فصل دوم

حد و پیوستگی

در این فصل تعاریف و قضایای مهم مربوط حد و محاسبه حد بیان میشود. بعد از آن پیوستگی توابع را بررسی خواهیم کرد.

مقدمه : ابتدا با یک مثال مفهوم حد را توضیح میدهیم. عبارت $\frac{x^2-1}{x-1}$ مقادیر آن را وقتی x به سمت ۱ میل میکند به کمک ماشین حساب در جدول پایین محاسبه کردیم.

x	0.9,0.999,0.9999,	1.00001,1.0001
$\frac{x^2-1}{x-1}$	1.9,1.999,1.9999,	2.0001,2.0001

از جدول بالا دیده میشود که وقتی x ها به عدد یک نزدیک می شوند، مقادیر $\frac{x^2-1}{x-1}$ به عدد ۲ نزدیک می گردند. میگویند حد تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ وقتی x به سمت ۱ میل میکند برابر 2 می باشد ومی نویسند : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$.

تعریف حد:

می گوییم $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ (که a ممکن است در قلمرو f باشد یا نباشد ولی f در یک همسایگی از a تعریف شده است) اگر برای هر $\varepsilon>0$ داده شده بتوان $\delta>0$ ای یافت بطوریکه به ازای هر $x\in D_f$ که

$\boldsymbol{0<|x-a|<\delta}$ **آنگاه** $\boldsymbol{|f(x)-l|<\varepsilon}$.

تعریف حد به کمک نمادهای ریاضی

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ :0<|x-\alpha|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-l|<\varepsilon \leftrightarrow \quad \lim_{x\to a}f(x)=l$$

مثال با استفاده از تعریف حد نشان دهید $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9$

فرض کنید$\varepsilon>0$داده شده باشد، باید بتوان $\delta>0$یافت که به ازای هر xکه $0<|x-3|<\delta$ داشته باشیم $|x^2-9|<\varepsilon$

پس داریم $|x^2-9|<\varepsilon\ \Rightarrow\ |x-3|.|x+3|<\varepsilon\ \Rightarrow\ |x-3|<\frac{\varepsilon}{|x+3|}$

در چنین مواقع برای $\frac{\varepsilon}{|x+3|}$ یک کران پائین مشخص می کنیم . برای این کار فرض کنیم $\delta=1$ باشد از $|x-3|<\delta$ یک کران برای x پیدا میکنیم. پس

$$|x-3|<1\rightarrow -1<x-3<1\rightarrow 2<x<4$$

حال به کمک $2<x<4$ یک کران برای $|x+3|$ پیدا میکنیم

$$\mathbf{2 < x < 4 \ \rightarrow 5 < x + 3 < 7 \rightarrow 5 < |x + 3| < 7}$$

پس:

$$\frac{\varepsilon}{|x+3|} > \frac{\varepsilon}{7}$$

کافی هست $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$ انتخاب شود.

اگر بخواهیم صحت جواب خود را بررسی کنیم به شکل زیر عمل میکنیم.

فرض می کنیم $0 < \delta \leq \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$باشد وفرض کنیم x طوری باشد که $|x-3| < \delta$باشد.

بنابر این داریم: $|x^2 - 9| = |x-3||x+3| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x+3| \leq \frac{\varepsilon}{7}|x+3| < \frac{\varepsilon}{|x+3|} . |x+3| = \varepsilon$

قضیه: حد تابع f در صورت وجود منحصر به فرد است.

اثبات : فرض کنید$\lim_{x\to a} f(x)$ بیش از یکی باشد (برهان خلف)و برابر l_1 و l_2 یعنی:

$$l_1 \neq l_2 , \lim_{x\to a} f(x) = l_1 \quad , \quad \lim_{x\to a} f(x) = l_2$$

حال چون$l_1 \neq l_2$ بنابر این$l_1 - l_2 \neq 0$ یعنی$\frac{l_1 - l_2}{2} \neq 0$ بنابراین:$\left|\frac{l_1 - l_2}{2}\right| > 0$

حال فرض می کنیم$\varepsilon = |\frac{1}{4}(l_1 - l_2)|$ وداریم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_1 \ : \ \varepsilon > 0 \ \ \exists\delta_1 > 0 \ : \ 0 < |x-a| < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f(x) - l_1| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_2 \ : \ \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta_2 > 0 \ : \ 0 < |x-a| < \delta_2 \ \Rightarrow \ |f(x) - l_2| < \varepsilon$$

حال اگر$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ بنابراین: $\delta > 0$ پس خواهیم داشت:

$$\forall x \ : \ |x-a| < \delta \leq \delta_1 \ \Rightarrow \ |f(x) - l_1| < \varepsilon$$

$$\forall x \ : \ |x-a| < \delta \leq \delta_2 \ \Rightarrow \ |f(x) - l_2| < \varepsilon$$

وداریم:$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2|$

$$\Rightarrow \ = |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = 2 \times \frac{1}{4}|l_1 - l_2| = \frac{1}{2}|l_1 - l_2|$$

یعنی این رابطه ،یک تناقض آشکار است پش فرض خلف باطل بوده وحد در صورت وجود بیش از یکی نخواهد بود یعنی$l_1 = l_2$.

