صفحه ۱

بسمه تعالی

درس آنالیز محدب

1972

اثر R. Tyrrell

Rockafellar حدوداً تا قسمت ۴ ام کتاب

فصل اول

بخش اول مجموعه های آفین

همه عناصر از R^n گرفته می شود، مگر اینکه مشخص شود از چه فضائی است.

ضرب داخلی دو عنصر x و x^* از R^n بصورت ضرب داخلی زیر معرفی می شود

$$\langle x, x^* \rangle = \xi_1 \xi_1^* + \dots + \xi_n \xi_n^*, \qquad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

نماد A را برای ماتریس حقیقی $m \times n$ استفاده می کنیم و متناظر آن تبدیل خطی $x \to Ax$ از R^n به R^m را داریم. ماتریس ترانهاده (Transpose) و الحاقی ماتریس A از R^n به R^m به صورت A^* نشان می دهیم و در تساوی زیر صدق می کند

$$\langle Ax, y^* \rangle = \langle x, A^* y^* \rangle$$

اگر x و y دو نقطه متفاوت از R^n باشند، مجموعه نقاط به شکل

$$(1-\lambda)x + \lambda y = x + \lambda(y-x), \qquad \lambda \in R$$

را خط عبوری از دو نقطه x و y می نامیم. یک مجموعه M از R^n را مجموعه آفین Set affine می نامیم که برای هر $x, y \in M$ و $\lambda \in R$، داشته باشیم $(1-\lambda)x + \lambda y \in M$.

(نویسنده های دیگر، واژه های هم معنی دیگر را برای مجموعه آفین در نظر می گیرند: "منیفلد آفین"، آفین چندجوره (affine Variety)، چندجوره خطی (Linear Variety))

مجموعه تهی از R^n یک مجموعه آفین بدیهی است. همچنین اگر M فقط شامل یک نقطه تنها باشد، نیز آفین است.

بطور کلی یک مجموعه آفین باید برای هر دو نقطه متفاوت، شامل خط عبوری از دو نقطه را باشد. برای دید شهودی مانند خط و صفحه این چنین هستند.

یک هندسه رسمی از مجموعه های آفین می تواند از قضایای جبر خطی در خصوص زیرفضاهای

از R^n شکل پیدا کند. یک وابستگی دقیق بین مجموعه های آفین و زیرفضاها بوسیله دو قضیه زیر توصیف شده است.

قضیه ۱.۱ زیرفضاهای R^n، مجموعه های آفین هستند که شامل نقطه صفر (مبدأ) می باشند.

اثبات. بدیهی است که هر زیرفضا شامل مبدأ هست و تحت جمع و ضرب اسکالر بسته می باشد بدین ترتیب مجموعه آفین خواهد بود.

برعکس فرض کنید M یک مجموعه آفین شامل صفر باشد. برای هر $x\in M$ و $\lambda\in R$، داریم

$$\lambda x = (1-\lambda)0 + \lambda x \in M$$

پس M نسبت به ضرب اسکالر بسته هست. حال اگر $x\in M$ و $y\in M$، داریم

$$\frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{2}x + (1-\frac{1}{2}).y \in M$$

بنابراین $x+y\in M$. بنابراین M زیرفضا است.

تعریف انتقال: برای $M\subset R^n$ و $a\in R^n$، انتقال M تحت a را با مجموعه زیر تعریف می کنیم.

$$M+a = \{x+a \mid x\in M\}.$$

می توان به سادگی نشان داد که انتقال از یک مجموعه آفین، یک مجموعه آفین است.

تعریف (موازی بودن یک مجموعه آفین با آفین دیگر) یک مجموعه آفین M موازی با مجموعه آفین L است، هرگاه برای بعضی از a ها، $M=L+a$.

(دسته های هم ارزی موازی) رابطه M موازی با L یک رابطه هم ارزی بین زیرمجموعه های آفین از R^n است.

تعریف موازی بودن خیلی محدود شده، بطوری که هر شخصی نمی تواند این ایده را بپذیرد که یک خط می توان با صفحه موازی باشد. فقط مفید است موازی بودن را برای یک خط با خط دیگر در صفحه بدانند.

