صفحه ۱

$\boxed{1972}$

درس آنالیز محدب — نسیم تقوی

اثر R. Tyrrell Rockafellar

حدوداً تا صفحه ۴۳ کتاب

فصل اول

بخش اول — مجموعه های آفین

همه عناصر از R^n گرفته می‌شود، مگر اینکه مشخص شود از چه فضایی است.

ضرب داخلی دو عنصر x و x^* از R^n بصورت ضرب داخلی زیر معرفی می‌شود

$$\langle x, x^* \rangle = \xi_1\xi_1^* + \dots + \xi_n\xi_n^*, \qquad x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$$

نماد A را برای ماتریس حقیقی $m\times n$ استفاده می‌کنیم و متناظر آن تبدیل خطی $x\to Ax$ از R^n به R^m را داریم. ماتریس ترانهاده (Transpose) و الحاقی ماتریس A از R^m به R^n بصورت A^* نشان می‌دهیم و در تساوی زیر صدق می‌کند

$$\langle Ax, y^* \rangle = \langle x, A^*y^* \rangle$$

اگر x و y دو نقطه متفاوت از R^n باشند، مجموعه نقاط به شکل

$$(1-\lambda)x+\lambda y = x+\lambda(y-x), \qquad \lambda\in R$$

را ~~خط مار بین~~ خط عبوری از دو نقطه x و y می‌نامیم. یک مجموعه M از R^n را مجموعه آفین affine Set می‌نامیم که برای هر $x,y\in M$ و $\lambda\in R$، داشته باشیم $(1-\lambda)x+\lambda y\in M$.

(نویسنده های دیگر، واژه های هم معنی دیگر را برای مجموعه آفین در نظر گرفته‌اند، مانند منیفلد آفین، آفین چندجور، (affine variety)، چندجور خطی (Linear variety))

مجموعه $\emptyset$ تهی از R^n یک مجموعه آفین بدیهی است. همچنین اگر M فقط شامل یک نقطه تنها باشد، باز آفین است.

بطور کلی یک مجموعه آفین باید برای هر دو نقطه متفاوت، ~~~~ شامل خط عبوری از دو نقطه را ~~~~ باشد. برای دید شهودی مانند خط، صفحه این چنین هستند.

یک ~~~~ هندسه ~~~~ از مجموعه های آفین می‌تواند از فضاهای جبر خطی (حاصل زیرفضا های

جلسه ۲

از R^n شکل پیدا کند. یک وابستگی دقیق بین مجموعه های آفین و زیرفضاها بوسیله دو قضیه زیر توصیف شده است.

قضیه 1.1 زیرفضاهای R^n، مجموعه های آفینی هستند که شامل نقطه صفر (مبدأ) می باشند.

اثبات. بدیهی است که هر زیرفضا شامل مبدأ هست و تحت جمع و ضرب اسکالر بسته می باشد بدین ترتیب مجموعه آفین خواهد بود.
برعکس فرض کنید M یک مجموعه آفین شامل صفر باشد. برای هر $x\in M$ و $\lambda\in R$، داریم

$$\lambda x = (1-\lambda)0+\lambda x\in M$$

پس M نسبت به ضرب اسکالر بسته هست. حال اگر $x\in M$, $y\in M$، داریم

$$\frac{1}{2}(x+y)=\frac{1}{2}x+(1-\frac{1}{2})y\in M$$

بنابراین $x+y\in M$. بنابراین M زیرفضا است.

تعریف انتقال: برای $M\subset R^n$، $a\in R^n$، انتقال M را تحت a با مجموعه زیر توصیف می کنیم:

$$M+a=\{x+a \mid x\in M\}.$$

می توان به سادگی نشان داد که انتقال از یک مجموعه آفین، یک مجموعه آفین است.

تعریف (موازی بودن یک مجموعه آفین با آفین دیگر) یک مجموعه آفین M موازی با مجموعه آفین L است، اگر که برای بعضی از a ها، $M=L+a$.