حدود یک طرفه (حد چپ و راست)

تعریف(حد راست):

می نویسیم $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$ (تابع f در نقطه a از راست دارای حد l است. در اینجا x ها از سمت راست به نقطه a نز دیک می شوند)اگر برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$یافت شود بطوریکه به ازای هر x که:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \quad \forall x\ : 0 < x - a < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon$$

تعریف حد چپ: می نویسیم $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$ اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ یافت شود ،بطوری که:

$$\forall x\ : 0 < a - x < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon$$

قضیه: حد تابع موجود است اگر وتنها اگر حدود چپ و راست موجود و برابر باشند.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l = \lim_{x\to a^-} f(x) \quad \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = l$$

مثال: تابع علامت را در نظر بگیرید. همانطور که می دانید $f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$. حد این تابع وقتی $x \to 0$ وجود ندارد زیرا

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ زیرا:

$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\ , \forall x\ ,0 < x - 0 < \delta\ \ \Rightarrow\ \ |f(x) - 1| < \varepsilon$ که هر $\delta > 0$،جواب ما می باشد.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ زیرا:

$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0, \forall x\ \ ,0 < 0 - x < \delta\ \ \Rightarrow\ \ |f(x) + 1| < \varepsilon$ که هر $\delta > 0$جواب ما می باشد.

پس تابع $sgn(x) = f(x)$ دارای حد راست ۱و حد چپ ۱- می باشد . چون$1 \neq -1$پس این تابع وقتی $x \to 0$ حد ندارد. بعبارت دیگر$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$ پس $\lim_{x\to 0} f(x)$موجود نیست.

حدود نامتناهی:

1) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty\ \ \Rightarrow\ \forall N > 0\ \ \exists\delta > 0, \forall x\ \ ,0 < |x - a| < \delta\ \ \Rightarrow\ \ f(x) > N$

مثال: $\lim_{x\to 5} \frac{5}{(x-5)^2} = +\infty$

$$\forall \boldsymbol{N} > 0 \quad \exists \boldsymbol{\delta} > 0 \quad : \forall \boldsymbol{x},$$

$$\mathbf{0} < |\boldsymbol{x} - \mathbf{5}| < \boldsymbol{\delta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{5}}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{5})^2} > \boldsymbol{N} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{x}-\mathbf{5})^2 < \frac{\mathbf{5}}{\boldsymbol{N}}$$

$$\Rightarrow \quad |\boldsymbol{x} - \mathbf{5}| < \sqrt{\frac{\mathbf{5}}{\boldsymbol{N}}}$$

پس کافیست $0 < \delta < \sqrt{\frac{5}{N}}$ اختیار شود.

نکته: اگر بخواهید صحت جواب را بررسی کنید میتوانید به شیوه زیر عمل کنید.

امتحان مسئله: $|x-5| < \delta < \sqrt{\frac{5}{N}} \quad \Rightarrow \quad |\mathrm{x}-5| < \sqrt{\frac{5}{\mathrm{N}}} \quad \Rightarrow \quad (\mathrm{x}-5)^2 < \frac{5}{\mathrm{N}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(x-5)^2} > \frac{N}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{(x-5)^2} > N$$

2) $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \forall N < 0 \quad \exists \delta > 0, \forall x \ ,0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < N$

حدود در بینهایت:

اگر $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$،وجود داشته باشد $N > 0$ی که:

$$\forall x > N \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

مثال: با استفاده از تعریف حد نشان دهید که $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

فرض کنید $\varepsilon > 0$داده باشد باید $N > 0$ی بیابیم که $\forall x > N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x^3} - 0\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{1}{x^3} - 0\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^3} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad x^3 > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad x > \sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon}}$$

یعنی کافی است که N طوری انتخاب شود که:$N > (\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{3}}$.

نکته: تعاریف $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ و$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ نیز متشابهند.

