ریاضیات گسسته و ترکیباتی

از دیدگاه کاربردی

جلد اول

رالف گریمالدی

ترجمهٔ علی عمیدی

ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی

از دیدگاه کاربردی

جلد اول

رالف گریمالدی

ترجمهٔ علی عمیدی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

مرکز نشر دانشگاهی
۸۵۹

ریاضی، آمار، و کامپیوتر
۱۰۷

Discrete and Combinatorial Mathematics, an Applied Introduction
Ralph P. Grimaldi
Second Edition
Addison-Wesley Publishing Company, 1989

ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی از دیدگاه کاربردی
جلد اول
تألیف رالف گریمالدی
ترجمهٔ دکتر علی عمیدی
ویراستهٔ دکتر محمدهادی شفیعیها

نسخه‌پرداز: زهرا دلاوری
حروفچین: معصومه عزیزی
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۷۶
چاپ چهارم ۱۳۸۴
تعداد ۱۵۰۰
چاپ: محمد امین

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

گریمالدی، رالف — Grimaldi, Ralph P.
ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی از دیدگاه کاربردی / رالف گریمالدی؛ ترجمهٔ علی عمیدی؛ ویراستهٔ محمدهادی شفیعیها. ــ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۶.
۲ج. : مصور، جدول، نمودار. ــ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۸۵۹، ۸۹۰. ریاضی، آمار، و کامپیوتر؛ ۱۰۷، ۱۱۳)

ISBN 964-01-8155-2 (دوره)
ISBN 964-01-0859-6 (ج. ۱)
ISBN 964-01-0890-1 (ج. ۲)

فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: Discrete and combinatorial mathematics: an applied introduction.
کتاب حاضر در سال ۱۳۷۶ تحت‌عنوان «ریاضیات گسسته و ترکیباتی» با ترجمهٔ محمدعلی رضوانی، بیژن شمس توسط انتشارات فاطمی منتشر شده است.
واژه‌نامه.
کتابنامه.
ج. ۱ (چاپ چهارم: ۱۳۸۴).
۱.ریاضیات. ۲.کامپیوتر ــ ریاضیات. ۳. آنالیز ترکیبی. الف. عمیدی، علی، ۱۳۱۲ ـ ، مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی. ج.عنوان. د.عنوان: ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی.
۹ر۴گ/QA۳۹/۲ — ۵۱۰
الف ۱۳۷۶
کتابخانهٔ ملی ایران — ۸۶۱۸ـ ۷۶م*

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

عنوان	صفحه

عنوان | صفحه

پیشگفتار

پیشرفتهای تکنولوژیک دو دهۀ اخیر، تغییرات چندی را در برنامۀ تحصیلی دورۀ کارشناسی موجب شده است. این تغییرات گرچه در همۀ دروس صورت نگرفته است ولی شامل عرضۀ مطالبی در زمینه‌های زیر بوده است.

۱. روشهای گسسته‌ای که بر ماهیت متناهی ذاتی برخی مسائل و ساختارها تکیه دارند؛

۲. مبحث ترکیبیات، یعنی جبر شمارش؛

۳. نظریۀ گراف همراه با کاربردها و رابطه‌های آن با زمینه‌هایی نظیر ساختارهای داده‌ها و روشهای بهینه‌سازی؛ و بالاخره

۴. ساختارهای جبری متناهی که با نظامهایی نظیر نظریۀ کد گذاری، روشهای شمارش، شبکه‌های دریچه‌بندی، و طرحهای ترکیبیاتی پدید می‌آیند.

یک دلیل عمدۀ مطالعۀ این مطالب در هرکدام از این چهار مبحث یا در همۀ آنها، فراوانی کاربرد آنها در علم کامپیوتر_به‌ویژه در زمینه‌های ساختارهای داده‌ها، نظریۀ زبانهای کامپیوتری، و تحلیل الگوریتمهاست؛ به‌علاوه، کاربردهای آنها در علوم مهندسی، فیزیکی و زیستی، همچنین در آمار و علوم اجتماعی است. درنتیجه، موضوع ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی، مطالب ارزشمندی را نه تنها در ریاضیات و کامپیوتر، بلکه در بسیاری از دروس اصلی در اختیار دانشجویان قرار می‌دهد.

هدف این کتاب عرضۀ یک دیدگاه مقدماتی از مفاهیم ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی است. مطالب کتاب به‌منظور استفادۀ دانشجویان مبتدی تهیه شده است، لذا تعداد زیادی مثال با توضیحهای مفصل در آن گنجانده شده است. (مثالها جدا از سایر مطالب شماره‌گذاری شده‌اند، و آخر هر مثال با مربعی توخالی نشان داده شده است.) به‌علاوه هرجا که برهانی آورده شده است با جزئیات کافی همراه است.

کوشش ما در این کتاب برآوردن هدفهای زیر بوده است:

۱. معرفی موضوعها و تکنیکهای روشهای گسسته و استدلال ترکیبیاتی به دانشجویان سال دوم کارشناسی، اگر در سطح پایینتری نباشند. مسائل شمارشی مستلزم تحلیل دقیق ساختار (مثلاً،

مهم‌بودن یا نبودن ترتیب آن) و امکانهای منطقی آن است. ممکن است حتی مسألهٔ وجود بعضی از وضعیتها مطرح باشد. ما با پیروی از چنین تحلیل دقیقی غالباً دریافته‌ایم که راه حلّ یک مسأله مستلزم تکنیکهای ساده برای شمارش برآمدهای ممکنی است که از تجزیهٔ مسألهٔ مفروض به مسائل فرعی کوچکتر ظاهر می‌شوند.

۲. معرّفی انواع وسیعی از کاربردها. بدین منظور، آنجا که ساختارهای جبر مجرد مورد نیازند، تنها نظریهٔ اساسی لازم برای کاربرد توضیح داده شده است. به‌علاوه، راه‌حلهای برخی مسائل کاربردی، در شیوه‌هایی تکراری که به الگوریتمهایی خاص منجر می‌شوند، سودمندند. رهیافت الگوریتمی برای حلّ مسائل، در ریاضیات گسسته، رهیافتی اساسی است و این رهیافت، پیوند نزدیک بین این نظام و حیطهٔ علم کامپیوتر را تقویت می‌کند.

۳. افزایش بینش ریاضی دانشجو از طریق مطالعهٔ زمینه‌ای که با حسابان تفاوت کلی دارد. مثلاً امکان اثبات قضایا، با شمارش گردایه‌ای معین از اشیاء از چند راه. این روش به پیدایش آنچه اتحادهای ترکیبیاتی نامیده شده منجر می‌شود و تکنیک جدیدی برای اثبات نیز به‌دست می‌دهد. در این ویرایش، در فصل ۲، ماهیت برهان همراه با آنچه یک استدلال معتبر خوانده می‌شود و همراه با قانونهای منطق و قاعده‌های استنتاج پرورانده شده است. برهان با استقرای ریاضی در فصل ۴، آورده شده و سپس در سراسر فصول بعدی کتاب به‌کار رفته است.

دربارهٔ برهان به‌طور کلی، در بسیاری از موارد سعی‌شده است برای جالب ساختن قضایا از مشاهدات مربوط به مثالهای خاصّ استفاده شود. وانگهی هر وقت یک وضعیت متناهی، قضیه‌ای را که برای مورد نامتناهی درست نیست به‌دست می‌دهد، همین وضعیت برای بررسی انتخاب شده است. در متن کتاب برای نشان‌دادن پایان برهان از مربع توخالی استفاده شده است. از آوردن برهانهایی که فوق‌العاده طولانی‌اند یا / و از نظر ماهیت دارای حالت خاص‌اند چشمپوشی شده است. امّا، در مورد تعداد کمی از برهانهای اخیر، مرجعهایی برای خواننده‌ای که طالب پی بردن به‌اعتبار این قضایاست داده شده‌است. (میزان تکیه بر برهانها به اهداف مشخص مدرس و اهداف دانشجوی او بستگی دارد.)

۴. عرضهٔ یک دیدگاه مناسب از مباحث، برای دانشجویان علم کامپیوتر که می‌خواهند درسهای پیشرفته‌تری را در ساختارهای داده‌ها، نظریهٔ زبانهای کامپیوتری، و تحلیل الگوریتمها اختیار کنند. معرفی عملی گروهها، حلقه‌ها، هیأتها و جبرهای بولی برای دانشجویانی که ریاضیات، دروس اصلی آنهاست و می‌خواهند مطالعهٔ خود را دربارهٔ جبر مجرد ادامه دهند.

پیشنیازهای لازم برای مطالب این کتاب قبل از همه داشتن پایه‌ای صحیح از ریاضیات دبیرستانی و علاقه‌مندی به پرداختن جدی به حلّ مسائل متنوع است. دارابودن توان برنامه‌ریزی خاصی لازم فرض نشده است. امّا چند قطعه برنامه (که اساساً به زبان پاسکال ارائه شده) در متن کتاب وجود دارند و این برنامه‌ها برای کمک به درک بهتر مثالهای خاص، طرحریزی و تبیین شده‌اند. راجع به حسابان، بعداً در همین مقدمه و به دنبال آن در فصول ۹ و ۱۰ اشاره خواهیم کرد.

انگیزهٔ عمدهٔ من در نگارش اولین چاپ این کتاب تشویق دانشجویان و همکارانم درطی سالها بوده است. لذا، این کتاب منعکس‌کنندهٔ علائق من و دانشجویانم و نیز توصیه‌های کمیتهٔ برنامه‌ریزی ریاضیات دورهٔ کارشناسی و انجمن متخصصان علوم کامپیوتری است. این ویرایش دوم نیز همان راستا را دنبال می‌کند و منعکس‌کنندهٔ توصیه‌های دانشجویان و مدرسانی است که از ویرایش اول استفاده کرده یا هنوز استفاده می‌کنند.

جنبه‌ها

آنچه در زیر آمده شرحی است اجمالی از جنبه‌های عمدهٔ این کتاب. این جنبه‌ها برای یاری دادن به دانشجو در فراگیری اصول ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی طرحریزی شده‌اند.

تأکید بر الگوریتمها و کاربردها. در سرتاسر کتاب، الگوریتمها و کاربردهای آنها در بسیاری از زمینه‌ها عرضه شده‌اند، مثلاً

۱. فصل ۱ شامل چندین مورد است که در آنها مباحث مقدماتی شمارش مورد نیازند؛

۲. بخش ۷ از فصل ۵ مدخلی بر پیچیدگی محاسباتی است. سپس این مطالب در بخش ۸ این فصل برای تحلیل زمانهای رانش بعضی از قطعه‌های برنامهٔ مقدماتی به‌کار رفته‌اند.

۳. مطالب فصل ۶، با زبانها و ماشینهای متناهی‌ـحالت سروکار دارند. این مطالب خواننده را با زمینه‌ای مهم در علم کامپیوتر یعنی نظریهٔ زبانهای کامپیوتری آشنا می‌کنند.

۴. فصلهای ۷ و ۱۲ شامل مباحثی دربارهٔ کاربردها و الگوریتمهایی است که موضوع آن جورکردن توپولوژیک و تکنیکهای جستجوی معروف به جستجوی نخستین ژرفا و جستجوی نخستین پهناست.

۵. در فصل ۱۰ مبحث رابطه‌های بازگشتی را می‌بینیم. مطالب این قسمت شامل کاربردهای (الف) جورکردن حبابی، (ب) جستجوی دوتایی، (ج) اعداد فیبوناتچی، (د) شبکه‌های مقاومت خطی، (ه) ساختار داده‌های موسوم به ذخیره‌ساز و (و) درختهای دوتایی است.

۶. فصل ۱۶، به‌معرفی ویژگیهای اساسی ساختاری جبری به‌نام گروه می‌پردازد. دراینجا مطالب نشان می‌دهند که چگونه این ساختار در مطالعهٔ نظریهٔ کدگذاری جبری و روش شمارش پولیا به‌کار می‌روند.

توضیحهای تفصیلی. خواه مثالی مطرح باشد و خواه اثبات قضیه‌ای، توضیحها چنان تنظیم شده‌اند که دقیق و کامل باشند. در عرضهٔ مطالب قبل از هر چیز درک بهتر خواننده‌ای که نخستین‌بار مطالب را می‌بیند مورد توجه بوده است.

تمرینها. نقش تمرینها در هر کتاب درسی ریاضی، نقشی مهم است. مقدار وقتی که صرف حلّ تمرینها می‌شود، تأثیر زیادی در پیشرفت درس دارد. بسته به علاقه و مایهٔ قبلی ریاضی دانشجوی کلاس، مدرس به اندازهٔ زمانی که باید صرف بحث دربارهٔ تمرینها شود پی‌خواهد برد. در متن کتاب متجاوز از ۱۴۰۰ تمرین وجود دارند. تمرینهای انتهای هر بخش معمولاً به‌ترتیب

مطالب آن بخش آمده‌اند. این تمرینها به منظورهای زیر طرحریزی شده‌اند (الف) مرور بر مفاهیم پایه‌ای در آن بخش؛ (ب) پیوند مفاهیمی که در بخشها و فصلهای قبلی معرفی شده‌اند به مفاهیم بخش در دست مطالعه و (ج) عرضهٔ مفاهیم جدیدی که با مطالب بخش مربوط‌اند. بعضی از تمرینها به‌منظور مطالعهٔ یک الگوریتم یا نوشتن یک برنامهٔ کامپیوتری برای حلّ نمونهٔ معینی از مسألهای کلی آورده شده‌اند. این تمرینها معمولاً تنها به میزان‌کمی، تجربهٔ برنامه‌ریزی لازم دارند.

هر فصل شامل مجموعه‌ای از تمرینهای گوناگون است. این تمرینها مروری مجدد بر مفاهیمی هستند که در آن فصل آمده‌اند و همچنین مطالبی را به‌کار می‌برند که در فصول قبل کتاب پرورانیده شده‌اند.

در آخر کتاب، پاسخهای تقریباً همهٔ تمرینهای با شمارهٔ فرد داده شده‌اند.

خلاصه‌های فصل. آخرین بخش منظور شده در هر فصل، خلاصه و مروری است تاریخی بر مفاهیم عمدهٔ آن فصل. این بخش، به خواننده دید کلی از محتوای فصل می‌دهد و فراهم‌کنندهٔ اطلاعاتی است برای مطالعه و کاربردهای دیگر. این چنین مطالعات اضافی را می‌توان به‌آسانی از فهرست مراجعی که تدارک دیده شده به‌دست آورد.

به‌خصوص، خلاصه‌های آخر فصلهای ۱، ۵، و ۹ شامل جدولهای مربوط به فرمولهای شمارشی موجود در هر یک از فصلهاست. گاهی اوقات، این جدولها شامل نتایجی است از فصلهای قبل که به منظور انجام مقایسه‌ها و نشان‌دادن چگونگی بسط قضایای جدید از روی قضایای قبلی تنظیم شده است.

سازماندهی

موضوعهای ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی در برنامهٔ درسی دورهٔ کارشناسی تاحدی تازه است. لذا دربارهٔ مباحثی که باید در این دوره گنجانده شود گزینشهایی چند وجود دارند. هر مدرس و هر دانشجو ممکن است علائقی متفاوت از دیگران داشته باشد. درنتیجه مباحث نسبتاً زیادی در این کتاب آمده است و امکانات زیادی در انتخاب مطالب وجود دارند. اما باز مباحث دیگری هستند که ممکن است خوانندگانی احساس کنند که باید در کتاب گنجانده شوند. به‌علاوه عقاید مختلفی نیز راجع به نحوهٔ ترتیب عرضهٔ مباحث این کتاب وجود دارند. در سراسر متن به ماهیّت و اهمیّت رهیافت الگوریتمی در حل مسأله تأکید شده است. نظرها و رهیافتهای مربوط به حل مسائل بعداً به کمک روابط درونی بین شمارش و ساختار، که دو مبحث دیگر این کتاب‌اند، مستحکم شده است.

مطالب کتاب به چهار زمینهٔ عمده تقسیم شده‌اند. هفت فصل اوّل هستهٔ زیربنایی کتاب را تشکیل می‌دهند و شالوده‌های ریاضیات گسسته هستند. مباحث این فصول، مطالبی کافی برای درس ریاضیات گسسته در یک ربع سال یا در یک نیمسال است. درس دیگری که بر ترکیبیات تکیه دارد باید شامل فصلهای ۸، ۹، ۱۰ (و در صورت تکافوی وقت، بخشهای ۱، ۲، ۳، ۹، ۱۰، و ۱۱ی فصل ۱۶) باشد. در فصل ۹ بعضی از قضایای حسابان به‌کار رفته‌اند؛ یعنی اصول

مشتقگیری و تجزیهٔ کسرهای جزئی. باوجود این، برای آنهایی که می‌خواهند این فصل را حذف کنند، بخشهای ۱، ۲، ۳، ۶، و ۷ فصل ۱۰ را می‌توانند انتخاب کنند.

برای درسی که بر نظریه و کاربردهای گرافهای متناهی تکیه داشته باشد می‌توان از فصلهای ۱۱، ۱۲، و ۱۳ بهره گرفت. این فصلها سومین قسمت مهم کتاب را تشکیل می‌دهند. برای درسی در زمینهٔ جبر کاربردی، فصلهای ۱۴، ۱۵، ۱۶، و ۱۷ (چهارمین و آخرین قسمت) با ساختارهای جبری ـگروه، حلقه، جبر بولی و هیأتـ سروکار دارند که شامل کاربردهای این ساختارها در تابعهای راه گزینی، نظریهٔ کدگذاری جبری، و طرحهای ترکیبیاتی‌اند. سرانجام می‌توان از مطالب فصلهای ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۵، و بخشهای ۱ تا ۸ فصل ۱۶ درسی در نقش ساختارهای گسسته در علم کامپیوتر تهیه کرد. در این مباحث کاربردهایی از تابعهای راه گزینی و نظریهٔ کدگذاری جبری و همچنین مقدمه‌ای از نظریهٔ گراف و درختها و نقش آنها در بهینه‌سازی را می‌یابیم. درسهای ممکن دیگر را می‌توان با درنظر گرفتن بستگیهایی که به‌صورت زیر بین فصلها وجود دارند تهیه دید.

فصل	بستگی به فصلهای قبل
۱	بدون بستگی
۲	بدون بستگی (بنابراین مدرس می‌تواند درس ریاضیات گسسته را با مطالعهٔ منطق یا معرفی شمارش شروع کند)
۳	۱، ۲
۴	۱، ۲، ۳
۵	۱، ۲، ۳
۶	۱، ۲، ۳، ۵ (بستگی جزئی بخش ۱.۴ به بخش ۱.۶)
۷	۱، ۲، ۳، ۵، ۶ (بستگی جزئی بخش ۳.۵ با مثال ۳.۸ی بخش ۱.۸)
۹	۱، ۳
۱۰	۱، ۳، ۴، ۵، ۹
۱۱	۱، ۲، ۳، ۴، ۵ (گرچه برخی مفاهیم نظریه‌ای گراف را در فصلهای ۵، ۶، ۷، ۸، و ۱۰ ذکر کردیم، مطالب این فصل بدون بستگی به این نتایج قبلی تهیه شده‌اند.)

۱۲	۱، ۲، ۳، ۴، ۵،۱۱
۱۳	۳، ۵، ۱۱، ۱۲
۱۴	۲، ۴، ۵، ۷ (از تابع فی اویلر در بخش ۱.۱۴ استفاده شده است. این تابع در بخش ۱.۸ نتیجه شده، امّا قضیه را می‌توان در اینجا، در فصل ۱۴، بدون نیاز به مطالب فصل ۸ به‌کاربرد)
۱۵	۲، ۳، ۵، ۷
۱۶	۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۷
۱۷	۲، ۳، ۴، ۵، ۷، ۱۴

به‌علاوه فهرست راهنما، برای قابلیت انعطاف بیشتر کتاب، با دقت تهیه شده است. اصطلاحات با فهرست‌بندی اولیه و چندین فهرست‌بندی ثانوی معرفی شده‌اند.

مقدار زیادی ارجاع از مبحثی به مبحث دیگر نیز وجود دارد. این ارجاعها، برای کمک به مدرسی طرحریزی شده است که می‌خواهد ترتیب عرضهٔ مطالب را عوض کند و از راه اصلی منحرف شود. در خاتمه از همهٔ تجدید نظرکنندگان مطالب کتاب در ویرایش اول و دوم نهایت قدردانی می‌شود.

ر. پ. گریمالدی
ترهاؤت، ایندیانا

۱

مبانی اصلی شمارش

فراگیری شمارش یا محاسبه برای محصلی که اول‌بار به خواندن حساب می‌پردازد [یا اول‌بار خواندن حساب را آغاز می‌کند] شاید امری مسلم تلقی شود. ولی بعدها، وقتی محصل به زمینه‌های «دشوارتر» ریاضیات نظیر جبر، هندسه، مثلثات و حسابان می‌رسد به‌نظر می‌رسد که اعتنای چندانی به پیشرفت بعدی در شمارش ندارد. لذا در این فصل باید دربارهٔ جدی بودن و دشوار بودن شمارش «محض» تذکرهایی داده شود.

مسألهٔ شمارش به حساب تنها ختم نمی‌شود، بلکه در زمینه‌هایی مانند نظریهٔ کدگذاری، احتمال (در ریاضیات) و تحلیل الگوریتمها (درکامپیوتر) نیزکاربردهایی دارد. در فصلهای آتی به نمونه‌هایی خاص از این کاربردها اشاره خواهد شد.

هنگامی که در این عرصهٔ جالب ریاضیات پای می‌نهیم، با مسائل زیادی که صورت آنها خیلی ساده ولی حل آنها تاحدی «دست و پاگیر» است مواجه می‌شویم. مواظب فرمولها باشید! آگاهی صرف از فرمولها، بدون تحلیل هر مسأله تقریباً مفید فایده نیست. به‌جای استفاده از آنها به چالش در حل مسائلی رو کنید که غیر از مسائل عادی یا غیر از مسائلی هستند که در گذشته با آنها مواجه بوده‌اید. راه‌حلها را براساس مذاقهٔ خود بدون توجه به آنچه که مؤلف پیش‌بینی کرده [یا تدارک دیده] جستجو کنید. برای حل یک مسألهٔ داده شده، اغلب چندین راه وجود دارد.

۱.۱ اصل جمع و اصل ضرب

مطالعهٔ ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی با دو اصل مهم و اساسی محاسبه آغاز می‌شود: اصلهای جمع و ضرب. کاربردهای اولیه و صورت این دو اصل کاملاً ساده به‌نظر می‌رسند. در تحلیل مسأله‌های پیچیده‌تر، اغلب می‌توان آنها را به اجزای کوچکتر خرد کرد و با استفاده از این اصلهای اساسی به حل آنها پرداخت. ما می‌خواهیم قابلیت «تجزیه»ی این‌گونه مسائل را آشکار کنیم و پاسخهای جزئی را روی‌هم بریزیم تا به پاسخ نهایی برسیم. یکی از راههای مناسب برای انجام این امر تجزیه و حل مسائل مختلف شمارشی زیاد و یادداشت کردن اصولی است که در تمام مدت، در این راه‌حلها به‌کار رفته است. این راهی است که ما دنبال خواهیم کرد. نخستین اصل شمارش ما می‌تواند چنین بیان شود:

اصل جمع: اگر بتوان کاری را به m راه و کار دیگری را به n راه انجام داد، و نتوان این دو کار را همزمان انجام داد، آنگاه هر یک از دو کار را می‌توان به یکی از $m+n$ راه انجام داد.

توجه کنید که وقتی می‌گوییم رویدادی خاص، نظیر کار مذکور در بالا، می‌تواند به m راه رخ دهد، فرض بر این است که این m راه از هم متمایزند، مگر آنکه خلاف آن تصریح شود. این فرض در سرتاسر کتاب به قوت خود باقی است.

مثال ۱.۱ کتابخانهٔ دانشکده‌ای ۴۰ کتاب درسی در زمینهٔ جامعه‌شناسی و ۵۰ کتاب درسی دربارهٔ انسان‌شناسی دارد. بنابر اصل جمع ، یک دانشجوی این دانشکده برای کسب اطلاعات بیشتر دربارهٔ یکی از این دو موضوع، می‌تواند کتابی را از بین ۹۰ = ۵۰ + ۴۰ کتاب درسی انتخاب کند. □

مثال ۲.۱ مادامی که هیچ دوکاری را نتوان همزمان انجام داد، این اصل را می‌توانیم به بیش از دو کار تعمیم دهیم. به‌عنوان نمونه، یک مربی کامپیوتر که مثلاً ۵ کتاب مقدماتی از هریک از زبانهای **اپل**، **بیسیک**، **فورترن**، **پاسکال** دارد می‌تواند مطالعهٔ هریک از این ۲۰ کتاب را به دانشجویی که علاقه‌مند به یادگیری اولین زبان برنامه‌ریزی است توصیه کند. □

مثال ۳.۱ مربی کامپیوتر مثال ۲.۱، دارای دو همکار است. یکی از این دو همکار، سه کتاب درسی دربارهٔ تحلیل الگوریتم دارد، و دیگری پنج کتاب درسی در همین زمینه دارد. اگر n معرف تعداد کتابهایی در این موضوع باشد که این مربی می‌تواند از دو همکارش امانت بگیرد، در این صورت $۵ \le n \le ۸$، زیرا در اینجا هر دو همکار او ممکن است چند نسخه از یک کتاب داشته باشند.□

مثال زیر معرف اصل ضرب است.

مثال ۴.۱ مدیر کارخانه‌ای در تلاش برای تصمیم‌گیری دربارهٔ توسعهٔ کارخانه، ۱۲ نفر از کارکنان را به دو کمیته تخصیص می‌دهد. کمیتهٔ الف مرکب از ۵ عضو است که باید نتایج ممکن مطلوب چنین توسعه‌ای را بررسی کند. هفت نفر دیگر، یعنی کمیتهٔ ب، واکنشهای نامطلوب ممکن را دقیقاً بررسی می‌کنند. اگر مدیر قبل از اخذ تصمیم بخواهد فقط با یک عضو یکی از کمیته‌ها صحبت کند، بنابر اصل جمع، ۱۲ عضو وجود دارند که می‌تواند با یکی از آنها صحبت کند. اما برای اینکه تصمیم او کمی نااریبتر باشد تصمیم می‌گیرد که قبل از اخذ تصمیم، با یک عضو کمیتهٔ الف در روز دوشنبه و سپس با یک عضو کمیتهٔ ب در روز سه‌شنبه تبادل‌نظر کند. با استفاده از اصل زیر نتیجه می‌گیریم مدیر با چنین دو عضوی به $۳۵ = ۷ \times ۵$ راه می‌تواند صحبت نماید. □

اصل ضرب: اگر شیوهٔ انجام کاری را بتوان به دو مرحلهٔ اول و دوم تجزیه کرد، و اگر m برآمد ممکن برای مرحلهٔ اول و n برآمد ممکن برای مرحلهٔ دوم وجود داشته باشند، آنگاه تعداد کل شیوه‌هایی که می‌توان کار مزبور را انجام داد، mn است.

این اصل را گاهی اصل انتخاب می‌نامند.

مثال ۵.۱ انجمن تئاتر دانشگاه برای نمایش بهاره تمرین می‌کند. از شش مرد و هشت زن برای اجرای دو نقش اصلی مرد و زن آزمایش به‌عمل می‌آید. بنابر اصل ضرب، مدیر می‌تواند زوج اجراکنندهٔ دو نقش اصلی را به $۴۸ = ۸ \times ۶$ راه انتخاب نماید. □

مثال ۶.۱ اینک تعمیمهای مختلف این اصل را با بررسی ساخت پلاکهای نمرهٔ ماشینها که مرکب‌اند از دو حرف و به دنبال آنها چهار رقم، در نظر می‌گیریم.

الف) اگر حرفها و رقمها تکراری نباشند، تعداد $۲۶ \times ۲۵ \times ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ = ۳۲۷۶۰۰۰$ پلاک ممکن مختلف وجود دارند.

