دانشگاه مازندران

نام درس: آمار ریاضی ۱ (Mathematical Statistics I)

پیش‌نیاز: احتمال ۲ و روش‌های آماری

نوع درس: تخصصی

تعداد واحد: ۳

مدرس: دکتر اصغرزاده نشلی

سر فصل درس و ریز مواد:

- **مفاهیم پایه و تعاریف اساسی:** خانواده توزیع‌های نمایی، خانواده توزیع‌های مکان، مقیاس و مکان–مقیاس
- **بسندگی و کامل بودن:** آماره‌ها و افرازها، آماره بسنده، آماره بسنده‌ی مینیمال، کامل بودن
- **روش‌های برآورد:** روش برآورد گشتاوری، روش ماکسیمم درست‌نمایی، روش کمترین توان‌های دوم
- **برآوردگرهای نااریب با کمترین واریانس:** برآوردگرهای نااریب، برآوردگرهای نااریب با کمترین واریانس و روش‌های دستیابی به آن، نامساوی کرامر–رائو، کارایی، سازگاری.

منابع

[۱] پارسیان، ا. مبانی آمار ریاضی، مرکز نشر دانشگاهی دانشگاه صنعتی اصفهان (آخرین ویرایش).

[۲] بهبودیان، ج. آمار ریاضی، انتشارات امیرکبیر (آخرین ویرایش).

[3] DeGroot, M.H. and Shervish, M.J. *Probability and Statistics*, 4th Edition, Pearson, 2011.

[4] Hogg, R. V.McKean, J. and Craig, A. *Introduction to Mathematical Statistics*, 7th Edition, Pearson, 2013.

[5] Roussas, G. *An Introduction to Probability and Statistical Inference*, 2nd Edition, Academic Press, 2014.

بارم‌بندی نمرات

آزمون میانترم	آزمون پایانترم	تکلیف و کوییز
۳۰%	۵۰%	۲۰%

خانواده توزیع‌های نمایی تک پارامتری

گوییم خانواده توزیع‌های $\{f(x,\theta) : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}\}$ به خانواده توزیع‌های نمایی تک پارامتری تعلق دارد اگر داشته باشیم:

$$f(x,\theta) = a(\theta)\, b(x)\, e^{c(\theta)\, d(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

که:

- $a(\theta)$ و $c(\theta)$ توابعی از θ اند.
- $b(x)$ و $d(x)$ توابعی از x اند.
- $a(\theta)$ و $b(x)$ توابع نامنفی‌اند.

مثال ۱. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع برنولی $(X \sim b(۱, \theta))$ با تابع جرم احتمال زیر باشد.

$$f(x,\theta) = (۱-\theta)^{۱-x}\,\theta^x, \qquad x = ۰, ۱, \quad ۰ < \theta < ۱$$

داریم:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x,\theta) &= (۱-\theta)\,\theta^x\,(۱-\theta)^{-x} \\
&= (۱-\theta)\left(\frac{\theta}{۱-\theta}\right)^x \\
&= (۱-\theta)\,e^{x\ln(\frac{\theta}{۱-\theta})} \\
&= a(\theta)\,b(x)\,e^{c(\theta)\,d(x)}
\end{aligned}$$

که $a(\theta) = (۱-\theta)$، $b(x) = ۱$، $c(\theta) = \ln(\frac{\theta}{۱-\theta})$، $d(x) = x$.

لذا توزیع برنولی به خانواده توزیع‌های نمایی تک پارامتری تعلق دارد.

نمایش تابع جرم احتمال فوق بر حسب تابع نشانگر:

$$I_A(x) = \begin{cases} ۱, & x \in A \\ ۰, & o.w \end{cases}$$

برای توزیع برنولی داریم:

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \theta^x \left(۱-\theta\right)^{۱-x}, & x = ۰, ۱ \\ ۰, & o.w \end{cases}$$

لذا

$$f(x,\theta) = (۱-\theta)\, I_{\{۰,۱\}}(x)\, e^{x \ln(\frac{\theta}{۱-\theta})}$$

که $a(\theta) = (۱-\theta)$، $b(x) = I_{\{۰,۱\}}(x)$، $c(\theta) = \ln(\frac{\theta}{۱-\theta})$، $d(x) = x$.

