فصل اوّل

مفاهیم بنیادی احتمال

برای آنکه رفتار یک ذرّه را بررسی کنیم، باید فضایی را که ذرّه در آن، حرکت می‌کند، درنظر داشته باشیم. می‌دانیم که موقعیّت یک ذرّه با معلوم بودن حال ذرّه (اینکه اینک ذرّه کجاست) و آیندهٔ ذرّه مشخّص می‌شود، پارامتری که این دو وضعیّت را معیّن می‌کند، مُختصّهٔ فضایی یا مکانی (r) است و دیگری چگونه تغییر کردن آن (r) نسبت به زمان و یا همان $\frac{dr}{dt}$ است که سرعت نامیده می‌شود که به جای سرعت به دلیل اهمّیّت جرم در حرکت ذرّه، تکانهٔ خطّی (p) را به کار می‌بریم.

در مکانیک کلاسیک نیوتنی، می‌توان مختصّهٔ مکانی و مختصّهٔ تکانه خطّی را همزمان معیّن ساخت و فضایی را که تار و پود این دو مختصّه باشند، فضای کانونیک (کلاسیک فاز) می‌گویند. بیشترین بحث و بررسی‌های ترمودینامیک کلاسیکی بر این مبنا و در این فضا صورت می‌پذیرد. از طرف دیگر، بنا به اصل عدم قطعیّت هایزنبرگ، نمی‌توانیم این دو مختصّه را همزمان و با قطعیّت تمام معلوم کنیم؛ چرا که بین $\overrightarrow{\Delta r}$ و $\overrightarrow{\Delta P}$ ، رابطهٔ عدم قطعیّت زیر برقرار است؛

$$\Delta P.\Delta r \geq \hbar \qquad (1\text{-}1)$$

تفاوت مهمِّ دیگری که بین دو فضای کلاسیکی و کوانتومی وجود دارد، این است که تعقیب یک ذرّه یا به عبارت دیگر، مطالعهٔ رفتار یک ذرّه در مکانیک کلاسیک با استفاده از قوانین نیوتن صورت می‌گیرد؛ در حالی که در مکانیک کوانتوم از عملگرهای هرمیتی که نمونهٔ بارز آن هامیلتونین H است، استفاده می‌گردد. اگر اربیتال یا تابع موج مربوط به هر ذرّه را با φ نشان دهیم، آنگاه از رابطهٔ شرودینگر (رابطهٔ زیر) انرژی ذرّه را به دست آوریم؛

$$H\varphi = E\varphi \qquad (۲-۱)$$

۱-۱ نیاز به مکانیک آماری در مطالعهٔ رفتار ذرّات

در ابتدای این فصل بیان کردیم که رفتار یک ذرّه را می‌توانیم با استفاده از مکانیک نیوتنی و یا حلِّ معادلهٔ شرودینگر معیّن و مشخّص کنیم؛ امّا اگر تعداد ذرّات، افزایش یابد؛ مثلاً، تعداد مولکول‌های یک گاز را که در فشار و دمای اتمسفر برابر ۳×۱۰^{۱۹} در یک سانتی متر مکعب است، در نظر بگیریم، در آن صورت نمی‌توانیم برای تک تک مولکول‌ها، معادلهٔ حرکت آن را بنویسیم و با حلِّ آن معادله، رفتار هر مولکول را به درستی ارزیابی کنیم. اگر اندرکنش بین مولکولی را در نظر بگیریم، معادلات به اندازه‌ای پیچیده می‌شوند که نمی‌توانیم به راحتی به حلِّ آن‌ها بپردازیم. امکان مطالعهٔ رفتار تک تک مولکول‌های گاز ممکن نیست و باید مسیر دیگری را که همان مکانیک آماری باشد، در پیش گیریم.

می‌توانیم تفاوت در مکانیک کوانتومی با مکانیک آماری را این گونه تصوّر کنیم که در اوّلی به رفتار ذرّات منفرد و در دومی به رفتار جمعی یک مجموعه از ذرّات دستگاه پرداخته می‌شود. حال اگر به زندگی جمعی ذرّات ریز بپردازیم، آنگاه وارد حوزهٔ مکانیک کوانتومی آماری می‌شویم.

بنابراین به این واقعیّت رسیدیم که در بررسی و مطالعهٔ ویژگی‌های ماکروسکوپیک مادّه به روش آماری نیاز است؛ به عبارت دقیق‌تر در تعیین ویژگی کپه‌ای گاز، مثل فشار و دمای آن، نیاز نیست جزئیّات حرکت هریک از مولکول‌ها را بررسی کنیم. کافی است در تحلیل آماری هر دستگاه بس ذرّه‌ای، تنها یک برآورد معقولی داشته باشیم که با احتمال توزیع ذرّات ما بین حالت‌های دینامیکی مختلف ذرّات معلوم می‌گردد. این نگاه به منزلهٔ بی‌قانونی در حرکت ذرّات

نیست؛ بلکه از مفهوم احتمال توزیع ذرّات استفاده می‌کنیم تا برآوردی از حالت‌های دینامیکی ذرّات موجود در یک دستگاه به دست آوریم بدون آن که نیازی باشد در تعیین توزیع احتمال به جزئیّات ساز و کار اندرکنش ذرّات دستگاه بپردازیم.

۱-۲ احتمال

تا حال تجربه کردیم که اگر تاسی را به هوا پرتاب کنیم، بر یکی از وجوه خود بر زمین خواهد نشست که ممکن است یکی از شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ باشد. می‌دانیم یقیناً یکی از شماره های ۱ تا ۶ بروز می‌کند؛ امّا در حین پرتاب کسی قادر نیست بیان کند کدام شماره حتماً بر زمین می‌نشیند.

در کل، هر پدیده‌ای را که قبل از رخداد، نتیجه‌اش معلوم نباشد، ولی نتیجه‌های ممکن آن، مشخّص باشند، یک «آزمایش و یا پدیدهٔ تصادفی» می‌گویند. مجموعهٔ همهٔ نتایج ممکن را «فضای نمونه‌ی» آزمایش تصادفی می‌نامیم و آن را با S نشان می‌دهیم که در مورد نمونهٔ تاس می‌توانیم فضای نمونهٔ S را به صورت زیر بنویسیم،

$$S = \left\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\right\} \tag{۳-۱}$$

هر عضو مجموعهٔ S در رابطهٔ (۱-۳) را یک رویداد یا برآمد می‌نامیم.

مثال دیگری را مطرح می‌کنیم که امکان بروز دو و یا چند رویداد با هم را نشان می‌دهد. بیرون آوردن چند مهرهٔ رنگی از تعداد زیاد مهره‌های درون کیسه‌ایی را در نظر می‌گیریم که فضای نمونهٔ مربوط به آن را می‌توانیم به صورت رابطهٔ زیر بنویسیم،

$$S = \{a, b, c, d, \dots, h\} \tag{۴-۱}$$

حال اگر امکان بروز مثلاً $\{a,b\}$ یا $\{a,b,c\}$ یا... باشد، آنگاه به هر کدام از این زیر مجموعه‌های فضای نمونه، یک پیشامد می‌گوییم؛ البتّه ممکن است پیشامدهایی از مجموعهٔ فضای نمونه در بالا وجود داشته باشند که هیچ رخداد یا برآمد مشترکی با هم نداشته باشند. دراین صورت این پیشامدها را پیشامدهای «ناسازگار» می‌گویند. یک نمونه از پیشامد مطمئن را

می‌توانیم برخورد آدمی در یک محیط مادّی با مولکول اکسیژن در هوا بدانیم. در هرصورت اگر یک فضای نمونه، شامل n عضو باشد، آنگاه تعداد زیر مجموعه‌های آن برابر ۲^{n} می‌باشد.

از طرف دیگر ممکن است به پیشامدهایی برخورد کنیم که حتماً بروز می‌کنند که این نوع پیشامدها را «پیشامدی مطمئن» می‌گویند. همین طور وقتی فضای نمونه‌ای را در نظر بگیریم که تعداد اعضا یا برآوردهای آن، مُتناهی یا قابل شمارش (حتّی نامتناهی) باشد، آن را «فضای نمونه‌ای گسسته» می‌گویند؛ در حالی که تعداد برآمدهای نامتناهی و غیر قابل شمارش باشد، مثل انتخاب تصادفی نقطه‌ای در بارهٔ (۱و۰)، به چنین فضای نمونه‌ای، «فضای نمونه‌ای پیوسته» می‌گویند که در جلوتر، بیشتر به آن می‌پردازیم.