ب) با مجاز بودن تکرار حرفها و رقمها، به‌دست می‌آوریم که

$$۲۶ \times ۲۶ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۶۷۶۰۰۰۰$$

پلاک ممکن وجود دارند.

ج) با مجاز بودن تکرارها، در چندتا از پلاکهای قسمت ب هر دو حرف، صدادار (a,e,i,o,u) و همهٔ ارقام زوج‌اند؟ (۰ یک عدد صحیح زوج است). □

مثال ۷.۱ در حافظهٔ اصلی کامپیوتر، اطلاعات در خانه‌های حافظه ذخیره می‌شوند. برای تعیین

خانه‌ها در حافظهٔ اصلی کامپیوتر به هر خانه نامی یکتا را که آدرس آن خانه می‌نامند تخصیص می‌دهند. در بعضی از کامپیوترها یک آدرس به صورت یک فهرست مرتب هشت‌نمادی است، که هر نماد یکی از بیتهای ۰ یا ۱ است. این فهرست هشت‌بیتی را بایت می‌نامند. با استفاده از اصل ضرب، درمی‌یابیم که $۲۵۶ = ۲^۸ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$ تا از این‌گونه بایتها وجود دارند. بنابراین، ۲۵۶ آدرس برای خانه‌های حافظه که می‌توان در آنها اطلاعاتی را ذخیره کرد در اختیار داریم.

در بعضی از ماشینها (ازجمله خانوادهٔ PDP۱۱*) آدرسهای دوبایتی استفاده می‌شود. چنین آدرسی از دو بایت متوالی، یا ۱۶ بیت متوالی ساخته می‌شود، لذا ممکن است که به‌اندازهٔ $۶۵۵۳۶ = ۲^{۱۶} = ۲^۸ \times ۲^۸ = ۲۵۶ \times ۲۵۶$ قطعه اطلاعات را ذخیره کرد. در کامپیوترهای دیگر (ازجمله IBM PC/RT**) سیستمهای آدرس‌گذاری چهاربایتی به‌کار می‌روند. در این حالت به‌اندازهٔ $۴۲۹۴۹۶۷۲۹۶ = ۲^{۳۲} = ۲^۸ \times ۲^۸ \times ۲^۸ \times ۲^۸$ آدرس برای ذخیره کردن اطلاعات در خانه‌های حافظه ماشین موجود است. □

مثال ۸.۱ گاهی اوقات، در حل یک مسأله لازم است که چندین اصل مختلف شمارش را ترکیب کنیم. در اینجا متوجه می‌شویم که برای رسیدن به پاسخ، به هر دو اصل جمع و اصل ضرب نیاز داریم.

در برخی صورتهای زبان برنامه‌ریزی بیسیک، نام متغیر از یک حرف تنها $(A, B, C, \ldots)$ یا یک حرف تنها که به‌دنبال آن رقمی می‌آید تشکیل می‌شود. چون کامپیوتر بین حروف بزرگ و کوچک تمایزی قائل نیست، a و A، مثل E۷ و e۷، یک نام به‌حساب می‌آیند. در اینجا، بنابر اصل ضرب، $۲۶۰ = ۱۰ \times ۲۶$ نام متغیر، متشکل از یک حرف و به‌دنبال آن یک رقم، وجود دارند؛ و چون ۲۶ نام متغیر متشکل از یک حرف تنها موجودند، بنابر اصل جمع، تعداد کل نامهای متغیر در این زبان برنامه‌ریزی $۲۸۶ = ۲۶۰ + ۲۶$ است. □

۲.۱ جایگشتها

اینک با ادامهٔ بررسی کاربردهای اصل ضرب، به شمارش آرایشهای اشیاء متمایز با ترتیب مشخص می‌پردازیم. معمولاً اشیاء را در یک سطر یا یک خط مستقیم و نتایج را در یک آرایش خطی قرار می‌دهند. این آرایشها را غالباً جایگشت می‌نامند، و ما روشهایی سیستماتیک را برای کار با آنها تهیه خواهیم کرد. با مثالی نوعی شروع می‌کنیم.

مثال ۹.۱ از دانشجویان یک کلاس ده‌نفره، باید پنج نفر برای گرفتن عکس انتخاب و در یک ردیف نشانده شوند. این آرایش خطی به چند صورت ممکن انجام می‌گیرد؟

در اینجا واژهٔ کلیدی، آرایش است، که اهمیت ترتیب را معین می‌کند. اگر A، B، C، ...، I، J

* خانوادهٔ PDP۱۱ی کامپیوترها محصولی از Digital Equipment Corporation است.

** پروسسور IBM PC/RT ساخت شرکت International Business Machines Corporation است.

معرف این ده دانشجو باشند، آن‌گاه BCEFI، CEFIB، و ABCFG سه آرایش از آرایشهای مختلف‌اند، گرچه پنج دانشجوی دو تای اول یکی هستند.

برای پاسخ دادن به این سؤال، مکانها و تعداد ممکن دانشجویانی را که می‌توانیم برای پرکردن هر مکان انتخاب کنیم در نظر می‌گیریم. پرکردن یک مکان، یک مرحله از شیوهٔ عمل ماست.

پنجمین مکان		چهارمین مکان		سومین مکان		دومین مکان		اولین مکان
۶	$\times$	۷	$\times$	۸	$\times$	۹	$\times$	۱۰

هریک از ده دانشجو می‌تواند اولین مکان این ردیف را اشغال کند. چون در اینجا تکرار جایز نیست، می‌توانیم فقط یکی از نه دانشجوی باقیمانده را برای اشغال دومین مکان انتخاب کنیم؛ با ادامه کار به همین طریق، ملاحظه می‌کنیم که فقط از بین شش دانشجو باید دانشجویی را برای اشغال پنجمین و آخرین مکان انتخاب کنیم. لذا تعداد کل آرایشهای ممکن پنج دانشجوی منتخب از ده دانشجوی کلاس برابر ۳۰۲۴۰ است.

اگر مکانها را به‌ترتیب عکس پر کنیم دقیقاً همان جواب، یعنی $(۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶)$ به‌دست می‌آید. اگر ترتیب پرکردن، سومین، اولین، چهارمین، پنجمین، و دومین مکان باشد (یعنی سومین مکان را اول، اولین مکان را دوم، چهارمین مکان را سوم، پنجمین مکان را چهارم، و دومین مکان را پنجم پر کنیم) آن‌گاه جواب، $۷ \times ۸ \times ۱۰ \times ۶ \times ۹$ است. □

تعریف ۱.۱ به‌ازای عدد صحیح $n \geq ۰$، n فاکتوریل (که با نماد $n!$ نشان داده می‌شود) به‌صورت

$$۰! = ۱$$
$$n! = (n)(n-۱)(n-۲)\ldots(۳)(۲)(۱), \quad n \geq ۱ \text{ برای}$$

تعریف می‌شود.

از این تعریف نتیجه می‌شود که $۱! = ۱$، $۲! = ۲$، $۳! = ۶$، $۴! = ۲۴$، $۵! = ۱۲۰$.
به‌علاوه به‌ازای هر $n \geq ۰$، $(n+۱)! = (n+۱)n!$.

با استفاده از نماد فاکتوریل، درمی‌یابیم که پاسخ مثال ۹.۱ را می‌توان به‌صورت فشرده‌تر زیر بیان کرد:

$$۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ = ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times \frac{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = \frac{۱۰!}{۵!}$$

تعریف ۲.۱ *اگر گردایه‌ای از n شیء متمایز داشته باشیم، هر آرایش (خطی) این اشیاء را یک جایگشت آن گردایه می‌نامیم.*

اگر با حرفهای a، b، c شروع کنیم، می‌بینیم که برای آرایش همهٔ این حرفها، شش راه وجود دارد: abc، acb، bac، bca، cab، cba. اگر به آرایش دادن فقط دو تا از این حرفها باهم توجه داشته باشیم، شش جایگشت دوحرفی از این گردایه وجود دارند: ab، ba، ac، ca، bc، cb.

> به‌طور کلی، اگر n شیء متمایز که آنها را با a_1، a_2، $\cdots$، a_n نشان می‌دهیم موجود باشند، و r عددی صحیح با شرط $1 \leq r \leq n$ باشد، آن‌گاه بنابر اصل ضرب، تعداد آرایشها یا جایگشتهای r شیء از n شیء عبارت است از
>
> $$\underset{\text{اولین مکان}}{n} \times \underset{\text{دومین مکان}}{(n-1)} \times \underset{\text{سومین مکان}}{(n-2)} \times \ldots \times \underset{r\text{امین مکان}}{(n-r+1)} =$$
>
> $$(n)(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \times \frac{(n-r)(n-r-1)\cdots(3)(2)(1)}{(n-r)(n-r-1)\cdots(3)(2)(1)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

این عدد را با $P(n,r)$ نشان می‌دهیم. به‌ازای $r=0$، $P(n,0) = 1 = \frac{n!}{(n-0)!}$، لذا، $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$، $0 \leq r \leq n$. حالتی خاص از این نتیجه، مثال ۹.۱ است که در آن $n=10$، $r=5$ و $P(10,5) = 30240$. وقتی تمام n شیء گردایه را جایگشت بدهیم، داریم $r=n$ و به‌دست می‌آوریم $P(n,n) = \frac{n!}{0!} = n!$.

تعداد جایگشتهای r شیء، از گردایهٔ n شیء، وقتی $0 \leq r \leq n$، برابر است با

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

اما اگر تکرار مجاز باشد، بنابر اصل ضرب n^r آرایش ممکن، با شرط $r \geq 0$، وجود دارند.

مثال ۱۰.۱ تعداد جایگشتهای حرفهای واژهٔ COMPUTER برابر $8!$ است. اگر فقط چهار حرف آن‌را به‌کار بریم، تعداد جایگشتهای چهارحرفی برابر $p(8,4) = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 1680$ است. اگر تکرار حروف مجاز باشد، تعداد دنباله‌های ۱۲ حرفی ممکن برابر است با $8^{12} \doteq 6{,}872 \times 10^{10}$. □

مثال ۱۱.۱ برخلاف مثال ۱۰.۱، تعداد جایگشتهای حرفها در واژهٔ BALL برابر ۱۲ است

جدول ۱.۱

A	B	L	L	A	B	L_1	L_2	A	B	L_2	L_1
A	L	B	L	A	L_1	B	L_2	A	L_2	B	L_1
A	L	L	B	A	L_1	L_2	B	A	L_2	L_1	B
B	A	L	L	B	A	L_1	L_2	B	A	L_2	L_1
B	L	A	L	B	L_1	A	L_2	B	L_2	A	L_1
B	L	L	A	B	L_1	L_2	A	B	L_2	L_1	A
L	A	B	L	L_1	A	B	L_2	L_2	A	B	L_1
L	A	L	B	L_1	A	L_2	B	L_2	A	L_1	B
L	B	A	L	L_1	B	A	L_2	L_2	B	A	L_1
L	B	L	A	L_1	B	L_2	A	L_2	B	L_1	A
L	L	A	B	L_1	L_2	A	B	L_2	L_1	A	B
L	L	B	A	L_1	L_2	B	A	L_2	L_1	B	A

(الف) (ب)

و نه ۲۴=!۴. دلیل آن، این است که در اینجا چهار حرف متمایز برای جایگشت نداریم. برای به‌دست آوردن ۱۲ آرایش، می‌توانیم آنها را مثل آنچه در جدول ۱.۱ (الف) نشان داده‌ایم فهرست کنیم.

اگر دو L را به‌صورت L_1 و L_2 ازهم متمایزکنیم، آن‌گاه می‌توانیم ایدهٔ قبلی دربارهٔ جایگشتهای اشیاء متمایز را برای چهار نماد متمایز B، A، L_1، L_2 به‌کار بریم، که در نتیجه ۲۴=!۴ جایگشت داریم. اینها را در جدول ۱.۱ (ب) فهرست کرده‌ایم. می‌بینیم که به هر جایگشتی با Lهای نامتمایز، یک جفت جایگشت با Lهای متمایز متناظر است در نتیجه

$2 \times$ (تعداد جایگشتهای نمادهای B, A, L, L) $=$

(تعداد جایگشتهای نمادهای B, A, L_1, L_2)

و پاسخ مسألهٔ اصلی تعیین جایگشتهای حرفهای BALL برابر است با $12 = 4!/2$. □

مثال ۱۲.۱ اینک با استفاده از ایده‌ای که در مثال ۱۱.۱ عرضه کردیم، جایگشتهای همهٔ حرفهای PEPPER را بررسی می‌کنیم.

برای هر جایگشتی که در آن Pها متمایز نیستند، ۶=!۳ جایگشت با Pهای متمایز وجود دارد. مثلاً $P_1EP_2P_3ER$، $P_1EP_3P_2ER$، $P_2EP_1P_3ER$، $P_2EP_3P_1ER$، $P_3EP_1P_2ER$، و $P_3EP_2P_1ER$، که وقتی اندیس Pها را حذف کنیم همگی با PEPPER متناظر می‌شوند. به‌علاوه، جایگشت $P_1EP_2P_3ER$، وقتی Eها متمایز ازهم باشند با دو جایگشت $P_1E_1P_2P_3E_2R$ و $P_1E_2P_2P_3E_1R$ متناظر می‌شود. در نتیجه

$(2!)(3!)$(تعداد آرایشهای حرفها در PEPPER)

$=$ (تعداد جایگشتهای نمادهای P_1، E_1، P_2، P_3، E_2، R)

بدین ترتیب تعداد آرایشهای حرفهای PEPPER برابر است با $۶۰ = (۲!۳!)/!۶$. □

قبل از بیان اصل کلی برای آرایشهای با نمادهای تکراری، می‌خواهیم اشاره کنیم که در دو مثال قبلی، نوعی جدید از مسأله را در ارتباط آن با اصلهای شمارش قبلی حل کردیم. به‌طورکلی این عملی عادی در ریاضیات است و غالباً در نتیجه‌گیری فرمولهای ترکیبیاتی و گسسته ظاهر می‌شوند.

> به‌طورکلی اگر n شیء داشته باشیم که n_1 شیء آن از نوع اول، n_2 شیء آن از نوع دوم، ... ، و n_r شیء آن از نوع rام باشند و $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$، آن‌گاه $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$ آرایش از n شیء مفروض موجود است. (اشیاء همنوع، نامتمایزند.)

مثال ۱۳.۱ MASSASAUGA یک مار سفید و قهوه‌ای سمی بومی آمریکای شمالی است. از آرایش همهٔ حرفهای MASSASAUGA، درمی‌یابیم که تعداد

$$\frac{۱۰!}{۴!\ ۳!\ ۱!\ ۱!\ ۱!} = ۲۵۲۰۰$$

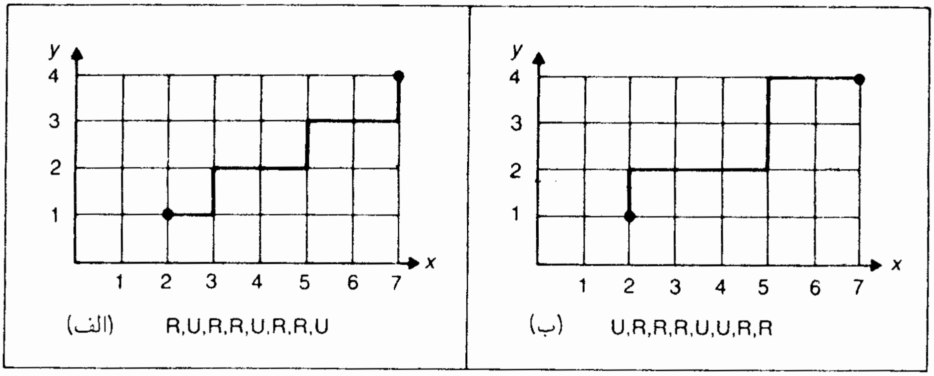
آرایش ممکن وجود دارند. در بین این آرایشها

$$\frac{۷!}{۳!\ ۱!\ ۱!\ ۱!\ ۱!} = ۸۴۰$$

آرایش وجود دارند که در آنها هر چهار A باهم ظاهر می‌شوند. برای به‌دست آوردن این نتیجهٔ اخیر، همهٔ آرایشهای مرکب از هفت نماد AAAA (یک نماد)، S، S، S، M، U، G را در نظر گرفته‌ایم. □

مثال ۱۴.۱ تعداد (پلکان) مسیرهای واقع در صفحهٔ xy از (۲, ۱) تا (۷, ۴) را تعیین کنید، در صورتی که هر مسیر از پله‌هایی انفرادی ساخته شوند که یک واحد به راست (R) یا یک واحد به بالا (U) بروند. در شکل ۱.۱، خطهای پررنگ دو تا از این مسیرها را نشان می‌دهند.

در شکل ۱.۱، زیر هر مسیر، پله‌های انفرادی را ثبت کرده‌ایم. مثلاً در قسمت (الف) شکل، فهرست R، U، R، R، U، R، R، U معرف شروع از نقطهٔ (۲, ۱) است، ابتدا یک واحد به راست [به نقطهٔ (۳, ۱)]، سپس یک واحد به بالا [به نقطهٔ (۳, ۲)]، به دنبال آن دو واحد به راست [به نقطهٔ (۵, ۲)] و نظایر آن حرکت می‌کنیم تا به نقطهٔ (۷, ۴) برسیم. مسیر شامل ۵ تا R برای حرکتهای به سمت راست و ۳ تا U برای حرکتهای به سمت بالاست.



شکل ۱.۱

مسیر قسمت (ب) نیز از ۵ تا R و ۳ تا U ساخته شده است. به‌طور کلی همهٔ جابه‌جاییها از $(۲,۱)$ به $(۷,۴)$ مستلزم $۷ - ۲ = ۵$ حرکت افقی به راست و $۴ - ۱ = ۳$ حرکت قائم به سمت بالاست. در نتیجه، هر مسیر، متناظر با فهرستی از ۵ تا R و ۳ تا U است، و تعداد مسیرهای ممکن مثل تعداد آرایشهای ۵ تا R و ۳ تا U است که برابر است با $\frac{۸!}{۵!\,۳!} = ۵۶$. □

مثال ۱۵.۱ اینک کاری می‌کنیم که کمی مجردتر است و ثابت می‌کنیم اگر n و k دو عدد صحیح مثبت باشند، و $n = ۲k$، آن‌گاه $n!/۲^k$، عددی صحیح است. چون استدلال ما متکی بر شمارش است، این، مثالی از برهان ترکیبیاتی است.

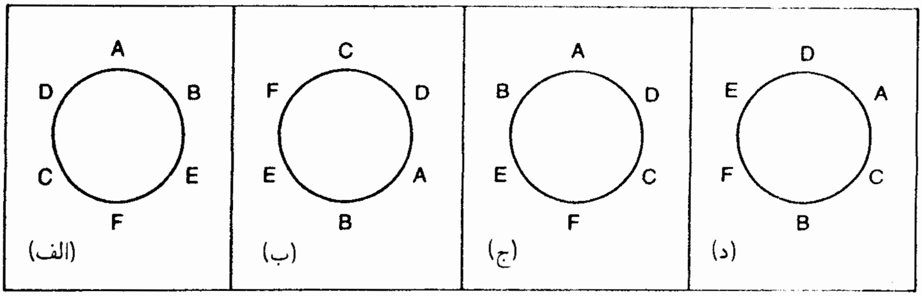
n نماد $x_۱$، $x_۱$، $x_۲$، $x_۲$، . . . ، x_k، x_k را درنظر می‌گیریم. تعداد راههایی که می‌توانیم همهٔ این $n = ۲k$ نماد را آرایش دهیم عددی صحیح است، یعنی

$$\underbrace{\frac{n!}{۲!\,۲!\cdots ۲!}}_{k \text{ عامل } ۲!} = \frac{n!}{۲^k}$$

□

سرانجام آنچه را که تاکنون پرورده‌ایم برای موردی به‌کار می‌بریم که در آن آرایشها دیگر خطی نیستند.

مثال ۱۶.۱ اگر شش نفر که با حروف A، B، . . . ، F مشخص شده‌اند دور میزی گرد بنشینند، چند آرایش دوری مختلف امکان دارد، به‌شرط اینکه آرایشهایی را که می‌توان از دوران آرایشهای دیگر به‌دست آورد یکی بگیریم؟ (در شکل ۲.۱، آرایشهای (الف) و (ب) یکی به‌حساب می‌آیند، در حالی‌که (ب)، (ج)، و (د) سه آرایش متمایزند.)



شکل ۲.۱

مثل بسیاری از موارد جدید، سعی داریم این مورد را به مفهومهای گذشته ارتباط دهیم. با در نظر گرفتن شکلهای ۲.۱ (الف) و ۲.۱ (ب)، از بالای دایره، ساعتسو، شروع به حرکت می‌کنیم و آرایشهای خطی متمایز ABEFCD و CDABEF را که متناظر با یک آرایش دوری‌اند ثبت می‌نماییم. علاوه بر این دو، چهار آرایش خطی دیگر BEFCDA، DABEFC، EFCDAB، و FCDABE، با یک آرایش دوری (الف) یا (ب) متناظرند. بنابراین چون هر آرایش دوری با شش آرایش خطی متناظر است، داریم

$$6 \times (\text{تعداد آرایشهای دوری} A، B، C، \cdots F) =$$

$$(\text{تعداد آرایشهای خطی} A، B، \cdots F) = 6!$$

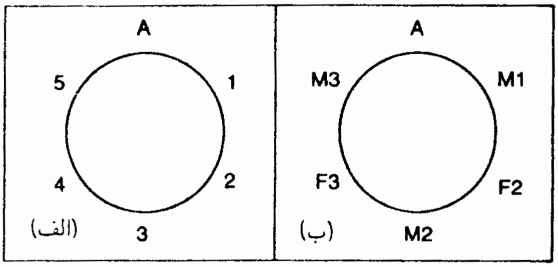
در نتیجه، $120 = 5! = \frac{6!}{6}$ آرایش از A، B، . . . ، F برای نشستن دور میز گرد وجود دارد. □

مثال ۱۷.۱ حال فرض کنید که ۶ نفر مثال ۱۶.۱، سه زن و شوهرند که A، B و C زن هستند. می‌خواهیم این شش نفر را دور میز طوری بنشانیم که زنها و مردها یک در میان باشند. (بازهم آرایشهایی را که از دوران هم حاصل می‌شوند یکی می‌گیریم.)

قبل از حل این مسأله، مثال ۱۶.۱ را به روشی دیگر حل می‌کنیم، که به حل مسألهٔ موجود کمک می‌کند.

اگر همان‌طور که در شکل ۳.۱ (الف) نشان داده‌ایم، A را پشت میز بنشانیم، پنج مکان (با حرکت ساعتسو، ابتدا از A) داریم که باید پر کنیم. پر کردن این مکانها با B، C، . . . ، F، مسألهٔ جایگشت دادن B، C، . . . ، F به طریق خطی است، و این کار را می‌توان به $5! = 120$ راه انجام داد.

برای حل مسألهٔ جدید یک در میان نشانیدن زن و مرد، جای دادن A (یک زن) را مانند قبل، به صورتی که در شکل ۳.۱ (ب) است در نظر بگیرید. مکان بعدی را، ساعتسو، با شروع از A با M۱ (مرد شمارهٔ ۱) نشان داده‌ایم و می‌توان آن‌را به سه راه پر کرد. با ادامهٔ عمل، با حرکت



شکل ۳.۱

ساعتسو از A، مکان F۲ (زن شمارهٔ ۲) را می‌توان به دو راه پر کرد. با ادامهٔ کار به همین طریق، و بنابر اصل ضرب، $۱۲ = ۱ \times ۱ \times ۲ \times ۲ \times ۳$ راه وجود دارند که این ۶ نفر را می‌توان طوری نشانید که هیچ دو زن یا دو مردی پهلوی هم ننشینند. □

تمرینهای ۱.۱و۲.۱

۱. در انتخابات محلی، ۸ داوطلب جمهوریخواه و ۵ داوطلب دموکرات برای ریاست هیأت امنای مدرسه‌ای نامزد شده‌اند.

الف) اگر یکی از این داوطلبان رئیس باشد چند امکان برای برندهٔ احتمالی وجود دارد؟

ب) چند امکان برای یک جفت داوطلب (یکی از هر حزب) وجود دارد تا برای انتخاب بعدی در مقابل هم قرار گیرند؟

ج) در قسمت (الف) کدام اصل شمارش به‌کار رفته است؟ در قسمت (ب) کدام؟

۲. به قسمت (ج) مثال ۶.۱ پاسخ دهید.

۳. اتومبیل بیوک در ۴ مدل، ۱۲ رنگ، ۳ حجم موتور و ۲ نوع دنده به بازار می‌آید.

الف) چند بیوک متمایز ساخته می‌شود؟

ب) اگر یکی از رنگهای موجود آبی باشد، چند بیوک آبی رنگ مختلف ساخته می‌شود؟

ج) اگر یکی از حجمهای موتور V-۸ باشد، چند بیوک آبی رنگ متمایز با حجم موتور V-۸ ساخته می‌شود؟

۴. به منظور فراهم کردن پول برای صندوق شهرداری، اطاق بازرگانی شهری، یک مسابقهٔ دو ترتیب داده است. هر شرکت‌کننده ۵ دلار ورودیه می‌پردازد و یک شانس برای بردن یکی از جایزه‌های مختلف دارد که به ۸ نفر اول دونده‌ای که به خط پایان می‌رسند می‌دهند.

الف) اگر ۳۰ نفر در مسابقه شرکت کنند، به چند راه می‌توان جایزه‌ها را اعطا کرد؟

ب) اگر A و B دو شرکت‌کننده در مسابقه باشند، به چند راه می‌توان جایزه‌ها را به این دو دونده که بین سه نفر اول‌اند، اعطا کرد؟

۵. یک «همبرگرفروش» آگهی کرده است که هر مشتری می‌تواند همبرگر خود را با تمام یا چندتا از مخلفات زیر و یا بدون آنها سفارش دهد: سوس، خردل، مایونز، کاهو، گوجه‌فرنگی، پیاز، خیارشور، پنیر، یا قارچ. چند نوع مختلف همبرگر می‌توان سفارش داد؟

۶. آقای M با سمت اپراتور کامپیوتر در دانشگاهی کوچک کار می‌کند. یک روز عصر متوجه شد که ۱۲ برنامهٔ کامپیوتری صبح آن‌روز برای پردازش داده شده است. آقای M به چند راه می‌تواند پردازش این برنامه‌ها را مرتب کند، اگر (الف) هیچ محدودیتی وجود نداشته باشد؟ (ب) چهار برنامه را نسبت به هشت برنامهٔ دیگر در اولویت بداند و بخواهد این چهار برنامه را اول پردازش کند؟ (ج) ابتدا برنامه‌ها را به ۴ برنامه با اولویت بالا، ۵تا را با اولویت کمتر و ۳تا را با کمترین اولویت تفکیک کند و بخواهد به نحوی پردازش کند که برنامه‌های با اولویت برتر اول و سه برنامه با کمترین اولویت آخر پردازش شوند؟

۷. به چند راه می‌توان حروف a، b، c، d، e، e، e، e، e را آرایش داد به قسمی که هیچ eیی مجاور eی دیگر نباشد؟

۸. در یک دستگاه مخابرات، الفبایی مرکب از ۴۰ نماد برای انتقال پیامها به‌کار می‌رود. اگر نمادها را بتوان در پیامها تکرار کرد، مخابره‌کننده با ۲۵ نماد چند پیام متمایز می‌تواند بفرستد؟ اگر ۱۰تا از ۴۰ نماد بتوانند فقط به‌صورت اولین و یا آخرین نماد پیام و ۳۰ نماد دیگر بتوانند در همه‌جا ظاهر شوند و تکرار تمام نمادها مجاز باشد، چند پیام متمایز می‌توان فرستاد؟

۹. در پیاده‌سازی زبان برنامه‌ریزی پاسکال، یک شناسه عبارت است از یک حرف، یا یک حرف و به‌دنبال آن تا هفت نمادی که ممکن است حرف یا رقم باشند. (فرض می‌کنیم کامپیوتر بین حرفهای بزرگ و کوچک تمایزی قائل نیست؛ پس ۲۶ حرف وجود دارند و ۱۰ رقم). برای این زبان پاسکال چند شناسهٔ متمایز ممکن است وجود داشته باشد؟

۱۰. تولید یک جزء ماشین شامل چهار مرحله است. برای اولین مرحله شش خط مونتاژ، برای مرحلهٔ دوم چهار خط، برای مرحلهٔ سوم پنج خط و برای مرحلهٔ آخر پنج خط وجود دارند. مطلوب است تعداد راههای مختلفی که یک جزء ماشین می‌تواند در این فرایند تولید به صورتی کامل مونتاژ شود.

