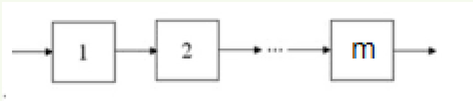
قابلیت اعتماد سیستم‌های سری و موازی

مدرس: دکتر اصغرزاده نشلی

دانشگاه مازندران

سیستم سری (متوالی)

یک سیستم سری با m مؤلفه مستقل تشکیل دهنده‌ی آن را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:



اگر X_i $(i=١,\ldots,m)$ طول عمر یا زمان خرابی مؤلفه i ام باشد، در اینصورت طول عمر سیستم می‌شود $X=\min(X_١,\ldots,X_m)$.

تابع توزیع طول عمر سیستم:

$$\begin{aligned}
F(x)=F_X(x)&=P(X\le x)=P[\min(X_١,\ldots,X_m)\le x]\\
&=١-P[\min(X_١,\ldots,X_m)>x]\\
&=١-P[X_١>x,\ X_٢>x,\ldots,X_m>x]\\
\text{(مستقل بودن)}\quad&=١-P(X_١>x)\,P(X_٢>x)\ldots P(X_m>x)\\
&=١-[١-P(X_١\le x)]\,[١-P(X_٢\le x)]\ldots[١-P(X_m\le x)]\\
&=١-\prod_{i=١}^{m}[١-F_{X_i}(x)]\Longrightarrow \boxed{F_X(x)=١-\prod_{i=١}^{m}[١-F_{X_i}(x)]}
\end{aligned}$$

نتیجه:

$$1 - F_X(x) = \prod_{i=1}^{m}[1 - F_{X_i}(x)] \implies R_X(x) = \prod_{i=1}^{m} R_{X_i}(x)$$

پس تابع قابلیت اعتماد سیستم سری می‌شود:

$$R_{sys}(x) = \prod_{i=1}^{m} R_i(x) \qquad \text{یا} \qquad R_{sys} = \prod_{i=1}^{m} R_i$$

به عنوان مثال برای یک سیستم سری با ۲ مؤلفه، اگر $t = 2$ (سال) و $R_1(2) = 0/9$ ،$R_2(2) = 0/8$ آنگاه

$$R_{sys}(2) = R_1(2).R_2(2) = (0/9)(0/8) = 0/72$$

تذکر

در یک سیستم سری داریم:

$$R_{sys} \leq R_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

این بدین معنی است که قابلیت اعتماد یک سیستم سری از قابلیت اعتماد تک تک مؤلفه‌های آن کمتر است.

دانشگاه مازندران

تذکر

هرچه تعداد مؤلفه‌های سیستم یعنی m بیشتر شود، قابلیت اعتماد سیستم کمتر می‌شود.

احتمال کارکرد یک سیستم سری: اگر P_i احتمال درست کار کردن مؤلفه i ام باشد، در آن صورت احتمال اینکه یک سیستم سری تشکیل شده از m مؤلفه مستقل درست کار کند می‌شود $P = \prod_{i=1}^{m} P_i$.

با افزایش تعداد مؤلفه‌های یک سیستم سری احتمال کارکرد سیستم و نیز قابلیت اعتماد سیستم کاهش پیدا می‌کند.

نرخ خرابی سیستم سری

در یک سیستم سری با m مؤلفه مستقل، نرخ خرابی سیستم به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$h_{sys}(t) = h_X(t)$$

که در آن $X = \min(X_1, \ldots, X_m)$.

می‌دانیم که

$$R_{sys}(t) = e^{-\int_0^t h_{sys}(t)\,dt} \qquad \star$$

از طرفی داریم:

$$R_{sys}(t) = \prod_{i=1}^{m} R_i(t) = \prod_{i=1}^{m} [e^{-\int_0^t h_i(t)\,dt}]$$

$$= e^{-\int_0^t h_1(t)\,dt}\, e^{-\int_0^t h_2(t)\,dt} \ldots e^{-\int_0^t h_m(t)\,dt}$$

$$= e^{-[\int_0^t h_1(t)\,dt + \int_0^t h_2(t)\,dt + \cdots + \int_0^t h_m(t)\,dt]} = e^{-\int_0^t (\sum_{i=1}^m h_i(t))\,dt}$$

$$\Longrightarrow \boxed{R_{sys}(t) = e^{-\int_0^t (\sum_{i=1}^m h_i(t))\,dt}} \qquad \star\star$$