قبل از بیان تکنیکهای محاسبه حد، تعدادی از قضایا مفید برای محاسبه حد بیان شده هست.

قضیه ۱: $\lim_{x\to a}(f_1 \pm f_2 \pm \cdots \pm f_n) = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x) \pm \cdots \pm \lim_{x\to a} f_n(x)$

قضیه ۲: $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$ وهمینطور حاصلضرب توان متناهی تابع.

قضیه ۳: $\lim_{x\to a}(\frac{f}{g})(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ مشروط بر اینکه $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

قضیه ۴: اگر $\lim_{x\to a} f(x) = l$ و $n \in \mathbb{N}$ و $l \geq 0$ آنگاه: $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$.

قضیه ۵: $\lim_{x\to a} f(x) = l$ و $l < 0$ و $n \in \mathbb{N}$ و $n = 2k-1$ $(k \in \mathbb{Z})$ آنگاه: $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$.

تکنیکهای محاسبه حد:

معمولا برای محاسبه حد $\lim_{x\to a} f(x)$ ابتدا جای x مقدار a را قرار میدهیم. اگر توانستیم $f(a)$ را حساب کنیم که کار تمام هست. بعنوان مثال $\lim_{x\to 2} x^2 + 2 = 6$. اما در اکثر مواقع با جانشانی a در عبارت داده شده با حالتهایی **مانند** $\mathbf{\frac{0}{0}}$ **یا** $\frac{\infty}{\infty}$ و امثالهم مواجه میشویم. در اینصورت باید از تکنیکهای دیگری استفاده کنیم. در این قسمت به اختصار بعضی از این تکنیکها را مورد بررسی قرار می دهیم.

۱- استفاده از اتحادها

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6$$

۲- استفاده از روابط مثلثاتی

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\ \sin x \cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} 2\ \cos x = 2$$

۳- استفاده از قاعده هوپیتال

فرض کنید که یکی از دو حالت مختلف حدهای مبهم زیر را داشته باشیم.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

در صورت مشتق پذیری $f(x)$ و $g(x)$ میتوانیم از $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ بجای $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ استفاده کنیم . بعبارت دیگر

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

نکته بسیار مهم دیگر این است که اگر بعد از اعمال قاعده هوپیتال، دوباره به حالت‌های مبهم صفر صفرم ($\frac{0}{0}$) یا بینهایت به روی بینهایت ($\frac{\infty}{\infty}$) رسیدیم، کافی است که یک بار دیگر قاعده هوپیتال را اعمال و حد را محاسبه کنیم. این عمل را تا محاسبه نهایی حد و رفع ابهام کامل انجام می‌دهیم.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{1}=3.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty.$$

۴- استفاده از قاعده هم ارزیها

$$\sin x\approx x. \qquad \cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}.$$

بدین منظور از بسط تیلور یا مک لورن استفاده میکنیم. فرض کنیم $f(x)$ یک تابع مشتق پذیر باشد. در این صورت بسط تیلور آن

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

حال اگر در رابطه بالا $a=0$ باشد بسط مک لورن حاصل میشود.

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

مثال : بسط مک لورن توابع $\sin x$، $\cos x$ و e^x را بنویسید.

برای تابع $\mathrm{f(x)}=\sin x$ میدانیم که

$$f'(x)=\cos x\ \to f'(0)=1. \qquad f''(x)=-\sin x\ \to f''(0)=0.$$

$$f'''(x)=-\cos x\ \to f'''(0)=-1. \qquad f^{(4)}(x)=\sin x\ \to f^{(4)}(0)=0.$$

$$f(x)=\sin x=\sin 0+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

پس وقتی $x\to 0$ میتوانیم بجای $\sin x$ از x استفاده کنیم. بعبارت دیگر $\sin x\approx x$.

به همین شیوه شما میتوانید بسط مک لورن را حساب کنید.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

پس داریم $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$

نکته۱: اگر در استفاده از هم ارزی برای $\sin x$ در یک عبارت جمله x^3 وجود داشت بهتر هست از این هم ارزی استفاده کنید $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$

نکته ۲: میدانیم اگر $x \to 0$ آنگاه $ax \to 0$ پس میتوانیم از رابطه $\sin ax \approx ax$ استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x} = 2. \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}}{x^3} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x \sin 2x \ \cdots \ \sin nx}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{?}{x^n} = n!$$

۵- **استفاده از قضایا ی ریاضی**

قضیه: $\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t = e$ اگر از تغییر متغیر $x = \frac{1}{t}$ استفاده کنیم داریم $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

مثال حد عبارت مقابل را حساب کنید $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}$

برای محاسبه حد بالا از تغییر متغیر $ax = t$ استفاده می کنیم پس

$$ax = t \to x = \frac{t}{a}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{ab}{t}} = (\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}})^{ab} = e^{ab}$$

قضیه: اگر تابع $f(x)$ کراندار باشد یعنی $|f(x)| \le M$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ آنگاه $\lim_{x\to a} g(x)f(x) = 0$

مثال

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

بخاطر اینکه $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$ از قضیه بالا استفاده کردیم.