(دسته های هم ارزی موازی) رابطه M موازی با L یک رابطه هم ارزی بین زیرمجموعه های آفین از R^n است.

تعریف موازی بودن خیلی محدود شده، بطوریکه شخص می تواند این ایده را بپذیرد که یک خط می تواند با صفحه موازی باشد. فقط مقید است موازی بودن را برای یک خط با خط یا صفحه با صفحه ...

صفحه ۳

قضیه ۲.۰۱. هر مجموعه آفین غیرخالی M موازی با یک زیرفضای L است، که این زیرفضا به‌طور یکتا تعیین می‌شود.

$$L = M - M = \{x - y \mid x \in M,\ y \in M\}$$

دو زیرفضای

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که M با دو زیرفضا نمی‌تواند موازی باشد. فرض کنید L_1 و L_2 با M موازی باشند. بنابراین با هم نیز موازی هستند. یعنی برای بعضی از a ها $L_2 = L_1 + a$. چونکه $0 \in L_2$، پس $-a \in L_1$ است. پس $a \in L_1$. پس $L_1 \supset L_1 + a = L_2$. به روش مشابه می‌توان نتیجه گرفت که $L_2 \supset L_1$. پس $L_1 = L_2$. این موضوع یکتایی را نشان می‌دهد.

حال برای هر $y \in M$، $M - y = M + (-y)$ یک انتقال M است و شامل نقطه صفر. با توجه به قضیه ۱.۱ این مجموعه آفین یک زیرفضای یکتا L است. پس $L = M - y$، از طرفی L با M موازی است. حال y چون دلخواه است، لذا برای هر موضوع می‌توان نتیجه گرفت $L = M - M$، چون برای هر y_1, y_2، $M - y_2 = L = M - y_1$، لذا

$$L = \{M - y \ ;\ y \in M\} = M - M$$

(بعد یک آفین) بعد یک مجموعه آفین غیرخالی برابر بعد زیرفضای موازی با آن است. بنابراین مجموعه‌های آفین با بعد ۰، ۱ و ۲ به ترتیب نقاط، خطوط و صفحات هستند.

(ابرصفحه) یک مجموعه آفین $(n-1)$-بعدی در R^n را ابرصفحه می‌نامیم.

ابرصفحه‌ها خیلی مهم هستند، زیرا آنها نقش دوگان نسبت به نقاط در هندسه n بعدی را دارند.

ابرصفحه‌ها و مجموعه‌های آفین بوسیله توابع خطی و معادلات خطی قابل نمایش دادن می‌باشند.

این موضوع از روابط تعامد در R^n قابل حصول می‌باشد. فرض شود که $x \perp y$ هرگاه $\langle x, y \rangle = 0$.

هرگاه L زیرفضایی از R^n باشد، مجموعه بردارهای x که $x \perp L$ یعنی برای هر $y \in L$، $x \perp y$، را مکمل متعامد L می‌نامیم، که زیرفضای دیگر خواهد بود و با $L^\perp$ نشان می‌دهیم.

و داریم

$$\dim L + \dim L^\perp = n$$

اثبات مکمل متعامد $L^\perp$ یعنی $(L^\perp)^\perp$ برابر L است.

هرگاه b_1، b_2، ... b_m یک پایه برای M باشد، در این صورت $x\perp M$ معادل $x\perp b_1$، $x\perp b_2$، ... و $x\perp b_m$. بنابراین زیرفضای $n-1$ بعدی از R^n مکمل متعامد زیرفضای یک بعدی است که آنها زیرفضاهایی می‌باشند که پایه آنها تنها یک بردار غیرصفر b است (بقیه شامل این معرفی از آن هستند)

پس زیرفضاهای با بعد $n-1$، مجموعه‌هایی هستند به صورت $\{x \mid x\perp b\}$ با $b\neq 0$.

