بسم الله الرحمن الرحیم

درس آنالیز ریاضی

این درس براساس سه فصل ارائه شده شامل مفاهیم مقدماتی آنالیز توابع چند متغیره، فرم‌های مشتق پذیر و کاربرد آنها و اندازه لبگ می‌باشد.

اگر به کتاب اصول آنالیز ریاضی نوشته والتر رودین و ترجمه دکتر علی اکبر عالم زاده در فصلهای ۹ و ۱۰ و ۱۱ توجه کنیم، می‌توان مطالب این درس را از این سه فصل استخراج نمود. به عبارتی ادامه مطالب درس مبانی آنالیز ریاضی است. بنابراین این درس نیز شامل سه فصل خواهد بود. برای فصل اول مبانی ترم‌ها می‌تواند در نظر گرفته شود.

فصل اول توابع چند متغیره

۱-۱ در درس مبانی آنالیز ریاضی دانشجو به فضای اقلیدسی R^k و عناصر آن آشنا شده است. حال در اینجا به چند تعریف می‌پردازیم:

آ) فضای برداری در R^n

مجموعه ناتهی $X \subset R^n$ را یک فضای برداری می‌نامند، هرگاه برای هر $x,y \in X$ و هر اسکالر c، داشته باشیم $x+y \in X$ و $cx \in X$.

ب) ترکیب خطی چند عنصر

اگر $x_1, \ldots, x_k \in R^n$ و $c_1, \ldots, c_k$ اسکالرها باشند، بردار

$$c_1x_1 + \cdots + c_kx_k$$

را ترکیب خطی از $x_1, \ldots, x_k$ می‌نامیم. هرگاه $S \subset R^n$ و E مجموعه تمام ترکیبات خطی عناصر S باشد، گوییم S، مجموعه E را می‌پیماید یا E پیمای S است.

ⓣ به عنوان تمرین می‌توان نشان داد که هر پیما (منظور مجموعه E) یک فضای برداری است.

پ) مستقل بودن چند عنصر

مجموعه مرکب از بردارهای $x_1, \ldots, x_k$ (که مجموعه با علامت $\{x_1, \ldots, x_k\}$ می‌باشد) را مستقل می‌نامیم، هرگاه عبارت $c_1x_1 + \cdots + c_kx_k = 0$ نتیجه دهد که

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

در غیر اینصورت این مجموعه را نامستقل یا وابسته می‌نامیم.

③ می‌توان به عنوان تمرین نشان داد که هیچ مجموعه مستقلی شامل بردار پوچ (یا بردار صفر) نمی‌باشد.

(ت) بعد یک فضای برداری

هرگاه فضای برداری X دارای مجموعه مستقل از r بردار باشد و شامل هیچ مجموعه مستقل با $r+1$ بردار نباشد در این صورت گوئیم X دارای بعد r است و می‌نویسیم

$$\dim X = r$$

مجموعه‌ای که فقط یک عضو و آن عضو عنصر پوچ یا عنصر صفر باشد، فضای برداری است که بعد آن صفر است.

(ث) پایه یک فضای برداری

با توجه به بند (ب) هرگاه E یک مجموعه مستقل از فضای برداری X باشد، بطوریکه $E = X$ گردد، یعنی این مجموعه مستقل X را بپیماید، در این صورت یک پایه X را دارد.

به عنوان مثال در فضای R^n، مجموعه بردارهای $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ یک پایه برای فضای برداری R^n است که در اینجا

$$e_1 = (\underbrace{1, 0, 0, \dots, 0}_{n \text{ عنصر}}), \quad e_2 = (\underbrace{0, 1, 0, \dots, 0}_{n \text{ عنصر}})$$

$$, \dots, e_n = (\underbrace{0, 0, \dots, 0, 1}_{n \text{ عنصر}})$$

به عبارت دیگر برای هر $j = 1, 2, \dots, n$، بردار e_j برداری است که مختص jاُم آن عدد یک و سایر مختصات آن همه صفر هستند. هرگاه $x \in R^n$، بطوریکه $x = (x_1, \dots, x_n)$ آنگاه داریم

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$$

به مجموعه $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ پایه متعارف فضای برداری R^n می‌نامیم.

