فقط ماشین حساب ممنوع است. مدت زمان پاسخ‌گویی به سوال: ۱۱۰ دقیقه

سوال ۱-الف) نقاط تکینه و نوع آن(منفرد منظم یا نامنظم) را برای معادله زیر تعیین کنید؟

$$\frac{(x+4)^2(x^2-9)}{x}y''+(x+9)^2y'-\frac{2(x-9)^2}{x-2}y=0,$$

ب) چه فرمی از سری برای حل معادله زیر حول نقطه 1- در نظر می گیرید آنرا بنویسید. شعاع همگرایی آنرا تعیین کنید؟

$$9x^2(x-1)y''-9xy'+y=0,$$

ج) مقدار ریشه های معادله شاخصی (با روندکامل) را برای معادله دیفرانسیل فوق را تعیین کنید و دو جواب مستقل آنرا حداقل برای سه ترم غیرصفر از سری زیر بدست آورید؟ **۴۰ نمره**

حل الف)

$$(x+4)^2(x^2-9)y''+x(x+9)^2y'-\frac{2x(x-9)^2}{x-2}y=0,$$
$$(x-2)(x+4)^2(x^2-9)y''+x(x-2)(x+9)^2y'-2x(x-9)^2y=0,$$

نوع تکینه حول نقطه $x=-3$: با توجه به اینکه توابع $g(x)$ و $h(x)$ هیچکدام حول این نقطه تکینه نیست پس این نقطه یک تکینه منظم است.

نوع تکینه حول نقطه $x=3$: با توجه به اینکه توابع $g(x)$ و $h(x)$ هیچکدام حول این نقطه تکینه نیست پس این نقطه یک تکینه منظم است.

نوع تکینه حول نقطه $x=-4$: با توجه به اینکه توابع $g(x)$ و $h(x)$ حول این نقطه تکینه هست پس این نقطه یک تکینه نامنظم است.

نوع تکینه حول نقطه $x=2$: با توجه به اینکه توابع $g(x)$ و $h(x)$ هیچکدام حول این نقطه تکینه نیست پس این نقطه یک تکینه منظم است.

۲۰٪

تذکر مهم: در صورت پیدا کردن نقاط غیر از موارد بالا به ازای هر نقطه ۵٪ امتیاز کسر می‌شود.

حل الف)

چون حول نقطه‌ی $x=-1$ یک نقطه تکینه منظم است پس فرم جواب حول این نقطه برابرست با:

$$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(x+1)^{m+r}$$

شعاع همگرایی: ...

حل ج)

$$9x^2(x-1)y''-9xy'+y=0,\quad y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}$$

$$y''-\frac{1}{x(x-1)}y'+\frac{1}{9x^2(x-1)}y=0,\ y''+\frac{g(x)}{x}y'+\frac{h(x)}{x^2}y=0$$

$$g(x)=-\frac{1}{(x-1)},\quad h(x)=\frac{1}{9(x-1)}$$

و با توجه به اینکه توابع $g(x)$ و $h(x)$ هیچکدام حول نقطه $x=0,$ ، تکینه نیست پس این نقطه یک تکینه منظم است.

حل ب: ریشه‌های معادله شاخصی بصورت زیر تعیین می‌شود:

$$r^2+\big(g(0)-1\big)r-h(0)=0\ \Rightarrow r^2-\frac{1}{9}=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}r_1=\frac{1}{3}\\ r_2=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

۲۰٪

در معادله دیفرانسیل بالا نقاط منفرد منظم است، پس داریم: $x=0$

$$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r},\ y'=\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1},\ y''(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2},$$

$$*9x^2(x-1)y''-9xy'+y=0,\quad y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r},$$

$$9x^2(x-1)\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2}-9x\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1}+\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r}=0,$$

