۲.

۱۱ حل: توابع اندازه (۲)

c) چون $B = A \cup (B-A)$ که $A \cap (B-A) = \emptyset$ بنابراین

$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B-A) \Rightarrow \mu(B) \geq \mu(A)$

d) قرار می‌دهیم $B_1 = A_1$ ، $B_2 = A_2 - A_1$ ، ... ، $B_n = A_n - A_{n-1}$

در این صورت $B_n \in \mathcal{M}\ (\forall n)$ ، $B_n \cap B_j = \emptyset\ (n \neq j)$

$A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ $\qquad A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$

$\mu(A) = \mu(\bigcup B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$

$\mu(A_n) = \sum_{1}^{n} \mu(B_i) \Rightarrow \mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$

e) قرار می‌دهیم $C_n = A_1 - A_n$ و در نتیجه

$C_1 \subset C_2 \subset \cdots$

$\mu(C_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$

$A_1 - A = \bigcup C_n$

$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(A_1 - A) = \mu(\bigcup C_n) = \lim \mu(C_n)$

$= \mu(A_1) - \lim \mu(A_n)$

چند مثال: (a) X یک مجموعه $E \subset X$ تعریف می‌کنیم

$\mu(E) = \infty$ (اگر E نامتناهی)

$\mu(E) = E$ تعداد اعضای (اگر E متناهی)

هر یا اندازه شمارش counting

b) $x_0 \in X$ تعریف می‌کنیم

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 & x_0 \in E \\ 0 & x_0 \notin E \end{cases}$$

جرم واحد متمرکز در x_0

آنالیز حقیقی (۲) صفحه ۱۲

ج) $X=\{1,2,\ldots\}$ اندازه شمارشی μ را داریم

$A_n=\{n,n+1,\ldots\}$

$\bigcap A_n=\phi$ $\mu(A_n)=\infty$

این موضوع مهم تر از مطلب e 1.19

توضیح (فضای اندازه) با توجه $\mathfrak{M}$ روی X و همچنین μ سه تایی $(X,\mathfrak{M},\mu)$ را فضای اندازه گویند.

حساب در $[0,\infty]$ را خودتان بخوانید.

شنبه ۷۰،۱۲،۵

تعریف ۱-۲۳: اگر s یک تابع ساده اندازه‌پذیر در X به صورت $s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \chi_{A_i}$ باشد که در آن $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ مقادیر مختلف s اند:

[s اندازه پذیر است اگر و فقط اگر همه A_i ها اندازه پذیر باشند $A_i=\{x\in X \mid s(x)=\alpha_i\}$]

و $E\in\mathfrak{M}$ تعریف می‌کنیم

$$\int_E s\,d\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\mu(E\cap A_i)$$

با توجه به اینکه قرارداد $0\times\infty=0$ را داریم استفاده می‌کنیم واین به خاطر اینکه اگر $\exists A_i$ که $\mu(E\cap A_i)=\infty$ باشد در این صورت $\alpha_i=0$ باشد $0\times\infty=0$

در حالت کلی $\mu:\mathfrak{M}\longrightarrow[0,\infty]$, $\alpha_i\in[0,\infty)$

اگر $f:X\longrightarrow[0,\infty]$ اندازه‌پذیر باشد و $E\in\mathfrak{M}$ تعریف می‌کنیم

$$\int_E f\,d\mu=\sup\int_E s\,d\mu$$

که در آن سوپریمم روی تمام توابع ساده اندازه‌پذیر s که به طوری که $0\le s\le f$ گرفته می‌شود.

در این صورت $\int_E f\,d\mu$ را انتگرال لبگ تابع f روی E نسبت به اندازه μ می‌نامیم.