قضیه ۲.۱. هر مجموعه آفین غیرخالی M موازی با یک زیرفضا L است. که این بنا بصورت زیر ارائه می‌شود

$$L = M - M = \{x - y \mid x \in M,\ y \in M\}$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که M با دو زیرفضا نمی‌تواند موازی باشد. فرض کنید دو زیرفضای L_1 و L_2 با M موازی باشند، بنابراین با هم نیز موازی هستند. یعنی برای بعضی از aها $L_2 = L_1 + a$. چونکه $0 \in L_2$، پس $-a \in L_1$ است پس $a \in L_1$. پس $L_1 \supset L_1 + a = L_2$. به روش مشابه می‌توان نتیجه گرفت که $L_2 \supset L_1$. پس $L_1 = L_2$. این موضوع یکتائی را نشان می‌دهد.

حال برای هر $y \in M$، $M - y = M + (-y)$ یک انتقال M است و شامل نقطه صفر. با توجه به قضیه ۱.۱ این مجموعه آفین یک زیرفضای یکتا L است. پس $L = M - y$. از طرفی L با M موازی است. حال y چون دلخواه است، لذا برای این موضوع می‌توان نتیجه گرفت $L = M - M$، چون برای هر y_1, y_2، $M - y_2 = L = M - y_1$، لذا

$$L = \{M - y;\ y \in M\} = M - M$$

(بعد یک آفین) بعد یک مجموعه آفین غیرخالی، برابر بعدی زیرفضای موازی با آن است. بنابراین مجموعه‌های آفین با بعد ۰، ۱ و ۲ بترتیب نقاط، خطوط و صفحات هستند.

(تعریف ابرصفحه) یک مجموعه آفین $(n-1)$-بعدی در R^n را ابرصفحه می‌نامیم.

ابرصفحه‌ها خیلی مهم هستند، زیرا آنها نقش دوگان نسبت به نقاط در هندسه n بعدی را دارند. ابرصفحه‌ها و مجموعه‌های آفین بوسیله توابع خطی و معادلات خطی قابل نمایش دادن می‌باشند. این موضوع از روابط تعامد در R^n قابل حصول می‌باشد. توجه شود که $x \perp y$ می‌گوئیم اگر $\langle x, y \rangle = 0$. هرگاه L زیرفضائی از R^n باشد، مجموعه بردارهای x که $x \perp L$ (یعنی برای هر $y \in L$، $x \perp y$) را مکمل متعامد L می‌نامیم و با $L^\perp$ نشان می‌دهیم، که زیرفضائی دیگر خواهد بود و نیز

$$\dim L + \dim L^\perp = n$$

از طرفی مکمل متعامد $L^\perp$ یعنی $(L^\perp)^\perp$ برابر L است.

هرگاه $b_1, b_2, \ldots, b_m$ یک پایه برای L باشد. در این صورت $x \perp L$

یعنی $x \perp b_1$، $x \perp b_2$، ... و $x \perp b_m$. بنابراین زیرفضای $n-1$-بعدی از R^n

مکمل متعامد زیرفضای با بعد یک است که آنها زیرفضای L می‌باشند که پایه آنها بردار تنها یک

غیرصفر b است (بقیه عناصر آن مضرب از آن هستند)

پس زیرفضاهای با بعد $n-1$، مجموعه‌هایی هستند به صورت $\{x \mid x \perp b\}$ بر $b \neq 0$.

ابرصفحه‌ها با این ترتیب معین می‌شوند. اما

$$\{x \mid x \perp b\} + a = \{x + a \mid \langle x, b\rangle = 0\}$$

$$= \{y \mid \langle y - a, b\rangle = 0\} = \{y \mid \langle y, b\rangle = \beta\}$$

که $\beta = \langle a, b\rangle$. این موضوع می‌تواند برای دسته‌بندی ابرفضاها مناسب باشد.

قضیه ۳.۱. با ارائه $\beta \in R$ و یک عنصر غیرصفر $b \in R^n$، مجموعه

$$H = \{x \mid \langle x, b\rangle = \beta\}$$

یک ابرصفحه از R^n است. علاوه هر ابرصفحه در R^n به این شکل نمایش داده خواهد شد.

که با یک β و b یکتاست.

۳.۱ ابتدا بردار نرمال بر سطح به عنوان مثال برای نمایش صفحه مطرح شود

در این قضیه بردار b را برای ابرصفحه H نرمال می‌نامیم. هر بردار نرمال برای

ابرصفحه، مضرب مثبت یا منفی یا b است.

در قضیه بعدی مجموعه‌های آفین در R^n را با جواب‌های دستگاه معادلات از معادلات خطی

n متغیره دسته‌بندی می‌نمایند.

