قضیه ۴.۵ فرض کنید f یک تابع دوبار مشتق پذیر پیوسته روی مجموعه محدب باز C از R^n باشد
در این صورت f محدب است بر C اگر و فقط اگر ماتریس هسین (Hessian)

$$Q_x = (q_{ij}(x)), \qquad q_{ij}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

یک ماتریس نیمه معین مثبت برای هر $x \in C$ باشد

اثبات. محدب بودن تابع f روی C هم ارز با محدب بودن آن بر هر خط مستقیم در C است. این به معنی است.
محدب بودن تابع $g(\lambda) = f(y+\lambda z)$ روی بازه حقیقی $\{\lambda \mid y+\lambda z \in C\}$ برای هر $y \in C$، $z \in R^n$

با محاسبه می توان نشان داد که

$$g''(\lambda) = \langle z, Q_x z \rangle, \qquad x = y+\lambda z$$

$$x = y+\lambda z$$

$$\frac{dg}{d\lambda} = \frac{df}{d\lambda} = \frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{d\lambda} = z \circ \frac{df}{dx} = z \circ \left(\frac{df}{dx}\right) = z \circ \left(\frac{df}{d(x)}(x)\right)$$

که در این رابطه $\frac{df}{dx}$ یک بردار است و به صورت $\frac{df}{dx} = \left[\frac{\partial f}{\partial \xi_1}, \frac{\partial f}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \xi_n}\right]^T$ خواهد بود

و دوباره

$$\frac{d^2 g}{d\lambda^2} = z \circ \left(\frac{d}{d\lambda}\frac{df}{dx}(x)\right) = z \circ \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\frac{dx}{d\lambda}\right)$$

$$= z \circ (Q_x z) = \langle z, Q_x z \rangle$$

بوسیله قضیه ۴.۴، g برای هر $y \in C$، $z \in R^n$ تابع محدب است اگر و فقط اگر برای هر $z \in R^n$، $x \in C$ نیمه معین و مثبت باشد. ■

یک تابع جالب که بوسیله قضیه ۴.۵، محدب بودن آن را می توان برقرار نمود، تابع منفی میانگین هندسی است به صورت زیر

$$f(x) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \begin{cases} -(\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n)^{1/n} & \xi_1 \geq 0, \dots, \xi_n \geq 0 \\ +\infty & \text{در سایر جاها} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_i} = \frac{1}{n}\frac{f(x)}{\xi_i}$$

$$q_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_j \partial \xi_i} = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\frac{f(x)}{\xi_i}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\xi_i}\left(\frac{1}{n}\frac{f(x)}{\xi_j}\right)\right) \qquad j \neq i$$

$$q_{ii} = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{f(x)}{\xi_i}\right) = \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{\xi_i^2}f(x) + \frac{1}{n}\frac{1}{\xi_i^2}f(x)\right)$$

حال $\langle z, Q_n z\rangle$ را بررسی می‌کنیم، ابتدا $Q_n z$

$$z=(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

$$Q_n z = [q_{ij}] z = \Big[\underbrace{\sum_{j=1}^n q_{1j} z_j}_{\delta_1}, \underbrace{\sum_{j=1}^n q_{2j} z_j}_{\delta_2}, \dots, \underbrace{\sum_{j=1}^n q_{nj} z_j}_{\delta_n}\Big]^T$$

$$\langle z, Q_n z\rangle = \sum_{i=1}^n z_i \delta_i$$

$$= \sum_{i=1}^n q_{ii} z_i^2 + 2\sum_{i\neq j} q_{ij} z_i z_j \qquad q_{ji} = q_{ij}$$

چون [illegible]

$$= n^{-2} f(m) \left[\frac{\sum_{j=1}^n \left(\frac{z_j}{\delta_j}\right)^2 + 2\sum_{i\neq j} \frac{z_i}{\delta_i}\frac{z_j}{\delta_j}}{\left(\sum_{j=1}^n \frac{z_j}{\delta_j}\right)^2} - n\sum_{j=1}^n \left(\frac{z_j}{\delta_j}\right)^2 \right]$$

مقدار وارد شده در کتاب

$$\langle z, Q_n z\rangle = n^{-2} f(m) \left[\left(\sum_{j=1}^n \frac{z_j}{\delta_j}\right)^2 - n\sum_{j=1}^n \left(\frac{z_j}{\delta_j}\right)^2 \right]$$

که با در نظر گرفتن اینکه $\delta_j \geq 0$ و $f(m) < 0$، مقدار فوق مثبت است.