Lebesgue's Integrale

۱-۲۴: گزاره‌های زیر تقریباً فوری تعاریف فوق هستند. ← کافی است برای دو تابع ساده $s_1\le s_2$ این موضوع ثابت شود که $\int_E s_1\,d\mu\le\int_E s_2\,d\mu$ و این موضوع واضح است

a) اگر $0\le g\le f$ آنگاه $\int_E g\,d\mu\le\int_E f\,d\mu$

b) اگر $A\subset B$ و $0\le f$ آنگاه $\int_A f\,d\mu\le\int_B f\,d\mu$

چون برای هر تابع ساده s داریم $s(x)=\sum\alpha_i\chi_{E_i}(x)$ که اگر $A\subset B$ آنگاه $\mu(A\cap A_i)\le\mu(B\cap A_i)$

پس

د) اگر $f\geq 0$ و c عدد ثابتی باشد بطوریکه $0\le c<\infty$ آنگاه

$$\int_E cf\,d\mu = c\int_E f\,d\mu$$

ه) اگر $f(x)=0 \quad \forall x\in E$ آنگاه $\int_E f\,d\mu=0$ (حتی اگر $\mu(E)=\infty$)

و) اگر $\mu(E)=0$ آنگاه $\int_E f\,d\mu=0$

ز) اگر $f\geq 0$ آنگاه $\int_E f\,d\mu=\int_X \chi_E f\,d\mu$

گزاره ۱-۲۵: فرض کنید s و t توابع ساده اندازه‌پذیر در X باشند تعریف می‌کنیم

$$\varphi(E)=\int_E s\,d\mu \qquad (E\in\mathcal{M})$$

اولاً φ یک اندازه روی $\mathcal{M}$ است ثانیاً $\int_X (s+t)\,d\mu=\int_X s\,d\mu+\int_X t\,d\mu$

اثبات: فرض کنید $s=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\chi_{A_i}$ و $E_1, E_2, \ldots$ اعضای جدا از هم $\mathcal{M}$ باشند بطوریکه $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$

$$\varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)=\varphi(E)=\int_E s\,d\mu=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(E\cap A_i)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n\cap A_i)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(E_n\cap A_i)\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}s\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(E_n)$$

اثبات قسمت دوم: فرض کنید s مانند قسمت قبل و $t=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\chi_{B_j}$ اگر $E_{ij}=A_i\cap B_j$ خواهیم داشت

$$\int_{E_{ij}}s\,d\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(E_{ij}\cap A_i)=\alpha_i\mu(E_{ij}) \qquad (\mu(E_{ij}\cap A_k)\cancel{=\emptyset})$$

$$\int_{E_{ij}}t\,d\mu=\beta_j\mu(E_{ij})$$

$$(s+t)(x)=\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\chi_{B_j}\Big)(x)$$

$$=\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}(\alpha_i+\beta_j)\chi_{E_{ij}}=\begin{cases}\alpha_i+\beta_j & x\in E_{ij}=A_i\cap B_j\\ 0 & x\notin E_{ij}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{E_{ij}}(s+t)\,d\mu=\sum(\alpha_i+\beta_j)\mu(E_{ij})=(\alpha_i+\beta_j)\mu(E_{ij})=\int_{E_{ij}}s\,d\mu+\int_{E_{ij}}t\,d\mu$$

آنالیز حقیقی جلسه ۱۴

چون E_{ij} ها مجزا هستند و $X=\bigcup E_{ij}$ بنابر قسمت اول خواهیم داشت.

حال اگر تابع مجموع φ را براساس تابع ساده $s+t$ تعریف کنیم باز یک اندازه روی X است که بطور مشابه خواهیم داشت

$$\int_X (s+t)\,d\mu = \sum_{i,j}\int_{E_{ij}}(s+t)\,d\mu$$

$$= \sum_{i,j}\left(\int_{E_{ij}} s\,d\mu + \int_{E_{ij}} t\,d\mu\right) = \sum_{i,j}\int_{E_{ij}} s\,d\mu + \sum_{i,j}\int_{E_{ij}} t\,d\mu$$

$$= \int_X s\,d\mu + \int_X t\,d\mu$$

Theorem Lebesgue's Monotone Convergence

1-26: قضیه همگرایی یکنواخت لبگ: فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر در X و

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le \infty \quad (x\in X)$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad (x\in X)$$

در اینصورت f اندازه‌پذیر است و

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$$

اثبات: چون $\int f_{n+1} \ge \int f_n$ پس α ای متعلق به $[0,\infty]$ وجود دارد بطوریکه

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \alpha$$

f اندازه‌پذیر است (۱-۱۴) و چون $f_n \le f$ داریم

$\int f_n \le \int f$ بنابراین به ازای هر n داریم

$$\lim\int_X f_n\,d\mu \le \int_X f\,d\mu \Rightarrow \alpha \le \int_X f\,d\mu$$