قضیه ۴.۱. با ارائه $b \in R^m$ و ماتریس B $m \times n$، مجموعه

$$M = \{x \in R^n \mid Bx = b\}$$

یک مجموعه آفین در R^n است. علاوه هر مجموعه آفین چنین نمایشی را دارد.

اثبات. اگر x و y عضوهایی از M باشند و $\lambda \in R$، فرض کنید $z = (1-\lambda)x + \lambda y$

داریم $Bz = (1-\lambda)Bx + \lambda By = (1-\lambda)b + \lambda b = b$

بنابراین M یک مجموعه آفین است.

با یک مجموعه آفین غیرخالی M شروع می‌کنیم که غیر از R^n باشد، فرض کنید L زیرفضای موازی M است. همچنین $b_1, b_2, \dots, b_m$ پایه زیرفضای $L^\perp$ در نظر گرفته شود.

پس

$$L = (L^\perp)^\perp = \{x;\ x \perp b_1, x \perp b_2, \dots, x \perp b_m\}$$
$$= \{x,\ \langle x, b_i\rangle = 0,\ i = 1, 2, \dots, m\}$$
$$= \{x,\ Bx = 0\}$$

که B یک ماتریس $m \times n$ است که سطرهای آن $b_1, b_2, \dots, b_m$ می‌باشند.

چون M موازی L است، پس $a \in R^n$ وجود دارد که

$$M = L + a = \{x;\ B(x-a) = 0\}$$

زیرا

$$M = L + a = \{x;\ Bx = 0\} + a = \{x + a;\ Bx = 0\}$$
$$= \{y;\ B(y-a) = 0\},$$

$$\begin{cases} y = x + a \\ x = y - a \end{cases}$$

حال اگر $b = Ba$، پس

$$M = \{y;\ B(y-a) = 0\} = \{y;\ By = Ba = b\}$$

بدین ترتیب مجموعه‌های آفین R^n، $\emptyset$ می‌توانند با توجه به قضیه فوق با یک ماتریس صفر نمایش داده شوند به شرطی که برای حالت آفین R^n، $b = 0$ در نظر بگیریم و برای آفین $\emptyset$، $b \neq 0$ باشد.

بر اساس قضیه ۱ (صفحه قبل) داریم

$$M = \{x;\ \langle x, b_i\rangle = \beta_i,\ i = 1, 2, \dots, m\}$$
$$= \bigcap_{i=1}^{m} H_i$$

که b_i ها سطرهای ماتریس B هستند و β_i مؤلفه‌های عنصر b می‌باشند.

$$H_i = \{x;\ \langle x, b_i\rangle = \beta_i\}$$

که برای $b_i \neq 0$، هر یک از H_i ها ابرصفحه هستند یا اگر $b = 0$، $\beta_i \neq 0$ خالی می‌باشند و اگر $b_i = 0$، $\beta_i = 0$، برابر R^n می‌شوند.

بنابراین نتیجه زیر را داریم

نتیجه ۱.۴.۱. هر زیرمجموعه آفین R^n بصورت اشتراک متناهی از ابرصفحه‌ها است.

مجموعه آفین M در قضیه ۱.۴ می‌تواند بوسیله بردارهای ستونی $b'_1, b'_2, \dots, b'_n$ از ماتریس B بصورت زیر نمایش داده شود.

$$M = \{ x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mid \xi_1 b'_1 + \dots + \xi_n b'_n = b \}$$

بسادگی، اشتراک هر تعداد از مجموعه‌های آفین، آفین خواهد بود. بنابراین برای $S \subset R^n$ یک کوچکترین مجموعه آفین یکتا، شامل S وجود دارد. (آن را اشتراک کلیه مجموعه‌های آفین مانند M که $S \subset M$، می‌نامیم). آن را پوشش آفین S می‌نامیم و می‌نویسیم $\operatorname{aff} S$. این به عنوان تمرین قابل اثبات است که $\operatorname{aff} S$ شامل همه بردارهای به شکل $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m$ که $x_i \in S$ و $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1$، نشان داده. (در صفحه بعد اثبات می‌شود)

تعریف (مستقل بودن آفینی) $m+1$ عنصر $b_0, b_1, \dots, b_m$ را مستقل آفینی می‌نامیم که $\operatorname{aff}\{b_0, b_1, \dots, b_m\}$، مجموعه m بعدی باشد. البته

$$\operatorname{aff}\{b_0, b_1, \dots, b_m\} = L + b_0$$

که $L = \operatorname{aff}\{0, b_1 - b_0, \dots, b_m - b_0\}$

با توجه به قضیه ۱.۱، L همان کوچکترین زیرفضای شامل عناصر $b_1 - b_0, b_2 - b_0, \dots, b_m - b_0$ است. بعد آن m است اگر و فقط اگر بردارهای مستقل خطی باشند. یک $b_0, b_1, \dots, b_m$ مستقل آفینی هستند اگر و فقط اگر $b_1 - b_0, b_2 - b_0, \dots, b_m - b_0$ مستقل خطی باشند.