مثال ۲. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع پواسن $(X \sim P(\lambda))$ با تابع جرم احتمال زیر باشد.

$$f(x,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^x}{x!}, \qquad x = ۰, ۱, \ldots, \quad \lambda > ۰.$$

داریم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x,\lambda) &= e^{-\lambda}\,\frac{۱}{x!}\,\lambda^x \\ &= e^{-\lambda}\,\frac{۱}{x!}\,e^{x\ln(\lambda)} \\ &= a(\lambda)\,b(x)\,e^{c(\lambda)\,d(x)} \end{aligned}$$

که $a(\lambda) = e^{-\lambda}$، $b(x) = \frac{۱}{x!}$، $c(\lambda) = \ln(\lambda)$، $d(x) = x$.

بنابراین توزیع پواسن به خانواده نمایی تک پارامتری تعلق دارد.

مثال ۳. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با توابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$a)\ \ f(x,\theta)=\frac{۱}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}},\quad x>۰,\ \ \theta>۰.$$ (توزیع نمایی با میانگین θ)

که $a(\theta)=\frac{۱}{\theta}$، $b(x)=۱$، $c(\theta)=-\frac{۱}{\theta}$، $d(x)=x$.

$$b)\ \ f(x,\theta)=\theta\, e^{-\theta x},\quad x>۰,\ \ \theta>۰.$$ (توزیع نمایی با میانگین $\frac{۱}{\theta}$)

که $a(\theta)=\theta$، $b(x)=۱$، $c(\theta)=-\theta$، $d(x)=x$.

لذا توزیع نمایی به خانواده نمایی تک پارامتری تعلق دارد.

مثال ۴. آیا خانواده توزیع‌های یکنواخت $U(0,\ \theta)$ با تابع چگالی احتمال زیر به خانواده نمایی تک پارامتری تعلق دارد؟

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\theta},\qquad 0<x<\theta,$$

داریم:

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\theta}\,I_{(0,\theta)}(x).$$

بنابراین خانواده توزیع‌های یکنواخت به خانواده نمایی تعلق ندارد.

تذکر

توزیع‌هایی که دامنه آن‌ها وابسته به پارامتر مجهول باشد، به خانواده نمایی تعلق ندارند.

نمایش دیگری برای خانواده نمایی تک پارامتری:

$$\begin{aligned}
f(x,\theta) &= a(\theta)\, b(x)\, e^{c(\theta)\, d(x)} \\
&= e^{\ln a(\theta)}\, e^{\ln b(x)}\, e^{c(\theta)\, d(x)} \\
&= e^{c(\theta)\, d(x)+\ln a(\theta)+\ln b(x)} \\
&= e^{c(\theta)\, d(x)+Q(\theta)+S(x)}, \qquad \Big(Q(\theta)=\ln a(\theta),\ \ S(x)=\ln b(x)\Big)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f(x,\theta) = e^{c(\theta)\, d(x)+Q(\theta)+S(x)}$$

مثال ۵. بعنوان مثال در توزیع پواسن با تابع جرم احتمال زیر داریم:

$$f(x,\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x=۰,۱,..,\lambda>۰.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x,\lambda) = \frac{e^{x\ln\lambda}}{e^{\ln x!}}\, e^{-\lambda} &= e^{x\ln\lambda-\lambda-\ln x!} \\
&= e^{c(\lambda)d(x)+Q(\lambda)+S(x)}
\end{aligned}$$

که $c(\lambda)=\ln\lambda$، $d(x)=x$، $Q(\lambda)=-\lambda$، $S(x)=-\ln x!$.