با فرض $\alpha_j = \frac{z_j}{\delta_j}$ داریم $(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)^2 \leq n(\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2)$

نمونه دیگر از توابع محدب روی R^n، نرم اقلیدسی است:

$$|x| = \langle x, x\rangle^{1/2} = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2}.$$

در حالت $n=1$، تابع قدر مطلق خواهد بود. محدب بودن نرم اقلیدسی از قانون آشنای زیر نتیجه می‌شود

$$|x+y| \leq |x| + |y|, \qquad |\lambda x| = \lambda |x|, \quad \lambda \geq 0$$

چندین روابط مفید بین مجموعه‌های محدب و توابع محدب وجود دارند. برای هر مجموعه C از R^n ساده‌ترین آنها تابع نشانگر (indicator) $\delta(\cdot|C)$ از C به صورت زیر است

$$\delta(x|C) = \begin{cases} 0 & x \in C \\ +\infty & x \notin C \end{cases}$$

این گراف تابع نشانگر یک نیم استوانه با مقطع C است. بروشنی مجموعه C محدب است اگر و فقط اگر $\delta(\cdot|C)$ یک مجموعه محدب روی R^n باشد.

ادامه

تابع نقش مهمی را در بحث آنالیز محدب مشابه نقش توابع مشخصه روی مجموعه‌ها در شاخه‌های دیگر آنالیز دارند

تابع تکیه‌گاه (support) $\delta^*(\cdot|C)$ از یک مجموعه محدب C از R^n به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta^*(x|C)=\sup\{\langle x,y\rangle \mid y\in C\}.$$

تابع معیار (gauge) $\gamma(\cdot|C)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\gamma(x|C)=\inf\{\lambda\geq 0 \mid x\in\lambda C\},\qquad C\neq\emptyset,$$

تابع فاصله (اقلیدسی (Euclidean distance) $d(\cdot,C)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$d(x,C)=\inf\{|x-y| \mid y\in C\}.$$

محدب بودن این توابع روی R^n به طور مستقیم قابل بررسی است، اما این موضوع را تا بخش بعدی که نشان دهیم در حالتی که محدب بودن را می‌توان با اصول عمومی نتیجه گرفت

محدب بودن توابع، محدب بودن مجموعه‌ها را ارائه می‌دهد ولی موضوع دوگانی مهمی است

قضیه ۴.۶. برای هر تابع محدب f و هر $\alpha\in[-\infty,+\infty]$، مجموعه سطح‌های $\{x \mid f(x)<\alpha\}$ و $\{x \mid f(x)\leq\alpha\}$ محدب هستند

اثبات. در حالت نامساوی اکید، فوراً از قضیه ۴.۲ با در نظر گرفتن $\beta=\alpha$ حاصل می‌شود. برای مجموعه $\{x ; f(x)\leq\alpha\}$ در واقع این مجموعه اشتراک همه مجموعه‌های محدب $\{x \mid f(x)<\mu\}$ که $\mu>\alpha$ است. یک روش هندسی برای اثبات محدب بودن این است که مجموعه $\{x \mid f(x)\leq\alpha\}$ تصویر روی R^n از اشتراک $\operatorname{epi} f$ و ابر صفحه افقی (hoizontal) $\{(x,\mu) ; \alpha=\mu\}$ از R^{n+1} است. شاید این مجموعه $\{x \mid f(x)\leq\alpha\}$ به عنوان یک مقطع از $\operatorname{epi} f$ است.

نتیجه ۴.۶.۱. فرض کنید f_i یک تابع محدب روی R^n و α_i یک عدد حقیقی برای $i\in I$ باشند. در حالتی که I یک مجموعه اندیس دلخواه است. در این صورت

$$C=\{x \mid f_i(x)\leq\alpha_i,\ \forall i\in I\}$$

یک مجموعه محدب است.

