در این صورت داریم که $\varepsilon(h)=\frac{|u(h)|}{|h|}\to 0$ و $\eta(k)=\frac{|v(k)|}{|k|}\to 0$ برای $\begin{cases} h\to 0 \\ k\to 0 \end{cases}$

چنانچه h داده شده باشد، قرار می‌دهیم $k=f(x_0+h)-f(x_0)$، در این صورت

$$|k| = |Ah+u(h)| \leq |Ah| + |u(h)| = |Ah| + \varepsilon(h)|h| \quad (6)$$

(از رابطه ۵)

$$\leq \|A\||h| + \varepsilon(h)|h| = \{\|A\| + \varepsilon(h)\}|h|$$

حال رابطه زیر را در نظر می‌گیریم

$$F(x_0+h)-F(x_0)-BAh = g(y_0+k)-g(y_0)-BAh$$

$$= \underbrace{g(y_0+k)-g(y_0)-Bk}+Bk-BAh$$

$$\underset{\text{(از رابطه ۵)}}{=} v(k)+Bk-BAh = B(k-Ah)+v(k) \quad (7)$$

حال طرفین عبارت (۷) را بر $|h|$ تقسیم می‌نماییم. البته ابتدا قدرمطلق گرفته و سپس تقسیم می‌کنیم

$$\frac{|F(x_0+h)-F(x_0)-BAh|}{|h|} \leq \frac{|B(k-Ah)|}{|h|} + \frac{|v(k)|}{|h|}$$

$$\leq \frac{\|B\|\,|k-Ah|}{|h|} + \frac{|v(k)|}{|k|}\cdot\frac{|k|}{|h|}$$

$$\underset{\text{(از رابطه ۵ و ۶)}}{\leq} \|B\|\,\frac{|u(h)|}{|h|} + \frac{|v(k)|}{|k|}\{\|A\|+\varepsilon(h)\} \quad (8)$$

$$= \|B\|\,\varepsilon(h) + \{\|A\|+\varepsilon(h)\}\,\eta(k)$$

حال اگر $h\to 0$ در این صورت $\varepsilon(h)\to 0$ و اگر $k\to 0$ آنگاه می‌دانیم $\eta(k)\to 0$؛ بنابراین از رابطه (۸) نتیجه می‌گیریم که حد سمت چپ برابر صفر است و بنابر تعریف می‌توان نتیجه گرفت $F'(x_0)=BA$.

۱.۱۶ مشتقات جزئی

بعد از تعریف مشتق کلی f می‌توان در اینجا به تعریف مشتق جزئی پرداخت. فرض کنید f مجموعه باز $E\subset R^n$ را به توی فضای R^m می‌نگارد و فرض می‌کنیم مجموعه $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ پایه فضای R^n و $\{u_1,u_2,\dots,u_m\}$ پایه متعارف R^m باشند

چون برد تابع f در R^m می باشد یعنی برای هر $x\in E$ ، $f(x)$ عنصری از R^m است
بنابراین فرض کنید مؤلفه های تابع f ، توابع حقیقی f_1 ، f_2 ، ... f_m باشند یعنی

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m} f_i(x)u_i, \qquad (x\in E)$$

با توجه به ویژگی پایه متعارف $\{u_1,u_2,\dots,u_m\}$ ، یعنی

$$u_i\cdot u_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$ (ضرب داخلی)

داریم

$$f(x)\cdot u_i=\left(\sum_{i=1}^{m} f_i(x)u_i\right)$$
$$=\left(f_1(x)u_1\cdot u_i+f_2(x)\cdot u_i+\cdots+f_i(x)u_i\cdot u_i+\cdots+f_m(x)\cdot u_i\right)$$

تمامی جملات آن برابر صفر می گردد، جز یک جمله، پس

$$f(x)\cdot u_i=f_i(x)\underbrace{u_i\cdot u_i}_{\text{برابر یک}}=f_i(x), \qquad 1\le i\le m$$