همه مفاهیم در خصوص استقلال خطی می‌تواند برای مستقل بودن آفینی با روش مشابه بیان شود. برای مثال مجموعه مستقل آفینی $m+1$ نقطه‌ای از R^n می‌تواند به یک مجموعه مستقل آفینی با $n+1$ نقطه توسعه داده شود.

یک مجموعه آفین m-بعدی M می‌تواند به عنوان پوشش آفین $m+1$ نقطه‌ای در نظر گرفته شود.

توجه شود که اگر $M = aff\{b_0, b_1, \dots, b_m\}$، بردارهای زیرفضای L موازی با M بصورت ترکیب خطی از $b_1 - b_0$، ... و $b_m - b_0$ می باشند.

بردارهای M بنابراین به فرم زیر قابل نمایش دادن می شوند

$$x = \lambda_1 (b_1 - b_0) + \dots + \lambda_m (b_m - b_0) + b_0$$

یعنی به شکل

$$x = \lambda_0 b_0 + \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m, \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$$

ضرایب این نمایش یکتاست اگر و فقط اگر $b_0, b_1, \dots, b_m$ بصورت مستقل آفینی باشند.

در این صورت $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ بعنوان پارامتر، سیستم مختصات بارسنتریک Banycentric coordinate system برای M را تعریف می کند.

یک نگاشت تک مقداری $T: x \to Tx$ از R^n به R^m را تبدیل آفینی می نامیم هرگاه

$$T((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)Tx + \lambda Ty$$

برای هر x و y در R^n و $\lambda \in R$ برقرار باشد.

قضیه ۱.۵. تبدیلات آفینی از R^n به R^m، تبدیلاتی هستند مانند T به شکل $Tx = Ax + a$، که A یک تبدیل خطی است و $a \in R^m$.

اثبات. اگر T آفینی باشد، فرض کنید $a = T0$ و فرض کنید $Ax = Tx - a$. در این صورت A یک تبدیل آفینی است که $A0 = 0$. با یک استدلال ساده نشان قضیه ۱.۱ A در واقع خطی است.

برعکس اگر $Tx = Ax + a$ که A فرض شود خطی است. در این صورت

$$T((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)Ax + \lambda Ay + a = (1-\lambda)Tx + \lambda Ty$$

بنابراین T آفینی است.

تذکر: هرگاه مکمل یک تبدیل آفینی وجود داشته باشد، نیز آفینی است.

به عنوان یک تمرین شخص می تواند بررسی کند که برای هر مجموعه آفینی M در R^n اگر تبدیل آفینی T از R^n به R^m را داشته باشیم آنگاه مجموعه تصویر

$TM=\{Tx,\ x\in M\}$ یک مجموعه آفین در R^m است.

بویژه اینکه تبدیل آفین پوش آفین را حفظ می‌کند یعنی

$$aff(TS)=T(aff\,S)$$

می‌دانیم که $T(aff\,S)$ یک مجموعه آفین است که شامل TS است. پس

$$aff(TS)\subset T(aff\,S)$$

زیرا $aff(TS)$ کوچکترین مجموعه آفین شامل TS است. حال برعکس

$$y\in T(aff\,S)\Rightarrow \exists x\in aff\,S,\ Tx=y$$

فرض کنید $S=\{b_0,b_1,\dots,b_m\}$ دارای صورت وجود دارد $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m$

$$x=\lambda_0 b_0+\lambda_1 b_1+\dots+\lambda_m b_m,\quad \lambda_0+\lambda_1+\dots+\lambda_m=1$$