اثبات: با کمک نتیجه ۱.۱.۲ ص ۱۱ حاصل می‌شود

هرگاه در قضیه ۴.۶، تابع f محدب درجه دوم را در نظر بگیریم، مجموعه نقاطی که در نامساوی صدق کنند

جلسه ۲۴

صدق می‌کنند، یک مجموعه کوژ است. ~~در اینجا~~

$$\frac{1}{2}\langle x, Qx\rangle + \langle x, a\rangle + \alpha \le 0$$

که Q نیمه معین مثبت (قضیه ۴.۵) است. مجموعه‌های از این چنین مانند بیضی‌ها و سهمی‌ها
Paraboloids ellipsoids
توپر و قسمتهای از کره مانند $\{x \,;\, \langle x,x\rangle \le 1\}$ می‌باشند.

قضیه ۴.۶ و نتیجه ۴.۶.۱ اهمیت مشخصی برای نظریه سیستم نابرابری‌های غیرخطی دارند. اما تحدب (خمیدگی) به همه مفاهیم آنالیز نظریه نابرابری‌ها وارد می‌شود، زیرا نابرابری‌های کلاسیک مختلف می‌توانند حالات خاص از قضیه ۴.۳ رابطه داشته باشند. برای مثال ۶ بالا (ص ۲۴) تابع f بر R منفی لگاریتم باشد.

این ترکیب محدب از اعداد مثبت $x_1, \dots, x_m$ به وسیله قضیه ۴.۳ (ص ۲۸) داریم

$$-\log(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m) \le -\lambda_1 \log x_1 - \dots - \lambda_m \log x_m$$

با ضرب -1 و گرفتن تابع نمایی از دو طرف داریم

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m \ge x_1^{\lambda_1} \dots x_m^{\lambda_m}$$

به ویژه، $\frac{1}{m} = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$، تبدیل می‌شود

$$(x_1 + \dots + x_m)/m \ge (x_1 \dots x_m)^{1/m}$$

این رابطه، نامساوی مشهوری ~~بین مفاهیم هندسی و هندسی از~~ هندسی و حسابی از خانواده‌ای از نقاط مثبت می‌باشد.

گاهی می‌توان با یک تعویض متغیر غیرخطی، یک تابع غیرمحدب را به تابع محدب تبدیل کرد. یک مثال برجسته کلاس همه توابع جبری (مثبت) روی همه مستطیل‌های مثبت از R^n که به شکل جمع جداگانه به صورت
orthant

$$g(x) = g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \beta\, \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$$

است هستند که $\beta > 0$ و توانهای α_j اعداد دلخواه و حقیقی مقدار باشند.

(چنین توابعی در کلاسیک کاربرد مهم در بهای مختلف آمده است). به ویژه تابع در چنین کلاس پلینومیال

$$f(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^{-2} + (\xi_1 \xi_2)^{1/3} + 2\xi_2^{4} \qquad \xi_1 > 0,\ \xi_2 > 0,$$

با جابجایی $\zeta_j = \log \xi_j$ فرم معمول به صورت g به شکل زیر ظاهر می‌شود

$$h(z) = h(z_1, z_2, \dots, z_n) = \beta e^{\alpha_1 z_1} \dots e^{\alpha_n z_n} = \beta e^{\langle \alpha, z\rangle}$$

که $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. در بخش قبلی تابع h محدب h و جمع توابع پلینومیال h

را می‌پوشیم، توجه شود که همان تعویض متغیر، مجموعه $\{x;\ g(x)=\alpha\}$ را به

مجموعه
$$\{z;\ h(z)=\alpha\} = \{z \mid \langle \alpha, z\rangle = \log(\alpha/\beta)\}$$

تبدیل می‌کند.

تعریف (همگن مثبت) تابع f را روی R^n همگن مثبت (از درجه یک) می‌نامیم که برای هر x رابطه زیر برقرار باشد

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad 0 < \lambda < \infty.$$

بنابر این همگن مثبت بودن هم ارز با مخروط بودن اپی‌گراف در R^{n+1} است. تابع خطی $f(x)=|x|$ مثالی از تابع محدب همگن مثبت است.