تعریف مشتق جزئی

می دانیم که برای هر $1\le i\le m$ ، f_i تابع حقیقی مقدار می باشد، برای این تابع
حد زیر را تعریف می کنیم

$$(D_j f_i)(x)=\lim_{t\to 0}\frac{f_i(x+te_j)-f_i(x)}{t} \qquad (1)$$

البته به شرطی که این حد وجود داشته باشد. مثال زیر را توجه کنید

$$f(x)=\left(e^{x_1},\ |x_2|\right),$$

که $x=(x_1,x_2)$ ، به عبارتی $f:R^2\to R^2$ است. یعنی

$$f_1(x)=e^{x_1}, \qquad f_2(x)=|x_2|$$

می دانید که تابع $f_2(x)$ در نقطه صفر مشتق پذیر نیست. پس اگر رابطه (۲) را برای
تابع f_2 محاسبه کنیم، حد آن وجود نخواهد داشت، پس برای هر $1\le j\le 2$ ،
$D_j f_2$ وجود ندارد.

پس اگر رابطه (۱) قابل تعریف باشد یعنی حد آن وجود داشته باشد، این رابطه مشتق تابع f_i نسبت به x_j می‌نامیم و با علامت $D_j f_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ به عنوان مشتق جزئی نشان می‌دهیم. در مثال قبلی دیدیم که مؤلفه (۳) تابع مشتق‌پذیر بوده است. ولی اگر یک تابع f در نقطه x مشتق‌پذیر باشد، مشتقات جزئی آن در x وجود دارند و این مشتقات جزئی می‌توانند تبدیل خطی $f'(x)$ را مشخص نمایند. این موضوع را در قضیه زیر می‌بینیم.

قضیه ۱.۱۷ فرض کنیم f مجموعه باز $E \subset R^n$ را بتوی R^m بنگارد و f در نقطه $x \in E$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت مشتقات جزئی $(D_j f_i)(x)$ وجود دارند و

$$f'(x) \cdot e_j = \sum_{i=1}^{m} (D_j f_i)(x) u_i, \qquad 1 \leq j \leq n \quad (۲)$$

اثبات، این موضوع را برای هر $1 \leq j \leq n$ ثابت می‌کنیم. طبق فرض رابطه زیر را داریم

$$f(x+te_j) + f(x) = f'(x)(te_j) + r(te_j)$$

که در این رابطه $h = te_j$ و r نیز باقیمانده می‌باشد. یعنی اگر $t \to 0$، $\frac{|r(te_j)|}{t}$ به صفر میل کند است. چون $f'(x)$ خطی است پس داریم $tf'(x)(e_j) = f'(x)(te_j)$. لذا داریم

$$\frac{f(x+te_j) - f(x)}{t} = f'(x)(e_j) + \frac{r(te_j)}{t}$$

هرگاه از طرفین رابطه حد بگیریم، خواهیم داشت.

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+te_j) - f(x)}{t} = f'(x)(e_j)$$

می‌دانیم که طرفین این رابطه یک بردار هستند و این بردار عضوی از R^m است، پس با نمایش آن برحسب مؤلفه‌ها داریم

$$\lim_{t \to 0} \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i(x+te_j) + f_i(x)}{t} u_i = f'(x)(e_j)$$

چون حد این رابطه موجود می‌باشد، پس حد هر کسر در این مجموع هم وجود خواهد داشت

پس با توجه به رابطهٔ (۱)، هر یک از $(D_j f_i)(x)$ موجود می‌باشند.

پس رابطهٔ (۲) نیز موجود می‌باشد.

با توجه به مطالب قبلی برای تابع $f: R^n \to R^m$ نشان داده‌ایم که در صورتیکه این تابع در $x \in E \subset R^n$ مشتق پذیر باشد. در این صورت $f'(x) = A$ یک ماتریس بوده و متعلق به فضای $L(R^n, R^m)$ است. اگر دقت کنید در قضیه زیر رابطهٔ (۲) را داریم. در سمت چپ (۲) ضرب یک ماتریس $f'(x)$ در بردار e_j دیده می‌شود. حاصل آن بردار سمت راست (۲) است. و این بردار دارای مؤلفه‌های $D_j f_1$، $D_j f_2$، ... $D_j f_m$ است