فرض کنید s یک تابع ساده اندازه‌پذیر در X باشد بطوریکه $0\le s\le f$

و c عدد ثابتی که $0<c<1$ را توصیف می‌کنیم

$$E_n = \{x : f_n(x) \ge c\,s(x)\} \quad n=1,2,3,\ldots$$

هر E_n اندازه‌پذیر است. $E_1\subset E_2\subset \cdots$ و $X=\bigcup E_n$

زیرا با اندازه‌پذیر بودن تابع f_n و cs در اینصورت $E_n=\{x:(f_n-cs)(x)\ge 0\}$ با توجه به قضیه 1.12 b

زیرا E_n ها از صعودی بودن f_n ها نتیجه می‌شود

$$x\in X \Rightarrow \begin{cases} f(x)=0 \Rightarrow x\in E_1 \\ f(x)>0 \Rightarrow f(x) > c\,s(x) \Rightarrow \exists n \; x\in E_n\end{cases}$$

$f_n(x)\ge c\,s(x) \Rightarrow x\in E_n$

$$\int_X h_n \, d\mu \geq \int_{E_n} h_n \, d\mu \geq c\int_{E_n} s \, d\mu$$

اگر $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\int_X h_n \, d\mu \geq c\int_X s \, d\mu \Rightarrow \alpha \geq \int_X s \, d\mu \Rightarrow \alpha \geq \sup_s \int_X s \, d\mu$$

$$\alpha \geq \int_X f \, d\mu$$

جلسه ۶ ، ۱۲ ، ۷۰

قضیه 1.27: اگر $h_n : X \longrightarrow [0,\infty]$ به ازاء $n=1,2,\cdots$ اندازه‌پذیر باشد و

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) \qquad (x\in X)$$

آنگاه

$$(1) \quad \int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X h_n \, d\mu$$

اثبات: فرض می‌کنیم $\{s_i'\}$ و $\{s_i''\}$ دو دنباله از توابع ساده اندازه‌پذیر باشد بطوریکه $s_i' \to h_1$ ، $s_i'' \to h_2$

اگر $s_i = s_i' + s_i''$ آنگاه s_i یک تابع ساده اندازه‌پذیر و $s_i \to h_1 + h_2$

با استفاده از قضیه 1-25 و قضیه قبل می‌توانیم بنویسیم

$$\int_X (h_1+h_2)\, d\mu = \int_X h_1 \, d\mu + \int_X h_2 \, d\mu$$

حال اگر $g_N = h_1 + h_2 + \cdots + h_N$

اولاً به استقراء نتیجه می‌گیریم که

$$\int_X g_N \, d\mu = \sum_{r=1}^{N}\int_X h_r \, d\mu$$

ثانیاً دنباله $\{g_N\}$ بطور صعودی به f میل می‌کند

پس اگر بار دیگر از قضیه قبل استفاده کنیم خواهیم داشت که:

$$\begin{cases} g_N(x) \longrightarrow f(x) & (x\in X) \\ g_N(x) \leq g_{N+1}(x) & (x\in X) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty}\int_X g_N \, d\mu = \int_X f \, d\mu \quad \text{و یا} \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_X h_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

نتیجه: اگر $a_{ij} \geq 0$ به ازاء $i,j = 1,2,\cdots$ آنگاه $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$

اثبات: μ را به عنوان اندازه شمارشی بنویسید.

هرگاه به جای حد پائین حد بالا قرار دهیم آیا نامساوی حاصل معکوس خواهد شد.

قضیه 1.28: (قضیه فاتو) Fatou's

اگر $f_n: X \longrightarrow [0,\infty]$ به ازاء هر $n=1,2,\dots$ اندازه‌پذیر باشند آنگاه

$$\int_X \liminf f_n \, d\mu \le \liminf \int_X f_n \, d\mu$$

اثبات: قرار می‌دهیم $g_k(x) = \inf_{i\ge k} f_i(x) = \inf\{f_k(x), f_{k+1}(x), \dots\}$ $\quad k=1,2,\dots \quad x\in X)$

درنتیجه $g_k \le f_k$ $\quad k=1,2,\dots$ $\quad \lim_{k\to\infty} g_k = \liminf_{n\to\infty} f_n$