قضیه ساندویچ (فشار یا فشردگی): هر گاه توابع $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ موجود باشند و $g(x) \le f(x) \le h(x)$. اگر حدود $h(x)$ و $g(x)$ وقتی $x \to a$ موجود و برابر l باشد. آنگاه $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

مثال حد عبارت مقابل را حساب کنید $\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$

میدانیم که $t - 1 \le [t] \le t$ پس

$$\frac{1}{x} - 1 \le \left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x} \to x\left(\frac{1}{x} - 1\right) \le x\left[\frac{1}{x}\right] \le x\frac{1}{x} \to 1 - x \le x\left[\frac{1}{x}\right] \le 1$$

از طرفی $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ $\lim\limits_{x\to 0} 1-x =$ پس طبق قاعده ساندویچ $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$

تمرین حد عبارت مقابل را حساب کنید $\lim\limits_{x\to 0} x^2\left[\frac{2}{x^2}\right]$

تمرین حد عبارت مقابل را به کمک قضیه ساندویچ حساب کنید $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$

رفع ابهام برای حالتهای $0\times\infty$

برای رفع ابهام ابتدا آن را بصورت صفر صفرم ($\frac{0}{0}$) یا بینهایت به روی بینهایت ($\frac{\infty}{\infty}$) در آورده و سپس رفع ابهام میکنیم.

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}$$

مثال: حد مقابل را حساب کنید $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^x$

$$\lim_{x\to -\infty} xe^x = \lim_{x\to -\infty} x\frac{1}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

رفع ابهام برای حالتهای $\infty-\infty$

الف) برای رفع ابهام میتوان از اتحاد ها یا مخرج مشترک گیری استفاده نمود.

مثال: حد مقابل را حساب کنید $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x}-x$

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x}-x = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x}-x \times \frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+2x-x^2}{x(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1)} = 1$$

مثال: حد مقابل را حساب کنید $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} - \tan x$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} - \tan x = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\sin(t+\frac{\pi}{2})}{\cos(t+\frac{\pi}{2})}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{-\sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-(1-\frac{t^2}{2})}{-t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{-2} = \mathbf{0}$$

ب) هرگاه $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - g(x)$ بصورت $\infty-\infty$ درآید در این حالت بصورت زیر عمل می کنیم

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} f(x) - g(x) = \lim_{x\to a} g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right)$$

حال اگر $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 1$ رفع ابهام می کنیم ولی چنانچه $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ تابع بصورت $\mathbf{0}\times\infty$ در می آید که مطابق روش های گفته شده حل میشود.

رفع ابهام برای حالتهای ∞^∞ ، 0^∞ ، 1^∞ و 0^0

برای رفع ابهام این توابع قاعده بر این هست که از طرفین تابع لگاریتم طبیعی $\ln$ گرفته میشود.

$$y = f(x)^{g(x)} \to \ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x)\ln f(x)$$

$$\lim_{x\to a}\ln y=\lim_{x\to a}g(x)\ln f(x)$$

سپس حد $\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln f(x)$ را طبق روشهای گفته شده محاسبه میکنیم. اگر این حد برابر s باشد.

انگاه $\ln y=s \quad\to\quad y=e^{s}$

مثال: حد مقابل را حساب کنید $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$

با جایگذاری $x\to\infty$ در عبارت $x^{\frac{1}{x}}$ حالت مبهم ∞^0داریم برای حل $y=x^{\frac{1}{x}}$ در نظر میگیریم و از طرفین $\ln$ می گیریم

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

پس $y=e^0=1$ یعنی $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$

تمرین: اگر A عدد ثابتی باشد. آنگاه حد مقابل را حساب کنید $\lim\limits_{t\to1^+}(1-(t-1)A)^{\frac{2}{t^2-1}}$

تمرین شماره ۱ ریاضی عمومی ۱ - تاریخ ۲۸ -۱۲-۱۳۹۸ **مدرسین: دکتر جعفری- دکتر منیری**

۱- **حدود عبارات زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.** (توجه : استفاده از قاعده هوپیتال فقط در یک مورد دلخواه مجاز هستید)

الف) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x-4}$

ج) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[x]+[2x]+\cdots+[nx]}{n^2}$ **راهنمایی: می دانیم** $y-1<[y]\le y$

حل:

برای حل ب از قضیه گفته شده در قسمت تکنیکهای محاسبه حد استفاده میکنیم.