$$=\lambda_1(b_1-b_0)+\dots+\lambda_m(b_m-b_0)+b_0$$

$$Tx=Ax+a,\quad T0=a$$

$$Tx=\lambda_1 A(b_1-b_0)+\dots+\lambda_m A(b_m-b_0)+Ab_0+a$$

$$=\lambda_1 Ab_1+\lambda_2 Ab_2+\dots+\lambda_m Ab_m+a$$

$$-\lambda_1 Ab_0-\lambda_2 Ab_0-\dots-\lambda_m Ab_0+Ab_0+a$$

$$=\lambda_0 Ab_0+\lambda_1 Ab_1+\dots+\lambda_m Ab_m+a$$

$$=\lambda_0(Ab_0+a)+\lambda_1(Ab_1+a)+\dots+\lambda_m(Ab_m+a)$$

$$=\lambda_0 Tb_0+\lambda_1 Tb_1+\dots+\lambda_m Tb_m$$

یعنی $y\in aff(TS)$ و اثبات تمام

قضیه ۱.۶. فرض کنید $\{b_0,b_1,\dots,b_m\}$ و $\{b'_0,b'_1,\dots,b'_m\}$ مجموعه‌های مستقل آفینی در R^n باشند. در این صورت یک تبدیل آفین یک به یک T از R^n به خودش وجود دارد که برای هر $i=0,1,\dots,m$، $Tb_i=b'_i$. اگر $m=n$ آنگاه T یکتا است.

اثبات: همانند مفاهیم موجود در جبر خطی، وجود دارد یک تبدیل خطی یک به یک یکتایی مانند A از R^n به خودش که پایه b_1-b_0، ... و b_n-b_0 از R^n را به پایه $b'_1-b'_0$، ... و b'_m-b_0 انتقال می‌دهد. تبدیل آفین مورد انتظار بوسیله رابطه $Tx=Ax+a$ که $a=b'_0-Ab_0$ حاصل می‌شود. ●

نتیجه ۱.۶.۱ فرض کنید M_1 و M_2 دو مجموعه آفین دلخواه از R^n و هم بعد باشند. در اینصورت یک تبدیل آفین یک به یک T از R^n به خودش وجود دارد که $TM_1=M_2$

اثبات: هر مجموعه آفین m-بعدی می‌تواند بوسیله یک پوش آفین از یک مجموعه مستقل آفینی $m+1$ نقطه‌ای شرح داده شود و ~~پوشش‌های~~ پوش‌های آفینی بوسیله تبدیلات آفینی حفظ می‌شوند. ●

گراف یک تبدیل آفینی از R^n به R^m یک زیرمجموعه آفین از R^{n+m} است. بنابراین هرگاه برای $x\in R^n$، $y\in R^n$، نقطه $z=(x,y)$ در گراف T باشد، بدان معنی است که نقطه (x,Tx) که $Tx=y$ است در گراف T قرار می‌گیرد. از طرفی

$Tx=Ax+a$

بنابراین $y=Ax+a$، پس $-a=Ax-y$

اگر $-b=a$ بگیریم، $y=Tx=\underset{B(x,y)}{\cancel{Bx}}+y+a$ است که $B(x,y)=Ax-y$، بنابراین $B(x,y)=b$

بر اساس نمایش دستگاه معادلاتی مجموعه‌های آفین قضیه ۱.۴ (ص ۴) می‌توان نتیجه گرفت که گراف یک تبدیل آفین یک مجموعه آفین است.

بویژه گراف یک تبدیل خطی $x\to Ax$ از R^n به R^m یک مجموعه آفین از R^{n+m} است که شامل مبدأ می‌باشد. و بنابراین زیرفضای L از R^{n+m} است (بر اساس قضیه ۱.۱ ص ۲).

برای مکمل متعامد زیرفضای L می‌توان نتیجه گرفت که

$$L^\perp=\{(x^*,y^*)\mid x^*\in R^n,\ y^*\in R^m,\ x^*=-A^*y^*\}$$

یعنی می‌توان نشان داد که $L^\perp$ گراف $-A^*$ است. در حقیقت اگر $z^*=(x^*,y^*)$ در $L^\perp$ باشد، اگر و فقط اگر برای هر $z=(x,y)$ در L یعنی $y=Ax$،

$$0=\langle z,z^*\rangle=\langle x,x^*\rangle+\langle y,y^*\rangle$$

بر اساس تعریف ضرب داخلی

به عبارتی $(x^*,y^*)\in L^\perp$ اگر و فقط اگر

$$0=\langle x,x^*\rangle+\langle Ax,y^*\rangle=\langle x,x^*\rangle+\langle x,A^*y^*\rangle$$

$$= \langle x, x^* + A^* y^* \rangle \qquad \forall x \in R^n$$

یعنی $x^* + A^* y^* = 0$ ، پس $x^* = -A^* y^*$

نمایش تاکر (Tucker representation) یک مجموعه آفین در صفحه ۹ کتاب آمده است.

