آمار ریاضی ۱
فصل چهارم: نامساوی کرامر-رائو

استاد: دکتر اکبر اصغرزاده

نامساوی کرامر-رائو

اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} f(x,\theta),\ \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ و $T = t(X_1, \ldots, X_n)$ یک برآوردگر نااریب برای $\alpha(\theta)$ باشد، آنگاه تحت شرایط نظم داریم:

$$Var(T) \geq \frac{[\alpha'(\theta)]^2}{nE_\theta\left[\frac{d}{d\theta}\ln f(X,\theta)\right]^2}.$$

تذکر ۱. سمت راست نامساوی فوق را کران پایین کرامر-رائو $(Cramer\ Rao\ Lower\ Bound)$ برای واریانس برآوردگرهای نااریب $\alpha(\theta)$ گویند و آن‌را با $CRLB_{\alpha(\theta)}$ نمایش می‌دهند. یعنی

$$CRLB_{\alpha(\theta)} = \frac{[\alpha'(\theta)]^2}{nE_\theta\left[\frac{d}{d\theta}\ln f(X,\theta)\right]^2}.$$

تذکر ۲. نامساوی کرامر-رائو تبدیل به مساوی می‌شود اگر و فقط اگر تابعی مانند $k(\theta,n)$ وجود داشته باشد بطوریکه داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{d\theta}\ln f(x_i,\theta) = k(\theta,n)[t(X_1,\ldots,X_n) - \alpha(\theta)].$$

شرایط نظم: گوییم خانواده چگالی‌های احتمال $\{f(x,\theta) : \theta \in \Theta\}$ در شرایط نظم صدق می‌کند هرگاه داشته باشیم:

۱) $\frac{d}{d\theta} \ln f(x,\theta)$ وجود داشته باشد.

۲)

$$\frac{d}{d\theta} \int \dots \int \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)\, dx_1 \dots dx_n = \int \dots \int \frac{d}{d\theta} \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)\, dx_1 \dots dx_n$$

۳)

$$\frac{d}{d\theta} \int \dots \int t(x_1,\dots,x_n) \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)\, dx_1 \dots dx_n$$
$$= \int \dots \int \frac{d}{d\theta} t(x_1,\dots,x_n) \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)\, dx_1 \dots dx_n$$

۴) برای هر $\theta \in \Theta$، $0 < E_\theta\left[\frac{d}{d\theta} \ln f(X_i,\theta)\right]^2 < \infty$.

تذکر. بیشتر توزیع‌های آماری در شرایط نظم صدق می‌کنند، بجز توزیع‌هایی که دامنه متغیر وابسته به پارامتر باشد، مثل توزیع یکنواخت.

کاربردهای نامساوی کرامر-رائو:

- این نامساوی کران پایین برای واریانس برآوردگرهای نااریب $\alpha(\theta)$ ارائه می‌دهد.

- اگر بتوان یک برآوردگر نااریب برای $\alpha(\theta)$ پیدا کرد که واریانس آن دقیقاً برابر کران پایین کرامر-رائو باشد در آن‌صورت این برآوردگر، یک $UMVUE$ برای $\alpha(\theta)$ خواهد بود.

- اگر برآوردگر نااریب $T^* = t^*(X_1, \ldots, X_n)$ برای $\alpha(\theta)$ وجود داشته باشد بطوریکه داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{d\theta} \ln f(x_i, \theta) = k^*(\theta, n)[t^*(X_1, \ldots, X_n) - \alpha(\theta)],$$

در آن‌صورت T^* یک $UMVUE$ برای $\alpha(\theta)$ خواهد بود.

مثال. اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Exp(\theta)$ که

$$f(x,\theta) = \theta\, e^{-\theta x}, \quad x > 0, \quad \theta > 0.$$

کران پایین کرامر-رائو را برای واریانس برآوردگرهای نااریب θ و $\frac{1}{\theta}$ پیدا کنید.

حل. کران پایین کرامر-رائو برای واریانس برآوردگرهای نااریب $\alpha(\theta)$ می‌شود

$$CRLB_{\alpha(\theta)} = \frac{[\alpha'(\theta)]^2}{nE_\theta\Big[\frac{d}{d\theta}\ln f(X,\theta)\Big]^2}.$$

داریم:

$$\alpha(\theta) = \theta, \quad \Rightarrow \quad \alpha'(\theta) = 1$$

$$\ln f(x,\theta) = \ln\left(\theta\, e^{-\theta x}\right) = \ln\theta - \theta x,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{d\theta}\ln f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} - x,$$

$$E[\frac{d}{d\theta}\ln f(X,\theta)]^2 = E\Big(\frac{1}{\theta} - X\Big)^2 = E\Big(X - \frac{1}{\theta}\Big)^2 = Var(X) = \frac{1}{\theta^2}.$$