۱۱. یک استاد کامپیوتر هفت کتاب برنامه‌نویسی متفاوت در قفسهٔ کتابهایش دارد. سه‌تا از کتابها مربوط به زبان فورترن، و چهارتای دیگر مربوط به زبان بیسیک‌اند. این استاد به چند راه می‌تواند کتابها را در قفسه مرتب کند اگر (الف) هیچ محدودیتی موجود نباشد؟ (ب) زبانها به‌صورت یک در میان در قفسه‌ها قرار بگیرند؟ (ج) همهٔ کتابهای فورترن پهلوی هم باشند؟ (د) همهٔ کتابهای فورترن پهلوی هم و همهٔ کتابهای بیسیک نیز پهلوی هم باشند؟ (ه) سه کتاب فورترن در وسط قرار بگیرند و در هر طرف آنها دو کتاب بیسیک باشد؟

۱۲. **الف)** حرفهای واژهٔ VISITING را به چند راه می‌توان آرایش داد؟

ب) در چند تا از آرایشهای قسمت (الف) ۳تا I پهلوی هم‌اند؟

۱۳. **الف)** برای همهٔ حرفهای SOCIOLOGICAL چند آرایش وجود دارد؟

ب) در چندتا از این آرایشها A و G مجاورند؟

ج) در چندتا از آرایشهای قسمت (الف) حرفهای صدادار مجاور هم‌اند؟
د) در چندتا از آرایشهای قسمت (ج) حرفهای صدادار به‌ترتیب الفبایی‌اند؟ در چندتا از آرایشهای قسمت (الف) چنین است؟

۱۴. نشان دهید که برای اعداد صحیح $n, r \geq ۰$ با شرط $n + ۱ > r$ تساوی زیر برقرار است

$$P(n+۱, r) = \left(\frac{n+۱}{n+۱-r}\right) P(n, r)$$

۱۵. مقدار (مقادیر) n را در هر یک از موارد زیر بیابید.
الف) $P(n, ۲) = ۹۰$؛
ب) $P(n, ۳) = ۳P(n, ۲)$؛
ج) $۲P(n, ۲) + ۵۰ = P(۲n, ۲)$.

۱۶. در صفحهٔ xy برای رسیدن از نقطهٔ $(۰, ۰)$ به نقطهٔ $(۷, ۷)$ چند مسیر مختلف وجود دارد به شرط آنکه یک مسیر در هر لحظه با یک قدم به راست (R) یا یک قدم به بالا (U) طی شود؟ برای رفتن از نقطهٔ $(۲, ۷)$ به نقطهٔ $(۹, ۱۴)$ چند مسیر از این‌گونه وجود دارد؟ آیا می‌توان حکمی کلی بیان کرد که این دو نتیجه را شامل باشد؟

۱۷. الف) در فضای اقلیدسی سه‌بعدی چند مسیر متمایز از $(-۱, ۲, ۰)$ به $(۱, ۳, ۷)$ وجود دارد به‌شرط آنکه هر حرکت یکی از انواع زیر باشد؟

$$(H) :(x, y, z) \to (x+۱, y, z)$$
$$(V) :(x, y, z) \to (x, y+۱, z)$$
$$(A) :(x, y, z) \to (x, y, z+۱)$$

ب) از $(۱, ۰, ۵)$ به $(۸, ۱, ۷)$ چند مسیر از این‌گونه وجود دارد؟
ج) نتایج قسمتهای (الف) و (ب) را تعمیم دهید.
د) چندتا از مسیرهای قسمت (الف) با یک تعداد زوج A شروع می‌شوند؟

۱۸. قطعه برنامهٔ پاسکال زیر را در نظر بگیرید که در آن، i، j و k متغیرهای صحیح‌اند.

```
For i := 1 to 12 do
    For j := 5 to 10 do
        For k := 15 downto 8 do
            Writeln ((i - j)*k);
```

الف) حکم *Writeln* چندبار اجرا شده است؟
ب) کدام اصل شمارش در قسمت (الف) به‌کار رفته است؟

۱۹. مطلوب است تعداد اعداد صحیح شش رقمی که رقم سمت چپ آنها صفر نباشد و در آنها
الف) هیچ رقمی تکراری نباشد؛
ب) ارقام بتوانند تکراری باشند. به قسمتهای (الف) و (ب)، با این شرط اضافی پاسخ دهید که عدد صحیح شش رقمی (i) زوج باشد، (ii) بر ۵ تقسیمپذیر، (iii) بر ۴ تقسیمپذیر باشد.

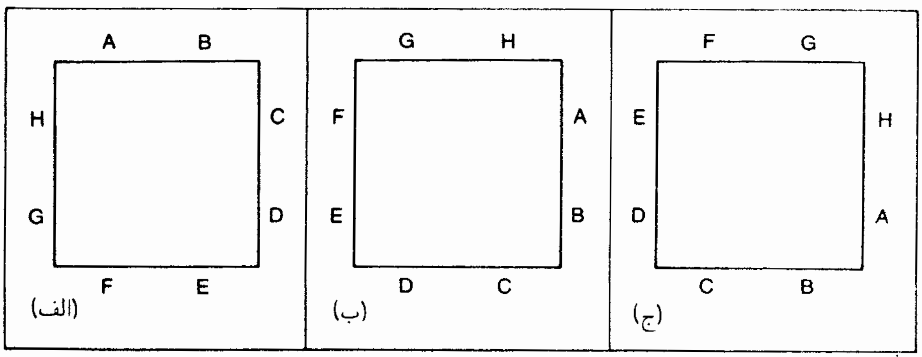
۲۰. دنباله‌ای از حرفها به‌صورت abcba که اگر به ترتیب عکس نوشته شود تغییر نمی‌کند مثالی برای یک عبارت مقلوب مستوی (پنج‌حرفی) است.
الف) اگر حرفی بتواند بیش از دوبار ظاهر شود، چند دنباله از دو سر متقارن پنج‌حرفی وجود دارد؟ شش‌حرفی چندتا؟
ب) قسمت (الف) را تحت این شرط که هیچ حرفی بیش از دوبار ظاهر نشود تکرار کنید.

۲۱. **الف)** یک دانشجو به چند راه می‌تواند به ده سؤال صحیح‌ـغلط امتحانی پاسخ دهد به‌شرط اینکه دانشجو فقط حدس بزند؟
ب) اگر ممکن باشد دانشجو برای اجتناب از جریمه‌ای که به دلیل پاسخ غلط می‌پردازد سؤالی را بی‌پاسخ بگذارد به چند راه می‌تواند به آزمون قسمت (الف) پاسخ دهد؟
ج) اگر امتحان، شامل ده سؤال چندگزینه‌ای، چهار گزینه برای هر سؤال، باشد به قسمتهای (الف) و (ب) پاسخ دهید.

۲۲. **الف)** یک برهان ترکیبیاتی پیدا کنید که نشان دهد اگر n و k اعداد صحیح مثبتی باشند و $n = 3k$، آنگاه $n!/(3!)^k$ عددی صحیح است.
ب) نتیجهٔ قسمت (الف) را تعمیم دهید.

۲۳. **الف)** به چند راه می‌توان هفت نفر را به دور میز گردی نشانید؟
ب) اگر دو نفر مصّر باشند که پهلوی هم بنشینند چند آرایش امکان دارد؟

۲۴. **الف)** به چند راه می‌توان هشت نفر را که با A، B، . . . ، H نشان داده‌ایم به دور میز مربع شکل ۴.۱ بنشانیم، که در آن شکلهای ۴.۱ (الف) و ۴.۱ (ب) یکی به‌حساب می‌آیند ولی از شکل ۴.۱ (ج) متمایزند؟



شکل ۴.۱

ب) اگر دو نفر از هشت نفر، مثلاً A و B، باهم خوب نباشند به چند راه مختلف می‌توان افراد را نشانید که A و B پهلوی هم نباشند؟

ج) در چند آرایش نشاندن قسمت (ب) A و B مقابل هم نیستند؟

۲۵. اجرای خاصی از سیستم عامل UNIX*، ساختار پرونده‌ها را که در شکل ۵.۱ مدلبندی شده‌است به‌دست می‌دهد. در اینجا، گرهٔ i برای پروندهٔ شامل اطلاعاتی نظیر اجازه‌های دستیابی به پرونده است. به دنبال این گره، درایه‌هایی هستند که اطلاعات مربوط به مکان پرونده در دستگاه ذخیره‌سازی را شامل‌اند. اولین ده درایه آدرسهای بلوکهایی هستند که در آنها داده‌های واقعی برای پرونده ذخیره شده‌اند. اگر بلوکی شامل ۵۱۲ بایت اطلاعاتی باشد این ۱۰ بلوک مستقیم را می‌توان تا $۵۱۲۰ = ۱۰ \times ۵۱۲$ بایت از داده‌ها افزایش داد.

وقتی اندازهٔ پرونده‌ها از ۱۰ بلوک تجاوز کند، یازدهمین درایه، دستیابی به، یا هدایت به یک بلوک غیرمستقیم را ممکن می‌سازد. بلوک غیرمستقیم شامل آدرسهای ۱۲۸ بلوک اضافی است که در آن داده‌ها را می‌توان ذخیره کرد. اگر این بلوک غیرمستقیم به‌کار رود اندازهٔ پرونده می‌تواند به بزرگی $۱۳۸ = ۱۲۸ + ۱۰$ بلوک شود، و می‌تواند شامل تا $۷۰۶۵۶ = ۱۳۸ \times ۵۱۲$ بایت اطلاعاتی باشد.

الف) اگر برای پرونده، بیش از ۱۳۸ بلوک لازم باشد به دوازدهمین درایه نیاز است. این درایه شامل آدرس یک بلوک غیرمستقیم دوگانه است که به‌نوبهٔ خود شامل آدرسهای ۱۲۸ بلوک غیرمستقیم است. همان‌طور که قبلاً تذکر دادیم، هریک از این بلوکهای غیرمستقیم شامل آدرسهای ۱۲۸ بلوک است که در آنها داده‌ها می‌توانند ذخیره شوند. اگر یک پرونده در گرهٔ iی خود از ۱۲ درایه استفاده کند، ماکسیمم اندازهٔ آن برحسب بلوکها و بایتها چقدر است؟

ب) وقتی پرونده‌ها باید بزرگتر از آنچه باشد که به‌وسیلهٔ ۱۲ درایه فراهم شده است، به سیزدهمین درایه نیاز است. این درایه، آدرس را، همان‌طور که در شکل نشان داده‌ایم، در بلوک غیرمستقیم سه‌گانه که به ۱۲۸ بلوک دوگانه مربوط است به‌دست می‌دهد. برای اجرای این سیستم عامل UNIX، تحت این شرایط، ماکسیمم اندازهٔ پرونده را برحسب بلوکها و بایتها معین کنید.

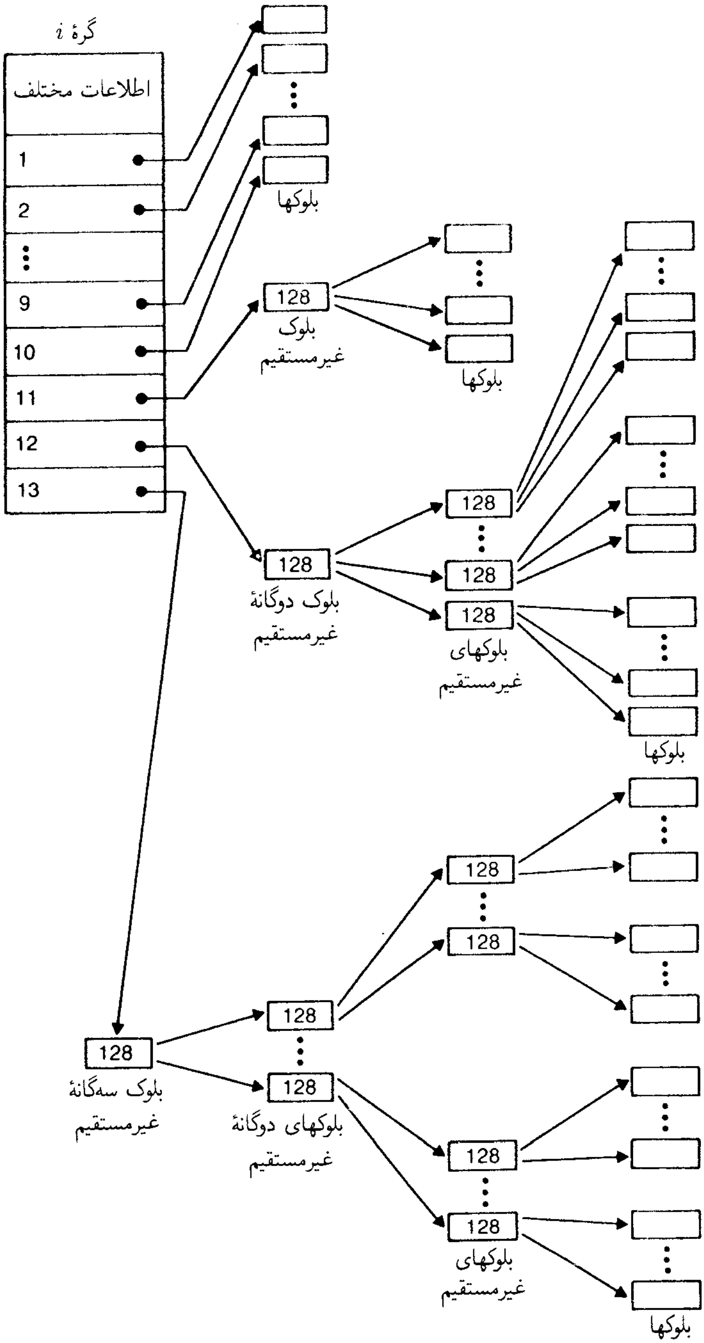
۲۶. برای محاسبهٔ $n!$ به‌ازای هر عدد صحیح $n \geq ۰$، برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید).

۲۷. برای محاسبهٔ $P(n,r)$ به‌ازای هر جفت عدد صحیح $n, r \geq ۰$، برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید).

۳.۱ ترکیبها: قضیهٔ دوجمله‌ای

۵۲ کارت معمولی را در نظر می‌گیریم که مرکب از ۴ دسته کارت ۱۳تایی است. ۱۳تای اول را با ۱C، ۲C، ...، ۱۳C؛ ۱۳تای دوم را با ۱D، ۲D، ...، ۱۳D؛ ۱۳تای سوم را با ۱H، ۲H،

* UNIX نماد تجارتی سیستم آزمایشگاهی بل است.



گرهٔ i
اطلاعات مختلف
1
2
9
10
11
12
13
بلوکها
128
بلوک
غیرمستقیم
بلوکها
128
بلوک دوگانهٔ
غیرمستقیم
128
128
128
بلوکهای
غیرمستقیم
بلوکها
128
بلوک سه‌گانهٔ
غیرمستقیم
128
128
بلوکهای دوگانهٔ
غیرمستقیم
128
128
128
128
بلوکهای
غیرمستقیم
بلوکها

شکل ۵.۱

...، ۱۳H؛ و ۱۳تای آخر را با ۱S، ۲S، ...، ۱۳S مشخص کرده‌ایم.

اگر از ما بخواهند که ۳ کارت از این دسته کارت را، متوالیاً و بدون جایگذاری بیرون بکشیم، آن‌گاه بنابر اصل ضرب

$$۵۲ \times ۵۱ \times ۵۰ = \frac{۵۲!}{۴۹!} = P(۵۲, ۳)$$

امکان وجود دارد که یکی از آنها ۱H، ۹C، و ۱۳D باشد. اگر به‌جای این‌کار، فقط سه کارت باهم از دسته کارت انتخاب کنیم، به قسمی که ترتیب انتخاب مهم نباشد، آن‌گاه شش جایگشت ۱H_۹C_۱۳D، ۱H_۱۳D_۹C، ۹C_۱H_۱۳D، ۹C_۱۳D_۱H، ۱۳D-۹C-۱H، و ۱۳D_۱H_۹C همگی با فقط یک انتخاب (نامرتب) متناظرند. در نتیجه، هر انتخاب یا ترکیب سه کارت، بدون توجه به ترتیب با !۳ جایگشت سه کارت متناظر است. این مطلب، به‌صورت معادله، چنین نوشته می‌شود:

تعداد جایگشتهای ۵۲ کارت، هر بار ۳ کارت = (تعداد انتخابهای به حجم ۳ از دستهٔ ۵۲ کارتی) × !۳

$$= P(۵۲, ۳) = \frac{۵۲!}{۴۹!}$$

در نتیجه، به ۲۲۱۰۰ = (!۳!۴۹)/!۵۲ راه می‌توان ۳ کارت بدون جایگذاری از یک دسته کارت بیرون کشید.

> در حالت کلی، اگر با n شیء متمایز شروع کنیم، هر انتخاب یا ترکیب rتا از این اشیاء، بدون توجه به ترتیب، با $r!$ جایگشت rتایی از این n شیء متناظر است. پس تعداد ترکیبهای rتایی از گردایه‌ای به حجم n، که با $C(n, r)$، $۰ \leq r \leq n$ نشان داده می‌شود در رابطهٔ $(r!) \times C(n, r) = P(n, r)$ صدق می‌کند، و $۰ \leq r \leq n$ و $C(n, r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.
>
> علاوه بر نماد $C(n, r)$، نماد $\binom{n}{r}$ نیز اغلب به‌کار می‌رود. توجه داشته باشید که $C(n, ۰) = ۱$.

و اما دو کلمه با اهل فن! وقتی با هر مسألهٔ شمارشی سر و کار داریم، باید دربارهٔ اهمیت ترتیب در آن مسأله از خود سؤال کنیم. اگر مسألهٔ ترتیب مهم باشد، باید به جایگشتها، آرایشها، و اصل ضرب بیندیشیم. اگر ترتیب مهم نیست، ترکیب در حل مسأله می‌تواند نقشی کلیدی داشته باشد.

مثال ۱.۱۸ میزبانی قرار است یک میهمانی شام برای اعضای انجمن نیکوکاری ترتیب دهد و به دلیل کوچکی خانه‌اش فقط ۱۱ نفر از ۲۰ نفر اعضای انجمن را می‌تواند دعوت کند. چون ترتیب

مهم نیست، می‌تواند به $\binom{۲۰}{۱۱} = \frac{۲۰!}{۱۱!۹!} = ۱۶۷۹۶۰$ راه این «۱۱ نفر خوشبخت» را دعوت کند. اما وقتی این ۱۱ نفر همه آمدند چگونگی نشاندن آنها به دور میز مستطیل شکل شام، یک مسألهٔ جایگشت است. متأسفانه نه ترکیبها و نه جایگشتها نمی‌توانند به میزبان ما برای توجیه رفتارش با «نه نفر رنجیده» که دعوت نشده‌اند کمک کند. □

مثال ۱۹.۱ الف) از دانشجویی که در امتحان درس تاریخ شرکت کرده است خواسته‌اند به هفت سؤال از ده سؤال امتحان پاسخ دهد. چون در اینجا ترتیب مورد نظر نیست، دانشجو می‌تواند به سؤالات امتحانش با

$$\binom{۱۰}{۷} = \frac{۱۰!}{۷!۳!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۳ \times ۲ \times ۱} = ۱۲۰$$

راه پاسخ دهد.

ب) اگر دانشجو موظف باشد به ۳ سؤال از ۵ سؤال اول و ۴ سؤال از ۵ سؤال آخر پاسخ دهد، می‌تواند از ۵ سؤال اول به $\binom{۵}{۳} = ۱۰$ راه ۳ سؤال انتخاب کند و ۴ سؤال دیگر را به $\binom{۵}{۴} = ۵$ راه انتخاب نماید. لذا بنابر اصل ضرب می‌تواند به $\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۴} = ۱۰ \times ۵ = ۵۰$ راه به سؤالهای امتحان پاسخ دهد. □

مثال ۲۰.۱ الف) در یک دبیرستان، معلم ورزش باید ۹ دختر از دوره‌های اول و دوم دبیرستان برای تیم والیبال انتخاب کند. اگر در دورهٔ اول ۲۸ نفر و در دورهٔ دوم ۲۵ نفر واجد شرایط باشند، انتخاب تیم را می‌توان به $\binom{۵۳}{۹} = ۴۴۳۱۶۱۳۵۵۰$ راه انجام داد.

ب) اگر دو نفر از دورهٔ اول و یک نفر از دورهٔ دوم بهترین آبشارزنها باشند که باید برای تیم انتخاب شوند، بقیهٔ تیم را می‌توان به $\binom{۵۰}{۶} = ۱۵۸۹۰۷۰۰$ راه انتخاب کرد.

ج) برای برخی از مسابقه‌ها، تیم مزبور باید شامل چهار دختر از دورهٔ اول و پنج دختر از دورهٔ دوم باشد. معلم می‌تواند چهار دختر از دورهٔ اول را به $\binom{۲۸}{۴}$ راه انتخاب کند. برای هریک از این انتخابها $\binom{۲۵}{۵}$ راه برای انتخاب پنج دختر از دورهٔ دوم در پیش دارد. در نتیجه بنابر اصل ضرب، معلم می‌تواند برای این بازی مخصوص، تیمش را به $\binom{۲۸}{۴}\binom{۲۵}{۵} = ۱۰۸۷۸۳۶۷۵۰$ راه انتخاب کند. □

بعضی از مسائل را می‌توان یا از دیدگاه جایگشتها و یا از دیدگاه ترکیبها بسته به چگونگی تحلیل وضعیت، مورد بحث قرار داد. مثال زیر این مطلب را نشان می‌دهد.

مثال ۲۱.۱ معلم ورزش مثال ۲۰.۱ باید از ۳۶ دختر سال اول دبیرستان چهار تیم والیبال ۹نفره تشکیل دهد. به چند راه می‌تواند این تیمها را تشکیل دهد؟ تیمها را A، B، C، و D می‌نامیم.

الف) برای تشکیل تیم A، معلم می‌تواند ۹ دختر از ۳۶ دختر سال اول را به $\binom{۳۶}{۹}$ راه انتخاب کند. برای تیم B، فرایند انتخاب $\binom{۲۷}{۹}$ امکان را به ما می‌دهد. پس، به‌ترتیب $\binom{۱۸}{۹}$ و $\binom{۹}{۹}$ راه برای انتخاب تیمهای C و D باقی می‌ماند. لذا بنابر اصل ضرب، چهار تیم را می‌توان به

$$\binom{۳۶}{۹}\binom{۲۷}{۹}\binom{۱۸}{۹}\binom{۹}{۹} = \left(\frac{۳۶!}{۲۷!۹!}\right)\left(\frac{۲۷!}{۱۸!۹!}\right)\left(\frac{۱۸!}{۹!۹!}\right)\left(\frac{۹!}{۹!۰!}\right)$$
$$= \frac{۳۶!}{۹!۹!۹!۹!} \doteq ۲{,}۱۴۵ \times ۱۰^{۱۹}$$

راه انتخاب کرد.

ب) برای راه‌حل دیگر، در نظر بگیرید که ۳۶ دانش‌آموز به‌صورت زیر صف کشیده باشند

۱	۲	۳	...	۳۵	۳۶
دانش‌آموز	دانش‌آموز	دانش‌آموز		دانش‌آموز	دانش‌آموز

برای انتخاب چهار تیم باید نه‌تا A، نه‌تا B، نه‌تا C و نه‌تا D را در ۳۶ مکان توزیع کنیم. تعداد راههایی که می‌توان این‌کار را انجام داد برابر تعداد آرایشهای ۳۶ حرف شامل ۹تا A، ۹تا B، ۹تا C، و ۹تا D، است. اما این مسأله، مسألهٔ آشنای آرایشهای اشیاء نامتمایز است، و جواب برابر است با

$$\frac{۳۶!}{۹!۹!۹!۹!}$$

که همان جواب قسمت (الف) است. □

مثال بعدی ما اشاره بر چگونگی مسائلی دارد که حل آنها مستلزم استفاده از هر دو مفهوم آرایش و ترکیب است.

مثال ۲۲.۱ تعداد آرایشهای حرفهای واژهٔ TALLAHASSEE برابر است با

$$\frac{۱۱!}{۳!۲!۲!۲!۱!۱!} = ۸۳۱۶۰۰$$

در چندتا از اینها، Aها پهلوی هم نیستند؟

با کنار گذاشتن Aها،

$$\frac{۸!}{۲!۲!۲!۱!۱!} = ۵۰۴۰$$

راه برای آرایش حرفهای باقی‌مانده وجود دارد. در شکل زیر یکی از این ۵۰۴۰ راه را نشان داده‌ایم، که در آن، پیکانهای سربالا، نه مکان ممکن برای سه A را نمایش می‌دهند.

سه‌تا از این مکانها را می‌توان به $\binom{9}{3} = 84$ راه انتخاب کرد؛ و چون این مطلب برای تمام ۵۰۳۹ آرایش دیگر E، E، S، T، L، L، S، H نیز ممکن است، بنابر اصل ضرب، $5040 \times 84 = 423360$ آرایش از حرفهای TALLAHASSEE دارای Aهای متوالی نیستند. □

مثال ۲۳.۱ در مطالعهٔ نظریهٔ کدگذاری جبری و نظریهٔ زبانهای کامپیوتری، آرایشهایی را در نظر می‌گیریم که به رشته موسوم‌اند و از الفبای نمادهای معینی ساخته می‌شوند. اگر این الفبای معین، مثلاً نمادهای ۰، ۱، و ۲ باشند، آن‌گاه ۰۱، ۱۱، ۲۱، ۱۲، و ۲۰ پنج رشته از نه رشتهٔ به درازای دو هستند. از جملهٔ ۲۷ رشتهٔ به درازای سه، ۰۰۰، ۰۱۲، ۲۰۲، و ۱۱۰ هستند.

به‌طور کلی، اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، آن‌گاه بنابر اصل ضرب، 3^n رشته به درازای n برای الفبای ۰، ۱، و ۲ وجود دارند. اگر $x = x_1x_2x_3\cdots x_n$ یکی از این رشته‌ها باشد، وزن x را که با $\mathrm{wt}(x)$ نشان داده می‌شود به‌وسیلهٔ $\mathrm{wt}(x) = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ تعریف می‌کنیم. مثلاً برای حالت، $n = 2$ داریم $\mathrm{wt}(12) = 3$ و $\mathrm{wt}(22) = 4$؛ و برای $n = 3$، $\mathrm{wt}(101) = 2$، $\mathrm{wt}(210) = 3$ و $\mathrm{wt}(222) = 6$.

می‌خواهیم تعیین کنیم که بین 3^{10} رشتهٔ به‌طول ۱۰، چند رشته وزن زوج دارند. چنین رشته‌ای وقتی وزن زوج دارد که تعداد ۱ها در آن زوج باشد.

شش حالت مختلف برای بررسی وجود دارند. اگر رشتهٔ x شامل ۱ها نباشد، آن‌گاه هریک از ده مکان در x را می‌توان با ۰ یا ۲ پر کرد، و بنابر اصل ضرب، 2^{10} رشته از این نوع وجود دارند. وقتی رشته شامل دو تا ۱ باشد مکانهای این دو تا ۱ را به $\binom{10}{2}$ راه می‌توان برگزید، به محض آنکه این دو مکان مشخص شدند، 2^8 راه برای قراردادن ۰ یا ۲ در هشت مکان وجود دارند. بنابراین، $\binom{10}{2}2^8$ رشته به درازای زوج وجود دارند که شامل دو تا ۱ هستند. تعداد رشته‌ها برای چهار حالت دیگر در جدول ۲.۱ داده شده‌اند.