پس می‌توان نمایش ماتریسی $f'(x)$ را ارائه داد.

$$f'(x) = \begin{bmatrix} (D_1 f_1)(x) & \cdots & (D_n f_1)(x) \\ (D_1 f_2)(x) & \cdots & (D_n f_2)(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (D_1 f_m)(x) & \text{---} & (D_n f_m)(x) \end{bmatrix} \qquad (3)$$

پس با قضیه قبلی نمایش مشتق کلی $f'(x)$ را به کمک مشتقات جزئی را ارائه داده‌ایم.
یعنی $f'(x) = A$. حال می‌توانید مؤلفه‌های ماتریس A را ببینید. اگر این ماتریس را به طور خلاصه $A = [a_{ij}]$ بنامیم. داریم

$$a_{ij} = (D_j f_i)(x)$$

حال اگر دقت کنید a_{ij} یک تابع حقیقی مقدار از x است. یعنی تابعی از R^n به توی R است.

در ادامه رابطهٔ (۲) اگر فرض کنید $h = \sum_{j=1}^{n} h_j e_j$. چون $f'(x)$ تبدیل خطی است.

$$f'(x)(h_j e_j) = A(h_j e_j) = h_j A(e_j) = h_j f'(x)(e_j)$$

$$\underset{\text{از (۲)}}{=} h_j \left(\sum_{i=1}^{m} (D_j f_i)(x)\, u_i \right) = \left(\sum_{i=1}^{m} (D_j f_i)(x)\, h_j \right) u_i$$

حال اگر طرفین را برای تمام i ها جمع کنیم، یعنی

$$f'(x)h = f'(x)\left(\sum_{j=1}^{n} h_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} (D_j f_i)(x) h_j\right)}_{*} u_i \qquad (4)$$

پس عبارت $*$ مختصات مقدار بردار $f'(x)h$ است.

به این مثال ساده توجه کنید $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ برای $t \in (-\pi, \pi)$ اگر این تابع را رسم کنید خواهید دید دایره واحد خواهد بود. به عبارتی یک منحنی در R^2 است یعنی

$$\gamma : (-\pi, \pi) \longrightarrow R^2$$

این تابع در واقع دو مولفه‌ای است، مولفه اول آن $\cos t$ و مولفه دوم آن $\sin t$ است.

حال فرض کنید تابع γ به گونه‌ای باشد که از بازه $(a,b) \subset R^1$ به توی مجموعه باز $E \subset R^n$ تعریف شود. یعنی γ یک منحنی (مشتق‌پذیری را در فرض قرار دهید) مشتق‌پذیر در E باشد. تابع f را یک تابع حقیقی مقدار مشتق‌پذیر با قلمرو E فرض می‌کنیم. این دو تابع را به شکل زیر ترکیب می‌نماییم

$$g(t) = f(\gamma(t)), \quad a < t < b.$$

طبق قضیه ۱۵.۱ تابع g یک تابع مشتق‌پذیر از (a,b) به R^1 است. طبق بحث مشتق‌پذیری می‌دانیم که $f'(\gamma(t)) \in L(R^n, R^1)$ و $\gamma'(t) \in L(R^1, R^n)$ که هر دو بردار هستند، اولی برداری است با n سطر و یک ستون و دومی برداری است با یک سطر و n ستون. با هم می‌توانند ضرب شوند

$$g'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t), \quad a < t < b$$

البته می‌دانیم که این ضرب، ضرب مولفه‌ای یا همان ضرب داخلی است و حاصل آن یک مقدار حقیقی است. اگر فرض کنیم $[\gamma'(t)]$ دارای مولفه‌های $\gamma'_i(t)$ و مولفه‌های $[f'(x)]$ مقادیر $(D_i f)(x)$ در نظر گرفته شود، پس مقدار $g'(t)$ به صورت حاصلضرب این مولفه‌ها است یعنی

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(\gamma(t))\, \gamma'_i(t) \qquad (5)$$

تعریف بردار گرادیان

در قسمت قبل تابع مشتق‌پذیر حقیقی مقدار f بر مجموعه باز $E \subset R^n$ اشاره نمودیم