پس کران پایین کرامر-رائو برای واریانس برآوردگرهای ناااریب θ می‌شود

$$CRLB_\theta = \frac{1}{n\frac{1}{\theta^2}} = \frac{\theta^2}{n}.$$

به عبارتی

$$Var(\theta \text{ (هر برآوردگر نااریب برای}) \geq \frac{\theta^2}{n}.$$

$CRLB$ برای واریانس برآوردگرهای نااریب $\frac{1}{\theta}$:

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{\theta}, \Rightarrow \alpha'(\theta) = -\frac{1}{\theta^2}.$$

$$CRLB_{\frac{1}{\theta}} = \frac{(\frac{-1}{\theta^2})^2}{n\frac{1}{\theta^2}} = \frac{1}{n\theta^2}.$$

پس به عبارتی

$$Var(\frac{1}{\theta} \text{ (هر برآوردگر نااریب برای}) \geq \frac{1}{n\theta^2}.$$

$UMVUE$ برای پارامتر $\alpha(\theta)=\frac{1}{\theta}$:

با توجه به مطالب ذکر شده، اگر برآوردگر نااریب برای $\frac{1}{\theta}$ پیدا کنیم که واریانس آن دقیقاً با کران پایین کرامر-رائو باشد، یعنی برابر $\frac{1}{n\theta^2}$ باشد، آن برآوردگر، یک $UMVUE$ برای $\frac{1}{\theta}$ خواهد بود. می‌دانیم که $\bar{X}$ یک برآوردگر نااریب برای $\frac{1}{\theta}$ است. از طرفی داریم

$$Var(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{1}{n}\frac{1}{\theta^2}=\frac{1}{n\theta^2}.$$

یعنی $Var(\bar{X})$ دقیقاً برابر کران پایین کرامر-رائو است و لذا $\bar{X}$ یک $UMVUE$ برای $\frac{1}{\theta}$ است.

از طرفی دیگر

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{d\theta}\ln f(x_i,\theta)&=\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{\theta}-x_i)=\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}x_i\\&=-\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{n}{\theta}\Big)\\&=-n\Big(\bar{x}-\frac{1}{\theta}\Big)\\&=k^*(n,\theta)[t^*(x_1,\dots,x_n)-\alpha(\theta)],\end{aligned}$$

که

$$k^*(n,\theta) = -n, \quad t^*(x_۱,\ldots,x_n) = \bar{x}, \ \ \alpha(\theta) = \frac{۱}{\theta}.$$

لذا $T^* = \bar{X}$ یک $UMVUE$ برای $\frac{۱}{\theta}$ است.

مثال. اگر $X_۱,\ldots,X_n \overset{iid}{\sim} P(\lambda)$، کران پایین کرامر-رائو را برای واریانس برآوردگرهای ناآریب λ و $e^{-\lambda}$ به‌دست آورید. یک $UMVUE$ برای λ بیابید.

حل. $CRLB$ برای واریانس برآوردگرهای ناآریب $\alpha(\lambda)$ می‌شود

$$CRLB_{\alpha(\lambda)} = \frac{[\alpha'(\lambda)]^۲}{nE_\lambda\left[\frac{d}{d\lambda}\ln f(x,\lambda)\right]^۲}.$$

لذا داریم:

$$\alpha(\lambda) = \lambda \Rightarrow \alpha'(\lambda) = ۱,$$
$$\alpha(\lambda) = e^{-\lambda} \Rightarrow \alpha'(\lambda) = -e^{-\lambda}.$$

$$f(x,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},$$
$$\Rightarrow \ \ln f(x,\lambda) = x\ln\lambda - \lambda - \ln(x!).$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda} \ln f(x,\lambda) = \frac{x}{\lambda} - ۱,$$

$$\Rightarrow E[\frac{d}{d\lambda} \ln f(X,\lambda)]^۲ = E[\frac{X}{\lambda} - ۱]^۲ = E\Big(\frac{X-\lambda}{\lambda}\Big)^۲$$

$$= \frac{۱}{\lambda^۲} E(X-\lambda)^۲ = \frac{\lambda}{\lambda^۲} = \frac{۱}{\lambda}.$$

لذا $CRLB$ برای واریانس برآوردگرهای ناریب λ و $e^{-\lambda}$ به‌ترتیب می‌شود

$$CRLB_\lambda = \frac{۱}{n\frac{۱}{\lambda}} = \frac{\lambda}{n},$$

$$CRLB_{e^{-\lambda}} = \frac{(-e^{-\lambda})^۲}{n\frac{۱}{\lambda}} = \frac{\lambda}{n} e^{-۲\lambda}.$$