داریم طبق **قضیه:** $\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t=e$

اکنون برای محاسبه حد سعی میکنیم با افزودن و کاستن و سپس تغییر متغیر عبارت داخل پرانتز $\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)$را در قالب قضیه بالا بازنویسی کنیم

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x-4} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1-1+1}{2x-1}\right)^{2x-4}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1+2}{2x-1}\right)^{2x-4} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{2x-4} =$$

اکنون از تغییر متغیر استفاده میکینم برای اینکار $\frac{1}{t} = \frac{2}{2x-1}$ میگیریم.

پس $x = \frac{2t+1}{2} \leftarrow 2x-1 = 2t$ از طرفی واضح هست که وقتی $x \to +\infty$ آنگاه $t \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{2x-4} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2\frac{2t+1}{2}-4}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t-3} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} \times \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-3}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{2} \times \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-3} = e^2 \times 1^{-3} = e^2$$

دانشگاه مازندران

پیوستگی:

تعریف: تابع $f(x)$ را در نقطه $x=a$ از قلمروش،پیوسته نامیم،هرگاه: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

بعبارت دیگر تابع $f(x)$ در $x=a$ پیوسته هست اگر نقطه a جزو دامنه اش باشد و مقدار تابع در این نقطه $f(a)$ با حد تابع $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ برابر باشد.

به این ترتیب تمام توابع چند جمله ای مانند $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x^1+a_0$ در تمام نقاط مجموع اعداد حقیقی پیوسته اند زیرا، $\lim\limits_{x\to a} f(x)=a_na^n+a_{n-1}a^{n-1}+\cdots+a_1a^1+a_0=f(a)$. همچنین تمام توابع گویا در قلمرو دامنه خود پیوسته اند زیرا حد آنها با مقدار آنها یکی می باشد.

تابع $\sqrt[m]{x}$ را در نظر بگیرید، اگر m فرد باشد،در تمام اعداد حقیقی پیوسته است واگر m زوج باشد در نقاط $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ پیوسته است . همچنین تابع $f(x)=\sqrt[m]{g(x)}$، اگر m فرد باشد ،در تمام قلمرو $g(x)$ ، پیوسته است مگر در نقاطی که خود تابع $g(x)$ پیوسته نباشد واگر m زوج باشد ،تابع f در نقاطی پیوسته است که تابع g پیوسته و نامنفی باشد.

قضیه : هر گاه توابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه $x=a$ پیوسته باشند آنگاه $f.g$ و $f\pm g$ در نقطه $x=a$ پیوسته هستند و همچنین $\frac{f}{g}$ نیز در $x=a$ پیوسته هست به شرطی $g(a)\neq 0$ باشد.

مثال: پیوستگی تابع f با ضابطه زیررا بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} |x-[x]| & \text{اگر } [x] \text{ زوج باشد} \\ |x-[x+1]| & \text{اگر } [x] \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

حل: می دانیم $[x+1]=[x]+1$ پس بجای $|x-[x+1]|$ میتوانیم از $|x-1-[x]|$ استفاده کنیم

$$(x)=\begin{cases} & \vdots & \\ |x+2| & -3\le x<-2 & [x]=-3 \\ |x+2| & -2\le x<-1 & [x]=-2 \\ |x| & -1\le x<0 & [x]=-1 \\ |x| & 0\le x<1 & [x]=0 \\ |x-2| & 1\le x<2 & [x]=1 \\ |x-2| & 2\le x<3 & [x]=2 \\ |x-4| & 3\le x<4 & [x]=3 \\ |x-4| & 4\le x<5 & [x]=4 \\ & \vdots & \end{cases} \to f(x)=\begin{cases} & \vdots \\ -x-2 & -3\le x<-2 \\ x+2 & -2\le x<-1 \\ -x & -1\le x<0 \\ x & 0\le x<1 \\ 2-x & 1\le x<2 \\ x-2 & 2\le x<3 \\ 4-x & 3\le x<4 \\ x-4 & 4\le x<5 \\ & \vdots \end{cases}$$