ابرصفحه‌ها با این ترتیب معین می‌شوند. اما

$$\{x \mid x\perp b\}+a=\{x+a \mid \langle x,b\rangle=0\}$$

$$=\{y \mid \langle y-a,b\rangle=0\}=\{y \mid \langle y,b\rangle=\beta\}$$

که $\beta=\langle a,b\rangle$. این موضوع می‌تواند برای دسته‌بندی ابرصفحه‌ها مناسب باشد.

قضیه ۱.۳. با ارائه $\beta\in R$ و یک بردار غیرصفر $b\in R^n$، مجموعه

$$H=\{x \mid \langle x,b\rangle=\beta\}$$

یک ابرصفحه از R^n است. علاوه هر ابرصفحه در R^n به این شکل نمایش داده خواهد شد که با یک β و b یکتاست.

۱.۲ ابتدا بردار نرمال بر سطح به عنوان مثال برای آنهایی که ابرصفحه مواجه شود

در این قضیه بردار b را برای ابرصفحه H نرمال می‌نامیم. هر بردار نرمال برای ابرصفحه، مضرب مثبت یا منفی b است.

در قضیه بعد مجموعه‌های آفین در R^n را با جواب‌های دستگاه معادلات از معادلات خطی n متغیره دسته‌بندی می‌کنیم.

قضیه ۱.۴. با ارائه $b\in R^m$ و ماتریس B $m\times n$، مجموعه

$$M=\{x\in R^n \mid Bx=b\}$$

یک مجموعه آفین در R^n است. علاوه هر مجموعه آفین چنین نمایشی را دارد.

اثبات. اگر x و y عضوهایی از M باشند و $\lambda\in R$، فرض کنید $z=(1-\lambda)x+\lambda y$

داریم $Bz=(1-\lambda)Bx+\lambda By=(1-\lambda)b+\lambda b=b$

بنابراین M یک مجموعه آفین است.

بالعکس یک مجموعه آفین غیرخالی M در R^n را در نظر بگیرید که غیرتهی باشد. فرض کنید L زیرفضای موازی M است. همچنین $b_1, b_2, \dots, b_m$ پایه‌ای از زیرفضای $L^\perp$ را در نظر بگیرید.

پس

$$L=(L^\perp)^\perp=\{x;\ x\perp b_1, x\perp b_2,\dots, x\perp b_m\}$$
$$=\{x,\ \langle x,b_i\rangle=0,\ i=1,2,\dots,m\}$$
$$=\{x,\ Bx=0\}$$

که B یک ماتریس $m\times n$ است که سطرهای آن $b_1, b_2, \dots, b_m$ می‌باشد.

چون M موازی L است، پس $a\in R^n$ وجود دارد

$$M=L+a=\{x;\ B(x-a)=0\}$$

زیرا

$$M=L+a=\{x;\ Bx=0\}+a=\{x+a;\ Bx=0\}$$
$$=\{y;\ B(y-a)=0\},\quad y=x+a,\ x=y-a$$

حال اگر $b=Ba$، پس

$$M=\{y;\ B(y-a)=0\}=\{y;\ By=Ba=b\}$$

بدین ترتیب مجموعه‌های آفین R^n، $\emptyset$ هستند با توجه به قضیه فوق با یک ماتریس صفر خاص داده شوند به شرطی که برای حالت آفین R^n، $b=0$ در نظر بگیریم و برای آفین $\emptyset$، $b\neq 0$ باشد.

به کمک قضیه بالا (صفحه قبل) داریم

$$M=\{x;\ \langle x,b_i\rangle=\beta_i,\ i=1,2,\dots,m\}$$
$$=\bigcap_{i=1}^{m} H_i$$

که b_iها سطرهای ماتریس B هستند و β_i مؤلفه‌های b می‌باشند.

$$H_i=\{x;\ \langle x,b_i\rangle=\beta_i\}$$

که برای $b_i\neq 0$، هر یک از H_iها ابرصفحه هستند یا اگر $b_i=0$، $\beta_i\neq 0$ خالی می‌باشند و اگر $0=b_i$، $\beta_i=0$، برابر R^n می‌شوند.