داریم:

$$Var[\text{هر برآوردگر ناریب برای } \lambda] \geq \frac{\lambda}{n}.$$

پس اگر برآوردگر ناریب برای λ پیدا شود که واریانس آن $\frac{\lambda}{n}$ باشد آن برآوردگر $UMVUE$ برای λ خواهد بود. داریم

$$E(\bar{X}) = \lambda \Rightarrow Var(\bar{X}) = \frac{\lambda}{n}.$$

لذا $\bar{X}$ یک $UMVUE$ برای برآوردگر ناریب λ است.

روش دوم: داریم

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{d\lambda} \ln f(x_i, \lambda) &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \lambda)}{\lambda} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\lambda}{\lambda} \\ &= \frac{n\bar{x} - n\lambda}{\lambda} \\ &= \frac{n}{\lambda}[\bar{x} - \lambda] \\ &= k^*(n, \lambda)[t^*(x_1, \dots, x_n) - \alpha(\lambda)],\end{aligned}$$

که

$$k^*(n, \lambda) = \frac{n}{\lambda}, \quad t^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}, \quad \alpha(\lambda) = \lambda.$$

لذا $T^* = \bar{X}$ یک $UMVUE$ برای λ است.

تذکر. عبارتی که در مخرج کسر نامساوی کرامر-رائو آمده است را می‌توان برحسب اطلاع فیشر X درباره پارامتر θ نوشت. مقدار اطلاع فیشر X درباره پارامتر مجهول θ را با نماد $I_X(\theta)$ نمایش می‌دهیم و آن‌را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$I_X(\theta) = E\Big[(\frac{d}{d\theta}\ln f(X,\theta))^۲\Big].$$

نکته. تحت شرایط نظم می‌توان مقدار اطلاع فیشر را برحسب مشتق دوم نیز به‌صورت زیر نوشت (چرا؟):

$$I_X(\theta) = -E\Big[\frac{d^۲}{d^۲\theta}\ln f(X,\theta)\Big].$$

نامساوی کرامر-رائو برحسب اطلاع فیشر: برای هر برآوردگر نااریب T برای $\alpha(\theta)$ تحت شرایط نظم داریم

$$Var(T) \geq \frac{[\alpha'(\theta)]^۲}{nI_X(\theta)}.$$

کران پایین کرامر-رائو برای واریانس برآوردگرهای نااریب $\alpha(\theta)$:

$$CRLB_{\alpha(\theta)} = \frac{[\alpha'(\theta)]^۲}{nI_X(\theta)}.$$

مثال. اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} f(x,\theta)$ که

$$f(x,\theta) = \theta\,(1+x)^{-(1+\theta)}, \quad x>0,\ \theta>0.$$

الف) کران پایین کرامر-رائو را برای برآوردگرهای ناااریب θ و $\frac{1}{\theta}$ را بیابید.

ب) در صورت وجود، $UMVUE$ را برای θ و $\frac{1}{\theta}$ بیابید.

حل. داریم

$$\alpha(\theta)=\theta, \ \Rightarrow\ \alpha'(\theta)=1$$

$$I_X(\theta) = E\left[\frac{d}{d\theta}\ln f(X,\theta)\right]^2 = -E\left[\frac{d^2}{d^2\theta}\ln f(X,\theta)\right].$$

لذا داریم

$$\begin{aligned}
&\ln f(x,\theta) = \ln\theta - (1+\theta)\ln(1+x),\\
&\frac{d}{d\theta}\ln f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} - \ln(1+x),\\
&\frac{d^2}{d^2\theta}\ln f(x,\theta) = -\frac{1}{\theta^2}.
\end{aligned}$$

اطلاع فیشر با استفاده از مشتق اول:

$$I_X(\theta) = E\Big[\frac{d}{d\theta}\ln f(X,\theta)\Big]^{۲} = E\Big[\frac{۱}{\theta} - \ln(۱+X)\Big]^{۲}.$$

با توجه به اینکه محاسبه امید ریاضی بالا دشوار است، لذا از روش مشتق دوم اطلاع فیشر را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$I_X(\theta) = -E\Big[\frac{d^{۲}}{d^{۲}\theta}\ln f(X,\theta)\Big] = -E\Big[-\frac{۱}{\theta^{۲}}\Big] = \frac{۱}{\theta^{۲}}.$$