خانواده نمایی k پارامتری

گوئیم خانواده توزیع‌های $\{f(x,\underline{\theta}) : \underline{\theta} :\in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k\}$ به خانواده‌ی نمایی k پارامتری تعلق دارد اگر داشته باشیم

$$f(x,\underline{\theta}) = a(\underline{\theta})\, b(x)\, e^{\sum_{i=1}^{k} c_i(\underline{\theta}) d_i(x)}, \qquad \underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$$

یا

$$f(x,\underline{\theta}) = e^{\sum_{i=1}^{k} c_i(\underline{\theta}) d_i(x) + Q(\underline{\theta}) + S(x)}$$

مثال ۶. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال $(N(\mu,\sigma^2))$ با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f(x,\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}, \quad x \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0,\ \theta = (\mu, \sigma^2)$$

داریم:

$$\begin{aligned} f(x,\mu,\sigma^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2\mu x + \mu^2)} \\ &= \frac{1}{\sigma}\, e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x - \frac{1}{2\sigma^2}x^2} \\ &= a(\mu,\sigma^2)\, b(x)\, e^{c_1(\mu,\sigma^2) d_1(x) + c_2(\mu,\sigma^2) d_2(x)} \end{aligned}$$

که

$$
\begin{aligned}
a(\mu,\sigma^۲) &= \frac{۱}{\sigma}e^{-\frac{\mu^۲}{۲\sigma^۲}}, & b(x) &= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \\
c_۱(\mu,\sigma^۲) &= \frac{\mu}{\sigma^۲}, & d_۱(x) &= x \\
c_۲(\mu,\sigma^۲) &= -\frac{۱}{۲\sigma^۲}, & d_۲(x) &= x^۲.
\end{aligned}
$$

لذا توزیع نرمال $N(\mu,\sigma^۲)$ به خانواده نمایی دوپارامتری تعلق دارد.

تمرین ۱. نشان دهید که هرکدام از توزیع‌های زیر به خانواده توزیع‌های نمایی تک پارامتری تعلق دارد.

الف) $X \sim Ge(p)$ (توزیع هندسی) با تابع جرم احتمال زیر:

$$f(x,p) = p\,(۱-p)^{x-۱}, \quad x = ۱, ۲, \ldots$$

ب) $X \sim b(n,\, p)$ (توزیع دوجمله‌ای) با تابع جرم احتمال زیر:

$$f(x,p) = \binom{n}{x} p^{x}\,(۱-p)^{n-x}, \quad x = ۰, ۱, \ldots, n$$

ت) $X \sim N(\mu,\, ۱)$ (توزیع نرمال) با تابع چگالی احتمال زیر:

$$f(x,\mu) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^{۲}}{۲}}, \quad x \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}$$

ث) توزیع گاما $\Gamma(\alpha, \beta)$ با α یا β معلوم.

ج) توزیع بتا $Beta(\alpha, \beta)$ با α یا β معلوم.

تمرین ۲. نشان دهید که خانواده توزیع‌های زیر به خانواده نمایی دوپارامتری تعلق دارد.

الف) توزیع گاما $\Gamma(\alpha, \beta)$ که α و β هردو نامعلوم‌اند.
ب) توزیع بتا $Beta(\alpha, \beta)$ که α و β هردو نامعلوم‌اند.

تمرین ۳. نشان دهید که توزیع سه جمله‌ای با پارامترهای $(n, p_۱, p_۲)$ به خانواده‌ی نمایی دوپارامتری تعلق دارد. (با فرض n معلوم)

$$(X_۱, X_۲) \sim T(n, p_۱, p_۲)$$

$$f(x_۱, x_۲, n, p_۱, p_۲) = \frac{n!}{x_۱!\, x_۲!\, (n - x_۱ - x_۲)!} p_۱^{x_۱}\, p_۲^{x_۲} (۱ - p_۱ - p_۲)^{n - x_۱ - x_۲}$$

که

$$\circ \leq p_۱ + p_۲ \leq ۱$$
$$\circ \leq x_۱ + x_۲ \leq n.$$

تمرین ۴. اگر متغیر تصادفی X به خانواده توزیع‌های نمایی تک پارامتری با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f(x,\theta) = a(\theta)\, b(x)\, e^{c(\theta)d(x)}, \quad x \in \mathbb{R},\ \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R},$$

نشان دهید

$$\mathbb{E}[d(X)] = -\frac{a'(\theta)}{a(\theta)c'(\theta)}.$$