جلسه ۲

شبیه این نتیجه زیر را داریم

نتیجه ۱.۲.۱. هر زیرمجموعه آفین R^n بصورت اشتراک متناهی از ابرصفحه‌ها است.

مجموعه آفین M در قضیه ۲.۰ می‌تواند بوسیله بردارهای ستونی b_1'، b_2'، ... و b_n' از ماتریس B بصورت زیر نمایش داده شود.

$$M=\{x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) \mid \xi_1 b_1'+\cdots+\xi_n b_n'=b\}$$

بسادگی، اشتراک هر تعداد از مجموعه‌های آفین، آفین خواهد بود. بنابراین برای $S\subset R^n$ یک کوچکترین مجموعه آفین یکتا، شامل S وجود دارد. (آن را اشتراک همه مجموعه‌های آفین مانند M که $S\subset M$، می‌نامیم). آن را پوش آفین S می‌نامیم و می‌نویسیم $\operatorname{aff} S$. این به عنوان تمرین قابل اثبات است که $\operatorname{aff} S$ شامل همه بردارهایی به شکل $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_mx_m$ که $x_i\in S$ و $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m=1$، نشان داده. (در حقیقت بعداً اثبات می‌شود)

تعریف (مستقل بودن آفینی) $m+1$ عنصر $b_0, b_1, \ldots, b_m$ را مستقل آفینی می‌نامیم که $\operatorname{aff}\{b_0,b_1,\ldots,b_m\}$، مجموعه m بعدی باشد. البته

$$\operatorname{aff}\{b_0,b_1,\ldots,b_m\}=L+b_0$$

که $L=\operatorname{aff}\{0,b_1-b_0,\ldots,b_m-b_0\}$

با توجه به قضیه ۱.۱. L همان کوچکترین زیرفضای شامل عناصر b_1-b_0، b_2-b_0، ...، b_m-b_0 است. بعد آن m است اگر و فقط اگر بردارها مستقل خطی باشند. پس $b_0, b_1, \ldots, b_m$ مستقل آفینی هستند اگر و فقط اگر $b_1-b_0, b_2-b_0, \ldots, b_m-b_0$ مستقل خطی باشند.

همه مفاهیم در حقیقت استقلال خطی می‌توانند برای مستقل بودن آفینی با روش سازگار ترجمه شوند. برای مثال مجموعه مستقل آفینی $m+1$ نقطه‌ای از R^n می‌توانند به یک مجموعه مستقل آفینی با $n+1$ نقطه توسعه داده شود.

یک مجموعه آفین m-بعدی M می‌تواند به عنوان پوش آفین $m+1$ نقطه‌ای در نظر گرفته شود.

صفحه ۷

توجه شود که که $M=\text{aff}\{b_0,b_1,\dots,b_m\}$، بردارهای زیرفضای موازی با M به صورت ترکیب خطی از b_1-b_0، ...، و b_m-b_0 می‌باشند.

بردارهای M بنابراین به فرم زیر قابل نمایش داده می‌شوند

$$x=\lambda_1(b_1-b_0)+\dots+\lambda_m(b_m-b_0)+b_0$$

یعنی به شکل

$$x=\lambda_0 b_0+\lambda_1 b_1+\dots+\lambda_m b_m,\quad \lambda_0+\lambda_1+\dots+\lambda_m=1$$

ضرایب این نمایش یکتاست اگر و فقط اگر b_0، b_1، ... و b_m به صورت مستقل آفینی باشند.

در این موضوع λ_0، λ_1، ... λ_m به عنوان پارامتر، سیستم مختصات بارگرینتریک
Barycentric coordinate system
برای M را توصیف می‌کند.