لذا $CRLB$ برای برآوردگرهای نااریب θ می‌شود

$$CRLB_\theta = \frac{۱}{n\frac{۱}{\theta^{۲}}} = \frac{\theta^{۲}}{n}.$$

اگر $\alpha(\theta) = \frac{۱}{\theta}$، آنگاه $\alpha'(\theta) = -\frac{۱}{\theta^{۲}}$. لذا $CRLB$ برای برآوردگرهای نااریب $\frac{۱}{\theta}$ می‌شود

$$CRLB_{\frac{۱}{\theta}} = \frac{(-\frac{۱}{\theta^{۲}})^{۲}}{\frac{n}{\theta^{۲}}} = \frac{۱}{n\theta^{۲}}.$$

پیدا کردن $UMVUE$ برای θ و $\frac{۱}{\theta}$: می‌دانیم که اگر رابطه زیر برقرار باشد

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{d}{d\theta} \ln f(x_i, \theta) = k^*(n,\theta)[t^*(x_۱, \dots, x_n) - \alpha(\theta)],$$

آنگاه $T^* = t^*(x_۱, \dots, x_n)$ یک $UMVUE$ برای $\alpha(\theta)$ خواهد بود. داریم

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{n} \frac{d}{d\theta} \ln f(x_i, \theta) &= \sum_{i=۱}^{n} \left(\frac{۱}{\theta} - \ln(۱ + x_i)\right) \\ &= \frac{n}{\theta} - \sum_{i=۱}^{n} \ln(۱ + x_i) \\ &= -n\left(\frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} \ln(۱ + x_i) - \frac{۱}{\theta}\right) \\ &= k^*(n,\theta)[t^*(x_۱, \dots, x_n) - \alpha(\theta)],\end{aligned}$$

که

$$k^*(n,\theta) = -n, \quad t^*(x_۱, \dots, x_n) = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} \ln(۱ + x_i), \quad \alpha(\theta) = \frac{۱}{\theta}.$$

لذا $UMVUE$ برای $\frac{۱}{\theta}$ می‌شود $T^* = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} \ln(۱ + X_i)$.

روش دوم (استفاده از قضیه لهمن-شفه):

داریم

$$\begin{aligned} f(x,\theta) &= \theta\,(1+x)^{-(1+\theta)} \\ &= \theta\, e^{-(1+\theta)\ln(1+x)} = a(\theta)\, b(x)\, e^{c(\theta)\, d(x)}, \end{aligned}$$

که

$$a(\theta)=\theta,\;\; b(x)=1,\;\; c(\theta)=-(1+\theta),\;\; d(x)=\ln(1+x).$$

چون توزیع فوق به خانواده نمایی تک پارامتری تعلق دارد، لذا آماره بسنده کامل θ می‌شود

$$S=\sum_{i=1}^{n} d(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_i).$$

ابتدا توزیع S را به‌دست می‌آوریم. فرض کنید $Y=\ln(1+X)$. داریم

$$y=\ln(1+x)\;\Rightarrow\; x=e^y-1,\;\Rightarrow\; \frac{dx}{dy}=e^y.$$

لذا از روش تبدیل متغیر داریم:

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f_X(e^y - ۱)\,|e^y|$$
$$= \theta\,(۱ + e^y - ۱)^{-(۱+\theta)}\,e^y$$
$$= \theta\,(e^y)^{-۱-\theta}\,e^y$$
$$= \theta\,e^{-y-\theta y}\,e^y$$
$$= \theta\,e^{-\theta y},\quad y > ۰,\ \theta > ۰.$$

$$\Rightarrow\ Y = \ln(۱ + X)\ \sim\ Exp(\frac{۱}{\theta})\ \text{یا}\ \Gamma(۱, \frac{۱}{\theta}),$$

$$\Rightarrow\ S = \sum_{i=۱}^{n} \ln(۱ + X_i)\ \sim\ \Gamma(n, \frac{۱}{\theta}).$$

$$\Rightarrow\ E(S) = \frac{n}{\theta},\ \ \Rightarrow\ E(\frac{S}{n}) = \frac{۱}{\theta}.$$

لذا بنا بر قضیه لهمن-شفه، $UMVUE$ برای $\frac{۱}{\theta}$ می‌شود $\frac{S}{n}$.

برای محاسبه $UMVUE$ برای θ باید $E(\frac{1}{S})$ محاسبه شود. قبلاً به‌دست آوردیم $E(\frac{1}{S}) = \frac{\theta}{n-1}$، لذا $E(\frac{n-1}{S}) = \theta$.
بنابراین $UMVUE$ برای θ می‌شود $\frac{n-1}{S}$ یا $\frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1+X_i)}$.