واضح هست که در هر فاصله باز مانند $\cdots,(-3,-2),(-2,-1),(-1,0),(0,1),(1,2),(2,3),\cdots$ تابع $f(x)$ برابر با یک تابع خطی می باشد که پیوسته است. بنابر این باید تنها پیوستگی تابع را در نقاط صحیح بررسی نمود:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = \lim_{x\to 1^-} x = 1$$

ولی $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2-x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \;\; , \;\; f(x) = 2-1 = 1$

چون $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ پس تابع در نقطه $x = 1$ پیوسته می باشد حال داریم:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} (-x-2) = 2+2 = 0 \quad , \lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (x+2) = -2+2 = 0$$

$$f(-2) = -2+2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to -2} f(x) = f(-2)$$

به همین ترتیب می توان نشان داد که $(\forall a \in \mathbb{Z}) \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ یعنی در تمام نقاط $\mathbb{Z}$ پیوسته می باشد وچون در $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ هم به عنوان یک تابع خطی ،پیوسته بود (ثابت شد) در تمام نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته می باشد.

مثال: مقدار d را طوری بیابید که تابع: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+a^3}-a}{x} & x \neq 0 \\ d & x = 0 \end{cases}$ در نقطه صفر پیوسته باشد (با فرض $a \neq 0$).

حل: $f(0) = d$

برای اینکه تابع در نقطه $x = 0$ پیوسته باشد، می بایست: $\lim_{x\to 0} f(x) = d$ بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+a^3}-a}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+a^3}-a}{x} \times \frac{\sqrt[3]{(x+a^3)^2} + a^2 + a\sqrt[3]{x+a^3}}{\sqrt[3]{(x+a^3)^2} + a^2 + a\sqrt[3]{x+a^3}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+a^3-a^3}{x[\sqrt[3]{x+a} + a^2 + a\sqrt[3]{x+a^3}]} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x+a} + a^2 + a\sqrt[3]{x+a^3}} = \frac{1}{a^2+a^2+a^2} = \frac{1}{3a^2}$$

پس کافی هست $d = \frac{1}{3a^2}$ باشد.

پیوستگی چپ و راست:

هرگاه $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ گوییم تابع پیوستگی راست دارد. و بطور مشابه هرگاه $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ گوییم پیوستگی چپ دارد.

تعریف جهش: اختلاف حد و چپ و راست در صورت وجود را جهش می‌نامیم و به صورت زیر محاسبه میشود:

$$J = \left| \text{حد چپ} - \text{حد راست} \right|$$

مثال: جهش تابع $f(x) = \begin{cases} [x] & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ را در $x = 1$ محاسبه کنید.

$$J=\left|\lim_{x\to 1^+}[x]-\lim_{x\to 1^-}[x]\right|=|1-0|=1$$

مثال:تابع $f(x)=[x]$ را در نظر بگیرید. برای این تابع داریم:

$$f(x)=\begin{cases} & \vdots \\ -2 & -2\le x<-1 \\ -1 & -1\le x<0 \\ 0 & 0\le x<1 \\ 1 & 1\le x<2 \\ 2 & 2\le x<3 \\ & \vdots \end{cases}$$

به وضوح تابع در صفر پیوسته نمی باشد چون

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}0=0, \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}-1=-1$$

(چون f در نقطه صفر حد ندارد) اما داریم $f(0)=0$ که: $\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$. در چنین صورتی گوئیم که تابع f در نقطه صفر از راست پیوسته است ولی چون $\lim_{x\to 0^-}f(x)\neq f(0)$ بنابراین تابع f در صفراز چپ نا پیوسته است بنابراین قضیه زیر را مطرح می کنیم:

قضیه:تابع f در $x=a$ پیوسته است اگر وتنها اگر تابع f در a هم از راست وهم ازچپ پیوسته است .

تابع f در نقطه a از راست پیوسته است $\Leftarrow$ $\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)$

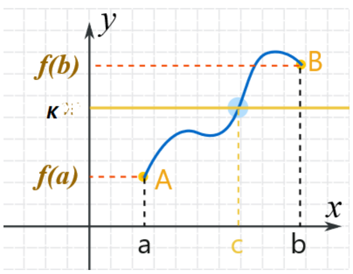
تابع f در نقطه a از چپ پیوسته است $\Leftarrow$ $\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$

تعریف:تابع f در فاصله بسته $[a,b]$ پیوسته گوییم. اگر تابع f در تمام نقاط (a,b) پیوسته باشد ودر نقطه a ازراست ودرنقطه b از چپ پیوسته باشد.