اکنون فضای نمونهٔ S را در نظر می‌گیریم. احتمالاً (P) بروز یک پیشامد (A) را به صورت مقادیر حقیقی نشان می‌دهیم. در تشخیص هر تابع احتمال از سه اصل موضوع معروف به اصول کولموگوروف استفاده می‌کنیم که اعداد حقیقی را به پیشامدها نسبت می‌دهد و عبارتند از:

اصل موضوع اوّل کولموگوروف: احتمال بروز هر پیشامد (A) از فضای نمونهٔ S منفی نیست؛ یعنی؛

$$P(A) \geq ۰ \qquad (۵-۱)$$

اصل موضوع دوم کولموگوروف: تابع احتمال کل، برابر یک است؛

$$P(S) = ۱ \qquad (۶-۱)$$

اصل موضوع سوم کولموگوروف: اگر A_i، دنبالهٔ متناهی از پیشامدهای دو به دو ناسازگار فضای نمونهٔ S باشند، آنگاه:

$$P\left(A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_n\right) = P\left(A_۱\right) + P\left(A_۲\right) + \cdots + P(A_n) \qquad (۷-۱)$$

بنابراین هر تابع حقیقی که از سه اصل موضوع مولموگوروف پیروی کند، به تابع احتمال موسوم می‌باشد.

از طرف دیگر گاهی احتمال بروز یک پیشامد، مشروط به بروز پیشامد دیگری است که این گونه احتمال به «احتمال شرطی» معروف است. یک مثالی در ارتباط با مفهوم احتمال شرطی مطرح می‌کنیم. کیسهٔ مهره‌هایی به رنگ قرمز، سبز و آبی را در نظر می‌گیریم و آنگاه اگر مهره‌ای به رنگ سبز، مدّ نظر ما باشد؛ یعنی، در پی یافتن مهرهٔ سبز و جاسازی آن در جعبه‌ای خاص باشیم، مهرهٔ مطلوب تنها باید مهرهٔ سبز باشد؛ یعنی، احتمال بیرون آمدن مهره، مشروط به سبز بودن آن می‌باشد که این یک نوع احتمال شرطی است.

خودآزمایی: اگر دو تاس به هوا پرتاب شود و شرط کنیم که مجموع شماره‌های دو تاس حتماً کوچک‌تر از ۱۰ باشد، آنگاه احتمال شرطی را بیابید.

با توجّه به آنچه بیان شد، اگر در پی بروز پیشامد A به شرط بروز پیشامد B باشیم، آنگاه احتمال مورد نظر را با درج یک خطّ مستقیم مابین A و B به عنوان احتمال مشروط متمایز می‌کنیم و به صورت $P\left(A\,|\,B\right)$ نشان می‌دهیم.

قضیه: نشان دهید اگر پیشامدهای A و B از لحاظ آماری مستقل باشند، آنگاه:

برهان:

فضای نمونه‌ای S مفروض است که در آن بروز پیشامد B حتمی است؛ امّا پیشامد A ، پیشامدی است که احتمال بروز آن مشروط به بروز حتمی پیشامد B است. می‌دانیم وقتی پیشامد B اتّفاق می‌افتد، در واقع یکی از برآمدهای آن حتماً رخ می‌دهد. حال اگر این رخداد یا برآمد در $A \cap B$ باشد، معلوم است که پیشامد A هم بروز می‌کند. به عبارت دیگر هرچه احتمال بروز پیشامد $A \cap B$ بیشتر باشد، آنگاه احتمال $P(A|B)$ که احتمال بروز رخداد A به شرط بروز رخداد B است، بیشتر می‌شود. از این رو، انتظار داریم که

$$P(A|B) = \alpha P(A \cap B) \qquad (۸-۱)$$

روشن است که اگر به جای پیشامد A خود پیشامد B را در نظر بگیریم، شکّی نیست که

$$P(B|B) = ۱ \qquad (۹-۱)$$

با استفاده از روابط (۱-۸) و (۱-۹) داریم:

$$P(B|B) = \alpha P(B \cap B) \Rightarrow ۱ = \alpha P(B) \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{۱}{P(B)} \qquad (۱۰-۱)$$

رابطهٔ (۱-۱۰) را در (۱-۸) جایگذاری می‌کنیم در نتیجه:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (۱۱-۱)$$

توجّه داشته باشید که

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) \qquad (۱۲-۱)$$

اینک به موضوعی که در قضیه به آن اشاره شد، برمی‌گردیم و آن مستقل بودن پیشامد A و پیشامد B از هم می‌باشد؛ یعنی، احتمال بروز رخداد A که با $P(A)$ نشان داده می‌شود، هیچ ارتباطی به احتمال بروز و یا عدم بروز پیشامد B ندارد؛ پس B هرچه باشد، آنگاه:

$$P(A|B) = P(A) \qquad (۱۳-۱)$$

بنابراین با توجّه به رابطه‌های (۱-۱۱) و (۱-۱۳) چنانچه دو واقعهٔ مستقل آماری باشند آنگاه:

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

و یا

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad (۱۴-۱)$$

که از آنجا به اختصار آن را به صورت رابطهٔ زیر می‌نویسیم،

$$P_{AB} = P_A P_B \qquad (۱۵-۱)$$

نکتهٔ دیگری که در قضیهٔ بالا نهفته است، این است که چنانچه دو پیشامد یا برآمدها مستقل آماری نباشند. به عبارت دیگر به هم وابسته باشند، آنگاه:

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B) \qquad (۱۶-۱)$$

پس اگر دو پیشامد در یک فضای نمونه‌ای ناسازگار باشند و هیچ برآمد مشترکی نداشته باشند و احتمال بروز هر دو پیشامد مثبت باشد، آنگاه دو پیشامد را دو پیشامد وابسته گویند. توجّه به این نکته، مهم است که ناسازگاری دو پیشامد، ارتباطی به مستقل بودن آماری دو پیشامد ندارد؛ زیرا اگر $P\left(A \bigcap B\right) \neq \phi$ باشد، آنگاه:

$$P(A \cap B) = P(\varphi) = ۰ \qquad (۱۷-۱)$$

و اگر A و B دو پیشامد مستقل آماری باشند، از رابطهٔ (۱-۱۴) داریم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

با توجّه به رابطهٔ (۱-۱۷) می‌توانیم بنویسیم،

$$P(A)P(B) = ۰ \qquad (۱۸-۱)$$

بنابراین دو پیشامد ناسازگار را می‌توانیم زمانی به صورت دو پیشامد مستقل آماری در نظر بگیریم که $P(A) = ۰$ یا $P(B) = ۰$؛ یعنی، اگر این دو احتمال صفر نباشند، دو پیشامد A و B ، پیشامدهای مستقل آماری نیستند.

۱-۳ توزیع‌های گسسته احتمال

دنیای میکروسکوپی ما، یک سکه و تاس نیست تا با بیان احتمال شیر ـ خط و یا احتمال آمدن یک شماره از ۱ تا ۶ رخ تاسی بسنده کنیم و احتمال بروز آن را به دست آوریم و به صورت نمایش عددی تابع $P(X)$ آن را نشان دهیم.

برای روشن شدن موضوع، سکّه‌ای را در نظر می‌گیریم که به هوا پرتاب کرده‌ایم. اینک احتمال شیر آمدن سکّه را با ۰ (اشتباه نکنید عدد صفر تنها یک نمایش بر محور است نه این که احتمال شیر آمدن صفر باشد) و احتمال خط آمدن سکّه را با ۱ نشان می‌دهیم. برای راحتی،

رخداد را با X نشان می‌دهیم و فضای نمونهٔ S با دو عضو شیر و خط را متناظر با دو مقدار ۰ و ۱ از محور اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر، نمایش برآمد شیر و خط با X_i و احتمال بروز آن‌ها (چه شیر و چه خط) با $P_i(X_i) = \frac{1}{2}$ بر محور نشان می‌دهیم. ملاحظه می‌کنیم که X_i را می‌توانیم تا بی‌نهایت تعمیم دهیم و این از مزیّت‌های بارز به کارگیری متغیّر تصادفی به صورت بالا می‌باشد.

در حالت کلّی، یک فضای نمونه‌ای S را به $S_n, \dots, S_2, S_1$ برآمد افراز می‌کنیم که هر کدام به یک متغیّر تصادفی $x_n, \dots, x_2, x_1$ منتسب است و احتمال بروز آن‌ها را به ترتیب با $P_n, \dots, P_2, P_1$ نمایش می‌دهیم.

بنابراین، تابعی به نام تابع متغیّر تصادفی X ، یک رخدادی از فضای نمونه‌ای S است. حوزهٔ مقادیر X متناهی (و یا ممکن است شمارا نامتناهی باشد) است. به عبارت دیگر، مقادیر X گسسته است. پس تابع X به گونه‌ای است که حوزهٔ تعریف آن بر فضای نمونهٔ S و حوزهٔ مقادیر آن نقاطی از محور اعداد حقیقی است؛ یعنی، هر برآمد و یا هر پیشامد S با نقطه‌ای از محور اعداد حقیقی متناظر است؛ به طوری که

$$X\left(S_1\right) = x_1, X\left(S_2\right) = x_2, \dots, X(S_m) = x_m, \dots, X(S_n) = x_n \quad (19\text{-}1)$$

در رابطه (۱-۱۹)، متغیّر تصادفی را با X نشان دادیم که مقادیر آن بر محور اعداد حقیقی با $x_n, \dots, x_m, \dots, x_2, x_1$ نمایش داده شده‌اند. چنانچه نقاط $x_n, \dots, x_2, x_1$ را نقاط مادّی تلقّی کنیم، آنگاه $P_n, \dots, P_2, P_1$ را می‌توانیم به ترتیب تابع جرم احتمال این نقاط در نظر بگیریم. در حالت کلّی، تابع جرم احتمال یک متغیّر تصادفی گسستهٔ X تابعی است که هریک از مقادیر $x_n, \dots, x_2, x_1$ را به تابع احتمال متناظر آن $P_n, \dots, P_2, P_1$ نسبت می‌دهد.