یک نگاشت تک مقداری $T: x\to Tx$ از R^n به R^m را تبدیل آفینی می‌نامیم هرگاه

$$T((1-\lambda)x+\lambda y)=(1-\lambda)Tx+\lambda Ty$$

برای هر x و y در R^n و $\lambda\in R$ برقرار باشد.

قضیه ۱.۵. تبدیلات آفینی از R^n به R^m، تبدیلاتی هستند مانند T به شکل $Tx=Ax+a$، که A یک تبدیل خطی است و $a\in R^m$.

اثبات. اگر T آفینی باشد، فرض کنید $a=T0$ و فرض کنید $Ax=Tx-a$. در این صورت A یک تبدیل آفینی است که $A0=0$. با یک استدلال ساده مشابه قضیه ۱.۱ A در واقع خطی است.

برعکس اگر $Tx=Ax+a$ که A فرض شود خطی است. در این صورت

$$T((1-\lambda)x+\lambda y)=(1-\lambda)Ax+\lambda Ay+a=(1-\lambda)Tx+\lambda Ty$$

بنابراین T آفینی است.

تذکر: هرگاه معکوس یک تبدیل آفینی وجود داشته باشد، نیز آفینی است.

به عنوان یک نمونه شخص می‌تواند بررسی کند که برای هر مجموعه آفینی M در R^n و اگر تبدیل آفینی T از R^n به R^m را داشته باشیم آنگاه مجموعه تصویر

$TM=\{Tx,\ x\in M\}$ یک مجموعه آفین در R^m است.

بویژه اینکه تبدیل آفین پوش آفین را حفظ می‌کند یعنی

$$aff(TS)=T(aff\,S)$$

می‌دانیم که $T(aff\,S)$ یک مجموعه آفین است که شامل TS است. پس

$$aff(TS)\subset T(aff\,S)$$

زیرا $aff(TS)$ کوچکترین مجموعه آفین شامل TS است. حال برعکس

$$y\in T(aff\,S)\Rightarrow \exists x\in aff\,S,\ Tx=y$$

فرض کنید $S=\{b_0,b_1,\dots,b_m\}$ بنابراین وجود دارند $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m$

$$x=\lambda_0 b_0+\lambda_1 b_1+\dots+\lambda_m b_m,\qquad \lambda_0+\lambda_1+\dots+\lambda_m=1$$

$$=\lambda_1(b_1-b_0)+\dots+\lambda_m(b_m-b_0)+b_0$$

$$Tx=Ax+a,\quad T0=a$$

$$Tx=\lambda_1 A(b_1-b_0)+\dots+\lambda_m A(b_m-b_0)+Ab_0+a$$

$$=\lambda_1 Ab_1+\lambda_2 Ab_2+\dots+\lambda_m Ab_m+a$$

$$-\lambda_1 Ab_0-\lambda_2 Ab_0-\dots-\lambda_m Ab_0+Ab_0+a$$

$$=\lambda_0 Ab_0+\lambda_1 Ab_1+\dots+\lambda_m Ab_m+a$$

$$=\lambda_0(Ab_0+a)+\lambda_1(Ab_1+a)+\dots+\lambda_m(Ab_m+a)$$

$$=\lambda_0 Tb_0+\lambda_1 Tb_1+\dots+\lambda_m Tb_m$$

یعنی $y\in aff(TS)$، و اثبات کامل است.

قضیه ۱.۶. فرض کنید $\{b_0,b_1,\dots,b_m\}$ و $\{b'_0,b'_1,\dots,b'_m\}$ مجموعه‌های مستقل آفینی در R^n باشند. در این صورت یک تبدیل آفین یک به یک T از R^n به خودش وجود دارد که برای هر $i=0,1,\dots,m$، $Tb_i=b'_i$. اگر $m=n$ آنگاه T یکتا است.