در نتیجه، بنابر اصل جمع، تعداد رشته‌های به‌طول ۱۰ که وزن زوج دارند عبارت است از $\sum_{n=0}^{5}\binom{10}{2n}2^{10-2n} = \binom{10}{10} + \binom{10}{8}2^2 + \binom{10}{6}2^4 + \binom{10}{4}2^6 + \binom{10}{2}2^8 + 2^{10}$. □

به این بخش، با سه نتیجه دربارهٔ مفهوم ترکیبها پایان می‌دهیم.

ابتدا به‌یاد می‌آوریم که برای اعداد صحیح n و r با $0 \le r \le n$، $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$. این فرمول را می‌توان به‌صورت جبری از روی فرمول $\binom{n}{r}$ ثابت کرد، اما ترجیح می‌دهیم مشاهده کنیم که وقتی

جدول ۲.۱

تعداد ۱ ها	تعداد رشته‌ها	تعداد ۱ ها	تعداد رشته‌ها
۴	$\binom{۱۰}{۴}۲^۶$	۸	$\binom{۱۰}{۸}۲^۲$
۶	$\binom{۱۰}{۶}۲^۴$	۱۰	$\binom{۱۰}{۱۰}$

با انتخابی به حجم r از گردایهٔ n شیء متمایز سر و کار داریم، فرایند انتخاب، $(n-r)$ شیء را به‌حساب نمی‌آورد. بنابراین رابطهٔ $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$، مؤید وجود تناظری بین انتخابهای به حجم r (شیء منتخب) و انتخابهای به حجم $n-r$ (شیء باقی‌مانده) است. مثالی از این تناظر را در جدول ۳.۱، که در آن، $n = ۵$، $r = ۲$ و اشیاء متمایز، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ هستند نشان داده‌ایم. این نوع تناظر به‌گونه‌ای رسمیتر در فصل ۵ تعریف و در وضعیتهای شمارش دیگر به‌کار خواهد رفت.

نتیجهٔ دوم ما قضیه‌ای است از تجربهٔ گذشته در جبر.

قضیه ۱.۱ (قضیهٔ دوجمله‌ای) اگر x و y دو متغیر باشند و n عددی صحیح و مثبت باشد، آن‌گاه

$$(x+y)^n = \binom{n}{۰}x^۰y^n + \binom{n}{۱}x^۱y^{n-۱} + \binom{n}{۲}x^۲y^{n-۲} + \cdots$$
$$+ \binom{n}{n-۱}x^{n-۱}y^۱ + \binom{n}{n}x^ny^۰ = \sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

قبل از بیان برهان کلی، حالتی خاص را بررسی می‌کنیم. اگر $n = ۴$، ضریب $x^۲y^۲$ در حاصلضرب

جدول ۳.۱

انتخابهای به حجم $r = ۲$، (اشیاء منتخب)				انتخابهای به حجم $n - r = ۳$، (اشیاء باقی‌مانده)			
۱.	۱, ۲	۶.	۲, ۴	۱.	۳, ۴, ۵	۶.	۱, ۳, ۵
۲.	۱, ۳	۷.	۲, ۵	۲.	۲, ۴, ۵	۷.	۱, ۳, ۴
۳.	۱, ۴	۸.	۳, ۴	۳.	۲, ۳, ۵	۸.	۱, ۲, ۵
۴.	۱, ۵	۹.	۳, ۵	۴.	۲, ۳, ۴	۹.	۱, ۲, ۴
۵.	۲, ۳	۱۰.	۴, ۵	۵.	۱, ۴, ۵	۱۰.	۱, ۲, ۳

$$\begin{array}{cccc} (x+y) & (x+y) & (x+y) & (x+y) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{اولین عامل} & \text{دومین عامل} & \text{سومین عامل} & \text{چهارمین عامل} \end{array}$$

تعداد راههایی است که می‌توانیم دو x از چهار x موجود در هر عامل را انتخاب کنیم. (گرچه xها به ظاهر یکی هستند، ولی آنها را به‌صورت x در اولین عامل، x در دومین عامل، . . . ، و x در چهارمین عامل از هم متمایز می‌کنیم.) مثلاً بین حالتهای ممکن می‌توانیم (۱) x را از دو عامل اول و y را از دو عامل آخر؛ یا (۲) x را از عاملهای اول و سوم و y را از دوم و چهارم انتخاب کنیم. جدول ۴.۱ خلاصهٔ شش انتخاب ممکن است.

بنابراین، ضریب $x^۲y^۲$ در $(x+y)^۴$ برابر ۶ $=\binom{۴}{۲}$ است، که تعداد راههای انتخاب دو شیء متمایز از گردایهٔ چهار شیء متمایز است.

اینک به برهان قضیه در حالت کلی برمی‌گردیم.

برهان در حاصلضرب

$$\begin{array}{ccccc} (x+y) & (x+y) & (x+y) & \cdots & (x+y) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \text{اولین عامل} & \text{دومین عامل} & \text{سومین عامل} & & n\text{امین عامل} \end{array}$$

ضریب x^ky^{n-k}، با شرط $۰ \leq k \leq n$، تعداد راههایی است که می‌توانیم k تا x (و در نتیجه $n-k$ تا y) از n تا x موجود در n عامل را انتخاب کنیم. (مثلاً، یکی از این راهها، انتخاب x از k عامل اول و y از $n-k$ عامل آخر است). تعداد کل چنین انتخابهایی به حجم k از گردایه‌ای به حجم n برابر است با $C(n,k)=\binom{n}{k}$، که از آن، قضیه، نتیجه می‌شود. ■

جدول ۴.۱

عاملهای منتخب برای y		عاملهای منتخب برای x	
۳, ۴	(۱)	۱, ۲	(۱)
۲, ۴	(۲)	۱, ۳	(۲)
۲, ۳	(۳)	۱, ۴	(۳)
۱, ۴	(۴)	۲, ۳	(۴)
۱, ۳	(۵)	۲, ۴	(۵)
۱, ۲	(۶)	۳, ۴	(۶)

باتوجه به این قضیه، توجه می‌کنیم که همچنین

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k y^{n-k}$$

به دلیل وجود این قضیه، $\binom{n}{k}$ را غالباً ضریب دوجمله‌ای می‌نامند.

مثال ۲۴.۱ **الف)** از قضیهٔ دوجمله‌ای نتیجه می‌شود که ضریب x^5y^2 در $(x+y)^7$ برابر است با $21 = \binom{7}{2} = \binom{7}{5}$.

ب) ضریب a^5b^2 در $(2a-3b)^7$ برابر است با $\binom{7}{5}(2)^5(-3)^2$. این نتیجه، از قضیهٔ دوجمله‌ای با قراردادن $x = 2a$ و $y = -3b$ به‌دست آمده است. □

فرع ۱.۱ به‌ازای هر عدد صحیح $n > 0$،

الف) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$، و

ب) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$

برهان قسمت (الف) از قضیهٔ دوجمله‌ای، با قرار دادن $x = y = 1$، به‌دست می‌آید. وقتی $x = -1$ و $y = 1$، قسمت (ب) نتیجه می‌شود. ■

نتیجهٔ سوم و نهایی، تعمیم قضیهٔ دوجمله‌ای است و به قضیهٔ چندجمله‌ای موسوم است.

قضیه ۲.۱ به‌ازای اعداد صحیح مثبت n و t، ضریب $x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}\cdots x_t^{n_t}$ در

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_t)^n$$

برابر است با $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_t!}$. که در آن، هر n_i عدد صحیحی است با شرط $0 \leq n_i \leq n$، به‌ازای همهٔ مقادیر $1 \leq i \leq t$ و $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_t = n$.

برهان مانند برهان قضیهٔ دوجمله‌ای، ضریب $x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}\cdots x_t^{n_t}$ برابر تعداد راههایی است که می‌توانیم x_1 را در n_1 عامل از n عامل، x_2 را در n_2 عامل از $n - n_1$ عامل باقیمانده، x_3 را در n_3 عامل از $n - n_1 - n_2$ عاملی که اینک باقی‌مانده‌اند، ... ، و x_t را در n_t عامل از $n_t = n - n_1 - n_2 - n_3 - \cdots - n_{t-1}$ عامل باقیماندهٔ آخر انتخاب کنیم. این انتخاب را می‌توان مثل قسمت (الف) مثال ۲۱.۱، به

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{t-1}}{n_t}$$

راه انجام داد. نشان دادن برابری مقدار بالا را با مقدار

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_t!}$$

که به‌صورت

$$\binom{n}{n_1, n_2, n_3, \cdots, n_t}$$

نیز نوشته می‌شود و به ضریب چندجمله‌ای موسوم است به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

تمرینهای ۳.۱

۱. مقدار $\binom{6}{2}$ را حساب کنید و با فهرست کردن تمام انتخابهای دو شیء که می‌توان از اشیاء a، b، c، d، e، و f انجام داد جواب خود را بازبینی کنید.

۲. علی برای سفر ۴ساعتهٔ برگشت خود به دانشکده از بین ۱۲ مجله‌ای که خواهرش اخیراً تهیه کرده پنج مجله را برای مطالعه انتخاب می‌کند. علی به چند راه می‌تواند این انتخاب را انجام دهد؟

۳. از بین ده مرد و ده زن، یک کمیتهٔ ۱۲ نفری باید انتخاب شود. به چند راه می‌توان این انتخاب را انجام داد اگر (الف) شرایطی وجود نداشته باشند؟ (ب) لازم باشد که اعضای کمیته ۶ مرد و ۶ زن باشند؟ (ج) تعداد زنها زوج باشد؟ (د) تعداد زنها بیشتر از مردها باشد؟ (هـ) تعداد مردها حداقل ۸تا باشد؟

۴. به چند راه ممکن است از یک دسته کارت*، پنج کارت بیرون کشید و (الف) پنج کارت از یک رنگ داشت؟ (ب) چهارتا ۱ داشت؟ (ج) چهار کارت هم‌شماره داشت؟ (د) ۳تا ۱ و دو تا ۱۱ داشت؟ (هـ) سه‌تا هم‌شماره و یک جفت داشت؟ (و) سه‌تا هم‌شماره داشت؟ (ج) دو جفت داشت؟

۵. چند بایت شامل (الف) دقیقاً دو تا ۱؛ (ب) دقیقاً چهارتا ۱؛ (ج) دقیقاً شش‌تا ۱؛ (د) حداقل شش‌تا ۱ است؟

۶. به چند راه می‌توان یک تیم پنج‌نفرهٔ بسکتبال را از بین ۱۲ بازیکن انتخاب کرد؟ چند انتخاب شامل ضعیفترین و قویترین بازیکنها هستند؟

۷. دانشجویی باید در امتحانی به هشت سؤال از ده سؤال پاسخ دهد. انتخاب سؤالها را به چند راه می‌تواند انجام دهد (الف) اگر شرایطی وجود نداشته باشند؟ (ب) لازم باشد که دو سؤال اول را پاسخ دهد؟ (ج) لازم باشد که حداقل به سه‌تا از پنج سؤال اول پاسخ دهد؟

* در این کتاب منظور از یک دسته کارت، مجموعهٔ ۵۲ کارت است که از ۴ دسته کارت با شماره‌های ۱ تا ۱۳ در چهار رنگ مختلف تشکیل شده‌است.

۸. در سفارش دادن غذای مخصوص روز برای ناهار، مشتری می‌تواند یکی از سه پیش‌غذا را انتخاب کند و ممکن است هر دو تا از شش سبزی موجود را برگزیند.

الف) چند ناهار مختلف می‌تواند انتخاب کند اگر (i) لازم باشد که دو سبزی مختلف انتخاب نماید؟ (ii) مجاز باشد که دو خوراک از یک سبزی انتخاب نماید؟

ب) به قسمتهای (i) و (ii) (الف) پاسخ دهید اگر حق انتخاب سس گوجه‌فرنگی، یا آب‌پرتقال و یا سوپ نخود را به‌عنوان اشتهاآور داشته باشد.

۹. به چند راه می‌توان ۱۲ کتاب مختلف را بین چهار طفل توزیع کرد به‌قسمی که (الف) هر طفل ۳ کتاب دریافت کند؟ (ب) دو طفل بزرگتر هر یک ۴ کتاب و دو طفل کوچکتر هر یک دو کتاب دریافت کنند؟

۱۰. در یک پیتزافروشی پیتزا در چهار اندازهٔ کوچک، متوسط، بزرگ، و خیلی بزرگ عرضه می‌شود. مشتری می‌تواند پیتزای پنیر سفارش دهد و یا پیتزایی با هر ترکیب از هفت جزء اضافی: ماهی، فلفل سبز، قارچ، زیتون، پیاز، فلفل قرمز، و سوسیس درخواست کند. تعداد پیتزاهای مختلفی را تعیین کنید که (الف) دارای اندازهٔ متوسط و دقیقاً دو جزء اضافی داشته باشند؛ (ب) دقیقاً دو جزء اضافی داشته باشند؛ (ج) بزرگ یا خیلی بزرگ باشند و دقیقاً سه جزء اضافی داشته باشند؛ (د) بزرگ یا خیلی بزرگ باشند و حداقل سه جزء اضافی داشته باشند؛ (و) حداقل دو ولی نه بیش از پنج جزء اضافی داشته باشند.

۱۱. چندتا از آرایشهای حروف MISSISSIPPI دارای Sهای متوالی نیستند؟

۱۲. مربی ورزش باید برای بازی در تیم فوتبال ۱۱ ورزشکار باسابقه انتخاب کند. اگر بتواند این انتخاب را به ۱۲۳۷۶ راه انجام دهد، چند نفر ورزشکار باسابقه، شایستهٔ بازی کردن در تیم بوده‌اند؟

۱۳. **الف)** پانزده نقطه، که هیچ سه‌تای آنها بر یک خط نیستند، در صفحه‌ای مفروض‌اند. این نقاط چند خط را مشخص می‌کنند؟

ب) بیست و پنج نقطه، که هیچ چهارتای آنها بر یک خط نیستند، در فضا مفروض‌اند. این نقاط چند مثلث را مشخص می‌کنند؟ چند صفحه را مشخص می‌کنند؟ چند چهاروجهی (هرم مثلث‌القاعده) را مشخص می‌کنند؟

۱۴. برای رشته‌های به درازای ۱۰، در مثال ۲۳.۱، چند رشته دارای (الف) چهارتا ۰، سه‌تا ۱، و سه‌تا ۲؛ (ب) حداقل هشت‌تا ۱؛ (ج) وزن ۴، هستند؟

۱۵. گردایهٔ تمام رشته‌های به درازای ۱۰ را که از الفبای ۰، ۱، ۲، و ۳ ساخته می‌شوند در نظر بگیرید. چندتا از این رشته‌ها دارای وزن ۴اند؟ چندتا دارای وزن زوج‌اند؟

۱۶. با رئوس یک nضلعی منتظم، چند مثلث مشخص می‌شود؟ اگر هیچیک از اضلاع چندضلعی، ضلع مثلثی نباشد چند مثلث مشخص می‌شود؟

۱۷. ضریب $x^{9}y^{3}$ را (الف) در $(x+y)^{12}$، (ب) در $(x+2y)^{12}$، و (ج) در $(2x-3y)^{12}$ معین کنید.

۱۸. در برهان قضیهٔ چندجمله‌ای جزئیات را کامل کنید.

۱۹. مطلوب است ضریب

الف) xyz^2 در $(x+y+z)^4$ ب) xyz^2 در $(w+x+y+z)^4$

ج) xyz^2 در $(2x-y-z)^4$ د) xyz^{-2} در $(x-2y+3z^{-1})^4$

ه) $w^3x^2yz^2$ در $(2w-x+3y-2z)^8$.

۲۰. مطلوب است مجموع همهٔ ضرایب در

الف) $(x+y)^3$ ب) $(x+y)^{10}$ ج) $(x+y+z)^{10}$ د) $(w+x+y+z)^5$

ه) $(2s-3t+5u+6v-11w+3x+2y)^{10}$.

۲۱. نشان دهید که اگر n عددی صحیح، با شرط $n \geq 1$ باشد، آن‌گاه

$$\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n-1}=\frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}$$

۲۲. نشان دهید که برای همهٔ مقادیر $n \geq 2$، $\binom{n+1}{2}=\binom{n}{2}+n$.

۲۳. نشان دهید که برای همهٔ مقادیر $m,n \geq 1$، $n\binom{m+n}{m}=(m+1)\binom{m+n}{m+1}$.

۲۴. برای عدد صحیح و مثبت n، مجموع زیر را حساب کنید

$$\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+\cdots+2^k\binom{n}{k}+\cdots+2^n\binom{n}{n}$$

۲۵. به‌ازای عدد حقیقی x و عدد صحیح مثبت n، نشان دهید که

الف) $1=(1+x)^n-\binom{n}{1}x^1(1+x)^{n-1}+\binom{n}{2}x^2(1+x)^{n-2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}x^n$

ب)
$$1=(2+x)^n-\binom{n}{1}(x+1)(2+x)^{n-1}+\binom{n}{2}(x+1)^2(2+x)^{n-2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}(x+1)^n$$

ج) $2^n=(2+x)^n-\binom{n}{1}x^1(2+x)^{n-1}+\binom{n}{2}x^2(2+x)^{n-2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}x^n$

۲۶. اگر $\sum_{i=0}^{50}\binom{50}{i}8^i=x^{100}$، x را بیابید.

۲۷. برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید) که به‌ازای اعداد صحیح $n, r \geq 0$ مقدار $C(n,r)$ را حساب کنید.

۲۸. الف) برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید) که تمام انتخابهای دو شیء از اشیاء ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ را فهرست کند.

ب) برای انتخابهای سه‌شیء، قسمت (الف) را تکرار کنید.

۴.۱ ترکیب با تکرار: توزیع

دیده‌ایم که وقتی تکرار مجاز است، آرایشی به‌اندازهٔ r از n شیء متمایز را می‌توان، برای عدد صحیح $r \geq 0$، به n^r راه به‌دست آورد. اینک به مسألهٔ مشابه برای ترکیبها برمی‌گردیم و باردیگر مسألهٔ وابسته‌ای را که حل آن از اصول شمارش قبلی نتیجه می‌شود، مطرح می‌کنیم.

مثال ۲۵.۱ هفت دانش‌آموز دبیرستان، در راه برگشت از پیاده‌روی به خانه، به رستورانی که غذای سرد دارد می‌روند و هریک از آنها یکی از غذاهای زیر را می‌خرد: ساندویچ پنیر، ساندویچ سوسیس، ساندویچ کتلت، یا ساندویچ ماهی. چند خرید مختلف امکان‌پذیر است؟

فرض کنید c، h، t، و f به‌ترتیب معرف ساندویچ‌های پنیر، سوسیس، کتلت، و ماهی باشند. در اینجا با این مسأله سر و کار داریم که از هریک از این غذاها چندتا خریداری شده است، و به‌ترتیب خرید آنها توجهی نداریم، بنابراین، مسأله یکی از انتخابها یا ترکیبهای باتکرار است.

در جدول ۵.۱، برخی خریدهای ممکن را در ستون (الف) و وسیله‌های دیگر نمایش هر خرید را در ستون (ب) فهرست کرده‌ایم.

در ستون (ب) جدول ۵.۱، برای هر خرید ملاحظه می‌کنیم که هر x واقع در سمت چپ اولین پاره‌خط عمودی (|) معرف یک c است، هر x بین اولین و دومین پاره‌خط عمودی معرف یک h است، و xهای بین دومین و سومین پاره‌خط عمودی معرف tها، و هر xواقع در سمت راست سومین پاره‌خط عمودی نمایش یک f است. مثلاً خرید سوم سه پاره‌خط عمودی متوالی دارد، زیرا هیچ‌کس سوسیس یا کتلت نخریده است؛ پاره‌خط عمودی در اول چهارمین خرید معرف این است که در این خرید ساندویچ پنیر وجود ندارد.

باز تناظری بین دو گردایه از اشیاء برقرار کرده‌ایم که می‌دانیم چگونه باید تعداد اشیاء موجود در یکی از آن دو را حساب کنیم. برای ستون (ب) از جدول ۵.۱، همهٔ آرایشهای ده نماد مرکب از هفت x و سه پاره‌خط عمودی را شمارش کرده‌ایم. لذا بنابر تناظر، تعداد ترتیبهای مختلف ستون

جدول ۵.۱

(الف)	(ب)
1. c, c, h, h, t, t, f	1. xx|xx|xx|x
2. c, c, c, c, h, t, f	2. xxxx|x|x|x
3. c, c, c, c, c, c, f	3. xxxxxx|||x
4. h, t, t, f, f, f, f	4. |x|xx|xxxx
5. t, t, t, t, t, f, f	5. ||xxxxx|xx
6. t, t, t, t, t, t, t	6. ||xxxxxxx|
7. f, f, f, f, f, f, f	7. |||xxxxxxx

برای (الف) عبارت است از

$$\frac{10!}{7!3!} = \binom{10}{7}$$

در این مثال، توجه می‌کنیم که هفت x (برای هر دانش‌آموز، یک x)، متناظر با اندازهٔ انتخاب است و برای جدا کردن $4 = 1 + 3$ قلم غذای ممکنی که می‌توان انتخاب کرد، به سه پاره‌خط عمودی نیاز بوده‌است. □

به‌طور کلی، وقتی n شیء متمایز داریم و می‌خواهیم r قلم از این اشیاء را باتکرار انتخاب کنیم، نظیر جدول ۱.۵، ملاحظه می‌کنیم که باید همهٔ آرایشهای rتا x و $n - 1$ پاره‌خط عمودی را در نظر بگیریم که تعداد آنها عبارت است از

$$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r}$$

در نتیجه، تعداد ترکیبهای r شیء از n شیء، باتکرار، برابر است با $C(n+r-1, r)$.

(در مثال ۲۵.۱، $n = 4$، $r = 7$. لذا؛ وقتی تکرار مجاز است امکان دارد که r از n بزرگتر باشد.)

مثال ۲۶.۱ یک مغازهٔ شیرینی‌فروشی ۲۰ نوع مختلف نان روغنی برای فروش عرضه می‌کند. فرض می‌کنیم وقتی وارد مغازه می‌شویم حداقل دوازده عدد از هر نوع وجود دارد. در این صورت می‌توانیم ۱۲ نان روغنی را به $C(20 + 12 - 1, 12) = C(31, 12) = 141120525$ راه انتخاب کنیم. (در اینجا، $n = 20$، $r = 12$). □

مثال ۲۷.۱ مدیری دارای چهار منشی است (۱) A (۲) B (۳) C و (۴) D. می‌خواهد ۱۰۰ دلار را به‌صورت اسکناسهای ده دلاری به‌عنوان عیدی کریسمس بین آنها تقسیم کند.

الف) با مجاز بودن حالتی که یک یا چند منشی هدیه‌ای دریافت نکنند، مدیر انتخابی با اندازهٔ ۱۰ (یکی برای هر اسکناس ده دلاری) از گردایه‌ای به‌اندازهٔ ۴ (۴ منشی)، باتکرار، انجام می‌دهد. این انتخاب را می‌توان به $C(4 + 10 - 1, 10) = C(13, 10) = 286$ راه انجام داد.

ب) اگر نظری خاص وجود نداشته باشد، هر منشی حداقل باید ۱۰ دلار دریافت کند. اینک با این شرط، مدیر انتخابی به‌اندازهٔ ۶ (۶ اسکناس ده دلاری باقیمانده) از همان گردایهٔ با اندازهٔ ۴ مواجه است، و تعداد انتخابها برابر $C(4 + 6 - 1, 6) = C(9, 6) = 84$ است. (مثلاً، در این مورد، انتخاب ۲، ۳، ۳، ۴، ۴، ۴ بدین معناست که A مبلغی اضافی بر ده دلار اولیه دریافت نمی‌کند، در حالی‌که B مبلغ ده دلار اضافی دریافت می‌کند، C مبلغ ۲۰ دلار اضافی و D کلاً ۴۰ دلار دریافت می‌نماید.)

ج) اگر لازم باشد هر منشی حداقل ۱۰ دلار و D به‌عنوان سرمنشی حداقل ۵۰ دلار دریافت کند، تعداد راههایی که مدیر می‌تواند اسکناسها را توزیع کند برابر است با

$$\underbrace{C(۳+۲-۱,۲)}_{\text{D دقیقاً ۵۰ دلار دریافت می‌کند}} + \underbrace{C(۳+۱-۱,۱)}_{\text{D دقیقاً ۶۰ دلار دریافت می‌کند}}$$
$$+ \underbrace{C(۳+۰-۱,۰)}_{\text{D دقیقاً ۷۰ دلار دریافت می‌کند}} = ۱۰ = \underbrace{C(۴+۲-۱,۲)}_{\text{با استفاده از تکنیک قسمت (ب)}}$$

□

اینک پس از ملاحظهٔ مثالهای بالا که در آنها ترکیبهای باتکرار به‌کار رفته بود، دو مثالی را که متضمن اصول شمارش دیگر نیز هستند بررسی می‌کنیم.

مثال ۲۸.۱ به چند راه می‌توان هفت سیب و شش پرتقال را بین چهار طفل به‌قسمی توزیع کرد که هر طفل حداقل یک سیب دریافت کند؟

به فرض آنکه هر طفل یک سیب دریافت کند، $C(۴+۳-۱,۳) = ۲۰$ راه برای توزیع سه سیب دیگر، و $C(۴+۶-۱,۶) = ۸۴$ راه برای توزیع شش پرتقال داریم. لذا بنابر اصل ضرب، با شرایطی که بیان کردیم، $۲۰ \times ۸۴ = ۱۶۸۰$ راه برای توزیع میوه، داریم. □

مثال ۲۹.۱ پیامی که با ۱۲ نماد مختلف نوشته شده است باید به‌وسیلهٔ یک کانال مخابراتی مخابره شود. علاوه بر ۱۲ نماد، مخابره‌کننده باید کلاً ۴۵ فاصله (سفید)، بین نمادها، با حداقل ۳ فاصله بین هر جفت از نمادهای متوالی، بفرستد. مخابره‌کننده به چند راه می‌تواند این پیام را مخابره کند؟

برای آرایش دوازده نماد متفاوت، !۱۲ راه وجود دارد، و برای هریک از این آرایشها ۱۱ مکان بین ۱۲ نماد موجود است. چون باید بین نمادهای متوالی حداقل سه فاصله موجود باشد، باید ۳۳ فاصله از ۴۵ فاصله را به‌کار بریم و باید محل ۱۲ فاصلهٔ باقیمانده را مشخص نماییم. این انتخاب، انتخابی باتکرار به‌اندازهٔ ۱۲ (فاصله) از گردایه‌ای به‌اندازهٔ ۱۱ (مکان) است، و می‌توان آن‌را به $C(۱۱+۱۲-۱,۱۲) = ۶۴۶۶۴۶$ راه انجام داد.

در نتیجه، بنابر اصل ضرب، مخابره‌کننده می‌تواند پیام را، با فاصله‌های مطلوب، به $۳{,}۰۹۷ \times ۱۰^{۱۴} \doteq \binom{۲۲}{۱۲}(۱۲!)$ راه مخابره کند. □

در مثال بعد، مفهومی را معرفی می‌کنیم که نشان می‌دهد با نظریهٔ اعداد بیش از ترکیبها یا آرایشها می‌توان کار انجام داد. ولی نتیجهٔ حل این مثال با نتیجهٔ شمارش ترکیبهای باتکرار هم‌ارز است.

مثال ۱.۳۰ تعداد تمام جوابهای صحیح معادلهٔ

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \quad x_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq 4$$

را تعیین کنید.