مثال: سکّه‌ای را پشت سر هم به هوا پرتاب می‌کنیم. متغیّر تصادفی X را معادل تعداد دفعات پرتاب سکّه که در آن برای اوّلین بار شیر بیاید، می‌گیریم. تعیین کنید:

الف) متغیّر تصادفی X چه مقادیری را اختیار می‌کند؟

ب) احتمال بروز هر مقدار X چقدر است؟

حل:

الف) وقتی یک سکّه را به هوا پرتاب می‌کنیم، احتمال آن می‌رود در همان بار اوّل، شیر بیاید که در این صورت $X = ۱$ است. اگر شیر نیاید، در پرتاب دوم ممکن است شیر بیاید که $X = ۲$ می‌باشد. به همین ترتیب ممکن است تا پرتاب ۳، ۴،...، ۱۰۰۰۰۰ امین بار برای بار اوّل شیر ظاهر شود. پس X همه مقادیر صحیح طبیعی را اختیار می‌کند.

ب) به هرحال، فرض می‌کنیم در یکی از پرتاب‌های بی‌شمار؛ مثلاً در i امین بار برای اوّلین بار شیر ظاهر شود. آنگاه احتمال این پیشامد، $P\left(x=i\right)$ احتمال آمدن شیر در اوّلین بار را می‌دهد. اگر در یک بار انداختن سکّه، H و T به ترتیب معرّف برآمد شیر و برآمد خط باشد، آنگاه وقتی i امین بار شیر می‌آید، به معنی آن است که تا $i - ۱$ دفعه خط آمده است که پیشامد آن به صورت زیر است،

$$TT \ldots HH$$

اینک می‌خواهیم احتمال پیشامد شیر در i امین پرتاب را به دست آوریم. از طرف دیگر می‌دانیم که برای یک سکهٔ سالم در هر پرتاب احتمال شیر آمدن و یا خط آمدن، یکسان و برابر $\frac{۱}{۲}$ است؛ امّا در اینجا، سکّه، بارها به هوا پرتاب شده است. از این رو، احتمال شیر آمدن و احتمال خط آمدن در i دفعه پرتاب $\frac{۱}{۲}$ نیست. بهتر است برای به دست آوردن این احتمال فرض کنیم که احتمال بروز شیر p و احتمال بروز خط q باشد، آنگاه واضح است که

$$p + q = ۱ \qquad (۲۰\text{-}۱)$$

از آنجایی که شیر یا خط آمدن در هر دفعهٔ پرتاب مستقل از پرتاب قبلی آن است، می‌توانیم پرتاب‌ها را مستقل آماری بگیریم و در نتیجه، احتمال کل، برابر حاصل ضرب احتمالات خواهد بود. به عبارت دیگر، اگر چند آزمایش تصادفی جدا از هم که یک فضای نمونه را تشکیل می‌دهند، مفروض باشند، آنگاه اگر $c, b, a, \ldots$ را به ترتیب پیشامدی از فضای اوّل، دوم، سوم و... بگیریم، شرط استقلال آماری پیشامدهای $c, b, a, \ldots$ ایجاب می‌کند که

$$P(a \cap b \cap c \cap \ldots) = P(a)P(b)P(c) \ldots \qquad (۲۱\text{-}۱)$$

از رابطهٔ (۱-۲۱) مشخّص است که احتمال آن که در دو دفعه پرتاب سکّه، هر دو بار خط بیاید برابر حاصل ضرب دو احتمال است؛ یعنی؛

$$P(TT) = P(T)P(T) = qq = q^{۲} \tag{۱-۲۲}$$

با همین روند، چنانچه تا $i - ۱$ دفعهٔ پرتاب سکّه، خط بیاید، آنگاه:

$$P(TT \ldots T) = qq..q = q^{i-۱} \tag{۱-۲۳}$$

امّا فرض کردیم که در پرتاب iام، شیر ظاهر شده است پس

$$P(TT \ldots TH) = qq..qp = q^{i-۱}p$$

$$P\left(x = ۱\right) = q^{i-۱}p \tag{۱-۲۴}$$

رابطهٔ (۱-۲۴) را تابع احتمال متغیّر تصادفی X می‌گویند.

۱- ۴ توزیع دو جمله‌ای

با مطالبی که در بالا بیان نمودیم، حال قصد داریم تا مواردی از آن‌ها را در ارتباط با ساختار مواد توضیح دهیم. می‌دانیم که وقتی به ساختار مواد نگاه می‌کنیم به یکی از کلیدی‌ترین پارامترها که در بررسی ویژگی مواد نیاز است، برمی‌خوریم که همان اسپین است. اگر این مجموعهٔ اسپین‌ها در میدان مغناطیسی خارجی B قرار گیرند، آنگاه گشتاور مغناطیسی هر اسپین ممکن است در جهت میدان و یا در خلاف جهت آن قرار گیرد و در حال حاضر از آن دسته از اسپین‌ها که در این راستاها قرار نمی‌گیرند، صرف نظر می‌کنیم. فرض می‌کنیم که دستگاه اسپین‌ها در حال تعادل قرار دارند؛ در نتیجه مجموعهٔ آماری متشکّل از N دستگاه اسپین‌ها با زمان تغییر نمی‌کنند.

همانند پرتاب سکّه در قسمت ۱-۳ فرض می‌کنیم که احتمال هم جهت بودن گشتاور مغناطیسی با میدان خارجی p باشد و احتمال این که گشتاور مغناطیسی آن در خلاف جهت

میدان خارجی باشد، برابر q باشد. با توضیحات بالا، گشتاور مغناطیسی اسپین یا در جهت میدان است و یا در خلاف جهت آن. پس

$$p + q = ۱ \tag{۲۵-۱}$$

البتّه در غیاب میدان مغناطیسی خارجی، احتمال p با احتمال q یکسان، و برابر $\frac{۱}{۲}$ است؛ یعنی؛

$$p = q = \frac{۱}{۲} \tag{۲۶-۱}$$

در اینجا هم ملاحظه می‌کنیم که همانند پرتاب سکّه، دو امکان وجود دارد که گاهی آن را به آزمونی که نتیجهٔ آن قبولی و یا عدم قبولی است تشبیه می‌کنند و عنوان دو جمله‌ای هم به این دلیل به این دسته از احتمالات اطلاق می‌شود.

در مورد آزمون هم قبولی در آزمون را با E و مردود شدن را با F نشان می‌دهیم. آنگاه اگر شخصی N دفعه امتحان داده باشد و در تمام آزمون‌ها مردود شده باشد، آنگاه دنبالهٔ برآمدهای پیشامد را به صورت $\{FF \dots F\}$ نشان می‌دهیم. حال اگر در یکی از این N آزمون، قبولی (q) داشته باشیم دنباله‌ها به یکی از وضعیّت‌های زیر درخواهد آمد،

$$\{EFF \dots F\}, \{FEF \dots F\}, \dots, \{FF \dots E \dots F\}, \dots \tag{۲۷-۱}$$

به همین ترتیب اگر دو دفعه از N بار آزمون قبول شده باشد، داریم:

$$\{EEFF \dots F\}, \{FEE \dots F\}, \{FEF \dots F\}, \dots \tag{۲۸-۱}$$

با همین روند، چنانچه در n دفعه از N بار آزمون قبولی کسب کرده باشد، آنگاه در $n' = N - n$ دفعه مردودی داشته است. در اینجا دو نکتهٔ مهم وجود دارد: یکی تعداد دفعات قبولی n از N آزمون است که به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} \tag{۲۹-۱}$$

نکتهٔ دیگر احتمال همراه با دنباله‌ایی مثل رابطه‌های (۱-۲۷) و (۱-۲۸) است که می‌توانیم آن را با نسبت دادن احتمال قبولی (E) با p و احتمال مردودی (F) با q به صورت زیر بنویسیم،

$$p^n q^{N-۱} \tag{۱-۳۰}$$

از تلفیق رابطه‌های (۱-۲۹) و (۱-۳۰) احتمال آن که شخص در n دفعه از N بار آزمون قبولی و یا پیروزی کسب کند به دست می‌آید،

$$P(X = n) = \begin{cases} \binom{N}{n} & n = ۰, ۱, ۲, \dots, N \\ ۰ & \text{به ازای سایرمقادیر } n \end{cases} \tag{۱-۳۱}$$

همین قضیه در ارتباط با دستگاه اسپین‌ها هم معتبر است.