قضیه min و Max برای توابع پیوسته: اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه یک مقدار min و یک مقدار Max در بازه $[a,b]$ دارد.

$$if\ f\in C[a,b]\ \to \exists\ m,M\epsilon\mathbb{R}\quad s.t\ \ \forall x\in[a,b]\ \ m\le f(x)\le M$$

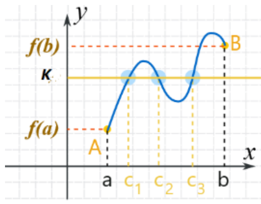
قضیه مقدار میانی: **Intermediate Value Theorem**



فرض کنید تابع f در فاصله بسته $[a,b]$ پیوسته باشد

و k عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد آنگاه $c\in(a,b)$ ای هست که:

$$f(c)=k$$



نکته: توجه کنید میتواند بیشتر از یک ریشه نیز داشته باشد.

مثلا به شکل مقابل توجه کنید.

مثال :نشان دهید که معادله $x^3 - 4x^2 + x + 3 = 0$ ریشه ای در فاصله $[1,2]$دارد.

حل: قرار میدهیم$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 3$تابع f در فاصله $[1,2]$پیوسته است (زیرا تابع چند جمله ای بر $\mathbb{R}$ پیوسته است). همچنین $f(1) = 1$و$f(2) = -3$چون $k = 0$،بین$f(1)$ و $f(2)$ قرار دارد (یعنی $f(2) < 0 < f(1)$). بنا بر قضیه مقدار میانی $f(c) = 0 \quad \exists c \in (1,2)$. یعنی این معادله در فاصله داده شده یک ریشه دارد.

مثال: به کمک قضیه مقدار میانی ثابت کنید، اگر $0 \le f(x) \le 1 \quad \forall x \in [0,1]$ باشد و f در$[0,1]$پیوسته باشد، آنگاه $\exists c \in (0,1)$ هست که$f(c) = c$.

حل: ابتدا تابع $g(x)$ بصورت $g(x) = f(x) - x$تعریف می‌کنیم. حال شرایط قضیه مقدار میانی را روی این تابع بررسی میکنیم. $g(x) = f(x) - x \quad \Rightarrow \quad g(0) = f(0) - 0 = f(0) \ge 0 \qquad (1)$

$$g(1) = f(1) - 1 \le 0 \qquad (2)$$

$$(1),(2) \quad \Rightarrow \quad \exists c \in (0,1) \quad g(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(c) - c = 0 \qquad f(c) = c$$

مثال: پیوستگی توابع زیر رابررسی کنید.

$$1)\ h(x) = \sqrt{\frac{2-x}{5+x}}\ , \qquad 2)\ f(x) = |x-5|\ , \qquad 3)\ g(x) = \frac{x}{|x|},$$

$$4)\ l(x) = x^2(x^{-2} + x^{\frac{-1}{2}})^3 \quad , \qquad 5)\ q(x) = \left(\frac{2}{x-3} - \frac{x}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{3}}$$

حل: برای تابع $h(x)$ داریم: $\frac{2-x}{5+x} < 0 \qquad 1)h(x) = \sqrt{\frac{2-x}{5+x}} \quad \to x = -5,$

پس پیوستگی ها،بازه$(-5,2)$می باشد .بقیه ناپیوستگی ها را تشکیل می دهند.

x		-5	2
$h(x)$	–	+	–

همه جا پیوسته است. $\Rightarrow \qquad 2)f(x) = |x-5|$

این تابع فقط در نقطه $x = 0$ ناپیوسته است.$\Rightarrow \qquad 3)g(x) = \frac{x}{|x|}$

$$4)l(x) = x^2(x^{-2} + x^{\frac{-1}{2}})^3 \qquad \Rightarrow \quad l(x) = x^2(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}})^3$$

بنابراین نقاط $x \le 0$ ناپیوستگی‌ها را تشکیل می دهند.

$$5)q(x) = (\frac{2}{x-3} - \frac{x}{x^2-1})^{\frac{1}{3}} \qquad \Rightarrow$$

در نقاط $x = -1$، $x = 1$ و $x = 3$ ناپیوسته است.

قضیه بولزانو: Bolzano's theorem

فرض کنید تابع f در فاصله بسته $[a,b]$ پیوسته باشد $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامت باشند یعنی ($f(a) \times f(b) < 0$) در اینصورت تابع f حداقل یک ریشه در (a,b) دارد.

نکته: قضیه بولزانو حالت خاصی از قضیه مقدار میانی می باشد.

مثال: آیا عددی وجود دارد که یک واحد کمتر از مکعب خود باشد. آیا می توانید در مورد تعداد این اعداد صحبت کنید.