و بیان نمودیم که برای هر $x \in E$ ، $[f'(x)]$ یک بردار با مؤلفه های $(D_i f)(x)$ است. این بردار را می توان بار دیگر نسبت به پایه متعارف $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ از R^n به صورت زیر نوشت.

$$[f'(x)] = [(D_1 f)(x), (D_2 f)(x), \dots, (D_n f)(x)]$$

و یا

$$[f'(x)] = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(x)\, e_i$$

این بردار را گرادیان تابع f در نقطه x می نامیم. به همین ترتیب علامت این بردار را با $(\nabla f)(x)$ نشان می دهیم. حال می توان عبارت (۵) به شکل زیر ارائه داد

$$g'(t) = (\nabla f)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \qquad (۶)$$

حال تابع γ را به شکل زیر در نظر بگیرید

$$\gamma(t) = x + tu, \qquad -\infty < t < \infty$$

که $x \in E$ و $u \in R^n$ که $|u| = 1$. (در این صورت u را بردار یکه می نامیم). می دانیم که تابع $\gamma : R \to R^n$ یک تابع مشتق پذیر است و $\gamma'(t) = u$. در رابطه (۶) قرار می دهیم

$$g'(t) = (\nabla f)(\gamma(t)) \cdot u$$

اگر $t = 0$ بگیریم. $\gamma(0) = x$.

$$g'(0) = (\nabla f)(x) \cdot u \qquad (۷)$$

حال تابع $g(t) = f(\gamma(t))$ که یک تابع حقیقی مقدار است و مشتق آن در (۵) ذکر شد در نقطه صفر مشتق پذیر بوده و با مقدار (۷) نمایش داده شده است، طبق تعریف مشتق داریم

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}, \qquad (۸)$$

با مقایسه (۷) و (۸) به تعریف جدیدی از مشتق می رسیم - تعریف مشتق سویی.

با مقایسه (۷) و (۸) داریم

$$(\nabla f)(x) \cdot u = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}$$

این مقدار را با $(D_u f)(x)$ نشان می‌دهیم، یعنی

$$(D_u f)(x) = (\nabla f)(x) \cdot u, \qquad (9)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(x)\, u_i$$

حال تابع $\gamma(t) = (1-t)a + tb$ در نظر می‌گیریم که $0 \le t \le 1$ و $a, b \in E \subset R^n$. بنابراین $\gamma(t)$ خط واصل بین a و b در E است. اگر E محدب باشد، برای هر t، $\gamma(t) \in E$.

حال گیریم تابع f از مجموعه محدب E به توی R^m یک تابع مشتق‌پذیر باشد، بنابراین $f'(\gamma(t))$ موجود بوده و مقدار نرم آن متناهی است. مثلاً عدد M ای هست که

$$\forall t \in [0,1], \qquad \| f'(\gamma(t)) \| \le M \qquad (10)$$

بدین ترتیب می‌توان قضیه زیر را بیان کرد

قضیه ۱.۱۹ فرض کنید f مجموعه باز و محدب $E \subset R^n$ را به توی R^m می‌نگارد و در E مشتق‌پذیر است و عددی حقیقی مانند M هست به قسمی که برای هر $x \in E$،

$$\| f'(x) \| \le M$$

در این صورت، برای هر $a \in E$ و $b \in E$ داریم

$$|f(b) - f(a)| \le M\, |b-a|$$

اثبات. a و b را در E ثابت فرض می‌کنیم و برای هر $t \in R^1$ تعریف

$$\gamma(t) = (1-t)a + tb$$

داریم که $\gamma(t) \in E$. (چون E محدب است. با فرض $g(t) = f(\gamma(t))$، داریم

$$g'(t) = f'(\gamma(t))\, \gamma'(t) = f'(\gamma(t))\,(b-a)$$

طبق قضیه ۱.۱۵

از طرفین قدر مطلق می‌گیریم

$$|g'(t)| = |f'(\gamma(t))|\,|b-a| \le \|f'(\gamma(t))\|\,|b-a|$$
$$\le M\,|b-a|$$

طبق نامساوی و برای حالت قضیه مقدار میانگین تابع برداری، داریم

صفحه ۲۸

$$|g(1)-g(0)| \le |g'(t)| \le M|b-a|$$

اما می‌دانیم که $g(0)=f(a)$ و $g(1)=f(b)$. با جاگذاری می‌توان حکم را بدست آورد

$$|f(b)-f(a)| \le M|b-a|$$

به عنوان یک نتیجه از قضیه فوق می‌توان بیان کرد که اگر برای هر $x\in E$، $f'(x)=0$ شود، این بدین معنی است که f ثابت می‌باشد.