قضیه ۲.۱ فرض کنید r عدد صحیح مثبتی باشد. هرگاه فضای برداری X به وسیله مجموعه‌ای از r عضو پیموده شود، آنگاه $\dim X \le r$.

اثبات. طبق فرض و تعریف (ب) فضای برداری X بوسیله مجموعه‌ای مانند S که r عضوی است، پیموده می‌شود. حال بوسیله برهان خلف قضیه را اثبات می‌کنیم.

فرض کنید $\dim X > r$ باشد. طبق تعریف (الف) X دارای مجموعه مستقل مانند $Q = \{y_1, \ldots, y_{r+1}\}$ است. بعد از S_0، مجموعه S_1، S_2، ... S_r که $i \geq 2$ است، را تعریف می‌کنیم.

$$S_1 = \{y_1, x_1, x_2, \ldots x_{r-1}\}$$

به جای $r-1$ عضو از S_0 را انتخاب کرده‌ایم و با عنصر y_1، مجموعه S_1 را تشکیل داده‌ایم بطوری که

به همین ترتیب S_1 بتواند مجموعه X را بپیماید. به همین ترتیب برای هر i، که $i \geq 2$ مجموعه S_i طوری ساخته می‌شود که X را بپیماید و شامل $y_1, y_2, \ldots y_i$ است به همراه $r-i$ عضو از S_0، یعنی S_i از S_0 با تعویض i تا عنصر با اعضای Q است.

بدین ترتیب y_{i+1} در پیمای S_i قرار دارد. یعنی اگر فرض کنیم

$$S_i = \{y_1, y_2, \ldots, y_i, x_1, x_2, \ldots x_{r-i}\}$$

پس می‌توان یک ترکیب از این عناصر پیدا کرد که برابر y_{i+1} است. یعنی اسکالرهای a_1، ... a_i و b_1، ... b_{r-i} وجود دارند که

$$y_{i+1} = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_i y_i + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_{r-i} x_{r-i}$$

اگر یکی از b_k ها غیرصفر باشد، بدان معنی است که x_k در ترکیب خطی مجموعه

$$T_i = S_i \cup \{y_{i+1}\}$$

قرار دارد، x_k را از این مجموعه بر می‌داریم، مجموعه باقی مانده S_{i+1} نام دارد. این مجموعه X را هم می‌پیماید. پس توانستیم با S_0، مجموعه‌های S_1، S_2، ... S_r را بسازیم

می‌دانیم که y_{r+1} در پیمای S_r قرار می‌گیرد و چون Q مستقل فرض شده، این موضوع با مستقل بودن Q در تناقض است زیرا $S_r = \{y_1, y_2 \ldots y_r\}$ و اگر y_{r+1} در پیمای S_r قرار گیرد، بدان معنی است که اسکالرهای c_1، c_2، ... c_r است که همه صفر نیستند

$$y_{r+1} = c_1 y_1 + \cdots + c_r y_r$$

این رابطه با مستقل بودن Q در تناقض است. و اثبات تمام می‌شود

به عنوان یک نتیجه می‌توان نشان داد که $\dim R^n = n$ است.

چون می‌دانیم که مجموعه $\{e_1, \ldots e_n\}$ به عنوان مجموعه‌ای است که R^n را می‌پیماید، پس $\dim R^n \leq n$

از طرفی هر عنصر از R^n که به این مجموعه اضافه کنیم، بوسیله ترکیب از $e_1, \ldots, e_n$ خواهد بود. یعنی بدان معنی است که R^n دارای مجموعه مستقل $n+1$ عضوی نیست، پس طبق تعریف (ت) $\dim R^n = n$ است.

تعریف مختصات یک عنصر نسبت به پایه داده شده:
از طرح می‌دانیم که اگر $B=\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ پایه‌ای از فضای برداری X فرض شود، هر عنصر $x \in X$ نمایش منحصر بفردی به شکل $x=\sum_{j=1}^{r} c_j x_j$ دارد.
(می‌توان نشان داد که این نمایش منحصر بفرد است.)