اثبات، مانند مفاهیم موجود در جبر خطی، وجود دارد یک تبدیل خطی یک‌به‌یک پوشای مانند A از R^n به طوری که پایه $b_1-b_0, \dots, b_n-b_0$ از R^n را به پایه $b'_1-b'_0, \dots, b'_m-b_0$ انتقال می‌دهد. تبدیل آفین مورد انتظار بوسیله رابطه $Tx=Ax+a$ که $a=b'_0-Ab_0$ حاصل می‌شود. ●

نتیجه ۱.۶.۱ فرض کنید M_1 و M_2 دو مجموعه آفین دلخواه از R^n و هم‌بعد باشند. در اینصورت یک تبدیل آفین یک‌به‌یک T از R^n به طوری که $TM_1=M_2$ وجود دارد.

اثبات. هر مجموعه آفین m-بعدی می‌توانند بوسیله یک پوش آفین از یک مجموعه مستقل آفینی m+1 نقطه‌ای شرح داده شود، و ~~...~~ پوش‌های آفینی بوسیله تبدیلات آفینی حفظ می‌شوند. ●

گراف یک تبدیل آفینی از R^n به R^m یک زیرمجموعه آفین از R^{n+m} است. بنابراین گوییم. برای $x\in R^n$، $y\in R^n$ نقطه $z=(x,y)$ که گراف T باشد به این معنی است که نقطه (x,Tx) که $Tx=y$ است که گراف T قرار می‌گیرد. از طرفی

$Tx=Ax+a$

بنابراین $y=Ax+a$، پس $-a=Ax-y$

اگر $a=-b$ بگیریم، $y=Tx=\underbrace{Ax-y}_{B(x,y)}+y+a$ است که $B(x,y)=Ax-y$، بنابراین $B(x,y)=b$

بر اساس خاصیت دستگاه معادلات مجموعه‌های آفین قضیه ۱.۴.۱ (مرجع) می‌توان نتیجه گرفت که گراف یک تبدیل آفین یک مجموعه آفینی است.

بویژه گراف یک تبدیل خطی $x\to Ax$ از R^n به R^m یک مجموعه آفین از R^{n+m} است که شامل مبدأ می‌باشد. و بنابراین زیرفضای L از R^{n+m} است (بر اساس قضیه ۱.۱ مرجع).

برای مکمل متعامد زیرفضای L می‌توان نتیجه گرفت که

$$L^\perp=\{(x^*,y^*) \mid x^*\in R^n,\ y^*\in R^m,\ x^*=-A^*y^*\}$$

یعنی می‌توان نشان داد که $L^\perp$ گراف $-A^*$ است. در حقیقت اگر $z^*=(x^*,y^*)$ در $L^\perp$ باشد، اگر و فقط اگر برای هر $z=(x,y)$ در L با شرط $y=Ax$،

$$0=\langle z,z^*\rangle=\langle x,x^*\rangle+\langle y,y^*\rangle$$

براساس تعریف ضرب داخلی

به عبارتی $(x^*,y^*)\in L^\perp$ اگر و فقط اگر

$$0=\langle x,x^*\rangle+\langle Ax,y^*\rangle=\langle x,x^*\rangle+\langle x,A^*y^*\rangle$$

$= \langle x, x^* + A^* y^* \rangle \quad \forall x \in R^n$

یعنی $x^* + A^* y^* = 0$ یا $x^* = -A^* y^*$

نمایش تاکر (Tucker representation) یک مجموعه آفین در صفحه ۹ کتاب آمده است.

بخش ۲

مجموعه های محدب و مخروطها.

یک زیرمجموعه C از R^n را محدب می نامیم اگر برای هر $x, y \in C$ و $0 < \lambda < 1$ داشته باشیم

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in C.$$

همه مجموعه های آفین (از جمله R^n, $\emptyset$) محدب هستند.