۲.۰۱ تعریف بطور پیوسته مشتق پذیر

نگاشت مشتق‌پذیر f از مجموعه باز $E\subset R^n$ بتوی R^m را بطور پیوسته مشتق‌پذیر در E می‌نامیم، هرگاه، f' یک نگاشت پیوسته از E بتوی $L(R^n, R^m)$ باشد.

حال می‌خواهیم این موضوع را با مفهوم ε و δ بیان کنیم. قبلاً بیان شد که اگر تابع f بر مجموعه باز $E\subset R^n$ مشتق پذیر باشد، به طور صریح برای هر $x\in E$، $f'(x)$ یک ماتریس است ولی ماتریس در رابطه (۳۲) صفحه ۲۴ ارائه شده است. البته می‌توان این ماتریس را با A_x نشان داد، اندیس x به معنی این است که این ماتریس و مؤلفه‌های آن وابسته به x هست. نیز مؤلفه‌های آن $(D_j f_i)(x)$ توابع حقیقی از x هستند.

در صفحه ۱۵ ↑

لازم به تذکر می‌دانیم که ماتریس A_x عضوی از $L(R^n, R^m)$ است و متریک این فضا نیز برای شما بیان گردید. پس مفهوم بطور پیوسته مشتق‌پذیری تابع f به معنی این است که برای هر $\varepsilon>0$، عدد $\delta>0$ هست که برای هر $x, y\in E$ که $|x-y|<\delta$، آنگاه.

$$\|f'(y)-f'(x)\| < \varepsilon.$$

کلمه پیوسته به زبان انگلیسی continuous و یا بطور خلاصه C نشان داده می‌شود. بطور پیوسته مشتق پذیر را با C'. پس اگر تابع f پیوسته مشتق‌پذیر باشد گوئیم f یک C' نگاشت است و بطور خلاصه می‌نویسیم $f\in C'(E)$.

می‌توان نشان داد که شرط $f\in C'(E)$ به معنی این است که تمامی مشتقات جزئی وجود داشته و پیوسته باشند.

بدین ترتیب قضیه زیر را داریم و آن را بدون اثبات الزامی دهیم. اثبات آن در صفحه ۲۶۴ کتاب اصول آنالیز ریاضی رودین موجود می‌باشد. (اثبات آن برای خواننده ضروری نمی‌باشد)

دترمینان

دترمینان‌ها اعدادی وابسته به ماتریس‌های مربعی و به همین ترتیب مربوط به عملگرهایی هستند که با این‌گونه ماتریس‌ها نمایش داده می‌شوند. این اعداد صفرند اگر و فقط اگر عملگر نظیرشان معکوس‌پذیر نباشد.

۹.۳۳ دترمینان

فرض کنید $(j_1,\ldots,j_n)$ یک n تایی مرتب از اعداد صحیح باشد، تعریف می‌کنیم

$$s(j_1,\ldots,j_n)=\prod_{p<q}\operatorname{sgn}(j_q-j_p) \qquad (1)$$

که در این رابطه

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

تابع sgn را تابع علامت نیز می‌گویند.

به عنوان مثال برای $s(5,2,7)$ داریم که $j_1=5$ ، $j_2=2$ و $j_3=7$ و

$\operatorname{sgn}(7-5)=1$ ، $\operatorname{sgn}(2-5)=-1$ ، $\operatorname{sgn}(7-5)=1$

بنابراین طبق (1)

$$s(5,2,7)=\operatorname{sgn}(7-5)\,\operatorname{sgn}(2-5)\,\operatorname{sgn}(7-5)=1\times(-1)\times1=-1$$

اگر $n=5$ باشد می‌توانیم چند n تایی از اعداد صحیح ارائه دهیم که در $(j_1,\ldots,j_n)$ هر $1\le j_k\le 5$ باشد

$(1,2,3,4,5)$ ، $(1,3,4,2,5)$ ، $(1,4,3,5,2)$ ، ...