برای N گشتاور مغناطیسی دستگاه اسپین‌ها، تعداد گشتاور مغناطیسی رو به بالا را با n و رو به پایین را با n' نشان می‌دهیم، آنگاه:

$$n + n' = N \tag{۱-۳۲}$$

و با توجّه به رابطهٔ(۱-۳۱) پیکربندی در رابطهٔ (۱-۲۹) را به صورت $C_N(n)$ نشان می‌دهیم که

$$C_N(n) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} = \frac{N!}{n!n'!} \tag{۱-۳۳}$$

با این اوصاف رابطهٔ احتمال برای آن که n گشتاور مغناطیسی رو به بالا باشد، عبارت است از:

$$P(n) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} p^n q^{N-n} \tag{۱-۳۴}$$

از طرف دیگر فرض می‌کنیم که اسپین یا رو به بالاست و یا رو به پایین و از این دو حالت خارج نیست؛ یعنی؛

$$p + q = ۱ \tag{۱-۳۵}$$

با این اوصاف اینک دوباره به بسط دو جمله‌ای در ریاضی برمی‌گردیم که به صورت اتّحاد زیر است،

$$(a+b)^m = \sum_k \binom{m}{k} a^m b^{m-k} \qquad (۳۶-۱)$$

آنگاه:

$$(p+q)^m = \sum_n \binom{N}{n} p^N q^{N-n} \qquad (۳۷-۱)$$

با استفاده از رابطه‌های (۱-۳۵) و (۱-۳۷) داریم:

$$\sum_n \binom{N}{n} p^N q^{N-n} = ۱ \qquad (۳۸-۱)$$

که اصل سوم کولموگوروف را تأمین می‌کند چون

$$\sum_n P(n) = ۱ \qquad (۳۹-۱)$$

خودآزمایی: با فرض ۳ و ۲ $= m$درستی اتّحاد (۱-۳۶) را بررسی کنید.

خودآزمایی: تاس همگنی را به تعداد ۸ بار به هوا پرتاب می‌کنیم. احتمال این که ۳ بار شمارهٔ ۴ ظاهر شود را بیابید.

به همین شکل می‌توانیم رابطهٔ دو جمله‌ای (۱-۳۶) را تعمیم دهیم و بسط چند جمله‌ای را بنویسیم. به عبارت دیگر اگر مثلاً از N مهرهٔ در کیسه بخواهیم $N_۱$ مهره را در جعبه a و $N_۲$ مهره را در جعبه b و ... N مهره را در جعبه r جا می‌دهیم آنگاه تعداد کل راه‌های گرفتن مهره ها برابر حاصل ضرب احتمال رخداد آن‌ها می‌باشد. امکان دارد تعداد راه‌ها بیش از تعداد واقعی باشد. از آنجایی که چگونگی ترتیب بیرون آوردن $N_۱$ مهره در گروه a و الی آخر، اهمّیّتی در احتمالات ندارد. آنگاه تعداد کلِّ راه‌های درست زمانی به دست می‌آید که تعداد کلِّ راه‌ها را بر $N_۱!, N_۲!, \dots, N_r!$ تقسیم کنیم به عبارت دیگر با توجّه به تعداد کلِّ راه‌ها که

$$N_۱ + N_۲ + \cdots + N_r = N \qquad (۴۰-۱)$$

است. راه‌های صحیح اشاره شده برابر خواهد بود با

$$\frac{N!}{N_1!N_2!\dots N_r!}=\frac{N!}{\prod_{i=1} N_i!} \qquad (۴۱-۱)$$

و در حالت کلی بسط چند جمله‌ای را به صورت زیر می‌نویسیم،

$$(a+b+\cdots+r)^N=\sum_{a=0}^{N_1}\sum_{b=0}^{N_2}\dots\sum_{r=0}^{N_r}\frac{N!}{\prod_{i=1} N_i!}a^{N_1}b^{N_2}\dots r^{N_r} \qquad (۴۲-۱)$$

۱- ۵ توزیع‌های احتمال

در هنگامی که تعداد ذرّات یا مولکول‌ها بسیار زیاد است، نمی‌توان مثلاً از سرعت هر مولکول گاز صحبت کرد؛ بلکه در عوض باید به مقدار میانگین و به عبارت صحیح‌تر صحبت از مقدار چشمداشتی آن کمّیّت کنیم؛ یعنی، در محاسبات مقدار مورد انتظار یا چشمداشتی n را به دست آوریم و با معرّفی متغیّر تصادفی گسسته n، احتمال $P(n)$را با توزیع گسسته مربوط مقدار میانگین یا مورد انتظار n به دست آوریم،

$$\langle n\rangle=\frac{\sum_{n=0}^{N} nP_n}{\sum_{n=0}^{N} P_n} \qquad (۴۳-۱)$$

با توجّه به رابطهٔ (۱-۳۹) می‌بینیم که مخرج کسر رابطهٔ (۱-۴۳) برابر یک است و رابطه (۱-۴۳) به صورت زیر در می‌آید،

$$\langle n\rangle=\sum_{n=0}^{N} n\,P_n \qquad (۴۴-۱)$$

پس اگر سرعت میانگین مولکول‌های گاز برابر $\langle v\rangle$ باشد، آنگاه به طور یقین سرعت بعضی از مولکول‌ها ممکن است از سرعت میانگین $\langle v\rangle$ بیشتر و یا کمتر باشد. بنابراین باید انحراف از $\langle v\rangle$ هم در نظر گرفته شود که در ریاضی به انحراف معیار معروف است.

از طرف دیگر گاهی مهم نیست انحراف اشاره‌شده؛ یعنی، $v-\langle v\rangle$ مثبت و یا منفی باشد که این قضیه را می‌توانیم با مجذور کردن $v-\langle v\rangle$ که به صورت $(v-\langle v\rangle)^2$ نوشته

می‌شود، حل نماییم. با این توضیحات، میانگین مربّع انحراف یا واریانس n که به صورت $\sigma_n^{۲}$ نوشته می‌شود، به دست می‌آید که معیاری برای پراکندگی توزیع می‌باشد و جذر واریانس، همان انحراف معیار است که با δ_n نشان داده می‌شود. با این توضیحات می‌توانیم رابطه‌های مربوط به واریانس و انحراف معیار را به دست آوریم با فرض رابطهٔ واریانس در زیر شروع می‌کنیم؛

$$\delta_n{}^{۲} = \sum_{n=۰}^{N} (n - \langle n \rangle)^{۲} P_n \qquad (۱-۴۵)$$

چون

$$(n - \langle n \rangle)^{۲} = n^{۲} - ۲n\langle n \rangle + \langle n \rangle^{۲}$$

و

$$\sum_{n=۰}^{N} (n - \langle n \rangle)^{۲} P_n = \sum_{n=۰}^{N} n^{۲} P_n - \langle n \rangle^{۲}$$

خودآزمایی: نشان دهید که

$$\sum_{n=۰}^{N} n^{۲} P_n = \langle n^{۲} \rangle$$

رابطهٔ واریانس معادل می‌شود با

$$\delta_n{}^{۲} = \langle n^{۲} \rangle - \langle n \rangle^{۲} \qquad (۱-۴۶)$$

بنابراین واریانس تنها با چشمداشتی n و مجذور آن معلوم می گردد و از آنجا انحراف نسبی به دست می‌آید.

مثال: با توجّه به مطالب در قسمت (۱-۵) نشان دهید که انحراف نسبی عبارت است از:

حل: با استفاده از رابطه‌های (۱-۳۶) و (۱-۴۶) می‌توانیم مقدار میانگین n را به صورت زیر به دست آوریم،

$$\langle n\rangle = \sum_{n=0}^{N} n\,P_n = \sum_{n=0}^{N} n\frac{N!}{n!\,(N-n)!}p^n q^{-n}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{N!}{\left(n-1\right)!\,(N-n)!}p^n q^{N-n}$$

$$\Rightarrow \langle n\rangle = \sum_{n=1}^{N} \frac{N(N-1)!}{\left(n-1\right)!\left(N-1-n+1\right)!}p\,p^{n-1}q^{N-1-n+1}$$

$$= Np\sum_{n=1}^{N} \frac{N(N-1)!}{\left(n-1\right)!\left(N-1-n+1\right)!}p\,p^{n-1}q^{N-1-n+1}$$

از طرف دیگر با فرض $N-1=m$ و $n-1=k$ می‌توانیم دریابیم که

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\left(N-1\right)!}{\left(n-1\right)!\left[\left(N-1\right)-\left(n-1\right)\right]!}\,p^{n-1}q^{\left(N-1\right)-\left(n-1\right)} =$$

$$\sum \frac{m!}{k!\,(m-k)!}\,p^m q^{m-k} = 1$$

در نتیجه:

$$\langle n\rangle = NP \qquad (۱-۴۷)$$

خودآزمایی: نشان دهید که

$$\langle n^2\rangle = \sum_{n=0}^{N} n^2 P_n = \langle n\left(n-1\right)\rangle + \langle n\rangle \qquad (۱-۴۸)$$