در این صورت $c_1, c_2, \ldots, c_r$ را مختصات x نسبت به پایه B می‌نامیم.
طبیعی است که اگر پایه را برای فضای X عوض کنیم، مختصات x نیز تغییر پیدا می‌کند.
در اینجا سوالاتی مطرح می‌گردد:
در تعریف (ب) دیده می‌شود که مجموعه E که می‌تواند E را بپیماید ولی از این موضوع آیا به معنی مستقل بودن E خواهد بود؟
ارتباط مفهوم پایه و تعداد اعضا آن چگونه است؟
آیا در یک فضای برداری می‌توانیم هر مجموعه مستقل خطی را یک پایه بدانیم. پایه عبارت
تمیز هر مجموعه مستقل را می‌توانیم تبدیل به یک پایه نماییم.
هر سه سوال در قضیه زیر ثابت می‌گردد:

قضیه ۱.۳۰. فرض کنید X یک فضای برداری باشد و $\dim X=n$. آنگاه زیر را خواهیم داشت.

(آ) یک مجموعه E، n عضوی X را می‌پیماید اگر و فقط اگر که E مستقل خطی باشد.
(ب) X دارای پایه است و هر پایه از n بردار تشکیل می‌شود.
(پ) در حالت $1 \le r \le n$ و $\{y_1, \ldots, y_r\}$ مجموعه مستقل در X باشد، آنگاه X پایه‌ای دارد که شامل $\{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$ است.

اثبات. (آ) اگر فرض کنیم $E=\{x_1, \ldots, x_n\}$ و مستقل باشد. چون $\dim X=n$ است پس می‌دانیم (طبق تعریف (ت)) مجموعه $\{x_1, \ldots, x_n, y\}$ برای هر $y \in X$، نامستقل است.
این یعنی y در پیمای E قرار می‌گیرد. برعکس اگر E نامستقل باشد

طبق این فرض می‌توان یکی از اعضایش را بدون اینکه در پیمایش E تغییر صورت گیرد، حذف نمود. طبق قضیه ۲۰۱ می‌توان نتیجه گرفت که $\dim X < n$ است و این تناقض با پیمایش E دارد.

(ب) طبق فرض $\dim X = n$ لذا می‌توان نتیجه گرفت که X دارای مجموعه مستقل مرکب از n بردار است. طبق (آ) این مجموعه مستقل بوده و به عبارتی پایه برای X است.

حال اگر یک پایه از X را در نظر بگیریم، طبق تعریف (ت) این مجموعه مستقل X را می‌پیماید طبیعتاً این پایه نمی‌تواند تعداد عضوهای آن کمتر از n باشد زیرا $\dim X = n$ و باز طبق مستقل بودن عناصر پایه) نمی‌توان فرض کرد که تعداد عناصر آن بیشتر از n است، (چون با تعریف (ث) امکان پذیر نیست، پس دقیقاً تعداد عناصر آن برابر n خواهد بود.

(ث) با داشتن مجموعه مستقل خطی $\{y_1, \ldots, y_r\}$ که $1 \leq r \leq n$ است. فرض کنید مجموعه $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ پایه‌ای برای X باشد. مجموعه S به صورت زیر را تشکیل می‌دهیم

$$S = \{y_1, y_2, \ldots, y_r, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

تعداد این عناصر $n+r$ است، پس با توجه به اینکه $\dim X = n$ است، نمی‌تواند مستقل باشد. بنابراین می‌توان نشان داد که یکی از x_i ها ($1 \leq i \leq n$) ترکیب خطی اعضای دیگر S است. یعنی می‌توانیم x_i را از S برداریم و مجموعه باقی‌مانده X را می‌پیماید. این عمل را r بار تکرار می‌کنیم (یعنی عمل حذف کردن را r بار تکرار می‌کنیم) تا به مجموعه n عنصری که شامل $y_1, y_2, \ldots, y_r$ هست برسیم. چون مجموعه حاصل X را می‌پیماید، طبق (آ) مستقل است و طبق تعریف (ت) یک پایه برای X است.