آنچه که مجموعه های محدب را جدا از مجموعه های آفین می سازد، این است که آنها دارای این خاصیت می باشند که برای هر دو نقطه x و y از آنها، شامل تمام نقاط مابین x و y می باشند که بصورت مجموعه

$$\{(1-\lambda)x + \lambda y \mid 0 \le \lambda \le 1\}$$

است. این مجموعه را پاره خط واصل بین x و y نام دارد. (البته پاره خط بسته).

به عنوان مثال در R^3، بیضی و مکعب ها مجموعه های محدب هستند ولی آفین نمی باشند.

نیم صفحه ها، مهمترین مثالها برای مجموعه های محدب می باشند. برای هر بردار غیر صفر $b \in R^n$ و هر $\beta \in R$، مجموعه های زیر را نیم صفحه بسته می نامند

$$\{x;\ \langle x, b\rangle \le \beta\}, \quad \{x;\ \langle x, b\rangle \ge \beta\}$$

و مجموعه های زیر را نیم صفحه های باز می نامند

$$\{x;\ \langle x, b\rangle < \beta\}, \quad \{x;\ \langle x, b\rangle > \beta\}$$

که هر چهار مجموعه، مجموعه محدب می باشند. همه این چهار نیم صفحه ها بستگی به ابرصفحه

$$H = \{x;\ \langle x, b\rangle = \beta\} \qquad (\text{قضیه } 1.3)$$

بستگی دارند. نیم فضاهای باز و بسته متناظر با ابرصفحه های داده شده باشند.

قضیه ۱.۲ اشتراک هر تعداد دلخواه از مجموعه های محدب، محدب هستند.

اثبات، واضح است.

$$= \langle x, x^* + A^* y^* \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

یعنی $x^* + A^* y^* = 0$ یا $x^* = -A^* y^*$

نمایش تاکر (Tucker representation) یک مجموعه آفین در صفحه ۹ کتاب آمده است.

بخش ۲

مجموعه های محدب و مخروطها.

یک زیرمجموعه C از $\mathbb{R}^n$ را محدب می نامیم اگر برای هر $x, y \in C$ و $0 < \lambda < 1$ داشته باشیم

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in C.$$

همه مجموعه های آفین (از جمله $\mathbb{R}^n, \emptyset$) محدب هستند.

آنچه که مجموعه های محدب را جدای از مجموعه های آفین می سازد، این است که آنها دارای این خاصیت می باشند که برای هر دو نقطه x و y از آنها، شامل تمام نقاط مابین x و y می باشد که بصورت مجموعه

$$\{(1-\lambda)x + \lambda y \mid 0 \le \lambda \le 1\}$$

است. این مجموعه را پاره خط واصل بین x و y نام دارد. (البته پاره خط بسته).

به عنوان مثال در $\mathbb{R}^3$، بیضی و مکعب ها مجموعه های محدب هستند ولی آفین نمی باشند.

نیم صفحه ها، مهمترین مثالها برای مجموعه های محدب می باشند. برای هر بردار غیر صفر $b \in \mathbb{R}^n$ و هر $\beta \in \mathbb{R}$، مجموعه های زیر را نیم صفحه بسته می نامند

$$\{x;\ \langle x, b\rangle \le \beta\}, \quad \{x;\ \langle x, b\rangle \ge \beta\}$$

و مجموعه های زیر را نیم صفحه های باز می نامند

$$\{x;\ \langle x, b\rangle < \beta\}, \quad \{x;\ \langle x, b\rangle > \beta\}$$

که هر چهار مجموعه، مجموعه محدب می باشند. همه این چهار نیم صفحه ها یکتا به ابرصفحه

$$H = \{x;\ \langle x, b\rangle = \beta\} \quad (\text{قضیه } 1.3)$$

بستگی دارند. بنابراین نیم فضاهای باز و بسته متناظر با ابرصفحه های داده شده باشند.

قضیه ۱.۲ اشتراک هر تعداد دلخواه از مجموعه های محدب، محدب هستند.

اثبات، واضح است.