}ydydx = \int_{۰}^{۱} ۳x^{۲}(۱-x^{۲})dx = (x^{۳} - \frac{۳}{۵}x^{۵})\Big|_{۰}^{۱} = \frac{۲}{۵}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{۲}{۵} - \frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۴}) = \frac{۱}{۴۰}$$

A.Agharzadeh

ادامه مثال ۸

ب)

$$E(X^۲) = \int_۰^۱ x^۲ f_X(x) = \int_۰^۱ ۶x^۳(۱-x)dx = \left(\frac{۳}{۲}x^۴ - \frac{۶}{۵}x^۵\right)\Big|_۰^۱ = \frac{۳}{۱۰}$$

$$E(Y^۲) = \int_۰^۱ y^۲ f_Y(y)dy = \int_۰^۱ ۳y^۴ dy = \frac{۳}{۵}y^۵\Big|_۰^۱ = \frac{۳}{۵}$$

$$Var(X) = E(X^۲) - E^۲(X) = \frac{۳}{۱۰} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲۰}$$

$$Var(Y) = E(Y^۲) - E^۲(Y) = \frac{۳}{۵} - \frac{۹}{۱۶} = \frac{۳}{۸۰}$$

$$\rho(X, Y) = \frac{Co(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{\frac{۱}{۴۰}}{\sqrt{\frac{۱}{۲۰}\left(\frac{۳}{۸۰}\right)}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

ج)

$$Cov(۳X+Y, Y+۲) = Cov(۳X+Y, Y) = ۳Cov(X, Y) + Var(Y)$$
$$= \frac{۳}{۴۰} + \frac{۳}{۸۰} = \frac{۹}{۸۰}$$

A.Agharzadeh

مسأله ۱. اگر X و Y دارای توزیع احتمال توأم $f(x,y) = \frac{۱}{۴}$ به ازای $x = -۳$، $y = -۵$، $x = -۱$، $y = -۱$، $x = ۱$، $y = ۱$، $x = ۳$، $y = ۵$ باشند، $Cov(X, Y)$ را پیدا کنید.

مسأله ۲. اگر توزیع توأم X و Y به‌صورت زیر باشد:

		x: -۱	x: ۰	x: ۱
y	۰	$\frac{۱}{۶}$	۰	$\frac{۱}{۱۲}$
	۱	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۲}$

نشان دهید

الف) $Cov(X, Y) = ۰$

ب) دو متغیر تصادفی مستقل نیستند.

مسأله ۳. اگر $Var(X_۱) = ۵$، $Var(X_۲) = ۴$، $Var(X_۳) = ۷$ و $Cov(X_۱, X_۲)$، $Cov(X_۱, X_۳) = -۲$ و $X_۲$ و $X_۳$ مستقل باشند، کوواریانس $Y_۱ = X_۱ - ۲X_۲ + ۳X_۳$ و $Y_۲ = -۲X_۱ + ۳X_۲ + ۴X_۳$ را پیدا کنید.

مسأله ۴. در ظرفی ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و یک مهره قرمز داریم. از این ظرف چشم بسته ۴ مهره با هم بیرون می‌آوریم. فرض کنید X تعداد مهره‌های سفید و Y تعداد مهره‌های سیاه در این نمونه‌ی ۴ تایی باشد. $\rho(X, Y)$ را پیدا کنید.

A.Agharzadeh