یک جواب معادله عبارت است از $x_1 = 3$، $x_2 = 3$، $x_3 = 0$، $x_4 = 1$. این جواب، با جوابی نظیر $x_1 = 1$، $x_2 = 0$، $x_3 = 3$، $x_4 = 3$ تفاوت دارد، گرچه از همان چهار عدد استفاده شده‌است. تعبیری ممکن برای این مطلب، آن است که ما هفت سکهٔ یک‌تومانی (اشیاء همانند) را بین چهار طفل (ظروف متمایز) توزیع کرده‌ایم، و در اینجا به هریک از اولین دو طفل ۳ سکه داده‌ایم، به طفل سوم چیزی نداده‌ایم، و آخرین سکه را به طفل چهارم داده‌ایم. با ادامهٔ این تعبیر می‌بینیم که هر جواب صحیح نامنفی معادله، متناظر با یک انتخاب باتکرار با اندازهٔ ۷ (سکهٔ همانند) از گردایه‌ای به‌اندازهٔ ۴ (طفل مختلف) است. لذا $C(4 + 7 - 1, 7) = 120$ جواب وجود دارد. □

تا اینجا قطعاً به هم‌ارزیهای زیر پی برده‌ایم:

الف) تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r, \quad x_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

ب) تعداد انتخابهای باتکرار، با اندازهٔ r، از گردایه‌ای به‌اندازهٔ n.

ج) تعداد راههایی که می‌توان r شیء همانند را در n ظرف متمایز توزیع کرد.

در مورد توزیعها، (ج) تنها وقتی معتبر است که r شیء که توزیع می‌شوند همانند و n ظرف متمایز باشند. وقتی هم r شیء و هم n ظرف متمایزند می‌توانیم هریک از n ظرف را برای هریک از اشیاء انتخاب کنیم و بنابر اصل ضرب، n^r توزیع به‌دست آوریم.

وقتی اشیاء متمایز اما ظرفها همانندند با استفاده از اعداد نوع دوم استرلینگ (فصل ۵) مسأله را حل خواهیم کرد. برای حالت آخر، یعنی حالتی که هم اشیاء و هم ظروف همانندند، نظریهٔ افرازهای اعداد صحیح (فصل ۹) برخی نتایج لازم را به‌دست خواهد داد.

مثال ۱.۳۱ به چند راه می‌توان ده مهرهٔ سفید (همانند) را در شش ظرف متمایز توزیع کرد؟

حل این مسأله هم‌ارز با یافتن تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_6 = 10$ است. این تعداد مساوی تعداد انتخابهای باتکرار، به‌اندازهٔ ۱۰ از گردایه‌ای با اندازهٔ ۶ است. بنابراین، جواب عبارت است از $C(6 + 10 - 1, 10) = 3003$. □

اکنون دو مثال دیگر مربوط به موضوع این بخش را بررسی می‌کنیم.

مثال ۳۲.۱ با توجه به مثال ۳۱.۱ تشخیص می‌دهیم که برای معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_6=10$ کلاً ۳۰۰۳ جواب صحیح نامنفی وجود دارد. تعداد جوابهایی که در نابرابری $x_1+x_2+\cdots+x_6<10$ صدق می‌کنند چندتاست؟

روشی که برای حل این نابرابری ممکن است شدنی به‌نظر آید، تعیین تعداد جوابهای $x_1+x_2+\cdots+x_6=k$ است که k عددی است صحیح، با شرط $0\le k\le 9$. گرچه این تکنیک فعلاً شدنی است، اما اگر به‌جای ۱۰ عددی بزرگتر، مثلاً ۱۰۰ قرار گیرد، به واقعیت منجر نمی‌شود، ولی، در فصل ۳ اتحادی ترکیبیاتی را ثابت خواهیم کرد که استفاده از آن ما را در راه‌حل دیگری برای این مسأله کمک خواهد کرد.

فعلاً، با توجه به تناظر بین جوابهای صحیح نامنفی

$$x_1+x_2+\cdots+x_6<10 \qquad (1)$$

و جوابهای صحیح

$$x_1+x_2+\cdots+x_6+x_7=10,\quad 0\le x_i,\quad 1\le i\le 6,\quad 0<x_7 \qquad (2)$$

شکل مسأله را تغییر می‌دهیم.

تعداد جوابهای (۲) برابر تعداد جوابهای صحیح نامنفی $y_1+y_2+\cdots+y_6+y_7=9$ است، که در آن $y_i=x_i$، $1\le i\le 6$ ، $y_7=x_7-1$. این تعداد برابر است با $C(7+9-1,9)=5005$. □

نتیجهٔ دیگر، ما را به بسطهای دوجمله‌ای و چندجمله‌ای برمی‌گرداند.

مثال ۳۳.۱ در بسط دوجمله‌ای $(x+y)^n$، هر جمله به‌صورت $\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$ است، و بنابراین، تعداد کل جمله‌های بسط برابر تعداد جوابهای صحیح نامنفی $n_1+n_2=n$ است (n_1 نمای x و n_2 نمای y است). این تعداد برابر است با $C(2+n-1,n)=n+1$.

ممکن است این احساس به‌وجود آید که برای دستیابی به نتیجهٔ بالا، استدلال بسیار پیچیده‌ای را به‌کار برده‌ایم. احتمالاً بسیاری از ما مایلیم که نتیجهٔ بالا را، براساس تجربه‌هایی که از محاسبهٔ $(x+y)^n$ برای مقادیر کوچک n داریم، باور کنیم.

گرچه تجربه در تشخیص الگو باارزش است، اما همیشه برای یافتن یک اصل کلی کافی نیست. در اینجا دانستن اینکه چند جمله در بسط $(w+x+y+z)^{10}$ وجود دارد ارزشی چندان ندارد.

هر جملهٔ مشخص در این بسط به‌صورت $\binom{10}{n_1,n_2,n_3,n_4}w^{n_1}x^{n_2}y^{n_3}z^{n_4}$ است، که در آن $0\le n_i$، $1\le i\le 4$، و $n_1+n_2+n_3+n_4=10$. معادلهٔ اخیر را می‌توان به

$C(۴ + ۱۰ - ۱, ۱۰) = ۲۸۶$ راه حل کرد، و لذا ۲۸۶ جمله در بسط $(w + x + y + z)^{۱۰}$ وجود دارند. □

دو مثال آخر ما در این بخش، کاربردهایی از حوزهٔ علم کامپیوتر را به‌دست می‌دهند. به‌علاوه، مثال آخر به فرمول مجموعیابی مهمی منجر می‌شود که در بسیاری از فصلهای بعدی به‌کار خواهند رفت.

مثال ۳۴.۱ قطعه برنامهٔ پاسکال زیر را در نظر بگیرید که در آن i، j، و k متغیرهای صحیح‌اند.

```
For i := 1 to 20 do
   For j := 1 to i do
      For k := 1 to j do
         Writeln (i*j + k);
```

چندبار حکم $Writeln$ در این قطعه برنامه اجرا شده است؟

بین انتخابهای ممکن برای i، j، و k (به‌ترتیب اول i، دوم j، سوم k) که به اجرای حکم $Writeln$ منجر خواهند شد، انتخابهای زیر را ثبت می‌کنیم

$$(۱) : ۱, ۱, ۱; \qquad (۲)۲, ۱, ۱; \qquad (۳)۱۵, ۱۰, ۱; \qquad (۴)۱۵, ۱۰, ۷$$

متذکر می‌شویم که $i = ۱۰$، $j = ۱۲$، $k = ۵$ یکی از انتخابهایی که باید در نظر گرفت نیست، زیرا $i = ۱۰ < ۱۲ = j$؛ این مقدار با شرط لازم برای دومین حلقهٔ For تناقض دارد. هریک از چهار انتخاب بالا که در آن، حکم $Writeln$ اجرا شده است در شرط $۱ \leq k \leq j \leq i \leq ۲۰$ صدق می‌کند. در واقع، هر انتخاب $a, b, c(a \leq b \leq c)$ به اندازهٔ ۳، باتکرارهای مجاز، از فهرست ۱، ۲، ...، ۲۰، به یک انتخاب صحیح منجر می‌شود: در اینجا $k = a$، $j = b$، $i = c$. در نتیجه حکم $Writeln$ به تعداد

$$\binom{۲۰ + ۳ - ۱}{۳} = \binom{۲۲}{۳} = ۱۵۴۰$$

بار اجرا شده است.

اگر حلقه‌های For به‌جای ۳تا، rتا (≥ ۱) باشند، حکم $Writeln$ باید $\binom{۲۰+r-۱}{r}$ بار اجرا شود. □

مثال ۳۵.۱ در اینجا برای به‌دست آوردن فرمول مجموعیابی، قطعه برنامهٔ پاسکال زیر را به‌کار خواهیم برد. در این قطعه برنامهٔ داده شده، شمارندهٔ متغیرها، i، j، و n متغیرهای صحیح‌اند. فرض

می‌کنیم که استفاده‌کننده قبلاً در برنامه، عدد صحیح مثبتی را برای مقدار n مشخص کرده است.

```
counter := 0;
For i := 1 to n do
    For j := 1 to i do
        counter := counter + 1;
```

بنابر نتایج مثال ۳۴.۱، بعد از اینکه این قطعه اجرا شد، مقدار شمارنده (متغیر) برابر $\binom{n+۲-۱}{۲} = \binom{n+۱}{۲}$ خواهد بود. (این، تعداد دفعاتی است که حکم

$$\texttt{counter := counter + 1} \qquad (*)$$

اجرا شده است.)

این نتیجه را می‌توان به‌صورت زیر نیز به‌دست آورد: وقتی $i := ۱$، آن‌گاه j از ۱ تا ۱ تغییر می‌کند و $(*)$، یک‌بار اجرا می‌شود؛ وقتی به i مقدار ۲ نسبت داده می‌شود، آن‌گاه j از ۱ تا ۲ تغییر می‌کند و $(*)$، ۲بار اجرا می‌شود؛ وقتی به i مقدار ۳ نسبت داده می‌شود j از ۱ تا ۳ تغییر می‌کند و $(*)$، ۳بار اجرا می‌شود؛ به‌طور کلی به‌ازای $۱ \leq k \leq n$، وقتی $i := k$، آن‌گاه j از ۱ تا k تغییر می‌کند و $(*)$، k بار اجرا می‌شود. درکل شمارندهٔ متغیر $۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n$بار افزایش می‌یابد [و حکم $(*)$ اجرا می‌شود].

در نتیجه،

$$\sum_{i=۱}^{n} i = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \binom{n+۱}{۲} = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

نتیجه‌گیری این فرمول مجموعیابی، حاصل از محاسبهٔ همین نتیجه به دو راه مختلف، برهانی ترکیبیاتی است. □

تمرینهای ۴.۱

۱. به چند راه می‌توان ده سکه (همانند) را بین پنج طفل توزیع کرد اگر (الف) شرطی وجود نداشته باشد؟ (ب) هر طفل حداقل یک سکه دریافت کند؟ (ج) بزرگترین طفل حداقل دو سکه دریافت کند؟

۲. به چند راه می‌توان ۱۵ آب‌نبات چوبی (همانند) را بین پنج طفل توزیع کرد به‌قسمی که کم‌سنترین آنها فقط ۱ یا ۲ آب‌نبات چوبی دریافت کند؟

۳. تعداد راههای انتخاب ۲۰ سکه از ۴ ظرف بزرگ پر از سکه‌های ۲ ریالی، ۵ ریالی، ۱۰ ریالی، و ۲۰ ریالی را تعیین کنید (هر ظرف فقط از یک نوع سکه پر شده است).

۴. در یک بستنی‌فروشی، بستنیهایی با ۳۱ چاشنی وجود دارد. به چند راه می‌توان ۱۲ ظرف بستنی سفارش داد، اگر (الف) از هر چاشنی، بیش از یک بستنی نخواهیم؟ (ب) یک چاشنی را بتوان تا ۱۲ بار هم سفارش داد؟ (ج) یک چاشنی را نتوان بیش از ۱۱ بار سفارش داد؟(د)بیش از نصف بستنیها شکلاتی باشند؟

۵. الف) از گردایه‌ای که شامل یک سکهٔ ۱ ریالی، یک سکهٔ ۲ ریالی، یک سکهٔ ۵ ریالی، یک سکهٔ ۱۰ ریالی، یک سکهٔ ۲۰ ریالی، و ۵ سکهٔ همانند ۵۰ ریالی است به چند راه می‌توان ۵ سکه انتخاب کرد؟

ب) از گردایه‌ای با اندازهٔ $2n$ شیء، شامل n شیء متمایز و n شیء همانند، به چند راه می‌توان n شیء انتخاب کرد؟

۶. به مثال ۱.۲۹ وقتی ۱۲ نمادی که باید مخابره شوند چهار A، چهار B، و چهار C باشند، پاسخ دهید.

۷. مطلوب است تعداد جوابهای صحیح $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$، که در آن

الف) $x_i \geq 0$، $1 \leq i \leq 4$ ب) $x_i > 0$، $1 \leq i \leq 4$

ج) $x_1, x_2 \geq 5$، $x_3, x_4 \geq 7$ د) $x_i \geq 8$، $1 \leq i \leq 4$

ه) $x_i \geq -2$، $1 \leq i \leq 4$ و) $x_1, x_2, x_3 > 0$، $0 < x_4 \leq 25$

۸. استادکاری به چند راه می‌تواند ۸ شیرینی شکلاتی و ۷ شیرینی مربایی را بین ۳ شاگرد خود تقسیم کند به‌شرط آنکه هر شاگرد حداقل یک شیرینی از هر نوع دریافت نماید؟

۹. دو عدد صحیح n رقمی (صفرها در سمت چپ مجازند) را هم‌ارز می‌گیریم اگر یکی جایگشت دیگری باشد (مثلاً، ۱۲۰۳۳، ۲۰۳۳۱، و ۰۱۳۳۲ را اعداد صحیح پنج‌رقمی هم‌ارز در نظر می‌گیریم.)

الف) چند عدد صحیح پنج‌رقمی هم‌ارز نیستند؟

ب) اگر رقمهای ۱، ۳، و ۷ بتوانند حداکثر یک‌بار ظاهر شوند، چند عدد صحیح پنج‌رقمی ناهم‌ارز وجود دارند؟

۱۰. مطلوب است تعداد جوابهای صحیح، برای $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 < 40$، که در آن،

الف) $x_i \geq 0$، $1 \leq i \leq 5$ ب) $x_i \geq -3$، $1 \leq i \leq 5$

۱۱. به چند راه می‌توان ۸ گلولهٔ سفید همانند را در چهار ظرف متمایز توزیع کرد، به‌قسمی که (الف) هیچ ظرفی خالی نماند؟ (ب) در چهارمین ظرف تعداد فردی گلوله وجود داشته باشد؟

۱۲. ضریب v^2w^4xz را در بسط $(3v + 2w + x + y + z)^8$ بیابید.

۱۳. به چند راه می‌توان ۱۲ مهرهٔ هم‌اندازه را در پنج ظرف متمایز قرار داد، به‌شرطی که (الف) همهٔ مهره‌ها سیاه باشند؟ (ب) رنگ مهره‌ها همه با هم متفاوت باشند؟

۱۴. مطلوب است تعداد جوابهای صحیح نامنفی، برای

الف) $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$

ب) $2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$

۱۵. به چند راه می‌توان یک سکهٔ ۱ ریالی، یک سکهٔ ۲ ریالی، یک سکهٔ ۵ ریالی و ۲۵ سکهٔ ۱۰ ریالی را بین پنج طفل توزیع کرد (الف) بدون هیچ شرطی؟ (ب) به‌قسمی که بزرگترین طفل ۲۰ یا ۲۵ ریال دریافت کند؟

۱۶. یک معلم شیمی هفت جعبه دارد که هر کدام محتوی ۳۶ لولهٔ آزمایش با مادهٔ «نامشخص» برای تجربه‌ای آزمایشگاهی است. اولین جعبهٔ ۳۶تایی شامل ۴ ترکیب مختلف است که به‌ترتیب ۵، ۱۲، ۷، ۱۲ بار ظاهر می‌شوند. به چند راه می‌توان محتویات این جعبه را بین ۵ آزمایشگاه مختلف شیمی توزیع کرد؟

۱۷. **الف)** چند جواب صحیح نامنفی برای جفت معادلهٔ زیر وجود دارند

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_7 = 37, \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

ب) در چند جواب قسمت (الف)، $x_1, x_2, x_3 > 0$؟

۱۸. به چند راه می‌توان ۲۴ قطعه گچ تابلو را بین ۴ کلاس درس تقسیم کرد به‌قسمی که تعداد گچهای بزرگترین کلاس حداقل به‌اندازهٔ مجموع گچهای ۳ کلاس دیگر باشد؟

۱۹. در قطعه برنامهٔ پاسکال زیر، چند بار حکم $Writeln$ اجرا شده است؟ (در اینجا i، j، k و m متغیرهای صحیح‌اند).

```
For i := 1 to 20 do
   For j := 1 to i do
      For k := 1 to j do
         For m := 1 to k do
            Writeln ((i*j) + (k*m));
```

۲۰. در قطعه برنامهٔ پاسکال زیر، i، j، k، و شمارنده، متغیرهای صحیح‌اند. مطلوب است مقداری که شمارنده پس از اجرای قطعه برنامه خواهد داشت.

```
counter := 10;
For i := 1 to 15 do
   For j := i to 15 do
      For k := j to 15 do
         counter := counter + 1;
```

۲۱. مقدار مجموع را بعد از اجرای قطعه برنامهٔ پاسکال داده شده بیابید. (در اینجا نمو i، j، k و مجموع، متغیرهای صحیح‌اند.)

```
increment := 0;
sum := 0;
For i := 1 to 10 do
   For j := 1 to i do
      For k := 1 to j do
         Begin
            increment := increment + 1;
            sum := sum + increment
         End;
```

۲۲. قطعه برنامهٔ پاسکال زیر را در نظر بگیرید، که در آن i، j، k، n و شمارنده متغیرهای صحیح‌اند.

استفاده‌کننده قبلاً در برنامه مقدار صحیح مثبتی را برای n در اجرای خاص برنامه مشخص می‌کند.

```
counter := 0;
For i := 1 to n do
   For j := 1 to i do
      For k := 1 to j do
         counter := counter + 1;
```

تعداد دفعاتی را که حکم

```
counter := counter + 1
```

اجرا شده است به دو راه مختلف، تعیین خواهیم کرد. (این، مقدار شمارنده پس از اجرای قطعه برنامه است) با توجه به نتیجهٔ مثال ۳۴.۱ می‌دانیم که این حکم، $\binom{n+۲}{۳} = \binom{n+۳-۱}{۳}$ بار اجرا شده است. برای مقدار ثابت i، حلقه‌های For متضمن j و k، در $\binom{i+۲}{۲}$ اجرای حکم نمو شمارنده، نتیجه می‌شوند. در نتیجه، $\binom{n+۲}{۳} = \sum_{i=۱}^{n}\binom{i+۱}{۲}$. این نتیجه را برای به‌دست آوردن فرمول مجموعیابی $۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + n^۲ = \sum_{i=۱}^{n} i^۲$ به‌کار برید.

۲۳. الف) ایده‌های مثال ۳۵.۱ و تمرین ۲۲ را برای توضیح دلیل برقراری برابری

$$\binom{n+۳}{۴} = \sum_{i=۱}^{n}\binom{i+۲}{۳}$$

به‌کار برید.

ب) نتیجهٔ قسمت (الف) را در به‌دست آوردن فرمول مجموعیابی

$$۱^۳ + ۲^۳ + \cdots + n^۳ = \sum_{i=۱}^{n} i^۳$$

به‌کار برید.

۲۴. نشان دهید که تعداد راههای قرار دادن n شیء متمایز در r ظرف مختلف، وقتی اشیاء داخل هر ظرف مرتب شده باشند، برابر است با $P(r+n-۱, r-۱)$.

۲۵. الف) اعداد صحیح مثبت m و n، $m \geq n$ داده شده‌اند. نشان دهید که تعداد راههای توزیع m شیء همانند در n ظرف متمایز، به‌شرط اینکه هیچ ظرفی خالی نماند برابر است با $C(m-۱, m-n) = C(m-۱, n-۱)$.

ب) نشان دهید که تعداد آن توزیعهای قسمت (الف) که در هر ظرف حداقل r شیء قرار دارد $(m \geq nr)$ برابر است با $C(m-۱+(۱-r)n, n-۱)$.

۲۶. برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید) که جوابهای صحیح

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۰ \qquad ۰ \le x_i \,,\ ۱ \le i \le ۳$$

را محاسبه کند.

۲۷. برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید) که محاسبهٔ جوابهای صحیح

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۵ \qquad ۰ \le x_i, \quad ۱ \le i \le ۴$$

را میسر سازد.

۲۸. برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید) که جوابهای صحیح

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۴, \quad -۲ \le x_i \,,\ ۱ \le i \le ۴$$

را محاسبه کند.

۵.۱ کاربرد در علوم فیزیکی (اختیاری)

در این بخش دربارهٔ کاربردی از تکنیکهای شمارش که جلوتر در این فصل عرضه شد بحث می‌کنیم. این کاربرد در مکانیک آماری و ترمودینامیک آماری صورت می‌گیرد. در این زمینه‌ها، تعداد راههایی که r ذرهٔ زیراتم را می‌توان بین n حالت متمایز انرژی توزیع کرد مورد توجه است.

برای مدل ماکسول ـ بولتسمان، فرض بر این است که ذره‌ها متمایزند، و هر تعدادی از آنها می‌توانند در هر حالتِ انرژی حضور داشته باشند. در اینجا، n^r توزیع ممکن به‌دست می‌آوریم، زیرا برای هریک از r ذره، n حالت انرژی ممکن وجود دارند. (نظریهٔ جدید مکانیک کوانتومی نشان داده است که این مدل برای ذره‌های زیراتمی که تاکنون شناخته شده‌اند مناسب نیست.)

دو مدل موفقتر، مدلهای بوز ـ اینشتین و فرمی ـ دیراک اند که بر اصل اندازهٔ حرکتهای زاویه‌ای ذاتی ذرات مبتنی هستند.

مدل بوز ـ اینشتین نیاز به این دارد که r ذره همانند باشند، و هر تعدادی از آنها بتوانند در هر حالتِ انرژی حضور داشته باشند. در اینجا تعداد توزیعهای مختلف برابر است با تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = r$، که برابر است با $C(r + n - ۱, r)$. ذرات با اسپین صحیح (برحسب واحدهای $(\mathrm{h}/۲\pi)$ که h=ثابت پلانک) از این مدل پیروی می‌کنند.

چنین ذراتی را بوزون می‌نامند که شامل فوتونها، مزونهای پی و الکترونهای رسانش در مواد ابررسانا، نظیر سرب و قلع هستند.

برای ذرات با اسپین نیمه‌درست، نظیر پروتونها، الکترونها، و نوترونها، مدل فرمی ـ دیراک مدلی مناسب است، و این ذرات را فرمیون می‌نامند. در این مدل، باز هم، r ذره همانندند، اما یک حالت انرژی می‌تواند شامل حداکثر یک ذره باشد. نتیجه آنکه در اینجا، $r \leq n$، و تعداد توزیعهای ممکن برابر $\binom{n}{r}$ است. (این مدل در مطالعهٔ نظریهٔ نوار نیم‌رسانا بسیار مفید است.)

۶.۱ خلاصه و مرور تاریخی

در این اولین فصل، اصولی را برای شمارش ترکیبها و جایگشتها و آرایشها در انواع زیادی از مسائل معرفی کردیم. تجزیهٔ مسائل به اجزائی که برای حل به فرمولهای همانند یا متفاوتی نیاز دارند، بینشی کلیدی در پهنه‌های ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی فراهم کرد. این چیزی شبیه به روش از بالا به پایین برای بسط الگوریتمها در زبان ساخت‌یافته‌ای نظیر زبان پاسکال است. در این روش برای حل مسأله‌ای مشکل ابتدا الگوریتمی را با در نظر گرفتن اجزای فرعی مهم مسائل که نیاز به حل دارند، تهیه می‌کنند. سپس این اجزای فرعی بیشتر پالاییده شده ـ به‌کارهای انجام‌پذیر برنامه‌ریزی ساده‌تری تقسیم می‌شوند. هر سطح پالایش، روشنی، دقت و جامعیت الگوریتم را بهبود می‌بخشد تا به‌راحتی قابل ترجمه به کد زبان برنامه‌ریزی شود. (در فصلهای بعد مطالبی بیشتر دربارهٔ الگوریتمها خواهیم گفت.)

نمودار زیر (جدول ۶.۱) خلاصهٔ فرمولهای شمارش عمده‌ای است که تا اینجا تهیه کردیم. در اینجا با گردایه‌ای از n شیء متمایز سر و کار داریم. فرمولها تعداد راههای انتخاب یا مرتب کردن را، بدون تکرار یا باتکرار rتا از n شیء حساب می‌کنند. خلاصه‌های فصول ۵ و ۹ شامل نمودارهای دیگری از این نوع هستند که هنگام تعمیم بررسیهای ما در روشهای شمارش دیگر ظاهر می‌شوند.

جدول ۶.۱

مکان فرمول در کتاب	فرمول	نوع نتیجه	تکرار مجاز است	ترتیب مناسب است
صفحهٔ ۱۲	$P(n,r) = n!/(n-r)!$, $0 \leq r \leq n$	جایگشت	نه	بله
صفحهٔ ۱۲	$n^r, n, r \geq 0$	آرایش	بله	بله
صفحهٔ ۲۳	$C(n,r) = n!/[(n-r)!r!] = \binom{n}{r}$, $0 \leq r \leq n$	ترکیب	نه	نه
صفحهٔ ۳۴	$\binom{n+r-1}{r}, n, r \geq 0$	ترکیب باتکرار	بله	نه

وقتی به بررسی اصول دیگر شمارش و همچنین ساختارهای ریاضیاتی گسسته، برای کاربردهایی در نظریهٔ کدگذاری، شمارش، بهینه‌سازی، و طرحهای جورکردن در علم کامپیوتر ادامه می‌دهیم باز به ایده‌هایی اصولی که در این بخش معرفی شدند، متکی خواهیم بود.

مفهوم جایگشت را می‌توان در اثر عبری (کتاب آفرینش) دستنوشتی عرفانی که در زمانی بین ۶۰۰ تا ۲۰۰ سال قبل از میلاد نوشته شده است یافت. اما، حتی قبل از آن، جالب است که بگوییم قضیه‌ای از خنوکراتس، اهل چالسدون [1]، (۳۹۶ـ۳۱۴ قبل از میلاد) در دست است که احتمالاً ممکن است شامل «اولین تلاش در ثبت حل مسأله‌ای مشکل در جایگشتها و ترکیبها باشد.» برای جزئیات بیشتر به صفحهٔ ۳۱۹ کتاب درسی اثر هیث[2] [۳]، همچنین صفحهٔ ۱۱۳ مقالهٔ بیگز[3] [۱] که منبع باارزشی دربارهٔ تاریخ شمارش است رجوع کنید. اولین فن حدس زدن*، نوشتهٔ یاکوب برنولی (۱۶۵۴ـ۱۷۰۵) نخستین کتاب درسی است که پاره‌ای از مطالب این فصل را مورد بحث قرار داده است. این کتاب در ۱۷۳۱ پس از مرگ برنولی منتشر شد و شامل چاپ تازهٔ اولین رسالهٔ رسمی دربارهٔ احتمال است که در ۱۶۵۷ کریستیان هویگنس[4] نوشته است.

قضیهٔ دوجمله‌ای برای $n = 2$ در اثر اقلیدس (۳۰۰ بعد از میلاد) دیده می‌شود، اما در قرن ششم بود که اصطلاح «ضریب دوجمله‌ای» به‌وسیلهٔ میکائیل اشتیفل[5] (۱۴۸۶ـ۱۵۶۷) عرضه شد. او در کتابش، حساب اعداد صحیح، (۱۵۴۴) ضرایب دوجمله‌ای را تا مرتبهٔ $n = 17$ به‌دست آورد. بلز پاسکال (۱۶۲۳ـ۱۶۶۲) در تحقیقاتش دربارهٔ احتمال رساله‌ای در ۱۶۵۰ منتشر کرد که از بستگیهای بین ضرایب دوجمله‌ای، ترکیبها، و چندجمله‌ایها بحث می‌کند. این نتایج را یاکوب برنولی در اثبات صورت کلی قضیهٔ دوجمله‌ای به روشی شبیه آنچه در این فصل آورده‌ایم به‌کار برده است. کاربرد واقعی نماد $\binom{n}{r}$ در قرن نوزدهم، زمانی‌که به‌وسیلهٔ آندره‌آس فون اتینگهاؤزن[6] (۱۷۹۶ـ۱۸۷۸) به‌کار رفت، صورت گرفت.