از مقایسه $\star$ و $\star\star$ نتیجه می‌شود:

$$h_{sys}(t) = \sum_{i=1}^{m} h_i(t)$$

مثال

در یک سیستم سری با m مؤلفه‌ی مستقل تشکیل دهنده‌ی آن، اگر طول عمر مؤلفه‌ی i ام دارای توزیع نمایی با میانگین θ_i باشد، پیدا کنید:

الف) تابع نرخ خرابی سیستم

ب) توزیع طول عمر سیستم

ج) میانگین زمان خرابی سیستم

د) در حالتیکه $m = ۵$ و $\theta = ۱$ (سال) باشد شاخص‌های بالا را بدست آورید.

حل

$X_i:$ طول عمر مؤلفه‌ی i ام $\qquad i=1,\dots,m$

$$X_i \sim Exp(\theta_i), \quad \Longrightarrow \quad f_i(x)=f_{X_i}(x)=\frac{1}{\theta_i}e^{-\frac{x}{\theta_i}}, \quad x>0$$

نرخ خرابی X_i (نرخ خرابی مؤلفه‌ی i ام):

$$h_i(x)=\frac{f_i(x)}{1-F_i(x)}=\frac{\frac{1}{\theta_i}e^{-\frac{x}{\theta_i}}}{1-(1-e^{-\frac{x}{\theta_i}})}=\frac{1}{\theta_i}\Longrightarrow h_i(x)=\frac{1}{\theta_i}, \quad i=1,\dots,m$$

الف) نرخ خرابی سیستم (سری):

$$h_{sys}(t)=\sum_{i=1}^{m}h_i(t)=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\theta_i}=\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}+\dots+\frac{1}{\theta_m}=c$$

حل

ب) توزیع طول عمر سیستم (تابع توزیع یا تابع چگالی):

طول عمر سیستم:

$$X = \min(X_1, \ldots, X_m)$$

داریم

$$\begin{aligned} F_{sys}(t) &= 1 - e^{-\int_0^t h_{sys}(x)\,dx} \\ &= 1 - e^{-\int_0^t c\,dx} = 1 - e^{-cx}\Big|_0^t = 1 - e^{-ct} \\ \Longrightarrow F_{sys}(t) &= 1 - e^{-ct}, \quad t > 0 \quad \Longrightarrow X \sim Exp(\frac{1}{c}) \end{aligned}$$

ج)

$$E(X) = \frac{1}{c} = \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} + \cdots + \frac{1}{\theta_m}}$$

حال اگر $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_m = \theta$ آنگاه

$$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta} + \cdots + \frac{1}{\theta}} = \frac{1}{\frac{m}{\theta}} = \frac{\theta}{m}$$

حل

د) اگر $m = ۵$ و $\theta = ۱$ آنگاه

$$c = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} h_{sysy}(t) = ۵ \\ F_{sysy}(t) = ۱ - e^{-۵t}, & t > ۰ \\ E(X) = \frac{۱}{۵} \end{cases}$$

روش دوم: تابع توزیع طول عمر سیستم یعنی تابع توزیع $X = \min(X_1, \ldots, X_m)$ را می‌توان مستقیما و بدون استفاده از تابع نرخ خرابی سیستم پیدا کرد. از آنجایی که

$$F_X(x) = 1 - \prod_{i=1}^{m}[1 - F_{X_i}(x)]$$

لذا

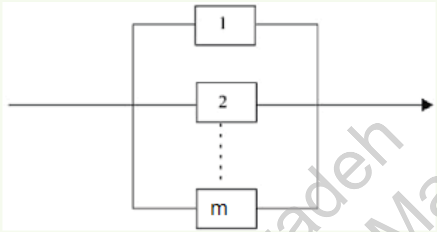
$$F_X(t) = 1 - \prod_{i=1}^{m}[1 - (1 - e^{-\frac{t}{\theta_i}})]$$

$$= 1 - e^{-\frac{t}{\theta_1}} e^{-\frac{t}{\theta_2}} \ldots e^{-\frac{t}{\theta_m}}$$

$$= 1 - e^{-t(\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}+\cdots+\frac{1}{\theta_m})} = 1 - e^{-ct}, \quad \Longrightarrow \quad \boxed{F_X(t) = 1 - e^{-ct}, \quad t > 0}$$

قابلیت اعتماد سیستم‌های موازی

یک سیستم موازی با m مؤلفه مستقل را به‌صورت زیر درنظر بگیرید. اگر طول عمر مؤلفه i ام X_i باشد در آن صورت طول عمر سیستم موازی زیر می‌شود: $X = \max(X_1, \ldots, X_m)$.