$$9x^3\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2}-9x^2\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2}-9x\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1}+\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r}=0,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}9(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r+1}-\sum_{m=0}^{\infty}9(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}9(m+r)c_m x^{m+r}+\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r}=0,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}9(m-1+r)(m+r-2)c_{m-1}x^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}9(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}9(m+r)c_m x^{m+r}+\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r}=0,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}9(m-1+r)(m+r-2)c_{m-1}x^{m+r}-\sum_{m=1}^{\infty}9(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r}-\sum_{m=1}^{\infty}9(m+r)c_m x^{m+r}+\sum_{m=1}^{\infty}c_m x^{m+r}$$
$$-9(r)(r-1)c_0x^r-9(r)c_0x^r+c_0x^r=0,$$

$$\{-9(r)(r-1)-9r+1\}c_0x^r+$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\{9(m+r-1)(m+r-2)c_{m-1}-9(m+r)(m+r-1)c_m-9(m+r)c_m+c_m\}x^{m+r}=0,$$

۲۰٪

رابطه استار را بر حسب توانهای برابر از x مرتب می‌کنیم:

$$***\left\{-9(r)(r-1)-9r+1\right\}c_0x^r+$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left\{9(m+r-1)(m+r-2)c_{m-1}-9(m+r)(m+r-1)c_m-9(m+r)c_m+c_m\right\}x^{m+r}=0,$$

$$x^r \;:\; \left\{-9(r)(r-1)-9r+1\right\}=0 \;\Rightarrow\; r_1=1/3,\;\; r_2=-1/3$$

$$x^{m+r}:\left\{9(m+r-1)(m+r-2)c_{m-1}-9(m+r)(m+r-1)c_m-9(m+r)c_m+c_m\right\}=0,$$

$$\left\{-9(m+r)(m+r-1)-9(m+r)+1\right\}c_m=-9(m+r-1)(m+r-2)c_{m-1}$$

$$c_m=\frac{9(m+r-1)(m+r-2)}{9(m+r)(m+r-1)+9(m+r)-1}c_{m-1}\quad\Rightarrow\quad m\geq 1$$

۲۰٪

چون معادله شاخصی دارای دو ریشه است و تفاضل آن ها عدد صحیح نیست پس جواب ها بصورت مقابل است :

$$y_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^{m+r_1},\;\; y_2(x)=\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^{m+r_2},$$

$$\text{if}\quad r=r_1=\frac{1}{3}\Rightarrow c_m=\frac{9\left(m-\frac{2}{3}\right)\left(m-\frac{5}{3}\right)}{9\left(m+\frac{1}{3}\right)\left(m-\frac{2}{3}\right)+9\left(m+\frac{1}{3}\right)-1}c_{m-1}\;\Rightarrow\; m\geq 1$$

$$c_1=-\frac{2}{15}c_0,\;\; c_2=\frac{1}{12}c_1=-\frac{1}{90}c_0,\;\; c_3=\frac{28}{99}c_2=-\frac{14}{4455}c_0,$$

$$y_1(x)=c_0x^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{2}{15}x-\frac{1}{90}x^2-\frac{14}{4455}x^3+\ldots\right)$$

۱۰٪

$$\text{if}\quad r=r_2=-\frac{1}{3}\Rightarrow c_m=\frac{9\left(m-\frac{4}{3}\right)\left(m-\frac{7}{3}\right)}{9\left(m-\frac{1}{3}\right)\left(m-\frac{4}{3}\right)+9\left(m-\frac{1}{3}\right)-1}c_{m-1}\;\Rightarrow\; m\geq 1$$

$$c_1=\frac{4}{3}c_0,\;\; c_2=-\frac{1}{12}c_1=-\frac{1}{9}c_0,\;\; c_3=\frac{10}{63}c_2=-\frac{10}{567}c_0$$

۱۰٪

$$y_2(x)=\frac{c_0}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{4}{3}x-\frac{1}{9}x^2-\frac{10}{567}x^3+\ldots\right)$$