قضیه ۴.۷. یک تابع همگن مثبت f از R^n به $(-\infty, +\infty]$ محدب است اگر و فقط اگر برای هر $x, y \in R^n$، نامساوی زیر برقرار باشد $f(x+y) \le f(x)+f(y)$. (شرط زیرجمعی f)

اثبات. این موضوع از قضیه ۶.۲ (الف) حاصل می‌شود، زیرا زیرجمعی بودن f معادل با اینکه $\operatorname{epi} f$ تحت جمع بسته است.

از قضیه عنوان می‌توان نتیجه گرفت که $f(0)=f(0+0) \le f(0)+f(0) \Rightarrow 0 \le f(0)$

نتیجه ۴.۷.۱. اگر f تابع محدب محض همگن مثبت باشد داریم

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m) \le \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_m f(x_m)$$

درحالیکه $\lambda_1>0, \dots, \lambda_m>0$.

نتیجه ۴.۷.۲. اگر f یک تابع محدب محض همگن مثبت باشد داریم $f(-x) \ge -f(x)$ برای هر x.

اثبات.
$$f(x)+f(-x) \ge f(x-x) = f(0) \ge 0$$

قضیه ۴.۸. یک تابع محدب محض همگن مثبت روی زیرفضای L، خطی است اگر و فقط اگر برای هر $x\in L$، $f(-x)=-f(x)$. حتی کافی است شرط فقط برای همه بردارهای $b_1, b_2, \dots, b_m$ از پایه L ~~برقرار باشد~~ رابطه $f(-b_i)=-f(b_i)$ برقرار باشد.

$f(\lambda_i b_i)=\lambda_i f(b_i)$

اثبات. درون را فرض کنید. حالا صحت شرط را فقط برای $\lambda_i > 0$ یعنی برای هر $\lambda_i\in R$)

برای هر $x=\lambda_1 b_1+\dots+\lambda_m b_m \in L$، داریم (براساس قضیه ۴.۷)

$$f(\lambda_1 b_1)+\dots+f(\lambda_m b_m) \ge f(x) \ge -f(-x)$$
$$\overset{\text{نتیجه ۴.۷.۲}}{\ge} -(f(-\lambda_1 b_1)+\dots+f(-\lambda_m b_m))$$

$$= f(\lambda_1 b_1) + \cdots + f(\lambda_m b_m)$$

و بنابراین

$$f(x) = f(\lambda_1 b_1) + \cdots + f(\lambda_m b_m) = \lambda_1 f(b_1) + \cdots + \lambda_m f(b_m)$$
$$= \lambda_1 f(b_1) + \cdots + \lambda_m f(b_m).$$

یعنی f بر L خطی است؛ به ویژه برای هر $x \in L$ ، $f(-x) = -f(x)$

از نامساوی قبل در خلال اثبات نتیجه می‌شود

که نتیجه‌ای واضح است ∘

بخش ۵ اعمال تابعی - Functional operations

حال می‌خواهیم توابع محدب را از توابع محدب شناخته شده به دست آوریم. خیلی از اعمال وجود دارند که محدب بودن را حفظ می‌کنند. بعضی از این عمل‌ها، مانند جمع نقطه‌ای از توابع که با آنالیز معمولی ما با آنها آشنا هستیم. بقیه مانند پوش محدب از گردایه‌ای از توابع که انگیزه‌های هندسی دارند. آشنایی با عمل‌هایی که در زیر ارائه می‌گردد ~~[illegible]~~ خصوصاً آنهایی که در صورتی که لازم است برای اثبات محدب بودن بعضی از توابع با فرمول‌های پیچیده ~~[illegible]~~ می‌باشد این روابط مفید هستند.