تابع توزیع طول عمر سیستم موازی:

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= P(X \le x) = P[\max(X_1, \ldots, X_m) \le x] \\
&= P[X_1 \le x,\ X_2 \le x, \ldots, X_m \le x] \\
(\text{مستقل بودن}) &= P(X_1 \le x)\, P(X_2 \le x) \ldots P(X_m \le x) \\
&= F_1(x)\, F_2(x) \ldots F_m(x) = \prod_{i=1}^{m} F_i(x) \implies \boxed{F_X(x) = \prod_{i=1}^{m} F_i(x) \quad (F_i(x) = F_{X_i}(x))}
\end{aligned}$$

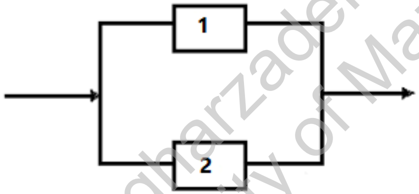
دانشگاه مازندران

تابع قابلیت اعتماد سیستم موازی:

$$R_X(x) = 1 - F_X(x) = 1 - \prod_{i=1}^{m} F_i(x) = 1 - \prod_{i=1}^{m}[1 - R_i(x)] \implies \boxed{R_{sys}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{m}[1 - R_i(t)]}$$

مثال

در سیستم زیر اگر $R_1(1) = 0.9$ و $R_2(1) = 0.7$ آنگاه با چه احتمالی این سیستم تا یک سال سر پا است؟



حل

$$R_{sys}(1) = 1 - (1 - R_1(1))\,(1 - R_2(1)) = 1 - (1 - 0.7)\,(1 - 0.9) = 0.97$$

احتمال کارکرد سیستم موازی: اگر احتمال درست کار کردن مؤلفه i ام در یک سیستم موازی با m مؤلفه مستقل برابر P_i باشد، در آنصورت احتمال اینکه این سیستم درست کار کند می‌شود:

$$\begin{aligned} P(\text{سیستم موازی درست کار کند}) &= ۱ - P(\text{سیستم موازی درست کار نکند}) \\ &= ۱ - P(\text{هیچکدام از مؤلفه‌های سیستم درست کار نکند}) \\ &= ۱ - (۱ - P_۱)(۱ - P_۲)\ldots(۱ - P_m) \\ &= ۱ - \prod_{i=۱}^{m}[۱ - P_i] \implies \boxed{P = ۱ - \prod_{i=۱}^{m}[۱ - P_i]} \end{aligned}$$

مثال

در یک سیستم موازی با m مؤلفه مستقل اگر طول عمر مؤلفه i ام یعنی X_i دارای توزیع نمایی با پارامتر θ_i باشد:

الف) قابلیت اعتماد سیستم را در زمان مشخص t بیابید.

ب) در حالت خاص که $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_m = \theta$ باشد، قابلیت اعتماد سیستم و نیز تابع توزیع سیستم را بیابید.

ج) میانگین طول عمر سیستم را پیدا کنید.

حل

الف) $$f_i(x) = \frac{1}{\theta_i} e^{-\frac{x}{\theta_i}}, \qquad x > 0, \quad \theta_i > 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$R_{sys}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{m} [1 - R_i(t)]$$

$$R_i(t) = 1 - F_i(t) = e^{-\frac{t}{\theta_i}} \quad \Longrightarrow \boxed{R_{sys}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{m} [1 - e^{-\frac{t}{\theta_i}}]}$$