پس $\int_X f_k \, d\mu \ge \int_X g_k \, d\mu$ و از طرفی g_k ها اندازه‌پذیر است و $0\le g_1 \le g_2 \le \dots \le \infty$

پس قضیه همگرائی لبگ برای g_k برقرار است. پس

$g_k \le f_n \to \liminf g_k \le \liminf \int f_n \, d\mu$ $\quad n\ge k$

$$\liminf_{k\to\infty} \int_X g_k \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, d\mu = \underbrace{\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) \, d\mu}_{\int \lim g_k} \le \liminf \int_X f_n \, d\mu$$

اندازه‌پذیر

قضیه 1.29: فرض کنید $f: X \longrightarrow [0,\infty]$ ، $\varphi(E) = \int_E f \, d\mu \quad (E\in\mathfrak{M})$

درنتیجه φ یک اندازه روی $\mathfrak{M}$ است و

$$\int_X g \, d\varphi = \int_X g f \, d\mu \qquad d\varphi = f\,d\mu$$

به ازاء هر تابع اندازه‌پذیر $g: X \longrightarrow [0,\infty]$

اثبات: فرض کنید $E_1, E_2, \dots$ اعضای مجزائی از $\mathfrak{M}$ باشند بطوریکه $E = \bigcup^{\infty} E_j$

داریم

$$\chi_E f = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j} f$$

$$\varphi(E) = \int_E f \, d\mu = \int_X \chi_E f \, d\mu$$

$$\varphi(E_j) = \int_X \chi_{E_j} f \, d\mu$$

حال از قضیه ۱-۲۷ نتیجه می‌شود که $\int_X \chi_E f \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \chi_{E_j} f \, d\mu$

$$\varphi(\bigcup E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(E_j)$$

چون $\varphi(\emptyset) = 0$ پس φ یک اندازه (اندازه مثبت) است.

حال از قسمت اول نتیجه می‌شود که تساوی $\int g \, d\varphi = \int g f \, d\mu$

برای $g = \chi_E$ درست است.

حال از قسمت اول نتیجه می‌شود که تساوی $\int g\,d\phi = \int g h\,d\mu$ برای $g = \chi_E$ درست است زیرا

$$\int_X \chi_E\,d\phi = \phi(E) = \int_E h\,d\mu = \int_X \chi_E h\,d\mu = \int_X g h\,d\mu$$

و اگر g به صورت $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ باشد خواهیم داشت

$$\int_X g\,d\phi = \int_X \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}\,d\phi = \sum_{1}^{n} \alpha_i \int_X \chi_{A_i}\,d\phi = \sum_{1}^{n} \alpha_i \int_X \chi_{A_i} h\,d\mu$$

$$= \int_X g h\,d\mu$$

بالاخره اگر g یک تابع اندازه‌پذیر در حالت کلی باشد با توجه به اینکه دنباله‌ای مانند $\{s_n\}$ از توابع ساده اندازه‌پذیر وجود دارد و صعودی که $s_n \to g$ و با استفاده از قضیه همگرایی یکنواخت لبگ نتیجه می‌گیریم که تساوی $\int_X g\,d\phi = \int_X g h\,d\mu$ برای این حالت نیز برقرار است.

تعریف ۱-۳۰: $L^1(\mu) = \{ f : X \to \mathbb{C} \mid \int_X |f|\,d\mu < \infty$ و f اندازه‌پذیر مختلط $\}$

اعضای $L^1(\mu)$ را توابع انتگرال‌پذیر لبگ (نسبت به μ) می‌نامیم.

تعریف ۱-۳۱: اگر $f = u + iv$ که u ، v توابع حقیقی اندازه‌پذیر روی X اند و اگر $f \in L^1(\mu)$ تعریف می‌کنیم

$$\int_E f\,d\mu = \int_E u^+\,d\mu - \int_E u^-\,d\mu + i\int_E v^+\,d\mu - i\int_E v^-\,d\mu = \int_E u\,d\mu + i\int_E v\,d\mu$$

قضیه ۱-۳۲: فرض کنید $f, g \in L^1(\mu)$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ در این صورت

$$\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$$

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int_X f\,d\mu + \beta \int_X g\,d\mu$$