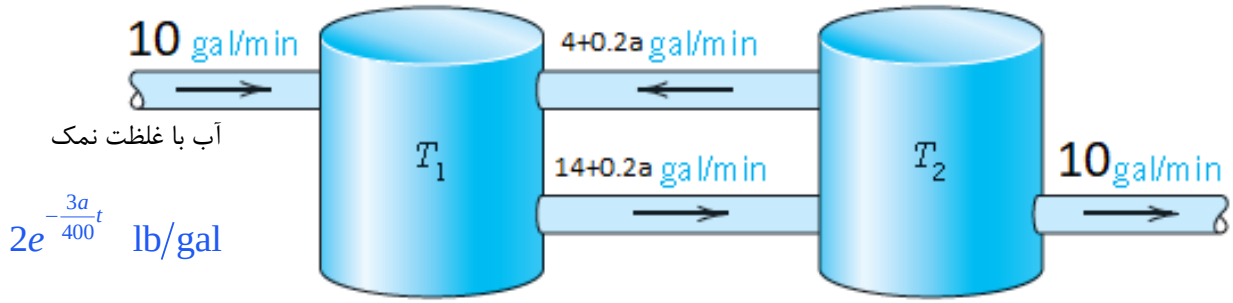
جواب نهایی برابر است با:

$$***\; y(x)=Ay_1(x)+By_2(x)\;***$$

سوال ۲- مخزن های شکل زیر هر کدام داری حجم آب برابر با ۱۲۰گالن هستند. در ابتدا، مخزن یک دارای 140 پوند نمک است در حالیکه مخزن دوم دارای 80 پوند نمک در آب است. آب باغلظت $2e^{-\frac{3a}{400}t}$ پوند بر گالن و با دبی 10 گالن بر دقیقه به مخزن یک وارد می شود و آب حل شده با نمک با دبی 10 گالن بر دقیقه از مخزن دو خارج می شود همچنین با دبی $4+0.2a$ گالن بر دقیقه از مخزن دو به مخزن یک وارد می شود و با دبی $14+0.2a$ گالن بر دقیقه از مخزن یک به مخزن دو وارد می شود. مخلوط کن میزان غلظت را در هر زمان در مخزنها یکنواخت نگه می‌دارد. مطلوبست مقدار نمک در هر مخزن بر حسب زمان؟ **۴۰**

نمره

a=5



حل:

$$y_1' = \text{Salt inflow/min -Salt outflow/min} = \frac{5}{120}y_2 - \frac{15}{120}y_1 + 20\times e^{-\frac{3}{80}t} = 0.04167y_2 - 0.125y_1 + 20\times e^{-\frac{3}{80}t}$$

$$y_2' = \text{Salt inflow/min -Salt outflow/min} = \frac{15}{120}y_1 - \frac{15}{120}y_2 = 0.125y_1 - 0.125y_2$$

۲۰٪

$$y_1(0) = 140,\ y_2(0) = 80$$

$$y_1' = 0.04167y_2 - 0.125y_1 + 20e^{-\frac{3}{80}t} \Rightarrow y_2 = 24y_1'(t) + 3y_1(t) - 480e^{-\frac{3t}{80}},\quad y_2' = 18e^{-\frac{3t}{80}} + 3y_1'(t) + 24y_1''(t)$$

$$*24y_1'' + 6y' + \frac{1}{4}y_1 = 42e^{-\frac{3t}{80}}$$

$$42e^{-3t/80} - \frac{y1[t]}{4} - 6y1'[t] - 24y1''[t]$$

$$y_1(t) = y_{1h}(t) + y_{1p}(t)$$

$$24y_1'' + 6y' + \frac{1}{4}y_1 = 0 \Rightarrow \quad 24m^2 + 6m + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = -\frac{1}{24}\left(3+\sqrt{3}\right) = -0.197 \\ m_2 = \frac{1}{24}\left(-3+\sqrt{3}\right) = -0.05283 \end{cases}$$

۱۰٪

۱۰٪

$$y_{1h}(t) = c_1 e^{-\frac{1}{24}\left(3+\sqrt{3}\right)t} + c_2 e^{\frac{1}{24}\left(-3+\sqrt{3}\right)t}$$