که در اینجا چند عنصر را معرفی کرده‌ایم.

حال اگر $[A]$ ماتریس عملگر خطی A بر R^n با درایه‌های $a(i,j)$ نسبت به پایه متعارف $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ در R^n باشد بطوری که $a(i,j)$ در سطر iام، ستون jام آن باشد، دترمینان $[A]$ مساوی عدد زیر است

$$\det[A]=\sum s(j_1,\ldots,j_n)\,a(1,j_1)\,a(2,j_2)\cdots a(n,j_n) \qquad (2)$$

جمع حاضر به تعداد تمام n^n تایی‌های مرتب $(j_1,\ldots,j_n)$ از اعداد صحیح می‌باشد که $1\le j_r\le n$.

می‌دانیم که اگر x_1 ، x_2 ، ... x_n ستون‌های ماتریس $[A]$ باشند، داریم

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a(i,j)\, e_i ,\qquad j=1,2,\dots,n \qquad (۳)$$

چون نمایش ماتریسی A را با $[A]$ نشان می‌دهیم و ستون‌های آن x_j هاست، بنابراین می‌توان

$$[A] = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

نشان داد، فلذا

$$\det [A] = \det (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

پس $\det$ یک تابع حقیقی بر مجموعهٔ تمام nتایی‌های مرتب از عناصر R^n است.

قضیه ۱. ۳۴ روابط زیر را داریم

(آ) هرگاه I عملگر همانی بر R^n باشد آنگاه $\det [I] = \det (e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$.

(ب) $\det$ یک تابع خطی از هر بردار ستونی x_j هاست. درصورتیکه بقیه ثابت فرض شوند.

(پ) هرگاه $[A]_1$ از $[A]$ با تعویض دو ستون به دست آمده باشد، آنگاه

$$\det [A_1] = -\det [A]$$

(ت) هرگاه $[A]$ دو ستون برابر داشته باشد، آنگاه $\det [A] = 0$.

اثبات (آ) هرگاه $A = I$، آنگاه $a(i,i) = 1$ و برای $i \neq j$، $a(i,j) = 0$. لذا در (۲) همه جملات مجموع برابر صفرهست، جز حالتی که $j_r = r$ باشد و فقط یک جمله دارد. پس

$$\det [I] = s(1, 2, \dots, n) = 1$$

(ب) هرگاه در رابطه (۲) را دقت کنید $n!$ جمله را دارد مثلاً برای ماتریس ۲×۲، دو جمله را داریم.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

به رابطه (۳) دقت کنید اگر به جای x_j، $c_1 x_j^1 + c_2 x_j^2$، نیز به جای $a(i,j)$ مقدار $c_1 a_1(i,j) + c_2 a_2(i,j)$ است و هر یک از $n!$ جمله در (۲) یکی از عناصرش به این شکل است لذا می‌تواند تفکیک شود، این موضوع خطی بودن $\det$ را نسبت به یک ستون نشان می‌دهد.

(پ) جابجایی در ستون‌ها تاثیری در مقدار مولفه‌های ماتریس ندارد، بنابراین هر یک از جملات در (۲) بالای تغییر در جابجایی ستون‌ها تغییر پیدا نمی‌کند جز در مقدار $s(j_1, \dots, j_n)$. از طرفی اگر دو تا از اندیس‌ها در تعویض جابجا شوند، تغییر علامت می‌دهند. فلذا چون همه جملات (۲) چنین می‌شوند حکم حاصل می‌شود.

(ت) هرگاه دو ستون ماتریس A با هم برابر باشند و اگر این دو ستون را با هم جابجا کنیم، از یک طرف مقدار دترمینان تغییر پیدا نمی‌کند و از طرفی دیگر طبق پ، علامت آن عوض می‌شود