تا این قسمت هر آنچه که برای فضای برداری، ترکیب خطی، پایه و بعد فضا بود بیان نمودیم. در ادامه مفاهیم جبر خطی که مورد نیاز ما در این فصل می‌باشد، اضافه می‌شود. از جمله این مفاهیم، تبدیل خطی، عملگر خطی، فضای تبدیلات خطی، نرم یک عملگر خطی و خواص کرانداری و پیوستگی آن و ارتباط آن با فضای ماتریس‌ها خواهد بود. در نهایت با توجه به عنوان فصل می‌خواهیم به مشتق این توابع بپردازیم

۴.۳.۱. تعریف تبدیل خطی

یک نگاشت A از فضای برداری X به فضای برداری Y را یک تبدیل خطی می‌نامند، هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in X$ و هر $x \in X$ و نیز هر اسکالر c روابط زیر را داریم

$$A(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2, \qquad A(cx) = cAx$$

اگر در روابط بالا دقت کنید به جای $Ax = A(x)$ قرار داده شد. این موضوع و جانشین در خصوص خطی بودن A صورت گرفته است.

(۳) می‌توان نشان داد که $A0 = 0$ است. ∎

حال اگر X دارای پایه $\{x_1, \dots, x_n\}$ باشد و بردارهای $\{Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n\}$ را در نظر بگیریم و هر $x \in X$ را فرض کنیم، طبق تعریف پایه بودن، می‌توان مختصات x را نسبت به این پایه، $c_1, \dots, c_n$ بدانیم، یعنی

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

حال می‌توان عمل A روی x را که Ax باشد نمایش داد.

$$Ax = A\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} c_i A x_i$$

چون A خطی است

پس نمایش Ax بوسیله بردارهای Ax_i $(1 \le i \le n)$ بدست آمده است.

نکته: تبدیل خطی از X به X را معمولاً عملگر خطی بر X نیز می‌نامند.

می‌دانیم که اگر A یک عملگر خطی بر X باشد و دو شرط در نظر گرفته شود، یعنی اولاً یک به یک و ثانیاً پوشا (یا پوشا) بوده در این صورت می‌گوئیم A معکوس پذیر است.

(۳) می‌توان نشان داد که عملگر A^{-1} یعنی وارون A تعریف شده و خطی است.

می‌توانیم در قضیه بعدی نشان دهیم که برای یک عملگر خطی بر فضای برداری با بعد متناهی اگر یکی از ویژگی‌های یک به یک یا پوشا بودن را داشته باشد، لذا خاصیت بعدی نیز برخوردار است.

قضیه ۱.۵. عملگر خطی A بر فضای برداری با بعد متناهی X یک به یک است اگر و فقط اگر برد A تمام X باشد.

اثبات. فرض کنید $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ پایه‌ای از X باشد. با توجه به اینکه برای هر عنصر $x \in X$، نمایش Ax را شرح داده‌ایم، پس هر عنصر از AX یعنی همان برد A که با $R(A)$ نشان داده می‌شود، پیمای مجموعه $Q=\{Ax_1, \ldots, Ax_n\}$ است. طبق قضیه ۱.۰۹ (ت)، $R(A)=X$ اگر و فقط اگر Q مستقل باشد. حال نشان می‌دهیم این موضوع معادل با یک به یک بودن A است.

فرض کنید A یک به یک باشد و ترکیب زیر را داشته باشیم

$$c_1 Ax_1 + c_2 Ax_2 + \cdots + c_n Ax_n = 0$$

از خطی بودن داریم

$$A\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) = 0$$

چون A خطی است، پس $\sum c_i x_i = 0$ و با توجه به مستقل بودن x_i ها، نتیجه می‌گیریم که $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$، یعنی Q مستقل است.