با استفاده از رابطه‌های (۱-۴۶)، (۱-۴۷) و (۱-۴۸) داریم،

$$\delta_n{}^2 = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = \langle n\left(n-1\right)\rangle + \langle n\rangle - \langle n\rangle^2$$

$$\Rightarrow \delta_n{}^2 = P^2 N\left(N-1\right) + PN - P^2N^2 = NP$$

و یا

$$\delta_n{}^2 = Npq$$

در نتیجه انحراف نسبی و یا میزان انحراف کسر $\left(\frac{n}{\mathrm{N}}\right)$ از مقدار مورد انتظار p را به صورت رابطهٔ زیر به دست می‌آوریم،

$$\delta_n = \sqrt{{\delta_n}^{۲}} = \sqrt{Npq} = \sqrt{\frac{N^{۲}pq}{N}} = N\sqrt{\frac{pq}{N}}$$

که

$$\frac{\delta_n}{N} = \sqrt{\frac{pq}{N}} \qquad (۴۹\text{-}۱)$$

اینک با استفاده از اصول کولموگوروف، نتیجه می‌گیریم که تابع $p(x)$ هنگامی یک تابع احتمال است که دارای ویژگی‌های زیر باشد:

۱) $p(x) > ۰$

۲) $\sum p(x) = ۱$

۳) $f(X = x) = p(x)$

خودآزمایی: تابع احتمال توزیع، مجموع شماره‌های دو تاسی را که به هوا پرتاب شده‌اند، به دست آورد.

مثال: سکّه‌ای را چهار بار به هوا پرتاب کرده‌ایم. فرمولی که چنین تابع توزیع احتمالی را بیان کند، به دست آورید.

حل: تعداد برآوردهای فضای نمونه برابر ۱۶ = $۲^{۴}$ می‌باشد که در واقع مَخرج کسر تابع احتمال را خواهد داد. به منظور به دست آوردن تعداد راه‌ها و یا آمدن شیر می‌توانیم آن را از ۴ بار پرتاب سکّه به دست آوریم که؛ مثلاً، در x بار شیر آمدن داریم،

$$p(x) = \frac{\binom{۴}{x}}{۱۶} \qquad , x = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴ \qquad (۵۰\text{-}۱)$$

توزیع فراوانی $F(x)$ از متغیّر تصادفی گسسته x با توزیع احتمال $p(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$F(x) = p(X) = \sum_{t \leq x} p(t) \qquad (۵۱\text{-}۱)$$

که تابع توزیع فراوانی برای چند مقدار $x = m$ را در زیرآورده‌ایم،

$$f(x=m)=\begin{cases} ۰ & m<۰ \\ \frac{۱}{۳} & ۰\leq m<۱ \\ \frac{۵}{۶} & ۱\leq m<۳ \\ ۱ & m\geq ۳ \end{cases} \qquad (۱-۵۲)$$

خودآزمایی: رابطهٔ (۱-۵۲) را به دست آورید.

امّا در این مثال $x=۰,۱,۲,۳,۴$ است که در آن

$$p(x)=\frac{\binom{۴}{۰}}{۱۶}=\frac{۱}{۱۶} \quad , \quad F\left(x=۰\right)=p\left(۰\right)$$

$$F\left(۱\right)=p\left(۰\right)+p\left(۱\right)\ ,p\left(۱\right)=\frac{\binom{۴}{۱}}{۱۶}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow F\left(۱\right)=\frac{۵}{۱۶}$$

$$F\left(۲\right)=p\left(۰\right)+p\left(۱\right)+p\left(۲\right)=\frac{۱۱}{۱۶}$$

$$F\left(۳\right)=p\left(۰\right)+p\left(۱\right)+p\left(۲\right)+p\left(۳\right)=\frac{۱۵}{۱۶}$$

$$F\left(۴\right)=p\left(۰\right)+p\left(۱\right)+p\left(۲\right)+p\left(۳\right)+p\left(۴\right)=۱$$

بنابراین

$$F(x)=\begin{cases} ۰ & x<۰ \\ \frac{۱}{۱۶} & ۰\leq x<۱ \\ \frac{۵}{۱۶} & ۱\leq x<۲ \\ \frac{۱۱}{۱۶} & ۲\leq x<۳ \\ \frac{۱۵}{۱۶} & ۳\leq x<۴ \\ ۱ & x\geq ۴ \end{cases}$$

با استفاده از آن در می یابیم که به عنوان نمونه:

$$p\left(۲\right) = F\left(۲\right) - p\left(۱\right) - p\left(۰\right) = \frac{۱۱}{۱۶} - \frac{۵}{۱۶} - \frac{۱}{۱۶} = \frac{۵}{۱۶}$$

خودآزمایی: برای ترسیم نمودار تابع توزیع احتمال $p(x)$ بر حسب x ، مختصّات نقاط را به ازای مقادیر مختلف$\left(x, p(x)\right)$ به دست آورید و آن را در دستگاه دو بعدی که محور افقی آنx و عمودی آن $p(x)$ است، رسم نمایید.

دقّت کنید که در واقع باید نقاط را به جای خطٍّ پیوستار در نظر گرفت؛ چون با مقادیر گسسته رو به رو هستیم. در حالت کلّی اگر رخدادها را از ۱ تا m شماره‌گذاری کنیم و تعداد دفعات متناظر بروز هر کدام را با $n_۱, n_۲, \dots, n_m$ نشان دهیم که $n_۱ < n_۲ < \cdots < n_m$ آنگاه تابع توزیع گسسته را به صورت زیر به دست می‌آوریم،

$$p(n_i) = \frac{\Omega(n!)}{\sum_{i=۱}^{m} \Omega(n!)} \qquad (۵۳\text{-}۱)$$

اگر اندازهٔ گسستگی به قدری کوچک باشد که از این تفاوت بتوانیم چشم‌پوشی کنیم، آنگاه تابع توزیع در بالا برای تابع توزیع‌های پیوسته هم به کار می‌آید که در آن

$$p(x) = \frac{\Omega(n)}{\int_a^b \Omega(\acute{x})d\acute{x}} \qquad (۵۴\text{-}۱)$$

که a و b حدود تغییرات متغیّر تصادفی می‌باشد. در اینجا مقدار میانگین مثلاً x را به صورت زیر می‌نویسیم،

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx}$$

ولی بدلیل آنکه احتمال کل برابر است با:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = ۱$$

می‌توانیم رابطه‌ی $\langle x \rangle$ را بصورت رابطه‌ی مهم زیر بازنویسی کنیم،

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x) dx \tag{۵۵-۱}$$

۱-۶ گشت تصادفی

بدیهی است که حرکت مولکول‌های یک گاز، یک حرکت منظّم نیست. یک مولکول گاز یا ذرّه‌ای را در نظر می‌گیریم که حرکت منظّمی در طول مسیر حرکتش ندارد. به عبارت دیگر، ذرّه در پایان هر فاصلهٔ زمانی t مسافت L را به راست یا به چپ نقطه آغازین حرکتش می‌پیماید. این شیوهٔ حرکت ذرّه را همانند گام‌های یک فرد موج‌گرفته تلقّی می‌کنیم که کنترلی در گام برداشتن خود ندارد. به عبارت دیگر، گام بعدی او متأثّر از گام ماقبلِ او نیست. پس تاریخچهٔ هر گام، نقشی در گام گرفتن به چپ یا به راست فرد ندارد. احتمال گام برداشتن در جهت مثبت را با حرف p و احتمال گام برداشتن به سمت چپ را با حرف q نشان می‌دهیم؛ ولی در هر صورت رابطهٔ $p + q = ۱$ برقرار است. حال اگر از N گام، n گام به سمت راست و $n' = N - n$ به سمت چپ برداشته شود، آنگاه در نتیجه با احتمال دو جمله‌ای $p_n(N)$ سر و کار داریم. فرد مورد نظر می‌تواند n گام که اندازهٔ فاصلهٔ هر گام برابر L است را به سمت راست بردارد که در این حالت، کلِّ تغییر مکان آن به سمت راست برابر nL خواهد بود و به همین شکل کلِّ تغییر مکان آن به سمت چپ برابر $\acute{n}L$ می‌باشد. پس تغییر مکان کلِّ ذرّه پس از N فاصلهٔ زمانی برابر است با

$$x(n) = (n - n')L$$

و یا

$$x(n) = \left(۲n - N\right) L \tag{۵۶-۱}$$

مقدار مورد انتظار تغییر مکان ذرّه (یا در اینجا شخص) بعد از N گام را می‌توانیم بر حسب $\langle n \rangle$ به دست آوریم به طوری که

$$\langle x(n) \rangle \left\langle \left(۲n - L\right) L \right\rangle = \left(۲p - ۱\right) NL \tag{۵۷-۱}$$

بدیهی است که اگر شخص فقط به سمت راست حرکت کند، تغییر مکان برابر تعداد گام‌ها (N) در اندازهٔ فاصله هر گام (L) می‌باشد که برابر NL است و در رابطهٔ (۱-۵۷) می‌بینیم که با $p = ۱$ مقدار مورد انتظار تغییر مکان برابر است با

$$\langle x(n) \rangle = NL \qquad (۱-۵۸)$$

از طرف دیگر، چنانچه حرکت ذرّه فقط به سمت چپ باشد، تغییر مکان آن، عبارت است از $-NL$ این را می‌توانیم با $p = ۰$ در رابطهٔ (۱-۵۷) پیدا کنیم. موضوع جالب دیگر در رابطهٔ (۱-۵۷) هنگامی است که با $p = \frac{۱}{۲}$ مقدار مورد انتظار تغییر مکان صفر است. بنابر این، چنانچه احتمال آن که ذرّه به سمت راست برود، دقیقاً برابر احتمال به چپ رفتن آن ذرّه باشد، آنگاه تغییر مکان ذرّه، صفر است.