فرم جواب خصوصی بصورت زیر است:

$$y_{1p}(t) = Ae^{-\frac{3}{80}t}$$

که مقادیر و از روش ضرایب نامعین تعیین می‌شود. با مشتق گیری از رابطه قبل و جایگذاری در رابطه‌ی استار داریم:

$$\left.\begin{aligned} y_{1p}'(t) &= -A\frac{3}{80}e^{-\frac{3t}{80}} \\ y_{1p}''(t) &= A\frac{9}{6400}e^{-\frac{3t}{80}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow *24y_1'' + 6y' + \frac{1}{4}y_1 = 42e^{-\frac{3t}{80}}$$

$$\left.\begin{aligned} y_{1p}'(t) &= -A\frac{3}{80}e^{-\frac{3t}{80}} \\ y_{1p}''(t) &= A\frac{9}{6400}e^{-\frac{3t}{80}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow *24y_1'' + 6y' + \frac{1}{4}y_1 = 42e^{-\frac{3t}{80}} \Rightarrow \left\{ A = \frac{33600}{47} = 714.89 \right.$$

۲۰٪

$$*24A\frac{9}{6400}e^{-\frac{at}{100}} - 6A\frac{3}{80}e^{-\frac{3t}{80}} + \frac{1}{4}Ae^{-\frac{3t}{80}} = 42e^{-\frac{3t}{80}}$$

$$y_{1p}(t) = \frac{33600}{47}e^{-\frac{at}{100}}$$

$$y_1(t) = y_{1h}(t) + y_{1p}(t) = c_1 e^{-\frac{1}{24}\left(3+\sqrt{3}\right)t} + c_2 e^{\frac{1}{24}\left(-3+\sqrt{3}\right)t} + \frac{33600}{47}e^{-\frac{3t}{80}}$$

۲۰٪

$$y_2(t) = -\sqrt{3}c_1 e^{-\frac{1}{24}\left(3+\sqrt{3}\right)t} + \sqrt{3}c_2 e^{\frac{1}{24}\left(-3+\sqrt{3}\right)t} + \frac{48000}{47}e^{-\frac{3t}{80}}$$

اعمال شرایط اولیه:

$$\begin{cases} c_1 = -15.724 \\ c_2 = -559.17 \end{cases}$$

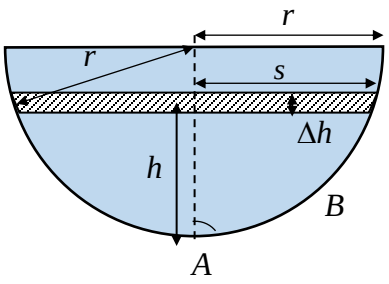
۱۰٪

$$y_1(t) = -15.724e^{-\frac{1}{24}(3+\sqrt{3})t} - 559.17e^{\frac{1}{24}(-3+\sqrt{3})t} + \frac{33600}{47}e^{-\frac{3t}{80}} = 70 \Rightarrow t = -6.35$$

۱۰٪

هیچوقت این اتفاق نخواهد افتاد.

سوال ۳- زمان تخلیه مخزنی به شکل نیم کره به شعاع r را حساب کنید؟ **۲۰ نمره**



$$v = c_d\sqrt{2gh},\ c_d \approx 0.6$$

$$\Delta V = \pi s^2 \Delta h, \xrightarrow{s^2 = r^2 - (r-h)^2} dV_1 = \pi\left(r^2 - (r-h)^2\right)dh$$

$$dV_1 = dV_2 \Rightarrow \begin{cases} dV_1 = -\pi\left(r^2 - (r-h)^2\right)dh \\ dV_2 = v \times A \times dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad -\pi\left(r^2 - (r-h)^2\right)dh = c_d\sqrt{2gh} \times A \times dt \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{c_d\sqrt{2gh}}{\pi\left(r^2 - (r-h)^2\right)} \times A$$

حل ادامه دارد.

علی عسگری عضوهیات علمی گروه مهندسی عمران
دانشگاه مازندران ۲۶ اردیبهشت ماه سال ۱۴۰۳