حال برعکس اگر Q مستقل باشد و $x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$، نشان می‌دهیم اگر $Ax=0$ گردد به معنی اینکه $x=0$ است زیرا

$$Ax = A\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) \underset{\text{خطی بودن}}{=} \sum_{i=1}^{n} c_i Ax_i = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

مستقل بودن Q

پس $x=0$. حال برای اینکه نشان دهیم A یک به یک است اگر $Ax=Ay$ پس طبق خطی بودن $A(x-y)=0$ و از آنجا $x-y=0$، یعنی $x=y$. به عبارتی از مستقل بودن Q، یک به یک بودن A حاصل می‌شود، حکم ثابت می‌گردد.

۱.۰۶ (ت) نماد $L(X,Y)$

مجموعه تمام تبدیلات خطی از فضای برداری X به توی فضای برداری Y را با $L(X,Y)$ نمایش می‌دهیم. که $(X=Y)$ باشد بطور خلاصه $L(X,Y)$ را با $L(X)$ نشان می‌دهیم.

(۳) می‌توان نشان داد که $L(X,Y)$ یک فضای برداری است.

البته می‌دانیم که $A_1, A_2 \in L(X,Y)$ و c_1, c_2 اسکالر باشند داریم

$$(c_1 A_1 + c_2 A_2)x = c_1 A_1 x + c_2 A_2 x$$

(ب) تعریف ضرب دو عضو $L(X,Y)$

۸ حل

آ) اگر X, Y, Z فضاهای برداری باشند و $A \in L(X,Y)$ ، $B \in L(Y,Z)$

حاصل ضرب BA مساوی ترکیب A و B به صورت زیر تعریف شد

$$(B \circ A)(x) = (BA)x = B(Ax)$$

(P) می‌توان نشان داد که $BA \in L(X,Z)$ است.

نکته: BA با AB همواره برابر نیست حتی اگر $X = Y = Z$

به عنوان مثال می‌دانیم که عمل مشتق یک تبدیل خطی است و نیز عمل انتگرال نیز چنین است. حال اگر A نمایش تبدیل مشتق باشد یعنی

$$A(f) = f'$$

و عمل انتگرال را به عنوان تبدیل B زیر نشان دهیم یعنی

$$B(f) = \int f(x)\,dx$$

(P) هر دو خطی هستند. اگر فرض کنیم $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ که C عدد ثابتی است و تابع F مشتق‌پذیر فرض شود.

$$(AB)(f) = A\left(\int f(x)\,dx\right) = A\left(F(x) + C\right)$$
$$= F'(x)$$

$$(BA)(f) = B(Af)$$

در همین رابطه Af ممکن است حتی تعریف نشود زیرا با فرض مشتق‌پذیری F، دلیلی بر مشتق‌پذیری f نمی‌باشد. بنابراین در این مثال BA با AB برابر نیست.

ب) تعریف نرم یک عنصر $L(R^n, R^m)$

می‌توان نشان داد که نمایش چنین تبدیلات خطی به صورت ماتریس می‌باشد و نمایش این ماتریس‌ها بستگی به انتخاب بردارهای پایه در فضای داده شده دارد. لذا تعریف می‌کنیم

$$\|A\| = \sup\{\, |Ax| \;;\; |x| \leq 1,\ x \in R^n \}$$

این عبارت را نرم تبدیل خطی A می‌نامیم.

(P) می‌توان نشان داد که برای هر $x \in R^n$ ، $|Ax| \leq \|A\|\,|x|$. و سپس برای هر اسکالر λ

که مقداری مثبت است رابطه زیر را برای هر $x \in R^n$ داشته باشیم

$$|Ax| \leq \lambda |x|$$

آنگاه می‌توان نشان داد که $\|A\| \leq \lambda$.

در قضیه زیر می‌خواهیم نشان دهیم که عناصر فضای $L(R^n, R^m)$ از ویژگیهای کرانداری، پیوستگی یکنواخت برخوردار هستند و با کمیتی که معرفی شده، این فضا یک فضای متری خواهد بود

قضیه ۱.۷

(آ) هرگاه $A \in L(R^n, R^m)$، آنگاه $\|A\| < \infty$ و A یک نگاشت بطور یکنواخت پیوسته از R^n بتوی R^m است.