اینک انحراف معیار و واریانس را در نظر می‌گیریم که عبارت است از:

$$\delta_x^{۲} = \langle [x(n) - \langle x(n) \rangle] \rangle \qquad (۱-۵۹)$$

خودآزمایی: با جایگذاری رابطه‌های (۱-۵۶) و (۱-۵۷) در (۱-۵۹) نشان دهید که

$$\delta_x^{۲} = ۴NP\left(۱ - p\right)\delta^{۲} = ۴Npq\delta^{۲} \qquad (۱-۶۰)$$

وقتی ذرّه تنها به سمت راست (که $p = ۱$ و $q = ۰$ است) یا به سمت چپ ($p = ۰$ و $q = ۱$) پیش رود، واریانس تغییر مکان، صفر می‌باشد.

خودآزمایی: تحقیق کنید که بیشترین مقدار انحراف معیار برابر $\frac{L}{\sqrt{N}}$ است.

در پیوست (الف) مطالب بالا را تعمیم دادیم و از آنجا به رابطهٔ مشهور (۱ـ۶۱) می‌رسیم،

$$p(x) = \frac{۱}{\delta\sqrt{۲\pi}} e^{-(x-X)/۲\delta^{۲}} \qquad (۱-۶۱)$$

که

$$X = N\langle L\rangle \quad \text{و} \quad \delta^{۲} = N\,\langle(\Delta N)^{۲}\rangle \tag{۱-۶۲}$$

مشاهده می‌شود که انتگرال‌های مقادیر مورد انتظار، همگرا هستند.

خودآزمایی: با استفاده از رابطهٔ (۱-۶۱) نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = ۱ \tag{۱-۶۳}$$

و

$$\langle(x - X)^{۲}\rangle = \delta^{۲} \tag{۱-۶۵}$$

رابطهٔ (۱-۶۳) تابع توزیعی است که به تابع «توزیع بهنجار» یا «توزیع گوسی» معروف است و در شکل (۱ـ۱) با توجّه به پیوست «الف»، آن را نشان داده‌ایم.

با این تابع توزیع می‌توانیم رفتار دستگاهی را که شامل تعداد بسیار زیادی از عوامل تصادفی کوچک و مستقل از هم است، معیّن کنیم. توجّه داشته باشیم که در اوایل این قسمت علی رغم کوچکی اندازهٔ هر گام، تعداد گام‌ها را بسیار زیاد فرض کردیم که اگر با

$$L = \frac{\delta}{\sqrt{N}} \tag{۱-۶۶}$$

آن را کوچک‌تر اختیار کنیم، آنگاه تغییر مکانِ کل، برابر خواهد بود با

$$x = \frac{\delta\left(۲n-N\right)}{\sqrt{N}} \tag{۱-۶۷}$$

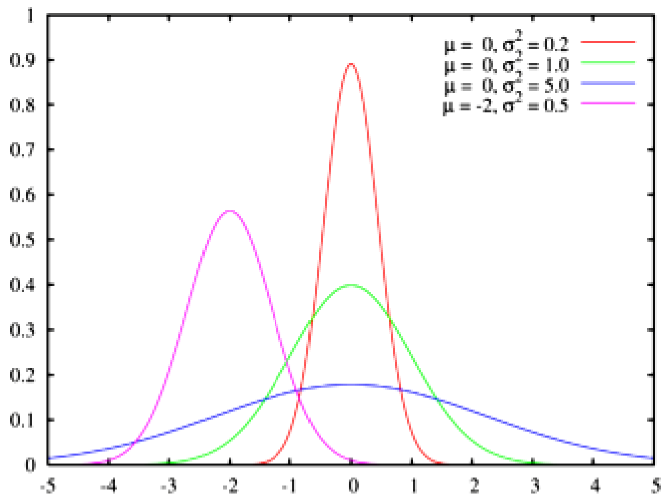
و یا:

$$n = \frac{۱}{۲}N + \frac{x}{۲\delta}\sqrt{N} \tag{۱-۶۸}$$

از این رو احتمال تغییر مکان عبارت است از:

$$P_n(N) = \frac{N!\left(\frac{۱}{۲}\right)^{N}}{\left(\frac{N}{۲}+\frac{x}{۲\delta}\sqrt{N}\right)!\left(\frac{N}{۲}-\frac{x}{۲\delta}\sqrt{N}\right)!} \tag{۱-۶۹}$$

تابع احتمال



شکل (۱ - ۱) در حد مقادیر بزرگ N، چگالی احتمالی یک توزیع نرمال را می دهد.

و با رابطه های (۱-۶۱) و رابطه‌ی

$$P_n(N)dn \to P(x)dx \qquad (۱-۷۰)$$

می توانیم به یک رابطه‌ی دیگر دست بیابیم

$$P(x) = lim_{N\to\infty}\left(\left(\frac{\sqrt{N}}{۲\delta}\right)P_n(N)\right) \qquad (۱-۷۱)$$

$$= lim_{N\to\infty}\left(\frac{\frac{N}{۲}\left(\frac{\sqrt{N}}{۲\delta}\right)N!}{\left(\frac{N}{۲}+\frac{x}{۲\delta}\sqrt{N}\right)!\left(\frac{N}{۲}-\frac{x}{۲\delta}\sqrt{N}\right)!}\right)$$

برای تعیین مقدار تابع در رابطه‌ی (۱-۷۱) و به ازای مقادیر بزرگ N می توانیم فرمول مجانبی تابع فاکتوریل را بکار بریم؛

$$n! \approx \sqrt{۲\pi n n^n e^{-n}} \quad ,n > ۱ \qquad (۱-۷۲)$$

خودآزمایی: درستی رابطه‌های (۱ ـ ۷۱) و (۱-۸۶) را بررسی کنید.

رابطهٔ (۱-۷۲) همان فرمول «استرلینگ» می‌باشد و از آنجایی که فرمول استرلینگ کاربردهای بسیار زیادی را در ترمودینامیک آماری دارد، در قسمت بعدی مفصّل‌تر به آن می‌پردازیم.

۱-۷ تقریب استرلینگ

وقتی به تعداد اتم‌های در واحد سانتی متر مکعب سیلیسیم که حدود $۱۰^{۱۶}$ و یا به فاکتوریل اعداد بسیار بزرگی شامل تعداد اتم‌ها در یک مول رو به رو می‌شویم، تنها با استفاده از تقریب استرلینگ می‌توان به مطالعهٔ آن‌ها بپردازیم. چرا که با استفاده از لگاریتم، تغییرات بسیار شدید $N!$ به گونه‌ای کُند می‌شود به طوری که بدون تغییری در مفاهیم آن‌ها، تنها عمل محاسبات راحت‌تر می‌گردد و از آنجا به روابط مفیدتری می‌رسیم که در این کتاب بارها و بارها مورد استفاده قرار می‌گیرند، ابتدا از

$$N! = ۱ \times ۲ \times \ldots \times N \tag{۱-۷۳}$$

شروع می‌کنیم با گرفتن لگاریتم از این رابطه به نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

$$Ln\,N! = Ln\,۱ + Ln\,۲ + \cdots + Ln\,N = \sum_{n=۱}^{N} Ln\,n \tag{۱-۷۴}$$

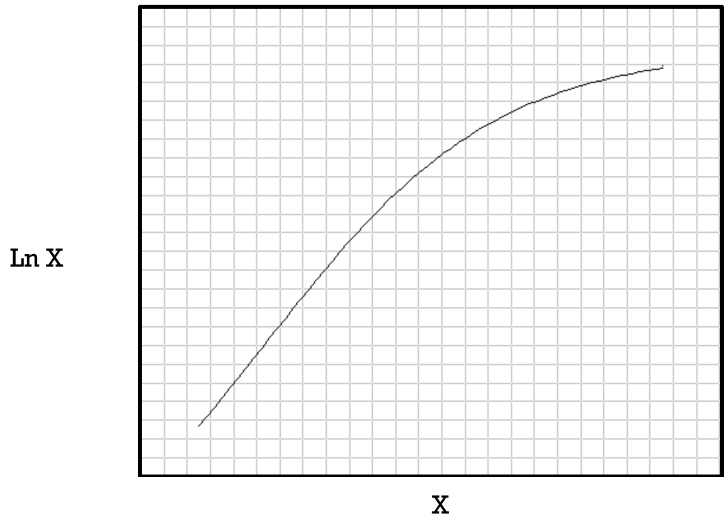
نموداری همانند زیمانسکی در شکل (۱-۲) برای $Ln\,x$ بر حسب x ترسیم می نماییم و آنگاه به ازای مقادیر بسیار بزرگ n می‌توانیم مجموع مساحت مستطیل‌های در شکل را با کمی اختلاف برابر مساحت زیر نمودار شکل (۱-۲) در نظر بگیریم. چون مساحت هر مستطیل برابر طول × عرض و یا $n\,Ln\,n$ می‌باشد، در نتیجه داریم:

$$Ln\,N! \approx \int_{۱}^{N} Ln\,x\,dx \approx NLn\,N - N$$

بنابراین به ازای $N \gg ۱$ رابطهٔ مهم را خواهیم داشت:

$$Ln\,N! \cong N\,Ln\,N - N \tag{۱-۷۵}$$

رابطهٔ بسیار مهم (۱-۷۵) که به رابطهٔ استرلینگ معروف است، به دفعات بسیار زیادی در بحث و بررسی به کار می‌آید که در فصل‌های بعد از آن بیشتر استفاده می‌کنیم.



شکل ۱-۲ نمودار $Ln\ x$ بر حسب x

۱- ۸ توزیع نمایی

تا اینجا دیدیم که متغیّر تصادفی میتواند گسسته و یا پیوسته باشد. همان طوری که اشاره کردیم، به عنوان نمونه می‌توانیم توزیع فواصل در بین نقطه‌های واقع بر خطّی اشاره کنیم که به طور تصادفی اختیار می‌شوند. فرض می‌کنیم چگال احتمال چنین توزیعی و یا امثال آن با $p(t)$ معلوم شود که

$$\int_{0}^{\infty} p(t)dt = 1 \qquad (۷۶-۱)$$

در این صورت مقدار انتظاری $\langle t \rangle$ و واریانس δ_t^2 را به ترتیب برای وضعیّتی که پیوستگی حاکم است به صورت روابط زیر بیان می‌نماییم؛

$$\langle t \rangle = \int_{0}^{\infty} t\, p(t)\, dt \qquad (۷۷-۱)$$

و

$$\delta_t^2 = \int_{0}^{\infty} (t - \langle t \rangle)^2\, p(t)\, dt$$

و یا

$$\delta_t^{2} = \langle t^{2} \rangle - \langle t \rangle^{2} \qquad (۷۸-۱)$$

اینک مطابق پیوست (ب) احتمال پیدا نشدن نقطه‌ای در فاصله x برابر است با

$$P(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \qquad (۷۹-۱)$$

رابطهٔ (۱ـ۷۹) به ما تابع توزیع نمایی را می‌دهد که در تابع توزیع گسستهٔ پواسون بکار می‌آید.

خودآزمایی: نشان دهید که $\langle x \rangle = \lambda$ و $\delta_x = \lambda$ است. این نشان می‌دهد که اندازهٔ فاصلهٔ بین نقاط به طور تصادفی توزیع شده است.

۱-۹ توزیع پواسون

در قسمت (۱-۸) بیان کردیم که احتمال نیافتن نقطه‌ای در طول x با رابطهٔ (۱-۷۹) به دست می‌آید. اکنون در پی یافتن احتمالی در طول خطّی هستیم که معادل نیافتن نقطه در فاصلهٔ x است. با این توضیحات احتمال یافتن یک نقطه در فاصلهٔ x' و $x' + dx'$ را می‌توانیم پیدا کنیم. برای این منظور بررسی‌های بخش ۱-۸ را به صورت روابط زیر پی می‌گیریم؛

$$P_1\left(\frac{x}{\lambda}\right)' = \int_0^x P_0\left(\frac{x-x'}{\lambda}\right) P_1\left(\frac{x'}{\lambda}\right) P_0\left(\frac{x'}{\lambda}\right)\, dx'$$
$$= \int_0^x e^{-(x-x')/\lambda}\, \frac{1}{\lambda}\, e^{-x/\lambda}\, dx'$$

و یا

$$P_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{x}{\lambda}\, e^{-x/\lambda} \qquad (۸۰-۱)$$

همین روند را برای احتمال یافتن یک نقطه در گسترهٔ $x' + dx'$ و x' و نقطهٔ دیگر در $x'' + dx''$ و x'' به کار می‌بریم که

$$P_2\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \int_0^x P(x'') P_1\left(\frac{x-x''}{\lambda}\right) dx'' \qquad (۸۱-۱)$$

و نیز می‌توانیم احتمال وجود فقط n نقطه در طول x را به دست آوریم و در نتیجه خواهیم داشت:

$$P_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \int_{\cdot}^{x} P(x)\, P_{n-۱}\left(\frac{x-x}{\lambda}\right) \qquad (۸۲\text{-}۱)$$

خودآزمایی: نشان دهید که حاصل انتگرال رابطهٔ (۱-۸۲) برابر رابطهٔ (۱-۸۳) است.

$$P_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n}{n!} e^{-x/\lambda} \qquad (۸۳\text{-}۱)$$

ملاحظه می‌کنیم که تابع توزیع (۱-۸۳) یک تابع توزیع گسسته است و به تابع «توزیع پواسون» معروف است و به صورت رابطهٔ زیر هم نوشته می‌شود،

$$P_{(n)} = \frac{a^n e^{-n}}{n!}, \qquad n = ۰, ۱, ۲, \ldots \qquad (۸۴\text{-}۱)$$

این توزیع در گسیل ذرّات از یک چشمهٔ رادیواکتیو در زمان معیّن، ورود مشتریان به یک مغازه در زمان T، توزیع کهکشان‌ها در فضا و موارد بسیار دیگر به کار رفته است.

۱- ۱۰ ضرایب نامعیّن لاگرانژ

وقتی سیستمی شامل N ذرّه باشد و در بررسی حرکت انتقالی و حرکت‌های انتقالی – چرخشی هر ذرّه در فضا به ترتیب به ۳ و ۶ مختصّه نیاز می‌باشد، این مختصّه‌ها را می‌توانیم همان درجهٔ آزادی قلمداد کنیم. حال اگر N ذرّه را ذرّات بدون برهم کنش فرض کنیم به $۳N$ و یا $۶N$ مختصّه نیاز خواهد بود تا موقعیّت ذرّات را مشخّص کنیم و پیداست که این تعداد، بسیار بیشتر از آن است که بتوان با چارچوب‌های کارتزینی، کروی و یا استوانه‌ای به بررسی حرکت آن‌ها بپردازیم. بنابراین مختصهٔ تعمیم‌یافته q_k را معرّفی می‌کنیم و به تغییر شکل دستگاه از q_k به $q_k + \delta q_k$ و یا $q_k + dq_k$ می پردازیم.

خودآزمایی: دستگاه را شامل تنها یک ذرّه فرض کنید و مختصه‌ی x ، y و z در فضای ذرّه را بر حسب مختصّات تعمیم یافته بنویسید.

خودآزمایی: نیروهای تعمیم یافته مرتبط با مختصهٔ تعمیم یافتهٔ q_k را به صورت زیر به دست آورید.

$$Q_k = \sum_i \left(F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) \tag{۸۵-۱}$$

بر حسب مختصّات تعمیم‌یافته، رفتار ذرّه را بررسی کردیم. به عبارتی معادلهٔ دیفرانسیلی حرکت را به دست آوریم که این کار به وسیلهٔ لاگرانژ صورت پذیرفته است و تابع لاگرانژ (L) را بر حسب انرژی جنبشی (T)و پتانسیل (V) تعریف می کنیم،

$$L\left(q_k, \dot{q}_k\right) = T\left(\dot{q}_k\right) - V(q_k) \tag{۸۶-۱}$$

و از آنجا به معادله‌ی لاگرانژ می رسیم،

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \tag{۸۷-۱}$$

از طرف دیگر، اگر نیروهای غیر پایا Q'_k نظیر نیروی اصطکاک حضور داشته باشد، آنگاه رابطهٔ (۱-۸۷) را به صورت رابطهٔ زیر تکمیل می‌نماییم،

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = Q'_k + \frac{\partial L}{\partial q_k} \tag{۸۸-۱}$$

ضریب به کارگیری لاگرانژ، این است که تابع لاگرانژ L بر حسب انرژی معرّفی شده‌اند که کمّیّت‌های نرده‌ای هستند و همان طور که می‌دانیم کار کردن با کمّیّت‌های نرده‌ای، بهتر از کار کردن با کمّیّت‌های برداری است و این از مزیّت‌های معادلهٔ انرژی است.