اما در قرن بیستم بود که ظهور کامپیوتر، تحلیل سیستماتیک فرایندها و الگوریتمها را در تولید جایگشتها و ترکیبها، میسر ساخت. این‌گونه الگوریتمها را در بخش ۱.۱۰ بررسی می‌کنیم.

اولین کتاب درسی جامع را که به مباحثی دربارهٔ ترکیبها و جایگشتها می‌پردازد ویت‌وَرث[7] نوشته است [۹]. فصل دوم کتاب کوهن[8] [۲]، فصل اول کتاب لیو[9] [۴]، فصل دوم کتاب رابرتس [۶]، فصل اول کتاب رایزر[10] [۷] ، و فصل دوم کتاب تاکر[11] [۸] نیز دربارهٔ مطالب این فصل کتاب حاضر بحث می‌کنند. برای ایده‌هایی بیشتر دربارهٔ مکانیک آماری و ترمودینامیک آماری، کتاب درسی اثر رید[12] و روی[13] [۵] را باید به‌دقت بررسی کرد.

---

1. Xenocrates of Chalcedon 2. T. L. Heath 3. N. L. Biggs * Ars Conjectandi
4. Christian Huygens 5. Michael Stifel 6. Andreas von Ettinghausen
7. W. Whitworth 8. D. Cohen 9. C. L. Liu 10. H. Ryser 11. A. Tucker
12. R. Reed 13. R. Roy

مراجع

1. Biggs, Norman L. "The Roots of Combinatorics." *Historia Mathematica* 6 (1979): pp. 109–136.
2. Cohen, Daniel I. A. *Basic Techniques of Combinatorial Theory*. New York: Wiley, 1978.
3. Heath, Thomas Little. *A History of Greek Mathematics*, vol. 1. Reprint of the 1921 edition. New York: Dover Publications, 1981.
4. Liu, C. L. *Introduction to Combinatorial Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1968.
5. Reed, Robert D., and Roy, R. R. *Statistical Physics for Students of Science and Engineering*. Scranton, Penn.: Intext Educational Publishers, 1971.
6. Roberts, Fred S. *Applied Combinatorics*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1984.
7. Ryser, H. J. *Combinatorial Mathematics*. Published by the Mathematical Association of America. New York: Wiley, 1963.
8. Tucker, Alan. *Applied Combinatorics*. New York: Wiley, 1980.
9. Whitworth, W. A. *Choice and Chance*. Reprint of the 1901 edition. New York: Hafner, 1965.

تمرینهای گوناگون

۱. در ساخت نوعی ماشین، چهار نوع نقص عمده و هفت نوع نقص جزئی ممکن است پیدا شود. در مواردی که نقصها پیدا می‌شوند، به چند راه تعداد نقصهای جزئی می‌تواند دوبرابر تعداد نقصهای عمده باشد؟

۲. دستگاهی دارای نه صفحهٔ شماره‌گیر است، و هر صفحهٔ شماره‌گیر ۵ عدد ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ دارد

الف) به چند راه می‌توان این صفحه‌های شماره‌گیر را روی دستگاه قرار داد؟

ب) اگر نه صفحهٔ شماره‌گیر به ردیف، بالای دستگاه چیده شوند، در چند وضع قرارگرفتن روی دستگاه، دو صفحهٔ شماره‌گیر مجاور، آرایه‌های عددی یکسانی ندارند؟

ج) در چند وضع قرارگرفتن روی دستگاه در قسمت (ب) تنها از ۰، ۲، و ۴ برای شماره‌گیرها استفاده می‌شود؟

د) در چند وضع قرارگرفتن در قسمت (الف) تنها از سه شماره‌گیر متفاوت، که در آنها هر شماره‌گیر سه‌بار ظاهر می‌شود، استفاده شده است؟

۳. نرم‌افزار واژه‌پردازی برای یک ریزکامپیوتر، نام پرونده‌ها را با شماره‌هایی از ۱ تا ۸ رقم مشخص می‌کند. هر شماره می‌تواند یکی از ۳۶ نویسهٔ الفبا ـ عددی (۲۶ حرف و ۱۰ رقم) یا یکی از ۱۵ نماد معین شدهٔ دیگر باشد. (برای نام پرونده‌ها، کامپیوتر همهٔ حروف را به‌صورت حروف بزرگ الفبا می‌خواند، خواه با حروف بزرگ تایپ شده باشند، خواه با حروف کوچک.) ممکن است که نام پرونده را با یک توسیع اختیاری نام آن نیز خواند. این کار با نوشتن یک دوره و از یک تا سه نویسهٔ الفبا ـ عددی فراهم می‌شود. بنابراین، شش مثال از نام پرونده‌ها را که می‌توان به‌کار برد عبارت‌اند از (۱) TAXES، (۲) BUDGET، (۳) A13B4781، (۴) INCOME.87، (۵) SCORES.JUN، و (۶) Z35.P72. در اینجا، برای سه مثال آخر از توسیع اختیاری نام پرونده استفاده شده است.

الف) در چند نام پرونده تنها از ۳۶ نویسهٔ الفبا ـ عددی و بدون توسیع استفاده می‌شود؟

ب) چند نام پرونده، در قسمت (الف) با دو A شروع می‌شود؟

ج) در چند نام پرونده از توسیعهای دقیقاً سه‌نویسهٔ الفبا ـ عددی استفاده می‌شود؟

د) برای نام پرونده‌ها در قسمت (ج)، چندتا در توسیع نام پرونده، نویسهٔ تکراری ندارند؟

۴. سرپرست یک دستهٔ سرودخوان باید برای مراسم یکشنبهٔ کلیسا شش سرود انتخاب کند. او سه کتاب سرود دارد که هر کدام شامل ۲۵ سرودند (روی‌هم‌رفته، ۷۵ سرود مختلف در اختیار دارند.) به چند راه می‌تواند شش سرود را انتخاب کند اگر بخواهد (الف) دو سرود از هر کتاب انتخاب کند؟ (ب) حداقل یک سرود از هر کتاب انتخاب کند؟

۵. برای نصب ۲۵ پرچم بر ده میلهٔ پرچم شماره‌دار چند راه وجود دارد به‌شرطی که ترتیب نصب پرچمها بر میله‌ها (الف) مهم نباشد؟ (ب) مهم باشد؟ (ج) مهم باشد و در هر میلهٔ پرچم حداقل یک پرچم به اهتزار درآید؟

۶. با ارقام ۱، ۳، ۳، ۷، ۷، و ۸ چند عدد صحیح متمایز چهار رقمی می‌توان ساخت؟

۷. از دانشگاه A دوازده دانشجو داوطلب شرکت در یک مسابقهٔ تنیس‌اند (الف) به چند طریق می‌توان هشت‌تا از آنها را برای شرکت در مسابقه انتخاب کرد؟ (ب) به چند راه می‌توان هشت دانشجو از دانشگاه B را با هشت‌تا از دوازده دانشجوی دانشگاه A برای مسابقهٔ تنیس جفت کرد؟

۸. در دنباله‌های n رقمی چهارچهاری $(0, 1, 2, 3)$، دقیقاً چندتا دارای r تا ۱ هستند؟

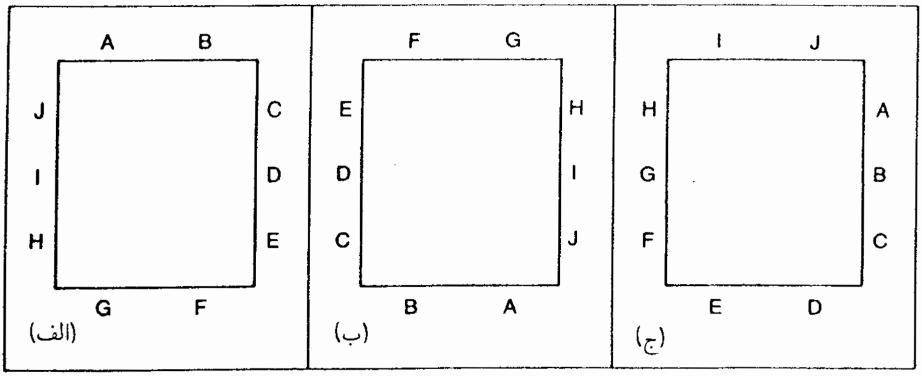
۹. به چند راه می‌توان حرفهای WONDERING را آرایش داد تا هر آرایش دو حرف صدادار متوالی داشته باشد؟

۱۰. یک حلال آلی از اختلاط شش جزء مایع مختلف ساخته شده است. پس از اینکه اولین جزء در ظرفی ریخته شد، اجزای دیگر به‌ترتیبی که از پیش مشخص شده است به آن اضافه می‌شوند. همهٔ ترتیبهای ممکن را، برای تعیین اینکه کدام ترتیب محصول بهتر را می‌دهد، آزمایش کرده‌اند. چند آزمایش انجام شده است؟

۱۱. به چند راه می‌توان ۱۰ اسب چوبی همانند را رنگ زد به‌قسمی که سه‌تا قهوه‌ای، سه‌تا سفید، و چهارتا سیاه باشند؟

۱۲. استادی به چند راه می‌تواند ۱۲ کتاب مختلف علمی را بین ۱۶ دانشجو توزیع کند اگر (الف) هیچ دانشجویی بیش از یک کتاب دریافت نکند؟ (ب) مسنترین دانشجو دو کتاب دریافت کند و بقیهٔ دانشجویان بیش از یک کتاب دریافت نکنند؟

۱۳. چهار عدد از فهرست اعداد زیر انتخاب شده‌اند: ۵−، ۴−، ۳−، ۲−، ۱−، ۱، ۲، ۳، ۴. (الف) به چند راه می‌توان انتخاب را انجام داد به‌قسمی که حاصلضرب چهار عدد مثبت باشد و (i) اعداد متمایز باشند؟ (ii) هر عدد بتواند تا چهار بار هم انتخاب شود؟ (ب) به قسمت (الف) وقتی حاصلضرب چهار عدد منفی باشد جواب دهید.



شکل ۶.۱

۱۴. **الف)** ضریب $x^{۲}yz^{۲}$ را در بسط $[(x/۲) + y - ۳z]^{۵}$ بیابید.

ب) در بسط کامل

$$(\frac{x}{۲} + y - ۳z)^{۵}$$

چند جملهٔ متمایز وجود دارد؟

ج) مجموع تمام ضرایب در این بسط کامل چقدر است؟

۱۵. **الف)** به چند راه می‌توان ۱۰ نفر را که با A، B، . . . ، I، J نشان داده‌ایم گرد میز مستطیلی شکل ۶.۱ نشانید، که در آن شکلهای ۶.۱ (الف) و ۶.۱ (ب) مثل هم ولی با شکل ۶.۱ (ج) متفاوت باشند؟

ب) در چندتا از آرایشهای قسمت (الف) A و B در ضلعهای بزرگتر میز، مقابل یکدیگر می‌نشینند؟

۱۶. الف) تعداد جوابهای صحیح نامنفی دو معادلهٔ زیر را بیابید

$$x_{۱} + x_{۲} + x_{۳} = ۶, \qquad x_{۱} + x_{۲} + \cdots + x_{۵} = ۱۵ \qquad x_i \geq ۰,\ ۱ \leq i \leq ۵$$

ب) وقتی به‌جای دو معادلهٔ بالا دو نابرابری زیر قرار گیرند به قسمت (الف) پاسخ دهید.

$$x_{۱} + x_{۲} + x_{۳} \leq ۶ \qquad x_{۱} + x_{۲} + \cdots + x_{۵} \leq ۱۵ \qquad x_i \geq ۰,\ ۱ \leq i \leq ۵$$

۱۷. یک سیستم بسته عبارت از چهار فوتون است و در مدل بوز ـ اینشتین برای مکانیک آماری صادق است. انرژی کل سیستم برابر $۴E$ است، که در آن هر فوتون می‌تواند سطح انرژی kE را داشته باشد. k عددی است صحیح، $۰ \leq k \leq ۴$، و E ثابتی مثبت است. فوتون با انرژی kE

می‌تواند هریک از $k^۲ + ۱$ حالت انرژی متمایز در آن سطح انرژی را اشغال کند. این سیستم بسته، برحسب حالتهای انرژی که فوتونها اشغال می‌کنند، چند پیکربندی مختلف را می‌تواند بپذیرد؟

۱۸. دستگاهی بسته، متشکل از چهار الکترون است و در مدل فرمی‌ـدیراک برای مکانیک آماری صدق می‌کند. انرژی کل دستگاه برابر با $۴E$ است، که در آن هر فوتون می‌تواند سطح انرژی kE داشته باشد، که k عددی صحیح است، $۰ \leq k \leq ۴$، و E ثابتی مثبت است. یک الکترون با انرژی kE می‌تواند هر یک از $۲(k^۲ + ۱)$ حالت انرژی متمایز را در آن سطح اشغال کند. این دستگاه بسته برحسب حالتهای انرژی اشغال شده به‌وسیلهٔ الکترونها، چند پیکربندی مختلف را می‌تواند بپذیرد؟

۱۹. به چند راه می‌توان دوازده سیب را بین پنج طفل توزیع کرد به‌قسمی که هیچ طفلی بیش از هفت سیب دریافت نکند؟

۲۰. در هر دور مفروض از مسابقهٔ تنیس، حریف A می‌تواند از حریف B به هفت راه مختلف ببرد. (در ۶ − ۶ یک بازی اضافی می‌کنند.) اولین حریفی که سه دور ببرد مسابقه را برده است. (الف) اگر A در پنج دور برنده شود امتیازها را به چند راه می‌توان ثبت کرد؟ (ب) اگر مسابقه مستلزم حداقل چهار دور باشد، به چند راه می‌توان امتیازها را ثبت کرد؟

۲۱. فرض کنید n فرد است. به چند راه می‌توانیم nتا ۱ و rتا ۰ را آرایش دهیم که ردیفی (فهرستی از نمادهای همانند متوالی) از دقیقاً kتا ۱، $k \leq n \leq ۲k$ داشته باشیم؟

۲۲. n شیء متمایز داده شده است. به چند راه می‌توان rتا از این اشیاء را روی یک دایره آرایش داد، به‌شرطی که آرایشهایی را که از دوران یکدیگر پیدا می‌شوند یکی بگیریم.

۲۳. نشان دهید که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۴} + \cdots = \binom{n}{۱} + \binom{n}{۳} + \binom{n}{۵} + \cdots$$

۲۴. **الف)** به چند راه می‌توان حروف واژهٔ UNUSUAL را آرایش داد؟

ب) چندتا از آرایشهای قسمت (الف) دارای سه Uی متوالی‌اند؟

ج) چندتا از آرایشهای قسمت (الف) دارای Uهای متوالی نیستند؟

د) چندتا از آرایشهای قسمت (الف) چهار حرف صدادار باهم دارند؟

۲۵. **الف)** مطلوب است تعداد راههایی که می‌توان ۱۷ را به‌صورت مجموع ۱ها و ۲ها نوشت به‌شرط آنکه ترتیب مدنظر باشد؟

ب) به قسمت (الف) وقتی به‌جای ۱۷ عدد ۱۸ باشد پاسخ دهید.

ج) نتایج قسمتهای (الف) و (ب) را برای وقتی n زوج و یا فرد باشد تعمیم دهید.

۲۶. **الف)** به چند راه می‌توان ۱۷ را به‌صورت مجموع ۲ها و ۳ها نوشت اگر ترتیب جمعوندها (i) مدنظر نباشد؟ (ii) مدنظر باشد؟

ب) اگر به‌جای ۱۷ عدد ۱۸ باشد به قسمت (الف) پاسخ دهید.

۲۷. **الف)** اگر n و r عددهای صحیح مثبت با $r \leq n$ باشند،

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$$

چند جواب دارد؟ x_i، $1 \leq i \leq r$، عدد صحیح مثبت است.

ب) به چند راه می‌توان عدد صحیح مثبت n را به‌صورت مجموع r جمعوند صحیح مثبت ($1 \leq r \leq n$) نوشت اگر ترتیب جمعوندها مدنظر باشد؟

۲۸. **الف)** به چند راه می‌توان در صفحهٔ xy از $(1, 2)$ به $(5, 9)$ رفت، اگر هر حرکت، یکی از انواع حرکتهای زیر باشد

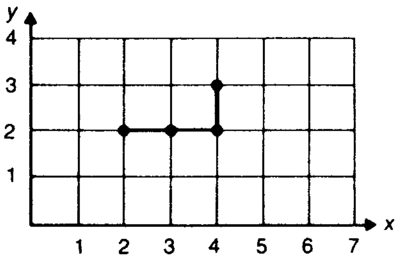
$$(\mathrm{H}) : (x, y) \to (x + 1, y); \qquad (\mathrm{V}) : (x, y) \to (x, y + 1)$$

ب) به قسمت (الف) پاسخ دهید اگر حرکت (قطری) سوم $(\mathrm{D}) : (x, y) \to (x+1, y+1)$ نیز ممکن باشد.

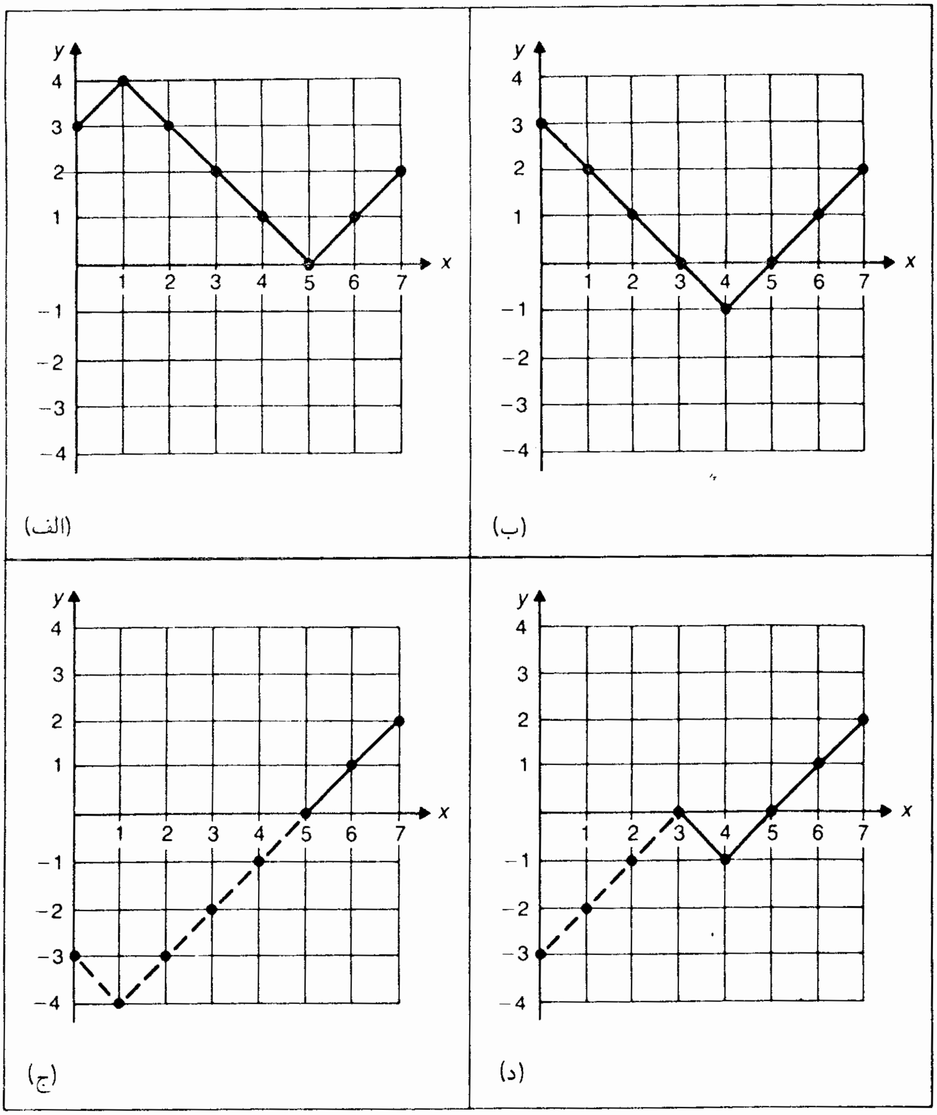
۲۹. **الف)** یک ذره به چند راه می‌تواند در صفحهٔ xy از مبدأ به نقطهٔ $(7, 4)$ حرکت کند اگر حرکتهای مجاز به‌صورت زیر باشند:

$$(\mathrm{H}) : (x, y) \to (x + 1, y); \qquad (\mathrm{V}) : (x, y) \to (x, y + 1)$$

ب) در چندتا از مسیرهای قسمت (الف) از مسیر $(2, 2)$ به $(3, 2)$ به $(4, 2)$ به $(4, 3)$ که در شکل ۷.۱ نشان داده‌ایم استفاده نمی‌شود؟ **ج)** اگر حرکت نوع سوّم $(\mathrm{D}) : (x, y) \to (x + 1, y + 1)$ نیز مجاز باشد، به قسمتهای (الف) و (ب) پاسخ دهید.



شکل ۷.۱



شکل ۱.۸

۳۰. تمرین زیر، بیانگر یک روش مهم شمارش است که به‌اصل بازتابی‌موسوم است. در اینجا یک ذره در صفحهٔ xy مطابق حرکتهای زیر جابه‌جا می‌شود.

$$\mathrm{U}:(m,n)\to(m+۱,n+۱);\qquad \mathrm{L}:(m,n)\to(m+۱,n-۱)$$

که در آن m و n، $m,n\geq ۰$، اعدادی صحیح‌اند.

در شکلهای ۸.۱ (الف) و ۸.۱ (ب) دو چنین مسیری از $(۳,۰)$ به $(۷,۲)$ داریم.

الف) تحت این محدودیتها، چندتا از چنین مسیرها از $(۳,۰)$ به $(۷,۲)$ هستند؟

ب) شکلهای ۸.۱ (ج) و ۸.۱ (د) ایدهٔ زیر را به‌ترتیب برای مسیرهای قسمتهای (الف) و (ب)ی شکل نشان می‌دهند. وقتی مسیری از $(۳,۰)$ به $(۷,۲)$ به محور x می‌رسد یا آن‌را تلاقی می‌کند، مسیری متناظر از $(-۳,۰)$ به $(۷,۲)$ با بازتابی قطعهٔ اولیهٔ مسیر قبل از اینکه ابتدا به محور x برسد یا آن را تلاقی کند به‌دست می‌آید. این مشاهدات را برای یافتن تعداد مسیرهایی از $(۳,۰)$ به $(۷,۲)$ که به محور x حداقل یک‌بار می‌رسند یا آن را تلاقی می‌کنند به‌کار برید.

ج) چندتا از مسیرهای از $(۳,۰)$ به $(۷,۲)$ هرگز به محور x نمی‌رسند یا آن‌را تلاقی نمی‌کنند؟

د) هزینهٔ ورود به سینماتئاتری ۵ دلار است. وقتی مسؤول فروش، گیشهٔ فروش بلیط را باز می‌کند یک اسکناس ۱۰ دلاری و دو اسکناس ۵ دلاری دارد. صف خرید بلیط ۱۱ مشتری دارد که پنج‌تا از آنها هرکدام ۵ دلار دارند (و آمادهٔ خرید بلیط‌اند) و شش‌تای دیگر هرکدام یک اسکناس ۱۰ دلاری دارند. (هربار که مسؤول فروش قادر نیست پول خرد لازم را به مشتری بپردازد مدیر را برای دریافت اسکناس ۵ دلاری فرامی‌خواند.) این ۱۱ مشتری به چند راه می‌توانند صف ببندند تا مسؤول فروش همیشه حداقل، بدون فراخواندن مدیر، یک اسکناس ۵ دلاری داشته باشد؟

۲

مبانی منطق

در فصل اوّل، در مثال ۳۵.۱ (بخش ۴.۱) یک فرمول مجموعیابی به‌دست آوردیم. این فرمول را از راه شمارش گردایه‌ای از اشیاء (تعداد دفعاتی که حکمی در قطعه برنامهٔ معینی اجرا شده بود) به دو راه مختلف و سپس با برابر گرفتن دو نتیجه تعیین کردیم. بنابراین، می‌گوییم که این نتیجه از راه برهانی ترکیبیاتی ثابت شده‌است. این یکی از تکنیکهای مختلف برای دستیابی به برهان در سرتاسر این کتاب است.

در این فصل به آنچه که برهان متداولتر یا استدلال معتبری را تشکیل می‌دهد نگاهی دقیق می‌اندازیم. وقتی ریاضیدانی می‌خواهد برهانی برای وضعیتی مفروض تهیه کند، باید دستگاهی از منطق را به‌کار برد. وقتی یک متخصص کامپیوتر الگوریتمهای لازم برای برنامه یا دستگاهی از برنامه‌ها را بسط می‌دهد نیز وضع به همین منوال است. منطق ریاضیات برای اخذ تصمیم در این‌باره که آیا حکمی یا پیامدی منطقی از یک یا چند حکم دیگر نتیجه می‌شود یا نه، به‌کار می‌رود.

در این فصل برخی از قاعده‌های حاکم بر این فرایند تشریح شده‌اند. لذا ما از این قاعده‌ها در برهانهای (تهیه شده در کتاب و ضروری برای تمرینها) سراسر فصلهای بعد استفاده خواهیم کرد. امّا، در هیچ زمانی نمی‌توانیم امیدوار باشیم که به‌مرحله‌ای برسیم که بتوانیم قاعده‌ها را به‌روشی خودکار به‌کار بریم. مثل آنچه که در مفاهیم شمارش مورد بحث در فصل ۱ به‌کار بردیم، برای درک وضعیت داده شده همیشه به تحلیل و جستجو می‌پردازیم. این، اغلب مستلزم دارابودن صفاتی،

نظیر بصیرت و خلاقیت است که نمی‌توانیم آنها را در یک کتاب بیاموزیم. صرفاً تلاش محض درکاربرد فرمولها یا استمداد از قاعده‌ها ما را، خواه در اثبات نتایج (و نیز قضایا)، خواه در انجام مسائل شمارش، به سر منزل مقصود نمی‌رساند.

۱.۲ ادات پایه‌ای و جدولهای ارزش

در بسط هر نظریهٔ ریاضی، ادعاها به‌صورت جمله بیان می‌شوند. این ادعاهای شفاهی یا کتبی را که گزاره می‌نامند، جملاتی خبری هستند که یا راست‌اند یا دروغ. مثلاً موارد زیر گزاره‌اند:

الف) p: ترکیبیات، درسی ضروری است،

ب) q: من دانشجوی رشتهٔ کامپیوترم،

ج) r: ماشین طرّاحی امروز از کار افتاده است.

این گزاره‌ها را می‌توان به‌عنوان گزاره‌های ساده تلقی کرد، زیرا حقیقتاً نمی‌توان آنها را به گزاره‌های ساده‌تری تجزیه کرد. گزاره‌های مرکب از گزاره‌های ساده به کمک ادات منطقی به‌دست می‌آیند.

به‌صورت زیر می‌توانیم نقیض گزاره‌ای را پیدا یا دو گزاره‌ای را با هم ترکیب کنیم.

۱. **نقیض**: نقیض یک گزارهٔ p را با $\overline{p}$ نشان می‌دهند و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانند. اگر p گزارهٔ بالا باشد «ترکیبیات درسی ضروری نیست»، $\overline{p}$ خواهد شد.

۲. **ترکیب عطفی**: ترکیب عطفی p و q را با $p \wedge q$ نشان می‌دهند و آن‌را «p و q» می‌خوانند. در مثال بالا، گزارهٔ مرکب $p \wedge q$ چنین است: «ترکیبیات درسی ضروری است و من دانشجوی رشتهٔ کامپیوترم».