قضیه ۵.۱ فرض کنید f یک تابع محدب از R^n به $(-\infty, +\infty]$ است و تابع φ یک تابع محدب از R به $(-\infty, +\infty]$ و نانزولی است. در این صورت تابع $h(x) = \varphi(f(x))$ یک تابع محدب روی R^n خواهد بود. (در اینجا $\varphi(+\infty) = +\infty$)

اثبات، برای هر x و y از R^n و $0 < \lambda < 1$ ، داریم (قضیه ۴.۱ صفحه ۲۸)

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \le (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$$

با اثر φ بر دو طرف این نامساوی، خواهیم داشت

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \le \varphi((1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)) \le (1-\lambda) h(x) + \lambda h(y)$$

پس بر اساس قضیه ۴.۱ ص ۲۸، تابع h محدب است.

به عنوان یک نتیجه از قضیه ۵.۱، می‌توان بیان کرد که $h(x) = e^{f(x)}$ یک تابع محدب روی R^n است به شرطی که تابع f محدب فرض شود. همچنین اگر $p > 1$ باشد

و f تابع محدب نامنفی باشد، تابع $h(x)=f(x)^p$ محدب خواهد بود. برای اثبات این موضوع، فرض کنید

$$\varphi(\xi)=\begin{cases}\xi^p & \xi\geq 0\\ 0 & \xi<0\end{cases}$$

می‌توان به عنوان تمرین نشان داد که این تابع محدب است و از آنجا طبق قضیه ۱.۵، تابع $h(x)$ نیز محدب خواهد بود. همچنین تابع $h(x)=|x|^p$ برای $p\geq 1$ روی R^n محدب خواهد بود. ($|x|$ نرم اقلیدسی است). اگر تابع g مقعر باشد، در این صورت $h(x)=\frac{1}{g(x)}$ می‌تواند محدب روی مجموعه $C=\{x;\ g(x)>0\}$ باشد. برای اثبات این موضوع، از تابع محدب $f=-g$ و تابع φ که به صورت زیر تعریف می‌شود، استفاده نمایید

$$\varphi(\xi)=\begin{cases}-\frac{1}{\xi} & \xi<0\\ +\infty & \xi\geq 0\end{cases}$$

این موضوع را به عنوان تمرین نشان دهید.

هرگاه تابع φ را یک تابع آفین با مضرب مثبت بر R در نظر بگیریم و تابع f یک تابع محدب محض و λ و α اعداد حقیقی که $\lambda\geq 0$ باشد، می‌توان نتیجه گرفت که $\lambda f+\alpha$ یک تابع محدب محض است.

قضیه ۲.۵ اگر f_1، f_2 توابع محدب بر R^n باشند، آنگاه f_1+f_2 نیز محدب است.

اثبات. به عنوان تمرین می‌توان از قضیه ۱.۴ استفاده نموده و این موضوع ثابت شود.

توجه شود که رابطه $(f_1+f_2)(x)<\infty$ اگر و فقط اگر $f_1(x)<\infty$ و $f_2(x)<\infty$. بنابراین دامنه موثر تابع f_1+f_2، اشتراک دامنه موثر توابع f_1، f_2 می‌باشد که ممکن است تهی گردد. بنابراین امکان این می‌باشد که f_1+f_2 محض نگردد. موضوع محض بودن در قضیه ۲.۵، بخاطر دوری از مفهوم $\infty-\infty$ در ارتباط با f_1+f_2 است.

ترکیب خطی $\lambda_1 f_1+\dots+\lambda_m f_m$ از توابع محدب محض با ضرایب نامنفی، محدب می‌باشد.

هرگاه f یک تابع محدب متناهی (یعنی مقدار بی‌نهایت نمی‌گیرد) و C یک مجموعه محدب

در این صورت تابع

$$f(x)+\delta(x|C)=\begin{cases} f(x) & x\in C\\ +\infty & x\notin C\end{cases}$$