از طرف دیگر، شرایط حال و آیندهٔ ذرّه به گونه‌ای است که فضای تکانهٔ خطّی از اهمّیّت بسزایی برخوردار است. از این رو، این مهم را در تابع هامیلتونی (H) می‌گنجانیم که به صورت رابطهٔ زیر با تابع لاگرانژ مرتبط می‌شود؛

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L \tag{۸۹-۱}$$

و از آنجا q_k و تکانهٔ p_k را بر حسب دیگری به دست می‌آوریم که به معادلات استاندارد هامیلتون در مورد حرکت معروف‌اند، عبارتند از:

$$\dot{q_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \tag{۹۰-۱}$$

$$\dot{q_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \tag{۹۱-۱}$$

در مطالعهٔ رفتار دستگاه با N ذرّه باید قیدهایی را مدّ نظر قرار دهیم. یکی از قیدها که عمدتاً در دستگاه N ذرّه‌ای در نظر گرفته می‌شود، این است که تعداد کلّ ذرّات، برابر N است؛ یعنی؛

$$\sum_i n_i = N \tag{۹۲-۱}$$

اگر این دستگاه منزوی N ذره ای به گونه ای باشد که انرژی $n_۱$ ذره $E_۱$، انرژی $n_۲$ ذره $E_۲$ والی آخر. آنگاه با فرض ذراتی بدون برهمکنش ، انرژی کل دستگاه E عبارت است از:

$$\sum_i n_i E_i = E \tag{۹۳-۱}$$

بنابراین باید در مطالعهٔ رفتار ذرّه، در کنار معادلهٔ حاکم بر ذرّه، معادلات قیدی را حتماً در نظر بگیریم و اگر تابع اولی را با f و تابع قیدی را با φ معرّفی کنیم، آنگاه باید قادر باشیم تا معادلهٔ زیر را حل کنیم،

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} = ۰, \qquad i = ۰, ۱, ۲, \dots, N \tag{۹۴-۱}$$

حال چنانچه از N ذره دستگاه به تعداد $n_۱$ ذره با انرژی $E_۱$، $n_۲$ ذره با انرژی $E_۲$ و ... جایگاه هایی را اشغال کرده باشند آنگاه (در فصل های بعدتر بیشتر به این موارد خواهیم پرداخت) داریم:

$$f\left(n_۱, n_۲, \dots, n_m\right) = \frac{N!}{n_۱!\, n_۲! \dots n_m!} \tag{۹۵-۱}$$

که با توجه به بزرگ بودن N و $n!$ می‌توانیم با استفاده از تقریب استرلینگ رابطه‌ی

(۱-۹۵) را بصورت زیر بازنویسی کنیم،

$$Ln\, F = Ln\, N! - \left(Ln\, n_1! + Ln\, n_2! + \cdots + Ln\, n_m!\right)$$
$$\cong (N\, Ln\, N - N) - \left(n_1 Ln\, n_1 - n_1 + \cdots + n_m Ln\, n_m - n_m\right)$$

که با استفاده از رابطه‌ی (۱-۹۲) داریم:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_m = N \qquad (۱-۹۶)$$

و بدین ترتیب

$$Ln\, f = N\, Ln\, N - \sum_{i=1}^{m} n_i\, Ln\, n_i$$

اینک بیشینه‌ی $Ln\, f$ را با قید (۱-۹۲) و مضارب لاگرانژ که در روابط (۱-۹۱) مطرح شده بدست می آوریم و دیدیم که

$$dLn\, f + \lambda \sum dn_i \qquad (۱-۹۷)$$

که در آن

$$= d_N Ln\, N + N\frac{d_N}{N} - \sum_i \left(dn_i\, Ln\, n_i + n_i \frac{dn_i}{n_i}\right)$$
$$\Rightarrow d\, Ln\, f = d(N\, Ln\, N - \sum_i n_i\, Ln\, n_i)$$

حال اگر فرض کنیم که تعداد ذرات (N) ثابت است $(\sum n_i = N = cte)$ آنگاه:

$$\sum_{i=1}^{m} (Ln\, n_i + \lambda)\, dn_i = 0 \qquad (۱-۹۸)$$

و یا

$$n_i = e^{-\lambda} \qquad (۱-۹۹)$$

در اینجا فعلاً به انرژی نپرداختیم. آنچه برای ما مهم بوده است، توجّه دادن خواننده به وجود و نقش قید یا قیدها در معادلات حرکت است که باید در بررسی رفتار ذرّات دستگاه در نظر گرفته شوند.

مسائل فصل اوّل

۱-۱) معلوم کنید به چند طریق می‌توان ۴ لامپ قرمز، ۶ لامپ سبز و ۸ لامپ آبی بر سر در مغازه‌ای با تنها ۱۸ کلید برق روشن ساخت.

۱-۲) یک سکّه را سه دفعه به هوا پرتاب می‌کنیم: الف) فضای نمونهٔ آن را بنویسید.
ب) احتمالی که حدّ اقل یک بار خط بیاید را بیابید.

۱-۳) دو تاس را دو دفعه با هم به هوا پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که مجموع شماره‌های تاس ۷ و ۱۱ بیاید را بیابید.

۱-۴) تابع چگالی احتمال متغیّر تصادفی X به صورت زیر داده شده است:

$$p(x) = \begin{cases} ۰ & \text{سایرنقاط} \\ \frac{۱}{۳}x^{۳} & -۱ < x < ۲ \end{cases}$$

الف) نشان دهید که رابطهٔ (۱-۷۷) برقرار است.
ب) تابع چگالی احتمال $p\left(۰ < x < ۱\right)$ را پیدا کنید.

۱-۵) متغیّر تصادفی X را تعداد داوران آسیایی مسابقهٔ فوتبال بگیرید. تعداد داورها را ۳ نفر بگیرید که به طور تصادفی از ۴ داور آسیایی و ۳ داور اروپایی انتخاب می‌شوند. واریانس متغیّر X را بیابید.

۱-۶) یک دستگاه ایده آل ۱۰ اسپینی را که تحت تأثیر میدان مغناطیسی خارجی نیست، در حال تعادل فرض کنید و تعیین کنید که چه کسری $n = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۰$ اسپین رو به بالا می‌باشد.

۱-۷) بر یک بالن یک لیتری که حاوی گاز نیتروژن در شرایط متعارفی است، سوراخ ۱۰۰ نانومتری ایجاد شده است. هنگامی که در ظرف خلای که بزرگ‌تر از بالن است، قرار می‌گیرد، مولکول‌های گاز وارد محفظهٔ خلا می‌شود. تعیین کنید در مدّت یک ماه چند درصد از مولکول‌های گاز از بالن به محفظهٔ خلا نشت می‌کنند.

۱-۸) یک دستگاه ۱۰ اسپینی را در غیاب میدان‌های مغناطیسی خارجی در نظر بگیرید.
الف) احتمال آن که تعداد گشتاور اسپین های رو به بالا $n = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۰$ باشد را پیدا کنید.
ب) تعداد میانگین گشتاورهای رو به بالا را بیابید.
ج) گشتاور مغناطیسی میانگین را به دست آورید.

۱-۹) نشان دهید که توزیع پواسون در رابطه (۱-۸۳) بهنجار است $\langle n \rangle$ و واریانس در توزیع پواسون را محاسبه کنید. اهمّیّت پارامتر α را بیابید.

۱-۱۰) در میکروسکوپ الکترونی، رشتهٔ داغ تنگستنی با عبور جریان الکتریکی داغ شده است و به طور تصادفی (کاتوره ای) قادر است تنها یک الکترون را در فاصلهٔ زمانی کوچک Δt گسیل کند. احتمال گسیل تک الکترون را با p نشان می‌دهیم و عدم گسیل آن در این بازهٔ زمانی کوچک را با q نشان می‌دهیم. اگر تعداد N الکترون در زمان طولانی‌تر t گسیل شده باشد:
الف) آنگاه مقدار میانگین بار q یعنی $\langle q \rangle$ را بیابید.
ب) پراکندگی بار الکتریکی الکترون‌های گسیل‌شده q در زمان t (به عبارتی $\langle (\Delta q)^۲ \rangle$) را به دست آورید.

۱-۱۱) در گشت تصادفی، فرض کنید سیر حرکت به جای آن که یک خط (یک بعدی) باشد، یک صفحه (با دو متغیّر) است. در این صورت، نیاز است که روابط جدید در فضای دو بعدی را به دست آورید. روابط یک بعدی گشت تصادفی را به دو بعد تعمیم دهید.

۱-۱۲) در بحث بسط دو جمله‌ای و گشت تصادفی، چگالی احتمال متناظر با جا به جایی $+S$ (با احتمال p) به سمت راست و جا به جایی $-S$ (با احتمال $q = ۱ - p$) به سمت چپ را در نظر بگیرید که به صورت $W(L) = p\,\delta\left(۱ - S\right) + q\,\delta\left(۱ + S\right)$ می‌باشد. نشان دهید که تابع احتمال $p(x)$ از بسط دو جمله‌ای F_i پیروی می‌کند.

$$p\left(۲n - N\right) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} p^n q^{N-n}$$