حل

ب) $\theta_۱ = \theta_۲ = \cdots = \theta_m = \theta$

$$R_{sys}(t) = ۱ - \prod_{i=۱}^{m} [۱ - e^{-\frac{t}{\theta_i}}] = ۱ - [۱ - e^{-\frac{t}{\theta}}]^m$$

$$F_{sys}(t) = ۱ - R_{sys}(t) = [۱ - e^{-\frac{t}{\theta}}]^m, \quad t > ۰,\ \theta > ۰$$ (توزیع نمایی تعمیم یافته)

ج) T : طول عمر سیستم، $\quad T = \max(T_۱, \ldots, T_m) \quad$ (T_i : طول عمر مؤلفه i ام)

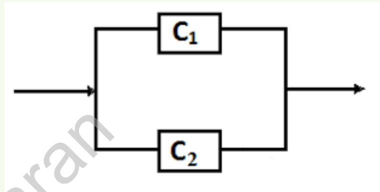
$T \sim F_{sys}(t)$ $\qquad$ T دارای توزیع نمایی تعمیم یافته است

$$E(T) = \int_۰^\infty R_{sys}(t)\, dt = \int_۰^\infty \left(۱ - [۱ - e^{-\frac{t}{\theta}}]^m\right) dt$$

یا

$$E(T) = \int_۰^\infty f\, f_{sys}(t)\, dt = \int_۰^\infty t\, \frac{m}{\theta}\, e^{-\frac{t}{\theta}} [۱ - e^{-\frac{t}{\theta}}]^{m-۱}\, dt$$

تابع نرخ خرابی یک سیستم موازی متشکل از دو مؤلفه مستقل



$T_1 =$ طول عمر مؤله اول $T_2 =$ طول عمر مؤلفه دوم

$T = \max(T_1, T_2)$ طول عمر سیستم

$F_T(t) = F_1(t)\, F_2(t)$ (F_i : تابع توزیع طول عمر مؤلفه i ام)

در حالت خاص که T_1 و T_2 هم‌توزیع باشند یعنی $F_1(t) = F_2(t) = F(t)$ داریم:

$$F_T(t) = F(t)\, F(t) = [F(t)]^2$$

تابع چگالی طول عمر سیستم:

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = 2\, f(t)\, F(t) \implies \boxed{f_T(t) = 2\, f(t)\, F(t)}$$

تابع نرخ خرابی سیستم:

$$h_T(t) = \frac{f_T(t)}{1 - F_t(t)} = \frac{2\, f(t)\, F(t)}{1 - F^2(t)} = \frac{2\, f(t)\, F(t)}{[1 - F(t)]\,[1 + F(t)]} = \frac{2\, f(t)}{1 - F(t)} \, \frac{F(t)}{1 + F(t)}$$

$$= 2\, h(t)\, \frac{F(t)}{1 + F(t)} \implies \boxed{h_T(t) = 2\, h(t)\, \frac{F(t)}{1 + F(t)}} \quad \text{یا} \quad \boxed{h_{sys}(t) = 2\, h(t)\, \frac{F(t)}{1 + F(t)} \;\star}$$

که $h_1(t) = h_2(t) = h(t)$. از طرفی چون $\frac{2\,F(t)}{1+F(t)} \le 1$

$$\Big(\frac{2\,F(t)}{1+F(t)} \le 1 \;\Leftrightarrow\; 2\,F(t) \le 1 + F(t) \Leftrightarrow 2F(t) - F(t) \le 1 \;\Leftrightarrow\; F(t) \le 1\Big)$$

نتیجه می‌شود

$$h_{sys}(t) = h(t)\,\frac{2\,F(t)}{1+F(t)} \le h(t) \quad \Longrightarrow \boxed{h_{sys}(t) \le h(t)}$$

یعنی نرخ خرابی یک سیستم موازی از نرخ خرابی تک تک مؤلفه‌هایش کمتر است.

کار تحقیقی: مسئله فوق را در حالتی بررسی کنید که سیستم موازی از m مؤلفه تشکیل شود که مؤلفه‌ها مستقل باشند ولی هم‌توزیع نباشند.

تذکر

از رابطه $\star$ توجه کنید که داریم:

$$h_{sys}(\infty) = 2\,h(\infty)\frac{F(\infty)}{1+F(\infty)} = 2\,h(\infty)\frac{1}{1+1} = h(\infty) \quad \Longrightarrow h_{sys}(\infty) = h(\infty)$$