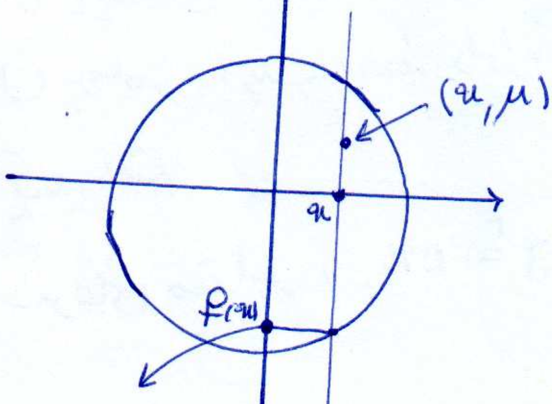
که تابع $\delta(\cdot|C)$ تابع نشانگر روی مجموعه C است، بنابراین جمع یک تابع نشانگر با یک تابع f به معنی محدود کردن دامنه واقعی تابع f است. یک وسیله معمول برای رسیدن به یک تابع محدب روی R^n این است که یک مجموعه محدب F روی R^{n+1} داشته باشیم، در قضیه زیر می‌توان تابع f را بدست آورد، بطوریکه گراف آن مرز پایین F باشد.

قضیه ۳.۵ فرض کنید F مجموعه محدب در R^{n+1} باشد و فرض کنید

$$f(x)=\inf\{\mu \mid (x,\mu)\in F\}$$

در این صورت f تابع محدب بر R^n است.

به عنوان مثال در R^2 دیسک واحد را به عنوان یک مجموعه محدب می‌باشد در نظر بگیرید در شکل زیر برای هر نقطه x در آن خط موازی با محور yها رسم شده است.



این خط محور xها را در نقطه‌ای قطع می‌کند. بنابراین اشتراک این خط با دیسک مورد نظر نقاط (x,μ) هستند. حال اگر از چنین نقاطی اینفیمم بگیریم برابر $f(x)$ خواهد شد.

$$f(x)=\inf\{\mu \mid (x,\mu)\in F\}$$

اثبات قضیه. بوسیله قضیه ۴.۲ این موضوع حاصل می‌شود.

به عنوان اولین کاربرد از قضیه ۳.۵، یک عمل تابعی که متناظر با جمع اپی‌گراف‌ها در R^{n+1} است، معرفی می‌نماییم.

قضیه ۴.۵ هرگاه $f_1, f_2, \ldots, f_m$ توابع محدب سره روی R^n و فرض کنید

$$f(x)=\inf\{f_1(x_1)+\cdots+f_m(x_m)\mid x_i\in R^n,\ x_1+\cdots+x_n=x\}.$$

در این صورت f تابع محدب بر R^n است.

اثبات. فرض کنید $F_i = epi\, f_i$ و $F = F_1 + F_2 + \cdots + F_m$. بنابراین

چونکه F_i ها محدب R^{n+1} هستند طبق قضیه ۱.۳ ص ۱۷، F نیز یک مجموعه محدب در R^{n+1} خواهد بود. طبق تعریف، $(x,\mu)\in F$ اگر و فقط اگر عناصر $x_i \in R^n$ و $\mu_i \in R$ وجود داشته باشند بطوریکه $\mu_i \geq f(x_i)$ و

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m \quad \text{و} \quad \mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m$$

بنابراین تابع f در این قضیه یک تابع محدب است که بوسیله F و ارتباط که در قضیه ۳.۵ هست، حاصل می‌شود.

تعریف

تابع f که در قضیه ۵.۴ ارائه شده را با علامت $f_1 \square f_2 \square \cdots \square f_m$ می‌شود. عمل $\square$ پیچش اینفیمم (infimal convolution) می‌نامیم.

این اصطلاح از این حاصل می‌شود که در حقیقت، دو تابع در این موضوع قرار گیرند، علامت $\square$ به صورت زیر شرح داده می‌شود

$$(f \square g)(x) = \inf_y \{ f(x-y) + g(y) \},$$

این موضوع مشابه فرمول شناخته شده انتگرال پیچشی است.

هنگامی که برای $a \in R^n$، $g = \delta(\cdot|a)$ را در نظر بگیریم. (در این تابع می‌دانیم که برای $x \neq a$، $\delta(x|a) = \infty$ و $\delta(a|a) = 0$) در این صورت $(f \square g) = f(x-a)$. بنابراین $f \square \delta(\cdot|a)$ تابع است که گراف آن بوسیله انتقال گراف f بوسیله a حاصل می‌گردد. برای یک g دلخواه و $(h(y) = f(-y))$، مقدار پیچش اینفیمم $f \square g$ بوسیله اینفیمم تابع g روی R^n بعلاوه انتقال $h \square \delta(\cdot|x)$ حاصل می‌شود. دامنه مؤثر $f \square g$، مجموع دامنه f و دامنه g خواهد بود.