بخش ۲

مجموعه های محدب و مخروطها.

یک زیرمجموعه C از R^n را محدب می نامیم اگر برای هر $x, y \in C$ و $0 < \lambda < 1$ داشته باشیم

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in C.$$

همه مجموعه های آفین (از جمله R^n ، $\emptyset$) محدب هستند.

آنچه که مجموعه های محدب را عمومی تر از مجموعه های آفین می سازد، این است که آنها دارای این خاصیت می باشند که بر هر دو نقطه x و y مجزا از آنها، شامل تمام نقاط مابین x و y می باشد که بصورت مجموعه

$$\{(1-\lambda)x + \lambda y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

است. این بخش را پاره خط واصل بین x و y نام دارد. (البته پاره خط بسته).

به عنوان مثال در R^3 ، بیضی و مکعب ها مجموعه های محدب هستند ولی آفین نمی باشند.

نیم صفحه ها، مهمترین مثالها برای مجموعه های محدب می باشند. برای هر عنصر غیرصفر $b \in R^n$ و هر $\beta \in R$ ، مجموعه های زیر را نیم صفحه بسته می نامند

$$\{x;\ \langle x, b\rangle \leq \beta\}, \quad \{x;\ \langle x, b\rangle \geq \beta\}$$

و مجموعه های زیر را نیم صفحه های باز می نامند

$$\{x;\ \langle x, b\rangle < \beta\}, \quad \{x;\ \langle x, b\rangle > \beta\}$$

که هر چهار مجموعه، مجموعه محدب می باشند. همه این چهار نیم صفحه ها تنها به ابرصفحه

$$H = \{x;\ \langle x, b\rangle = \beta\} \qquad (\text{قضیه } 1.3)$$

بستگی دارند. بنابراین نیم فضاهای باز و بسته متناظر با ابرصفحه های داده شده باشند.

قضیه ۱.۲ اشتراک هر تعداد دلخواهی از مجموعه های محدب، محدب هستند.

اثبات، واضح است.

$$= \langle x, x^* + A^* y^* \rangle \qquad \forall x \in R^n$$

یعنی $x^* + A^* y^* = 0$ ، پس $x^* = -A^* y^*$

نمایش تاکر (Tucker representation) یک مجموعه آفین در صفحه ۹ کتاب آمده است.

بخش ۲

مجموعه های محدب و مخروطها.

یک زیرمجموعه C از R^n را محدب می نامیم اگر برای هر $x, y \in C$ و $0 < \lambda < 1$ داشته باشیم

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in C.$$

همه مجموعه های آفین (از جمله R^n ، $\emptyset$) محدب هستند.

آنچه که مجموعه های محدب را عمومی تر از مجموعه های آفین می سازد، این است که آنها دارای این خاصیت می باشند که بر هر دو نقطه x و y مجزا از آنها، شامل تمام نقاط مابین x و y می باشد که بصورت مجموعه

$$\{(1-\lambda)x + \lambda y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

است. این بخش را پاره خط واصل بین x و y نام دارد. (البته پاره خط بسته).

به عنوان مثال در R^3 ، بیضی و مکعب ها مجموعه های محدب هستند ولی آفین نمی باشند.

نیم صفحه ها، مهمترین مثالها برای مجموعه های محدب می باشند. برای هر عنصر غیرصفر $b \in R^n$ و هر $\beta \in R$ ، مجموعه های زیر را نیم صفحه بسته می نامند

$$\{x;\ \langle x, b\rangle \leq \beta\}, \quad \{x;\ \langle x, b\rangle \geq \beta\}$$

و مجموعه های زیر را نیم صفحه های باز می نامند

$$\{x;\ \langle x, b\rangle < \beta\}, \quad \{x;\ \langle x, b\rangle > \beta\}$$

که هر چهار مجموعه، مجموعه محدب می باشند. همه این چهار نیم صفحه ها تنها به ابرصفحه

$$H = \{x;\ \langle x, b\rangle = \beta\} \qquad (\text{قضیه } 1.3)$$

بستگی دارند. بنابراین نیم فضاهای باز و بسته متناظر با ابرصفحه های داده شده باشند.

قضیه ۱.۲ اشتراک هر تعداد دلخواهی از مجموعه های محدب، محدب هستند.

اثبات، واضح است.