اثبات: از ۱-۹(c) اندازه‌پذیر بودن $\alpha f + \beta g$ نتیجه می‌گیریم

$$\int_X |\alpha f + \beta g|\,d\mu < \infty$$

داریم

$$\int |\alpha f + \beta g|\,d\mu \le \int_X (|\alpha||f| + |\beta||g|)\,d\mu$$

$$= |\alpha| \int_X |f|\,d\mu + |\beta| \int_X |g|\,d\mu < \infty$$

برای اثبات تساوی کافی است ثابت کنیم $\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$

و $\int (\alpha f)\,d\mu = \alpha \int f\,d\mu$

فرض می‌کنیم f و g حقیقی باشند قرار می‌دهیم $h = f+g$ داریم

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^- \quad \text{یا} \quad h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$$

پس

$$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int f^+ + \int g^+ + \int h^-$$

چون هیچکدام از انتگرالهای اخیر ∞ نیست می‌توانیم بنویسیم

$$\int h^+ - \int h^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^-$$

$$\int (h^+ - h^-) = \int (f^+ - f^-) + \int (g^+ - g^-) \Rightarrow \int f+g = \int f + \int g$$

اگر f و g مختلط باشند فرض اینکه $f = u + iv$ و $g = u' + iv'$ تساوی $\int f+g = \int f + \int g$ به راحتی بدست می‌آید.

برای اثبات $\int \alpha f = \alpha \int f$ که در آن $\alpha \ge 0$ این تساوی از ۱-۲۴ (c) نتیجه می‌شود.

اگر $\alpha = -1$ تساوی با توجه به اینکه

$(-u)^+ = u^-$ ، $(-u)^- = u^+$ تساوی را بدست می‌آوریم

$$\int -f\,d\mu = \int \left[(-u)^+ - (-u)^- + i\left((-v)^+ - (-v)^-\right) \right] d\mu = \int (-u + i(-v))\,d\mu$$

$$= \int \left[(-u)^+ - (-u)^- \right] + i\left[(-v)^+ - (-v)^- \right] d\mu$$

$$= \int \left[u^- - u^+ + i\left[v^- - v^+ \right] \right] d\mu$$

$$= \int u^- - \int u^+ + i\left[\int v^- - \int v^+ \right]$$

$$= -\int f\,d\mu$$

$$+u^+ + iv^+ = f + u^- + iv^-$$

$$\int u^+ + \int iv^+ = \int f + \int u^- + \int iv^-$$

$$-\int f = -\int u^+ + \int u^- - \int iv^+ + \int iv^-$$

$$-f = (-u) + i(-v) = (-u)^+ - (-u)^- + i\left((-v)^+ - (-v)^-\right)$$

اگر $\alpha = i$

$$\int if = \int i(u+iv) = \int (-v) + iu$$

$$= -\int v + i\int u = i\left(\int u + i\int v\right) = i\int f$$

تمرین ۱۱ ، ۱۲ ، ۷۰

قضیه ۱-۳۳: اگر $f \in L^1(\mu)$ آنگاه $\left|\int_X f\,d\mu\right| \le \int_X |f|\,d\mu$

اثبات: فرض می‌کنیم $z=\int_X f\,d\mu \in \mathbb{C}$ عدد مختلطی مانند α وجود دارد بطوریکه $|\alpha|=1$

$\alpha z=|z|$ اگر u قسمت حقیقی αf باشد داریم $u\le|\alpha f|=|f|$

بنابراین

$$|z|=\left|\int_X f\,d\mu\right| = \alpha\int_X f\,d\mu = \boxed{\int_X \alpha f\,d\mu} = \int_X u\,d\mu \le \int_X |f|\,d\mu \qquad \alpha f=u+iv$$

$$\int_X \alpha f\,d\mu = \int_X u\,d\mu + i\int_X v\,d\mu$$

و z با توجه به سمت چپ که حقیقی است بنابراین $i\int v\,d\mu = 0$

قضیه ۱-۳۴ (قضیه همگرایی تسلطی لبگ) Dominated convergence thore Lebesgu

فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع مختلط اندازه‌پذیر بر X باشد بطوریکه