به عنوان مثال تابع f را نرم اقلیدسی یعنی قدر مطلق فرض کنید و تابع g تابع نشانگر یک مجموعه محدب C فرض شود، داریم

$$(f \square g)(x) = \inf_y \{ |x-y| + \delta(y|C) \} = \inf_{y \in C} |x-y| = d(x, C).$$

این نشان می‌دهد که تابع فاصله $d(\cdot, C)$، تابع محدب است.

محض بودن توابع محدب همواره نمی‌تواند بوسیله پیچش اینفیمم حفظ گردد، چونکه اینفیمم در فرمول ارائه شده قضیه ۵.۴، ممکن است برابر $-\infty$ گردد. ونیز پیچش اینفیمم توابع غیرمحض با این فرمول تعریف می‌شود (این موضوع بدلیل اجتناب از مفهوم $\infty - \infty$

با این حال $f_1 \square f_2$ قابل توصیف با هر توابع f_1 و f_2 از R^n به $[-\infty, \infty]$ با جمع اپی‌گرافهای آنها به شکل زیر خواهد بود.

$$(f_1 \square f_2)(x) = \inf\{\mu \mid (x,\mu) \in (\mathrm{epi}\, f_1 + \mathrm{epi}\, f_2)\}.$$

به عنوان یک عمل روی گردایه تمام توابع از R^n به $[-\infty, +\infty]$، پخش اینفیمم یک عمل جابجایی، شرکت‌پذیر و حافظ تحدب خواهد بود. تابع $\delta(\cdot|0)$ به عنوان عنصر همانی برای این عمل خواهد بود. قبلاً اشاره شده است که عمل ضرب اسکالر نامنفی از سمت چپ خاصیت تحدب را حفظ می‌کند، یعنی

$$(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$$

همچنین یک عمل ضرب اسکالر راست که قابل استفاده باشد وجود دارد، بطوریکه متناظر با ضرب اسکالر اپی‌گرافها است. برای هر تابع محدب f روی R^n و هر λ ای که $0<\lambda<\infty$، $f\lambda$ را توصیف می‌کنیم که تابع محدبی است و از قضیه ۵.۳ با $F=\lambda(\mathrm{epi}\, f)$ حاصل می‌گردد. بنابراین

$$(f\lambda)(x) = \lambda f(\lambda^{-1}x), \quad \lambda>0$$

و برای $\lambda=0$

$$(f0)(x) = \delta(x|0), \quad f \not\equiv +\infty$$

(به صورت بدیهی اگر $f\equiv+\infty$، خواهیم داشت $f0=f$) یک تابع را همگن مثبت می‌نامیم اگر و فقط اگر برای هر $\lambda>0$، $f\lambda=f$.

فرض کنید h یک تابع دلخواه محدب روی R^n باشد و F مجموعه مخروط محدب در R^{n+1} که بوسیله $\mathrm{epi}\, h$ حاصل شده است. تابع حاصل از قضیه ۵.۳ از F دارای همان اپی‌گراف مخروط محدب از R^{n+1} که شامل مبدأ است می‌باشد. این بزرگترین تابع همگن مثبت محدب است، بطوریکه $f(0)\le 0$, $f\le h$. ما f را تابع محدب مثبت همگن تولید شده بوسیله h می‌نامیم. چون F شامل مبدأ است و برابر اتحاد مجموعه‌های $\lambda(\mathrm{epi}\, h)$ برای $\lambda>0$ است، خواهیم داشت

$$f(x) = \inf\{(h\lambda)(x) ; \lambda \ge 0\}$$

در اینجا فرض می‌شود که $h \not\equiv +\infty$. اگر $x\neq 0$ یا $h(0)<+\infty$ البته می‌توان $\lambda=0$ را از اینفیمم حذف نمود.