(ب) هرگاه $A, B \in L(R^n, R^m)$ و c یک اسکالر باشد آنگاه

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|, \qquad \|cA\| = |c| \|A\|$$

می‌توان نشان داد که $L(R^n, R^m)$ با تعریف فاصله دو عنصر A, B با مقدار $\|A-B\|$، تبدیل به فضای متری خواهد بود

(ج) هرگاه $A \in L(R^n, R^m)$ و $B \in L(R^m, R^k)$ آنگاه $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$.

اثبات. (آ) هرگاه فرض کنیم $\{e_1, \dots, e_n\}$ پایه متعارف در R^n باشد، می‌دانیم که Ae_1، Ae_2، ---، Ae_n نیز بردارهایی در R^m هستند پس $\sum_{i=1}^{n} |Ae_i| < \infty$ است.

حال برای هر $x \in R^n$ که $|x| \leq 1$ می‌توان نتیجه گرفت که اول c_1، c_2، ---، c_n به عنوان کمیتهایی وجود دارند که $x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ و می‌توان نتیجه گرفت برای هر $i = 1, 2, \dots, n$، $|c_i| \leq 1$.

بنابراین داریم

$$|Ax| = \left| \sum_{i=1}^{n} c_i Ae_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |c_i| \, |Ae_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |Ae_i|$$

اگر از طرفین سوپریمم بگیریم، سمت راست مقدار ثابتی است، بنابراین

$$\|A\| = \sup \{ |Ax| \, ; \, |x| \leq 1 \} \leq \sum_{i=1}^{n} |Ae_i| < \infty$$

حال برای هر $x, y \in R^n$

$$|Ax - Ay| = |A(x-y)| \leq \|A\| \, |x-y|$$

از این رابطه می‌توان نشان داد که A بطور یکنواخت پیوسته است. خطی بودن

(ب) چون برای هر دو عملگر A و B و برای هر $x \in R^n$ روابط زیر را داریم

$$|Ax| \leq \|A\| \, |x| \quad , \quad |Bx| \leq \|B\| \, |x| \qquad (1)$$

$$|(A+B)x| = |Ax + Bx| \underset{\text{نامساوی مثلث}}{\leq} |Ax| + |Bx| \underset{\text{از (1)}}{\leq} (\|A\| + \|B\|) \, |x|$$

نتیجه

حال اگر $|x| \leq 1$ باشد، سمت راست مقدار ثابتی کمتر است و با زدن سوپریمم گرفتن از طرفین، $\|A+B\|$ بدست می‌آید

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

③ به همین ترتیب می‌توان برای هر اسکالر c، نشان داد که $\|cA\| = |c| \, \|A\|$

برای متریک بودن فضای $L(R^n, R^m)$ با فاصله $d(A,B) = \|A-B\|$، کافی است نامساوی مثلث بودن را برای این تعریف نشان دهیم.

اگر $A, B, C \in L(R^n, R^m)$،

$$\|A - C\| = \|(A-B) + (B-C)\| \leq \|A-B\| + \|B-C\|$$

(ب) می‌دانیم که برای هر $x \in R^n$، $|Ax| \leq \|A\| \, |x|$ و برای هر $B \in L(R^m, R^k)$، $y \in R^m$

داریم $|By| \leq \|B\| \, |y|$.

حال فرض کنید $y = Ax$ در این صورت

$$|(BA)x| = |B(Ax)| \leq \|B\| \, |Ax| = \|B\| \, |y|$$

$$\leq \|B\| \, \|A\| \, |x|.$$

حال اگر $|x| \leq 1$ در نظر گرفته شود، سمت راست برای هر xای از مقدار $\|B\| \, \|A\|$ کمتر یا مساوی است. لذا با سوپریمم گرفتن از طرفین داریم

$$\|BA\| \leq \|B\| \, \|A\|$$

حال با داشتن متر برای فضای $L(R^n, R^m)$ می‌توان طبق فضای متریک، مجموعه‌های باز، پیوستگی و ... را در این فضا معین نمود.