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \qquad (x\in X)$$

اگر $g\in L^1(\mu)$ طوری باشد که

$$|f_n(x)|\le g(x) \qquad (x\in X,\ n=1,2,3,\dots)$$

در این صورت ② $f\in L^1(\mu)$

① $\lim\int_X|f_n-f|\,d\mu=0$ ③ $\lim\int_X f_n\,d\mu=\int_X f\,d\mu$

اثبات: چون $|f|\le g$ و f اندازه‌پذیر است پس $f\in L^1(\mu)$ $\left(|f|\le|g| \Rightarrow \int_X|f|\le\int_X|g|<\infty\right)$

از طرفی $|f_n-f|\le|f_n|+|f|\le 2g$ بنابراین از قضیه فاتو نتیجه می‌شود

$$\int_X \liminf\,[2g-|f_n-f|]\,d\mu = \int_X 2g\,d\mu$$

از طرفی با استفاده از قضیه فاتو سمت چپ داریم

$$\le \liminf_n \int_X [2g-|f_n-f|]\,d\mu = \int_X 2g\,d\mu + \liminf\left(-\int_X|f_n-f|\,d\mu\right)$$

چون $\int_X 2g\,d\mu$ بینهایت نیستند می‌توان حذف نمود

$$= \int_X 2g\,d\mu - \limsup\int_X|f_n-f|\,d\mu$$

$$\Rightarrow \limsup\int_X|f_n-f|\,d\mu \le 0$$

(چون $\int 2g<\infty$ آن را می‌توان از دو طرف نامساوی حذف نمود)

از نامساوی فوق نتیجه می‌شود که $\lim \int_X |h_n - h| \, d\mu = 0$ پس ① که قسمت قبل ثابت می‌گردد.

از ۱-۳۳ داریم

$$\left|\int (h_n - h)\right| \le \int |h_n - h| \to 0$$

یعنی $\lim \left|\int h_n - \int h\right| = 0$ یا $\lim \int h_n = \int h$ از روی از قبل ② درست ثابت شد و منظور ③ ثابت است داریم

$$\alpha = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x > 0 \\ \frac{x}{|x|} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

تعریف ۱-۳۵ فرض کنید P یک خاصیت برای نقاط باشد و μ یک اندازه روی σ جبر $\mathfrak{M}$، $E \in \mathfrak{M}$ گوئیم خاصیت P تقریباً همه جا $a.e$ (almost every where) در E برقرار است، اگر مجموعه نقاطی که خاصیت P در آن برقرار نیست دارای اندازه صفر باشد. یعنی اگر $N = \{x \in E : P \text{ در } x \text{ برقرار نیست}\}$ در اینصورت $\mu(N) = 0$ و P در تمام نقاط $E-N$ برقرار است.

در اینصورت گوئیم که خاصیت P $a.e[\mu]$ است.

$\mu\{\bigcup\{x\}\} = \sum \mu(x) = 0$ شمارا

مثال (۱) $[x]$ تقریباً همه جا در R پیوسته است زیرا در نقاط اعداد صحیح که ناپیوسته است شمارا است

مثال (۲) دو تابع حقیقی f و g تقریباً همه جا برابرند اگر و فقط اگر $N = \{x \mid x \in R : f(x) \ne g(x)\}$، $\mu(N) = 0$ در اینصورت می‌نویسیم $f \sim g$ و N یک مجموعه اندازه صفر است

واضح است که در این حالت $\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$

$E - N$

$$E = (E - N) \cup N$$

$$\int_E f = \int_{E-N} f + \int_N f = s\,\mu(E-N) + s\,\mu(N) = s\,\mu(E-N) = \int_{E-N} g + \int_N g = \int_E g$$

$\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ $\qquad \mu(N) = 0$

$$(M \subset N \,,\, M \in \mathfrak{M}) \Rightarrow \mu(M) = 0$$

قضیه ۱-۳۶ فرض کنید $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد، فرض کنید $\mathfrak{M}^*$ مجموعه همه زیرمجموعه‌هایی مانند E از X باشد. بطوری که دو مجموعه مانند A و B از $\mathfrak{M}$ وجود داشته باشد $A \subset E \subset B$ و $\mu(B-A) = 0$. در اینصورت تعریف می‌کنیم $\mu(E) = \mu(A)$ و با این تعریف $\mathfrak{M}^*$ یک σ-جبر در X و μ یک اندازه روی $\mathfrak{M}^*$ است.