۳. **ترکیب فصلی**: عبارت $p \vee q$ معرف ترکیب فصلی p و q است که «p یا q» خوانده می‌شود. بنابراین، «ترکیبیات درسی ضروری است، **یا** من دانشجوی رشتهٔ کامپیوترم» یک بیان شفاهی برای $p \vee q$ است. ما در اینجا واژهٔ «یا» را به‌مفهوم یای شمول یا یای منطقی به‌کار بردیم. در نتیجه، $p \vee q$ راست است اگر یکی یا دیگری یا هر دو گزارهٔ p و q راست باشند. گاهی برای اشاره به این مطلب می‌نویسیم «و / یا». «یا»ی مانعِ جمع را با $p \veebar q$ نشان می‌دهند. گزارهٔ مرکب $p \veebar q$ راست است اگر یکی یا دیگری و نه هر دو گزارهٔ p و q راست باشند. یک راه برای بیان $p \veebar q$ در مورد مثال بالا چنین است «ترکیبیات درسی ضروری است، یا من دانشجوی رشتهٔ کامپیوترم، امّا نه هر دو»*.

۴. **استلزام**: برای نشان دادن استلزام q به‌وسیلهٔ p، می‌گوییم «p مستلزم q است» و می‌نویسیم $p \rightarrow q$. همچنین، می‌توانیم بگوییم (الف) اگر p، آن‌گاه q؛ (ب) p شرط کافی برای q است؛ (ج) p فقط اگر q؛ و (د) q شرط لازم برای p است. بیان شفاهی $p \rightarrow q$ برای مثال ما عبارت است از «اگر ترکیبیات درسی ضروری است، آن‌گاه من دانشجوی رشتهٔ کامپیوترم.» گزارهٔ p را فرض

* ولی در زبان فارسی این عبارت چنین بیان می‌شود: یا ترکیبیات درسی ضروری است، یا من دانشجوی رشتهٔ کامپیوترم.

استلزام، و q را نتیجهٔ آن می‌گویند. وقتی گزاره‌ها بدین طریق با هم ترکیب می‌شوند وجود هیچ رابطهٔ علّی بین گزاره‌ها ضروری نیست. ما با تعریف بالا برای استلزام فقط می‌نویسیم $p \to q$، خواه p و q به‌طریقی به هم وابسته باشند و خواه نباشند.

۵. هم‌ارزی: بالاخره، هم‌ارزی دو گزارهٔ p و q را با $p \leftrightarrow q$ نشان می‌دهیم که خوانده می‌شود «p هم‌ارز با q است»، «p اگر و تنها اگر q»، یا «p شرط لازم و کافی برای q است». برای p و qی بالا «ترکیبیات درسی ضروری است اگر و تنها اگر من دانشجوی رشتهٔ کامپیوتر باشم» مفهوم $p \leftrightarrow q$ را می‌رساند.

در سراسر بحث دربارهٔ منطق، از به‌رسمیت شناختن برخی جملات خبری، نظیر آنهایی که مشروط به‌عقیدهٔ افرادند یا به‌زمان بستگی دارند و بنابراین ممکن است راست یا دروغ باشند، به‌عنوان گزاره اجتناب می‌کنیم. به‌علاوه باید در نظر بگیریم که جمله‌ای نظیر

عددx، عددی صحیح است

یک گزاره نیست زیرا ارزش راستی (دروغ یا راست بودن) آن را نمی‌توان تا وقتی به x ارزشی عددی تخصیص نداده‌ایم تعیین کنیم. اگر به x ارزش یا مقدار ۷ را تخصیص دهیم، نتیجه گزاره‌ای راست است. امّا تخصیص مقداری نظیر ۱/۲، $\sqrt{۲}$، یا π، گزاره‌ای دروغ به‌دست می‌دهد.

حضور متغیر، یا کمیت مجهول در یک جمله خود به‌خود بدین معنا نیست که آن جمله گزاره نیست. مثلاً، جملهٔ

اگر $x = ۳$، آن‌گاه $x^۲ = ۹$

گزاره‌ای راست است، در حالی‌که حکم

اگر $x = ۳$، آن‌گاه $x + ۲ = ۶$

گزاره‌ای دروغ است. در بحث بالا، ما به مواردی اشاره کردیم که در آنها، گزاره‌های $p \vee q$ و $p \veebar q$ بر اساس راستی مؤلفه‌های اولیهٔ p و qی آنها، راست در نظر گرفته شده‌بودند. ایدهٔ تعیین راست بودن یا دروغ بودن گزارهٔ مرکب به‌عنوان تابعی از ارزشهای راستی مؤلفه‌های اولیهٔ آنها، ارزش بررسی بیشتری دارد. جدولهای ارزش، جدولهای ۱.۲ و ۲.۲، خلاصهٔ راست بودن و دروغ بودن نقیض و سایر گزاره‌های مرکب را، مبتنی بر راست بودن ارزشهای مؤلفه‌های سادهٔ آنها، نشان می‌دهند. در ساختن جدولهای ارزش، برای دروغ ارزش «۰» قائل می‌شویم و برای راست، ارزش «۱».

چهار حالت ممکن راستی p و q را می‌توان با هر ترتیبی فهرست کرد. خواهیم دید که برای آینده فهرست‌بندیی که در اینجا عرضه شد مفید خواهد بود.

ملاحظه می‌کنیم که ستونهای ارزشهای راست بودن p و $\overline{p}$ هر یک مخالف دیگری است. گزارهٔ $p \wedge q$ تنها وقتی راست است که p و q هر دو راست باشند، در حالی‌که $p \vee q$ تنها وقتی دروغ

جدول ۱.۲

p	$\overline{p}$
۰	۱
۱	۰

جدول ۲.۲

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۰	۱	۱

است که هر دو گزارهٔ ساده دروغ باشند. همان‌طور که قبلاً تذکر دادیم، $p \veebar q$ وقتی راست است که دقیقاً یکی از دو مؤلفهٔ p و q راست باشد.

برای استلزام $p \to q$، نتیجه در همهٔ حالتها راست است مگر حالتی که p راست و q دروغ باشد. ما با گزارهٔ راستی که به باور کردن چیزی دروغ منجر شود سر و کار نداریم. امّا گزاره‌ای نظیر «اگر ۶ = ۳ + ۲، آن‌گاه ۷ = ۴ + ۲» را راست تلقی می‌کنیم. حتی اگر گزاره‌های «۶ = ۳ + ۲» و «۷ = ۴ + ۲» هر دو دروغ باشند.

سرانجام، گزارهٔ $p \leftrightarrow q$ وقتی راست است که گزاره‌های ساده، یک ارزش راستی داشته باشند.

وقتی ابتدا با جدول ارزش برای استلزام $(p \to q)$، نظیر جدول ۲.۲، مواجه می‌شویم، معمولاً پذیرش نتایج، بخصوص نتایج اولین دو سطر (که در آن p ارزش راستی ۰ دارد)، مشکل است. مثال زیر به تسهیل درک مقادیر تخصیصی ارزش راستی کمک خواهد کرد.

مثال ۱.۲ سناریوی زیر را در نظر بگیرید. تقریباً یک هفته به کریسمس مانده است و پنی قرار است در چندین میهمانی آن هفته شرکت کند. او که همواره مراقب وزن خودش هست، قصد دارد تا روز بعد از کریسمس خود را وزن نکند. با در نظر گرفتن اضافه وزنی که میهمانیها موجب آن می‌شوند برای روز بعد از کریسمس تصمیم زیر را گرفته است: «اگر وزنم بیش از ۱۲۰ پوند بود در کلاس ورزش ثبت‌نام خواهم کرد.»

در اینجا فرض می‌کنیم p و q معرف گزاره‌های (ساده) باشند.

p: وزنم بیش از ۱۲۰ پوند است.

q: در کلاس ورزش ثبت‌نام خواهم کرد.

در این صورت گزارهٔ (استلزامی) پنی به‌صورت $p \to q$ داده می‌شود.

ما ارزشهای راستی این مثال خاص $p \to q$ را برای سطرهای جدول ۲.۲ بررسی می‌کنیم. ابتدا آسانترین حالتها را در سطرهای ۴ و ۳ در نظر می‌گیریم.

• **سطر ۴**: p و q هر دو ارزش راستی ۱ دارند. در روز بعد از کریسمس پنی متوجه می‌شود که

وزنش بیش از ۱۲۰ پوند است و بی‌درنگ، همان‌طورکه گفته بود، درکلاس ورزش ثبت‌نام می‌کند. در اینجا $p \to q$ را گزارهٔ راست در نظر می‌گیریم و به آن ارزش راستی ۱ می‌دهیم.

- **سطر ۳**: p دارای ارزش راستی ۱ است، q دارای ارزش راستی ۰ است. اینک روز بعداز کریسمس رسیده است. پنی متوجه می‌شود که وزنش بیش از ۱۲۰ پوند است، اما بی‌درنگ درکلاس ورزش ثبت‌نام نمی‌کند. در این حالت، احساس می‌کنیم که پنی تصمیم خود را نادیده گرفته است. به‌عبارت دیگر، استلزام $p \to q$ دروغ (و ارزش راستی آن ۰) است.

حالتهای مربوط به سطرهای ۱ و ۲ ممکن است بی‌درنگ با مشهودات ما تطبیق نکنند، امّا این مثال، پذیرش این نتایج را باید آسانترکند.

- **سطر ۱**: p و q هر دو دارای ارزش راستی ۰ هستند. در اینجا پنی متوجه می‌شود که در روز بعد ازکریسمس وزنش ۱۲۰ پوند یا کمتر است و درکلاس ورزش ثبت‌نام نمی‌کند. او از تصمیم خود عدول نکرده است؛ ما گزارهٔ $p \to q$ را راست تلقی می‌کنیم و ارزش راستی ۱ به آن می‌دهیم.

- **سطر ۲**: p دارای ارزش راستی ۰ و q دارای ارزش راستی ۱ است. در این حالت اخیر، پنی متوجه می‌شود که روز بعد ازکریسمس وزنش ۱۲۰ پوند یاکمتر است اما باز درکلاس ورزش ثبت‌نام می‌کند. شاید وزن او ۱۱۹ یا ۱۲۰ پوند است و احساس می‌کند که هنوز هم چاق است. یا شاید می‌خواهد به‌دلیل اینکه فکر می‌کند برای سلامتیش خوب است در کلاس ورزش شرکت کند. به هر دلیل، خلاف تصمیم $p \to q$ عمل نکرده است. یک‌بار دیگرگزارهٔ مرکب را به‌عنوان گزارهٔ راست می‌پذیریم و به آن ارزش راستی ۱ می‌دهیم. □

مثال بعدی از مفهومی وابسته بحث می‌کند: ساختار تصمیم (یا انتخاب) در برنامه‌ریزی کامپیوتری.

مثال ۲.۲ در علم کامپیوتر ساختارهای تصمیم اگر‌ـآن‌گاه و اگر‌ـآن‌گاه‌ـوگرنه، در زبانهایی نظیر **بیسیک** و پاسکال ظاهر می‌شوند. فرض p غالباً یک عبارت نسبی نظیر $x > 2$ است. لذا این عبارت گزاره‌ای (منطقی) می‌شود که بسته به‌مقدار متغیر x در آنجای برنامه، ارزش راستی ۰ یا ۱ دارد. نتیجهٔ q گزاره‌ای است که ممکن است گزاره‌ای اجرایی باشد که برنامه را به سطری دیگر هدایت کند و یا موجب چاپ نتیجه‌ای شود (در نتیجه، به‌عنوان یک «گزارهٔ قابل اجرا»، q از گزاره‌هایی نیست که از آنها بحث کردیم.). وقتی با «اگر p آن‌گاه q» سر و کار داریم، کامپیوتر q را، تنها به‌شرط آنکه p راست باشد، اجرا می‌کند. برای pی دروغ، کامپیوتر به‌سطر بعدی (شماره‌دار) دنبالهٔ برنامه می‌رود. برای گزاره‌ای به‌صورت «اگر p آن‌گاه q وگرنه r»، وقتی p راست است q اجرا می‌شود و وقتی p دروغ است r اجرا می‌شود. □

قبل از ادامه، یک هشدار: موقع استفاده از نمادهای $\rightarrow$ و $\leftrightarrow$ مواظب باشید. استلزام و هم‌ارزی، چنانکه دو ستون آخر جدول ۲.۲ گواهی می‌کنند، یکی نیستند.

امّا، در تعریفها این دو مفهوم با هم می‌آیند. مثلاً در تعریف یک مثلث متساوی‌الساقین ممکن است بنویسیم «اگر دو ضلع مثلثی برابر باشند آن‌گاه آن مثلث را متساوی‌الساقین می‌نامند.» امّا باید همچنین درک کنیم که اگر مثلثی متساوی‌الساقین گفته‌شد، آن‌گاه باید درازای دو ضلعش برابر باشند. در نتیجه، وقتی تعریف به‌صورت $p \rightarrow q$ داده می‌شود می‌فهمیم که در واقع به‌معنای $p \leftrightarrow q$ است.

آنچه در مورد تعریفها رخ می‌دهد، در حالت کلی به‌گزارهٔ استلزامی منتقل نمی‌شود. این نکته را، بعداً در مثال ۱۳.۲ بررسی خواهیم کرد.

گرچه نتایج جدولهای ۱.۲ و ۲.۲ برای گزاره‌های سادهٔ p و q داده شده بودند، این ایده‌ها، وقتی گزاره‌های مرکب به‌جای نمادهای p و q قرار می‌گیرند نیز به‌کار می‌روند. این مطلب را مثالهای ۳.۲ تا ۵.۲ نشان می‌دهند.

مثال ۳.۲ فرض کنید می‌خواهیم جدول ارزش برای گزارهٔ مرکب «من دانشجوی رشتهٔ کامپیوترم، و اگر ماشین طراحی امروز از کار افتاده است، آن‌گاه ترکیبیات درسی ضروری است» را بررسی کنیم. این گزاره به‌صورت نمادی چنین است $q \wedge (\overline{r} \rightarrow p)$، که در آن p، q، و r معرفِ گزاره‌هایی هستند که در شروع بخش معرفی شدند. آخرین ستون جدول ۳.۲ مشتمل بر ارزشهای راستی این نتیجه است. ستونهای قبلی نشان می‌دهند که جدول ارزش چگونه با در نظر گرفتن بخشهای کوچکتر گزارهٔ مرکب و استفاده از نتایج جدولهای ۱.۲ و ۲.۲ ساخته شده‌است. □

مثال ۴.۲ در جدول ۴.۲، جدولهای ارزش را برای گزاره‌های مرکب $p \vee (q \wedge r)$ (ستون ۵) و

جدول ۳.۲

p	q	r	$\overline{r}$	$\overline{r} \rightarrow p$	$q \wedge (\overline{r} \rightarrow p)$
۰	۰	۰	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۰	۱	۱

جدول ۴.۲

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

$(p \vee q) \wedge r$ (ستون ۷) تشکیل می‌دهیم.

به‌دلیل اینکه ارزشهای راستی ستونهای ۵ و ۷ (در سطرهای ۵ و ۷) متفاوت‌اند، باید از نوشتن گزارهٔ مرکبی نظیر $p \vee q \wedge r$ اجتناب کنیم. بدون پرانتز هیچ نمی‌دانیم کدام یک از ادات $\wedge$ و $\vee$ باید ابتدا به‌کار رود. نمی‌دانیم که با $p \vee (q \wedge r)$ سر و کار داریم یا با $(p \vee q) \wedge r$. □

آخرین مثال ما در این بخش معرفی دو نوع خاص از گزاره‌هاست.

مثال ۵.۲ نتایج ستونهای ۴ و ۶ جدول ۵.۲ آشکار می‌کنند که گزارهٔ $p \rightarrow (p \vee q)$ همیشه راست است، در حالی‌که گزارهٔ $p \wedge (\overline{p} \wedge q)$ همیشه دروغ است □

تعریف ۱.۲ گزاره‌ای را که همیشه راست است راستگو می‌نامند؛ به‌گزاره‌ای که همیشه دروغ است یک تناقض می‌گویند.

جدول ۵.۲

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$	$(\overline{p} \wedge q)$	$p \wedge (\overline{p} \wedge q)$
۰	۰	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۰	۰

در سراسر این فصل نماد T، را برای نشان دادن راستگو و نماد F، را برای نمایش تناقض به‌کار خواهیم برد.

می‌توانیم با استفاده از مفاهیم راستگو و استلزام بگوییم که منظور ما از یک قضیه چیست. به‌طور کلی، قضیه، گزارهٔ ریاضیاتی است که می‌توان راستی آن را (به‌وسیلهٔ برهان) نشان داد. بدون شک شما در جبر و هندسهٔ دبیرستانی با قضایا و برهانهای آنها مواجه شده‌اید.

بسیاری از قضایا را می‌توان به‌صورت زیر عرضه کرد. اگر حکمهای p_1،p_2،p_3، ... ، p_n فرضهای یک استلزام را نشان دهند و q نتیجه‌اش باشد، آن‌گاه می‌گوییم که استلزام* $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$. وقتی یک قضیه است که راستی p_1، p_2، p_3، ... ، p_n به‌راستی q منجر شود. (لذا اگر هر یک از گزاره‌های p_1، p_2، p_3، ... ، p_n ارزش راستی ۱ داشته باشد q هم ارزش ۱ دارد.) اگر یکی از گزاره‌های p_1، p_2، p_3، ... ، p_n دروغ باشد آن‌گاه $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n$ دروغ است، و ارزش راستی q هر چه باشد استلزام $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$ راست است. بنابراین، برای مواردی که در اینجا شرح دادیم، استلزام $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$، یک قضیه (و راستگو) است مادامی که ارزش راستی q، وقتی که هر p_i، $1 \le i \le n$، ارزش راستی ۱ دارد، برابر ۱ باشد.

دربارهٔ قضایایی بدین‌صورت و چگونگی اثبات آنها، در بخش ۳.۲ مطالب بیشتری خواهیم گفت.

تمرینهای ۱.۲

۱. تعیین کنید که کدام یک از جمله‌های زیر گزاره است.

الف) رانلد ریگن در ۱۹۸۴ رئیس‌جمهور ایالات متّحده بود.

ب) $x + 3$ عدد صحیح مثبت است.

ج) اگر $x + 3$ عدد صحیح مثبت باشد، $x + 5$ نیز عدد صحیح مثبت است.

د) ای کاش هر روز هوا مثل امروز آفتابی و صاف می‌شد!

ه) به‌ازای هر عدد حقیقی x، $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

و) وقتی $x = 3$، آن‌گاه $x - 4 < 0$ و $x - 5 < 0$.

ز) هفده عددی است زوج.

ح) اگر رؤیا دیر به میهمانی بیاید، آن‌گاه دختر خاله‌اش شدیداً عصبانی می‌شود.

ط) از تالارهای مونتزوما تا سواحل تریپولی.

ی) به‌ازای هر عدد حقیقی x، $|x| < 2$ اگر و تنها اگر $-2 < x < 2$.

ک) ساعت چند است؟

---

* در این مرحله، تنها با ترکیب عطفی دوگزاره سروکار داشتیم، لذا باید اشاره کنیم که ترکیب عطفی $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n$ از n گزاره تنها وقتی راست است که هر p_i، $1 \le i \le n$ راست باشد. در مثال ۸.۴ بخش ۱.۴، از تعمیم این ترکیب عطفی به‌تفصیل بحث خواهیم کرد.

۲. فرض کنید p، q، r، s معرّف گزاره‌های زیر باشند: p: من نوشتن برنامهٔ کامپیوتریم را قبل از ناهار تمام می‌کنم؛ q: من امروز بعدازظهر تنیس بازی می‌کنم؛ r: هوا آفتابی است؛ s: رطوبت کم است. گزاره‌های زیر را به‌صورت نمادی بنویسید.

الف) اگر هوا آفتابی باشد، من بعدازظهر تنیس بازی خواهم کرد.

ب) تمام‌کردن نوشتن برنامهٔ کامپیوتریم قبل از بعدازظهر، برای بازی تنیس بعدازظهر ضروری است.

ج) هوا آفتابی است و من بعدازظهر تنیس بازی خواهم کرد.

د) رطوبت کم و هوای آفتابی برای اینکه بعدازظهر تنیس بازی کنم کافی هستند.

۳. فرض کنید p، q، r معرّف گزاره‌های زیر باشند: p: مثلث ABC متساوی‌الساقین است؛ q: مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است؛ r: مثلث ABC متساوی‌الزوایا است؛ هر یک از گزاره‌های زیر را به عبارت فارسی برگردانید.

الف) $q \to p$؛ **ب)** $\overline{p} \to \overline{q}$؛ **ج)** $q \leftrightarrow r$؛ **د)** $p \wedge \overline{q}$؛ **ه)** $r \to p$

۴. برای هر یک از گزاره‌های زیر یک جدول ارزش بسازید.

الف) $p \to (p \vee q)$ **ب)** $p \to (q \to r)$

ج) $(p \to q) \to r$ **د)** $(p \to q) \to (q \to p)$

ه) $[p \wedge (p \to q)] \to q$ **و)** $(p \wedge q) \to p$

ز) $q \leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$ **ح)** $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

۵. آیا در گزاره‌های تمرین ۴، راستگوهایی وجود دارند؟

۶. راستگو بودن گزارهٔ $[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)]$ را تحقیق کنید.

۷. **الف)** برای جدول ارزش گزارهٔ

$$(p \vee \overline{q}) \leftrightarrow [(\overline{r} \wedge s) \to t]$$

چند سطر لازم است؟

ب) اگر p_1، p_2، . . . ، p_n گزاره‌های ساده باشند، و گزارهٔ مرکب p شامل حداقل یک مورد از هر p_i، $1 \leq i \leq n$ باشد، برای ساختن جدول ارزش p چند سطر لازم است؟

۸. مطلوب تعیین همهٔ ارزشهای راستی است که به p، q، r، s، t، در صورت وجود، داده می‌شود تا هر یک از گزاره‌های زیر را به گزاره‌های دروغ بدل کنند:

الف) $(p \wedge q \wedge r) \to (s \vee t)$

ب) $(p \wedge q \wedge r) \to (s \veebar t)$

۹. **الف)** اگر گزارهٔ q دارای ارزش راستی ۱ باشد، همهٔ ارزشهای راستی را که به گزاره‌های p، r، و s داده می‌شود تا ارزش راستی گزارهٔ

$$(q \to [(\overline{p} \vee r) \wedge \overline{s}]) \wedge [\overline{s} \to (\overline{r} \wedge q)]$$

برابر ۱ شود تعیین کنید.

ب) اگر ارزش راستی q برابر ۰ باشد به قسمت (الف) پاسخ دهید.

۱۰. در قطعه برنامهٔ پاسکال زیر، i، j، m، و n متغیرهای صحیح‌اند. مقادیر m و n قبلاً به‌وسیلهٔ استفاده‌کننده در اجرای (کل) برنامه تعیین می‌شود

```
For i := 1 to m do
  For j := 1 to n do
    If i <> j then
      Writeln ('The sum of i and j is ', i + j);
```

گزارهٔ $Writeln$ در این قطعه، چند بار اجرا می‌شود وقتی (الف) $m = ۱۰$، $n = ۱۰$؛ (ب) $m = ۲۰$ و $n = ۲۰$؛ (ج) $m = ۱۰, n = ۲۰$؛ (د) $m = ۲۰$، $n = ۱۰$؟

۱۱. در برنامهٔ **بیسیک** زیر، چند بار حکم PRINT سطر ۴۰ اجرا شده است؟

```
10 X = 10
20 FOR I = 1 TO 7
30      FOR J = 1 TO I + 3
40           IF ((X > 8) OR (I > 5 AND J < 10)) THEN PRINT X
50      NEXT J
60      X = X - 1
70 NEXT I
80 END
```

۱۲. قطعه‌ای از یک برنامهٔ پاسکال شامل یک حلقهٔ Repeat-Until با ساختاری به‌صورت زیر است:

```
Repeat
........
........
Until ((x <> 0) and (y > 0)) or (not ((w > 0) and (t = 3)));
```

در هر یک از مقادیر زیر که به متغیرهای x، y، w، t، داده می‌شود تعیین کنید که آیا حلقه خاتمه می‌یابد یا نه؟

الف) $x = ۷$، $y = ۲$، $w = ۵$، $t = ۳$.

ب) $x = ۰$، $y = ۲$، $w = -۳$، $t = ۳$.

ج) $x = ۰$، $y = -۱$، $w = ۱$، $t = ۳$

د) $x = ۱$، $y = -۱$، $w = ۱$، $t = ۳$.

ه) $x = ۰$، $y = ۳$، $w = ۷$، $t = ۴$.

۲.۲ هم ارزی منطقی: قانونهای منطق

در تمام زمینه‌های ریاضیات لازم است بدانیم که چه موقع موجودات مورد مطالعهٔ ما برابر یا اساساً یکی هستند. مثلاً، در حساب و جبر می‌دانیم که دو عدد حقیقی غیر صفر وقتی برابرند که بزرگی

و علامت جبری آنها یکی باشد. بنابراین، برای دو عدد حقیقی غیر صفر x و y داریم $x=y$ اگر $|y| = |x|$ و $xy > \circ$، و برعکس (یعنی، اگر $x=y$، آن‌گاه $|y|=|x|$ و $xy > \circ$). وقتی در هندسه با مثلثها سر و کار داریم، مفهوم قابلیت انطباق یا همنهشتی به‌وجود می‌آید. در اینجا، مثلث ABC و مثلث DEF همنهشت‌اند اگر، مثلاً، اضلاع آنها متناظراً برابر باشند ــ یعنی، طول ضلع $DE=$طول ضلع AB، طول ضلع $EF=$طول ضلع BC، طول ضلع $FD=$طول ضلع CA.

مطالعهٔ منطق را اغلب مطالعهٔ جبر گزاره‌ها (در مقابل جبر اعداد حقیقی) می‌نامند. در این جبر، برای اینکه اطلاع پیدا کنیم که چه وقت دو گزاره اساساً یکی هستند، از جدول ارزش گزاره‌ها استفاده می‌کنیم. این مطلب را با مثالی آغاز می‌کنیم.

مثال ۶.۲ در جدول ۶.۲، جدولهای ارزش برای احکام $\overline{p} \vee q$ و $p \to q$ را به ما داده‌اند. در اینجا می‌بینیم که ارزشهای متناظر، برای $\overline{p} \vee q$ و $p \to q$ دقیقاً یکی هستند. □

این وضعیت ما را به مفهوم هم‌ارزی زیر هدایت می‌کند.

تعریف ۲.۲ دوگزاره $s_۱$ و $s_۲$ را منطقاً هم ارز می‌نامند و می‌نویسند $s_۱ \Leftrightarrow s_۲$، وقتی که ارزشهای راستی $s_۱$ و $s_۲$ دقیقاً یکی باشند.

به‌عنوان نتیجه‌ای از این مفهوم، می‌بینیم که می‌توانیم ادات استلزام را برحسب ناقض و فاصل بیان کنیم. به‌همین طریق، از نتیجهٔ جدول ۷.۲ داریم، $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$. با استفاده از هم‌ارزی منطقی جدول ۶.۲ نیز می‌توانیم بنویسیم $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{q} \vee p)$. در نتیجه، اگر چنین انتخاب کنیم، می‌توانیم ادات $\to$ و $\leftrightarrow$ را از گزاره‌های مرکب حذف کنیم.

از بررسی جدول ۸.۲ در می‌یابیم که ادات نقیض همراه با ادات $\wedge$ و $\vee$ تنها اداتی هستند که می‌توانیم به‌جای ادات یای مانع جمع $\veebar$ قرار دهیم. در واقع، می‌توانیم حتی $\wedge$ یا $\vee$ را حذف کنیم. امّا برای کاربردهای مورد مطالعهٔ ما به هر دوی $\wedge$ و $\vee$ و همچنین به ناقض نیاز داریم.

اینک مفهوم هم‌ارزی منطقی را برای بررسی بعضی از ویژگیهای مهمی که در جبر گزاره‌ها

جدول ۶.۲

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$	$p \to q$
۰	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۱	۱

جدول ۷.۲

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	$p \leftrightarrow q$
۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱

جدول ۸.۲

p	q	$p \veebar q$	$(p \vee q)$	$(\overline{p \wedge q})$	$(p \vee q) \wedge (\overline{p \wedge q})$
۰	۰	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰

صادق‌اند به‌کار می‌بریم.