کارایی برآوردگر ناریب $(efficeincy)$

برای هر برآوردگر نااریب T برای $\alpha(\theta)$ می‌دانیم که

$$Var(T) \geq \frac{[\alpha'(\theta)]^2}{nI_X(\theta)}.$$

کارایی برآوردگر نااریب T را با $e(T)$ نمایش داده و آن‌را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$e(T) = \frac{[\alpha'(\theta)]^2 / nI_X(\theta)}{Var(T)}$$

یا

$$e(T) = \frac{CRLB_{\alpha(\theta)}}{Var(T)}.$$

نکته. $0 \leq e(T) \leq 1$.

تعریف برآوردگر کارا

برآوردگر نااریب T برای $\alpha(\theta)$ را یک برآوردگر کارا گویند هرگاه کارایی آن برابر ۱ باشد. یعنی $e(T) = ۱$.

نکته. هر برآوردگر کارا یک برآوردگر $UMVUE$ است ولی عکس آن لزوماً برقرار نیست.

یک برآوردگر ممکن است $UMVUE$ باشد ولی واریانس آن دقیقاً برابر کران پایین کرامر-رائو نباشد. درواقع ممکن است کران پایین کرامر-رائو توسط برآوردگرهای نااریب قابل حصول نباشد.

مثال. اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Exp(\frac{1}{\theta})$ که

$$f(x,\theta) = \theta\, e^{-\theta x}, \;\; x > 0, \; \theta > 0.$$

کارایی برآوردگر $T = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ را بیابید. آیا این برآوردگر برای θ کارا است؟ چرا؟

حل. درنظر می‌گیریم $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \frac{1}{\theta})$. می‌دانیم $T = \frac{n-1}{S}$ برآوردگر نااریب برای θ است (UMVUE نیز هست).

کارایی T می‌شود:

$$e(T) = \frac{CRLB_\theta}{Var(T)},$$

که در آن، $CRLB_\theta = \frac{\theta^2}{n}$. همچنین داریم

$$Var(T) = E(T^2) - E^2(T),$$
$$E(T) = \theta,$$
$$E(T^2) = E\left(\frac{(n-1)}{S}\right)^2 = (n-1)^2\, E(S^{-2}).$$

که در آن

$$E(S^{-۲}) = \frac{(\frac{۱}{\theta})^{-۲}\,\Gamma(n-۲)}{\Gamma(n)}$$
$$= \frac{\theta^{۲}\,\Gamma(n-۲)}{(n-۱)\,\Gamma(n-۱)\,\Gamma(n-۲)}$$
$$= \frac{\theta^{۲}}{(n-۱)\,(n-۲)}.$$

لذا $Var(T) = \frac{\theta^{۲}}{n-۲}$ و کارایی T می‌شود

$$e(T) = \frac{CRLB_{\theta}}{Var(T)} = \frac{\frac{\theta^{۲}}{n}}{\frac{\theta^{۲}}{n-۲}} = \frac{n-۲}{n} < ۱.$$

لذا برآوردگر T کارا نیست.

تذکر.

$$X \sim \Gamma(\alpha, \beta) \;\Rightarrow\; E(X^{r}) = \frac{\beta^{r}\,\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}.$$

سؤال ۱. اگر $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} b(1, p), \quad 0 < p < 1$.

الف) کران پایین کرامر-رائو را برای واریانس برآوردگرهای نااریب p^2 به‌دست آورید.

درصورت وجود $UMVUE$ را برای p بیابید.

سؤال ۲. اگر $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} f(x;\theta)$ که

$$f(x,\theta) = \theta\, x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1, \ \ \theta > 0.$$

الف) کران پایین کرامر-رائو را برای برآوردگرهای نااریب θ و $\frac{1}{\theta^2}$ بیابید.

ب) در صورت وجود، $UMVUE$ را برای θ و $\frac{1}{\theta}$ بیابید.

سؤال ۳. اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, 1)$.

الف) کران پایین کرامر-رائو را برای برآوردگرهای ناریب θ و θ^2 بیابید.

ب) در صورت وجود، $UMVUE$ را برای θ بیابید.

سؤال ۴. اگر $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی زیر باشد.

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad x > 0, \quad \theta > 0.$$

الف) کران پایین کرامر-رائو را برای واریانس برآوردگرهای ناریب θ و $\frac{1}{\theta}$ به‌دست آورید.

ب) درصورت وجود $UMVUE$ پارامترهای θ، $\frac{1}{\theta}$ و $\frac{\theta+1}{\theta}$ را بیابید.

ج) آیا برآوردگر ناریب $T = \breve{X}$ برای $\alpha(\theta) = \theta$ برآوردگر کارا است؟ چرا؟