حل: فرض کنیم این عدد x باشد باید ببینیم عددی مانند x وجود دارد که $x = x^3 - 1$. حال تابع $f(x)$ را بصورت زیر تعریف میکنیم: $f(x) = x^3 - x - 1$ اگر این تابع ریشه داشته باشد. جواب حاصل خواهد شد.

$f(1) = -1 < 0$ و $f(2) = 5 > 0 \rightarrow f(1)f(2) < 0 \rightarrow$ طبق قضیه بولزانو ریشه دارد

این ریشه در فاصله $(1,2)$ هست. اکنون برای مشخص کردن تعداد ریشه ها در این فاصله از تابع $f(x)$ مشتق می گیریم.

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \xrightarrow{\text{در فاصله } (1,2)} f'(x) > 0$$ تابع صعودی است

پس دقیقا یک ریشه دارد.

قضیه: اگر تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و صعودی اکید باشد. آنگاه برد $f(x)$ برابرهست با $[f(a), f(b)]$ و همچنین $f^{-1}(x)$ روی بازه بسته کنید $[f(a), f(b)]$ پیوسته و صعودی اکید هست.

مثال: فرض کنید $f(x) = [1 - x^2]$ و $-2 \le x \le 2$. آیا $\lim_{x \to 0} f(x)$ وجود دارد؟ آیا $f(x)$ در صفر پیوسته است؟

$$x \to 0^- \to -1 < x < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < 1 - x^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad [1 - x^2] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0$$

$$x \to 0^+ \to 0 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < 1 - x^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad [1 - x^2] = 0$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

حدود چپ و راست برابرند پس تابع حد دارد. اما مقدار تابع در صفر برابر ۱ هست $f(0) = 1$ که با حد تابع برابر نیست .بنابراین این تابع در صفر پیوسته نیست.

مثال:اگر $f(x) = \sqrt{x - 3}$ و $g(x) = x + 2$.مطلوب است تعریف fog ونقاطی که fog در آن نقاط پیوسته است.

$$(fog)(x) = f(g(x) = f(x + 2) = \sqrt{(x + 2) - 3} = \sqrt{x - 1}$$

fog در x پیوسته است اگر $g(x)$ در نقطه x پیوسته و f در g(x) پیوسته باشد.

حال g در تمام نقاط ناپیوسته است. بنابراین داریم:

شرط پیوسته بودن f در $x = y$

$$\Rightarrow \quad y - 3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 1$$

مثال: $f(x) = sgn\ x$ و $g(x) = x^2 - 1$.مطلوب است fog ونقاطی که fog در آنها پیوسته می باشد.

حل:
$$fog(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2 - 1) = sgn\ (x^2 - 1) = \begin{cases} -1 & x \in (-1,1) \\ 0 & x = 1, -1 \\ 1 & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

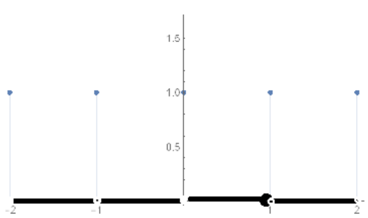
(تابع sgn در نقطه $x = 0$ پیوسته نمی باشد)

پس به ازای هر x دلخواه g در x پیوسته است و از طرفی $\Leftarrow$ $g(x) = x^2 - 1 = y$

شرط f باید در y پیوسته باشد $\Leftarrow$ $x = +1, -1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y \neq 0$

ناپیوستگی های تابع $x = +1, -1$.

مثال: فرض کنید $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ مطلوب است.۱_نمودار f ۲) در چه نقاطی f دارای حد است.۳)در چه نقاطی تابع f پیوسته است.



حل : نمودار این تابع به شکل هست:

در هر عدد صحیح مانند m داریم

$\lim_{x \to m^-} f(x) = \lim_{x \to m^+} f(x) = 0$ یعنی $\lim_{x \to m} f(x) = 0$

به طرز مشابهی می توان نتیجه گرفت که تابع f در هر نقطه غیر صحیح نیز دارای حد است که حد آن برابر با صفر است.

بنابراین تابع f در تمام نقاط از اعداد حقیقی دارای حد صفر است.

در اعدادصحیح ،حد تابع صفر است ولی مقدار تابع۱ می باشد. پس در هیچ عدد صحیح تابع پیوسته نیست.ولی در اعداد غیر صحیح ،حد تابع 0 ومقدار تابع نیز 0 می باشد.پس در تمام نقاط غیر صحیح تابع پیوسته است.