برای اعداد حقیقی دلخواه a و b می‌دانیم که $-(a+b) = (-a) + (-b)$. آیا نتیجهٔ مشابهی برای گزاره‌های p و q وجود دارد؟

مثال ۷.۲ در جدول ۹.۲ جدولهای ارزش را برای گزاره‌های $\overline{p \wedge q}$، $\overline{p} \vee \overline{q}$، $\overline{p \vee q}$ و $\overline{p} \wedge \overline{q}$ ساخته‌ایم. ستونهای ۴ و ۵ جدول نشان می‌دهند که $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$؛ ستونهای ۷ و ۸ نشان می‌دهند که $\overline{p} \wedge \overline{q} \Leftrightarrow \overline{p \vee q}$. این نتایج به قوانین دمورگن موسوم‌اند، و شبیه قانون آشنا برای اعداد حقیقی

$$-(a+b) = (-a) + (-b)$$

جدول ۹.۲

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$
۰	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰

هستند که نشان می‌دهند نقیض مجموع برابر مجموع نقیضهاست. امّا در اینجا تفاوتی بسیار مهم ظاهر می‌شود: نقیض ترکیب عطفی دو گزارهٔ p و q، به ترکیب فصلی نقیض آنها، $\overline{p}$، $\overline{q}$ منجر می‌شود، در حالی که نقیض ترکیب فصلی p و q منطقاً هم‌ارز ترکیب عطفی نقیضهای $\overline{p}$ و $\overline{q}$ است.□

در حساب اعداد حقیقی، عملهای جمع و ضرب هر دو در اصل‌موسوم به قانون توزیعپذیری ضرب نسبت به جمع صدق می‌کنند: برای اعداد حقیقیa،b،c

$$a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$$

مثال بعد نشان می‌دهد که قانونی مشابه برای گزاره‌ها وجود دارد. همین‌طور قانون دیگری مربوط به گزاره‌ها وجود دارد که در حساب اعداد حقیقی همتایی ندارد.

مثال ۸.۲ جدول ۱۰.۲ شامل جدولهای ارزش برای احکام $p \wedge (q \vee r)$، $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$، $p \vee (q \wedge r)$، و $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ است. از این جدول نتیجه می‌شود که برای گزاره‌های دلخواه p، q و r

قانون توزیعپذیری $\wedge$ نسبت به $\vee$، $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

قانون توزیعپذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$، $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

برقرارند. □

دومین قانون توزیعپذیری، همتایی در حساب اعداد حقیقی ندارد. یعنی، برای همهٔ اعداد

جدول ۱۰.۲

p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

حقیقی a، b، و c، برابری $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$ صادق نیست. مثلاً به‌ازای $a = 2$، $b = 3$، و $c = 5$، $a + (b \times c) = 17$، امّا $(a + b) \times (a + c) = 35$.

قبل از اینکه جلوتر برویم، اشاره می‌کنیم که به‌طور کلی، اگر s_1، s_2 دو گزاره باشند و $s_1 \leftrightarrow s_2$ یک راستگو باشد، آن‌گاه s_1 و s_2 باید جدولهای ارزش یکسانی داشته باشند و $s_1 \Leftrightarrow s_2$. وقتی s_1، s_2 گزاره‌های منطقاً هم‌ارز باشند، (یعنی $s_1 \Leftrightarrow s_2$)، آن‌گاه گزارهٔ مرکب $s_1 \leftrightarrow s_2$ یک راستگوست. در این موارد نیز گزاره‌های $\overline{s}_1 \Leftrightarrow \overline{s}_2$ و $\overline{s}_1 \leftrightarrow \overline{s}_2$ راستگو هستند.

اگر s_1، s_2، و s_3 گزاره‌هایی باشند که $s_1 \Leftrightarrow s_2$ و $s_2 \Leftrightarrow s_3$، آن‌گاه $s_1 \Leftrightarrow s_3$. وقتی دو گزارهٔ s_1 و s_2 منطقاً هم‌ارز نیستند، می‌توانیم برای بیان این وضعیت بنویسیم $s_1 \not\Leftrightarrow s_2$.

با استفاده از مفاهیم هم‌ارزی منطقی، راستگو، و تناقض، قوانین زیر را برای جبر گزاره‌ها داریم.

قانونهای منطقی

برای گزاره‌های p، q، r

۱.	$\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$	قانون نقیض مضاعف
۲.	$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$	قانونهای دمورگن
	$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$	
۳.	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	قانونهای تعویضپذیری
	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	
۴.	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	قانونهای شرکتپذیری*
	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	
۵.	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	قانونهای توزیعپذیری
	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	
۶.	$p \vee p \Leftrightarrow p$	قانونهای خودتوانی
	$p \wedge p \Leftrightarrow p$	
۷.	$p \vee F_0 \Leftrightarrow p$	قانونهای همانی
	$p \wedge T_0 \Leftrightarrow p$	
۸.	$p \vee \overline{p} \Leftrightarrow T_0$	قانونهای عکس
	$p \wedge \overline{p} \Leftrightarrow F_0$	
۹.	$p \vee T_0 \Leftrightarrow T_0$	قانونهای غلبه
	$p \wedge F_0 \Leftrightarrow F_0$	
۱۰.	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	قانونهای جذب
	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	

برای اثبات این نتایج، می‌توانستیم جدولهای ارزش را بنویسیم و نظیر آنچه در مثالهای ۷.۲ و

* تذکر می‌دهیم که به‌دلیل قانونهای توزیعپذیری، در گزاره‌هایی که به‌صورت $p \vee q \vee r$ یا $p \wedge q \wedge r$ هستند ابهامی وجود ندارد.

۸.۲ انجام دادیم، ارزشهای راستی متناظر را در هر مورد مقایسه کنیم. در هر حال، غیر از قانون نقیض مضاعف، همهٔ این قانونها به‌صورت زوج آمده‌اند. این نکته ما را به‌مفهوم زیر راهنمایی می‌کند.

تعریف ۳.۲ اگر s گزاره‌ای (تنها شامل $\sim$، $\wedge$، $\vee$) باشد، دوگان s که با s^d نشان داده می‌شود گزاره‌ای است که با قرار دادن $\vee$($\wedge$) به‌جای هر مورد $\wedge$($\vee$) و قرار دادن F_0(T_0) به‌جای هر مورد T_0(F_0) به‌دست می‌آید.

گزاره‌های $p \vee \overline{p}$ و $p \wedge \overline{p}$ دوگان یکدیگرند، همان‌طور که گزاره‌های $p \vee T_0$ و $p \wedge F_0$ دوگان هم‌اند.

اینک قضیه‌ای را بدون اثبات بیان می‌کنیم و آن را به‌کار می‌بریم. امّا در فصل ۱۵ قضیه‌ای را که در اینجا می‌آید اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱.۲ (اصل دوگانی) فرض کنید s و t گزاره‌هایی باشند که در تعریف ۳.۲ توصیف شدند. اگر $s \Leftrightarrow t$، آن‌گاه $s^d \Leftrightarrow t^d$.

به‌عنوان نتیجه، قانونهای ۲ تا ۱۰ فهرست بالا را می‌توان با اثبات یکی از قانونهای هر زوج و سپس با استناد به‌اصل بالا، ثابت کرد.

می‌توانیم با استفاده از قاعده‌های جایگذاری زیر بسیاری از هم‌ارزیهای منطقی دیگر را نتیجه بگیریم.

۱. فرض کنید P معرف گزارهٔ مرکبی راستگوست. اگر p گزاره‌ای باشد که در P آمده است و به‌جای هر مورد p، گزارهٔ هم‌ارز آن q را قرار دهیم، آن‌گاه P_1، گزارهٔ مرکب حاصل، باز هم یک راستگوست.

۲. فرض کنید P گزارهٔ مرکبی است که گزارهٔ p در آن ظاهر شده‌است، و فرض کنید q گزاره‌ای است به قسمی که $p \Leftrightarrow q$. گیریم که در P به‌جای p، q قرار دهیم. در این‌صورت این جایگذاری گزارهٔ مرکب P_1 را به‌دست می‌دهد. در این شرایط $P \Leftrightarrow P_1$.

این قاعده‌ها در مثالهای زیر نشان داده شده‌اند.

مثال ۹.۲ الف) با توجه به اولین قانون دمورگن می‌دانیم که برای گزاره‌های دلخواه p و q، گزارهٔ مرکب

$$P : \overline{p \vee q} \leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

یک راستگوست. وقتی به‌جای هر مورد p، هم‌ارز آن $r \wedge s$ را قرار دهیم از اولین قانون جایگذاری نتیجه می‌شود که

$$P_1 : \overline{(r \wedge s) \vee q} \leftrightarrow [(\overline{r \wedge s}) \wedge \overline{q}]$$

نیز یک راستگوست. در بسط این نتیجه با یک گام دیگر، می‌توانیم به‌جای هر مورد q، هم‌ارز آن $t \to u$ را قرار دهیم. اینک همان قانون جایگذاری، راستگوی

$$P_2 : \overline{(r \wedge s) \vee (t \to u)} \leftrightarrow [(\overline{r \wedge s}) \wedge (\overline{t \to u})]$$

و هم‌ارزی منطقی

$$P'_2 : \overline{(r \wedge s) \vee (t \to u)} \Leftrightarrow (\overline{r \wedge s}) \wedge (\overline{t \to u})$$

را به‌دست می‌دهد.

ب) قانون دوم غلبه می‌گوید که برای هر گزارهٔ p، گزارهٔ مرکب

$$P : (p \wedge F_0) \leftrightarrow F_0$$

یک راستگو است. اگر به‌جای p، گزارهٔ هم‌ارز آن $[q \vee r) \to s]$ را قرار دهیم، آن‌گاه از همان اولین قانون جایگذاری، راستگوی

$$P_1 : ([(q \vee r) \to s] \wedge F_0) \leftrightarrow F_0$$

و هم‌ارزی منطقی

$$P'_1 : [(q \vee r) \to s] \wedge F_0 \Leftrightarrow F_0$$

نتیجه می‌شود. □

مثال ۱۰.۲ الف) به‌عنوان یکی از کاربردهای قانون دوم جایگذاری، فرض کنید P، معرف گزارهٔ مرکب $(p \to q) \to r$ باشد. چون $(p \to q) \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$ (همان‌طورکه در مثال ۶.۲ و جدول ۶.۲ نشان داده شده‌است)، اگر P_1 معرف گزارهٔ مرکب $(\overline{p} \vee q) \to r$ باشد، آن‌گاه $P \Leftrightarrow P_1$.

ب) اینک فرض کنید P معرف گزارهٔ مرکب $p \to (p \vee q)$ باشد. به‌دلیل اینکه $p \Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$، گزارهٔ مرکب $P_1 : p \to (\overline{\overline{p}} \vee q)$ با قراردادن مورد دوم (و نه اولین مورد) p به‌جای $\overline{\overline{p}}$ از P نتیجه می‌شود. دومین قانون جایگذاری باز نتیجه می‌دهد که $P \Leftrightarrow P_1$. (توجه کنید که $P_2 : \overline{\overline{p}} \to (\overline{\overline{p}} \vee q)$، با قراردادن $\overline{\overline{p}}$ به‌جای هر دو مورد p نیز منطقاً هم‌ارز با P است.) □

مثال بعدی نشان می‌دهد که چگونه می‌توانیم مفهوم هم‌ارزی منطقی را همراه با قانونهای منطق و قاعده‌های جایگذاری به‌کار بریم.

مثال ۱۱.۲ نقیض گزارهٔ مرکب $(p \vee q) \to r$ را پیدا و آن را ساده کنید.

بیان خود را به‌صورت زیر تنظیم می‌کنیم:

۱. $(p \vee q) \to r \Leftrightarrow \overline{(p \vee q)} \vee r$ (بنابر اولین قاعدهٔ جایگذاری، زیرا $(s \to t) \leftrightarrow (\overline{s} \vee t)$ برای گزاره‌های دلخواه s و t یک راستگوست).

۲. با پیدا کردن نقیض نتایج گام ۱، داریم $\overline{(p \vee q) \to r} \Leftrightarrow \overline{\overline{(p \vee q)} \vee r}$.

۳. بنابر اولین قانون دمورگن و اولین قاعدهٔ جایگذاری، $\overline{\overline{(p \vee q)} \vee r} \Leftrightarrow \overline{\overline{(p \vee q)}} \wedge \overline{r}$.

۴. حال، قانون نقیض مضاعف و اولین قاعدهٔ جایگذاری به ما می‌دهد

$$\overline{\overline{(p \vee q)}} \wedge \overline{r} \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \overline{r}$$

بنابر گامهای ۱ تا ۴ داریم $\overline{(p \vee q) \to r} \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \overline{r}$. □

مثال ۱۲.۲ در تعریف ۳.۲، دوگان s^dی گزارهٔ s تنها برای گزاره‌های متضمن نقیض و ادات پایه‌ای $\wedge$ و $\vee$ تعریف شد. دوگان گزاره‌ای نظیر $s : p \to q$ چگونه تعیین می‌شود؟

چون $(p \to q) \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$، s^d منطقاً هم‌ارز با گزارهٔ $(\overline{p} \vee q)^d$ و در نتیجه برابر $\overline{p} \wedge q$ است. □

استلزام $p \to q$ و برخی گزاره‌های وابسته به‌آن، در مثال زیر بررسی شده‌اند.

مثال ۱۳.۲ جدول ۱۱.۲، جدولهای ارزش گزاره‌های $p \to q$، $\overline{q} \to \overline{p}$، $q \to p$، و $\overline{p} \to \overline{q}$ را به ما می‌دهد. ستونهای سوّم و چهارم جدول نشان می‌دهند که

$$(p \to q) \Leftrightarrow (\overline{q} \to \overline{p})$$

گزارهٔ $\overline{q} \to \overline{p}$ را عکس نقیض استلزام $p \to q$ می‌نامند. ستونهای ۵ و ۶ جدول نشان می‌دهند که

$$(q \to p) \Leftrightarrow (\overline{p} \to \overline{q})$$

جدول ۱۱.۲

p	q	$p \to q$	$\overline{q} \to \overline{p}$	$q \to p$	$\overline{p} \to \overline{q}$
۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱

گزارهٔ $q \to p$ را عکس $p \to q$ می‌نامند؛ $\overline{p} \to \overline{q}$ را عکس مستوی* $p \to q$ می‌گویند.
در حالتی که p و q معرف گزاره‌های

p: چهار ضلعی $ABCD$ مربع است

q: چهار ضلعی $ABCD$ متساوی‌الاضلاع است

باشند، به‌دست می‌آوریم

- (استلزام: $p \to q$) اگر چهار ضلعی $ABCD$ مربع باشد، آن‌گاه چهار ضلعی $ABCD$ متساوی‌الاضلاع است. (**راست**)
- (عکس نقیض: $\overline{q} \to \overline{p}$) اگر چهار ضلعی $ABCD$ متساوی‌الاضلاع نباشد، آن‌گاه مربع نیست. (همچنین **راست** است)
- (عکس: $q \to p$) اگر چهار ضلعی $ABCD$ متساوی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه چهارضلعی $ABCD$ مربع است. (**دروغ**: یک لوزی که چهار زاویه‌اش برابر نیست متساوی‌الاضلاع است.)
- (عکس مستوی: $\overline{p} \to \overline{q}$) اگر چهار ضلعی $ABCD$ مربع نباشد، آن‌گاه متساوی‌الاضلاع نیست. (همچنین **دروغ** است)

همان‌طور که این مثال خاصّ نشان می‌دهد، باید از «استدلال به وسیلهٔ عکس» اجتناب کنیم. واقعیت این است که یک استلزام (یا قضیهٔ) راست $p \to q$ ایجاب نمی‌کند که عکس آن $q \to p$ هم راست باشد. امّا راستی عکس نقیض $\overline{q} \to \overline{p}$ را ایجاب می‌کند. □

مثال بعد نشان می‌دهد که حکمهای منطقاً هم‌ارز ممکن است به شرایط متفاوتی در کاربرد کامپیوتر منجر شوند.

مثال ۱۴.۲ جدول ۱۲.۲ نشان می‌دهد که گزاره‌های مرکب $(p \wedge q) \to r$ و $p \to (q \to r)$ منطقاً هم‌ارزند.

در قطعات برنامهٔ پاسکال که در شکل ۱.۲ نشان داده‌ایم، x، y، z، و i متغیرهای صحیح‌اند. در قسمت (الف) شکل، از ساختارتصمیم قابل‌مقایسه با گزاره‌ای به‌صورت $(p \wedge q) \to r$ استفاده شده است. در اینجا، شبیه قسمت (ب)، داریم $p : x > 0$، $q : y > 0$، که وقتی به متغیرهای x و y مقادیر $i - 4$ (برای x) و $i * 3 + 4$ (برای y) بدهیم، به‌گزاره بدل می‌شوند. امّا باید مواظب بود! حرف r معرف حکم $Writeln$، یک «حکم قابل اجرا»ست که در واقع به مفهوم واقعی یک جملهٔ خبری که بتوان به آن راست یا دروغ گفت، گزاره نیست.

* عکس مستوی را به‌طورکلی عکس عکس نقیض نیز می‌گویند.

جدول ۲.۱۲

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$
۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

```
z := 4;
For i := 1 to 10 do
  Begin
    x := z - i;
    y := z + 3*i;
    If (x > 0) and (y > 0) then
      Writeln ('The value of the sum x + y is ', x + y)
  End;
```

(الف)

```
z := 4;
For i := 1 to 10 do
  Begin
    x := z - i;
    y := z + 3*i;
    If x > 0 then
      If y > 0 then
        Writeln ('The value of the sum x + y is ', x + y)
  End;
```

(ب)

شکل۲.۱

در قطعه‌ای که در قسمت (الف) نشان داده‌ایم، تعداد کل مقایسه‌ها، $(x > ۰)$ و $(y > ۰)$، که در طول اجرای برنامه انجام شده‌اند برابر است با ۲۰ $=$ (برای $y > ۰$)۱۰ + (برای $x > ۰$)۱۰. از سوی دیگر، در قطعه‌ای که در قسمت (ب) نشان داده شده‌است از صورت حکم قابل مقایسه با استلزامهای تو در توی $p \to (q \to r)$ استفاده شده‌است. در این حالت، مقایسهٔ $(y > ۰)$ اجرا نمی‌شود مگر وقتی که مقایسهٔ $(x > ۰)$ اجرا و ارزش راستی یافته شده باشد. بنابراین، تعداد

کل مقایسه‌ها ۱۳ = (برای $y > ۰$، وقتی به i مقادیر ۱، ۲، ۳ داده شود)۳ + (برای $x > ۰$)۱۰.
لذا، برحسب تعداد کل مقایسه‌هایی که در هر یک از این دو حالت انجام شده‌است، قطعه برنامه‌ای که در قسمت (ب) نشان داده شده‌است کاراتر از قطعه برنامه‌ای است که در قسمت (الف) نشان داده شده‌است. □

این بخش را با کاربردی دربارهٔ ساده‌کردن شبکه‌های راه‌گزینی به‌پایان می‌بریم. در اینجا قانونهای منطق مفید بودن خود را کاملاً ثابت می‌کنند.

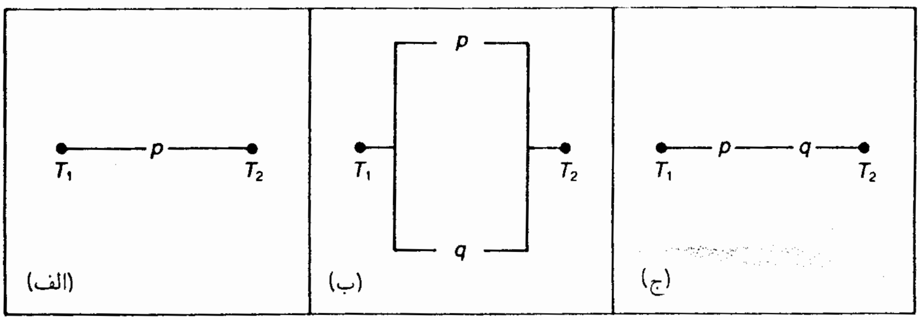
یک شبکهٔ راه‌گزینی از سیمها و کلیدهایی ساخته شده‌است که دو پایانهٔ $T_۱$ و $T_۲$ را به هم وصل می‌کنند. در چنین شبکه‌ای هر کلید یا باز است (۰)، لذا جریانی از آن عبور نمی‌کند، یا بسته است (۱) لذا جریان از آن می‌گذرد.

در شکل ۲.۲ در قسمت (الف) شبکه‌ای با یک کلید داریم. هر یک از قسمتهای (ب) و (ج) شامل دو کلید (مستقل) است.

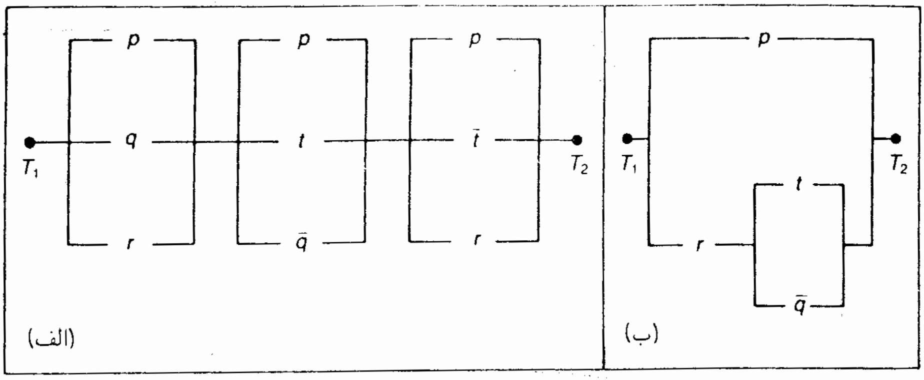
در شبکهٔ قسمت (ب)، هر کدام از کلیدهای p و q بسته باشد، جریان از $T_۱$ به $T_۲$ عبور می‌کند. این شبکه را شبکهٔ موازی می‌نامیم و آن‌را با $p \vee q$ نمایش می‌دهیم. در شبکهٔ (ج) لازم است که هر دو کلید p و q بسته باشند تا جریان از $T_۱$ به $T_۲$ برقرار شود. در اینجا کلیدها به‌صورت سری هستند و شبکه را با $p \wedge q$ نمایش می‌دهند.

مثال ۱۵.۲ در یک شبکه، لازم نیست که کلیدها مستقل از هم عمل کنند. شبکهٔ شکل ۳.۲ (الف) را در نظر بگیرید. در اینجا کلیدهایی که با t و $\overline{t}$ مشخص شده‌اند مستقل از هم نیستند. ما این دو کلید را به‌قسمی با هم جفت کرده‌ایم که t باز (بسته) است اگر و تنها اگر همزمان $\overline{t}$ بسته (باز) باشد. همین مطلب دربارهٔ کلیدهای q و $\overline{q}$ صادق است. (همینطور، مثلاً سه کلیدی که با p مشخص شده‌اند مستقل نیستند.)

این شبکه با $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee t \vee \overline{q}) \wedge (p \vee \overline{t} \vee r)$ نمایش داده می‌شود. با استفاده از قانونهای منطق، این گزاره را که معرّف شبکه است به‌صورت زیر ساده می‌کنیم (در اینجا، برای



شکل ۲.۲



شکل۳.۲

سهولت، کاربردهای قاعده‌های جایگذاری را ذکر نمی‌کنیم، امّا قانونهای عمدهٔ منطق را که به‌کار رفته‌اند فهرست خواهیم کرد.)

$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee t \vee \bar{q}) \wedge (p \vee \bar{t} \vee r)$	دلیل
$\Leftrightarrow p \vee [(q \vee r) \wedge (t \vee \bar{q}) \wedge (\bar{t} \vee r)]$	قانون توزیع‌پذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$
$\Leftrightarrow p \vee [([(q \vee r) \wedge t] \vee [(q \vee r) \wedge \bar{q}]) \wedge (\bar{t} \vee r)]$	قانون توزیع‌پذیری $\wedge$ نسبت به $\vee$
$\Leftrightarrow p \vee [([(q \vee r) \wedge t] \vee [(q \wedge \bar{q}) \vee (r \wedge \bar{q})]) \wedge (\bar{t} \vee r)]$	قانون توزیع‌پذیری $\wedge$ نسبت به $\vee$
$\Leftrightarrow p \vee [([(q \vee r) \wedge t] \vee (r \wedge \bar{q})) \wedge (\bar{t} \vee r)]$	$q \wedge \bar{q} \Leftrightarrow F_0$، همانی برای $\vee$
$\Leftrightarrow p \vee [([(q \vee r) \wedge t] \wedge (\bar{t} \vee r)) \vee ((r \wedge \bar{q}) \wedge (\bar{t} \vee r))]$	چرا؟
$\Leftrightarrow p \vee [[(q \vee r) \wedge (t \wedge (\bar{t} \vee r))] \vee [(r \wedge \bar{q} \wedge \bar{t}) \vee (r \wedge \bar{q} \wedge r)]]$	چرا؟
$\Leftrightarrow p \vee [[(q \vee r) \wedge (t \wedge r)] \vee [(r \wedge \bar{q} \wedge \bar{t}) \vee (r \wedge \bar{q})]]$	چرا؟
$\Leftrightarrow p \vee [[(q \vee r) \wedge (t \wedge r)] \vee (r \wedge \bar{q})]$	قانون جذب
$\Leftrightarrow p \vee [(q \wedge t \wedge r) \vee (r \wedge t \wedge r) \vee (r \wedge \bar{q})]$	قانون توزیع‌پذیری $\wedge$ نسبت به $\vee$
$\Leftrightarrow p \vee [((q \wedge t \wedge r) \vee (r \wedge t)) \vee (r \wedge \bar{q})]$	قانون خود توان
$\Leftrightarrow p \vee [(r \wedge t) \vee (r \wedge \bar{q})]$	قانون جذب
$\Leftrightarrow p \vee [r \wedge (t \vee \bar{q})]$	قانون توزیع‌پذیری $\wedge$ نسبت به $\vee$

بنابراین، $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee t \vee \bar{q}) \wedge (p \vee \bar{t} \vee r) \Leftrightarrow p \vee [r \wedge (t \vee \bar{q})]$ ، و شبکهٔ

شکل ۳.۲ (ب) هم‌ارز با شبکهٔ اصلی است بدین معنا که در شبکهٔ (الف) جریان از T_1 به T_2 برقرار می‌شود دقیقاً وقتی که جریان در شبکهٔ (ب) برقرار است. امّا در (ب) شبکه تنها دارای ۴ کلید است که پنج تا کمتر از شبکهٔ (الف) است. □

تمرینهای ۲.۲

۱. **الف)** برای تحقیق درستی هم‌ارزیهای منطقی زیر از جدولهای ارزش استفاده کنید.

$$p \to (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r) \qquad \text{(i)}$$
$$[(p \vee q) \to r] \Leftrightarrow [(p \to r) \wedge (q \to r)] \qquad \text{(ii)}$$
$$[p \to (q \vee r)] \Leftrightarrow [\overline{r} \to (p \to q)] \qquad \text{(iii)}$$

ب) برای نشان دادن هم‌ارزی منطقی $[p \to (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge \overline{q}) \to r]$ قاعده‌های جایگذاری را به‌کار برید.

۲. درستی اولین قانون جذب را به‌وسیلهٔ جدول ارزش تحقیق کنید.

۳. برای تحقیق درستی هر یک از راستگوهای زیر، قاعده‌های جایگذاری را به‌کار برید

الف) $[p \vee (q \wedge r)] \vee \overline{[p \vee (q \wedge r)]}$

ب) $[(p \vee q) \to r] \leftrightarrow [\overline{r} \to \overline{(p \vee q)}]$

ج) $[[(p \vee q) \to r] \vee (s \wedge t)] \leftrightarrow [[(p \vee q) \to r] \vee s] \wedge [[(p \vee q) \to r] \vee t]$

۴. حکم $[[[(p \wedge q) \wedge r] \vee [(p \wedge q) \wedge \overline{r}]] \vee \overline{q}] \to s$ را ساده کنید.

۵. نقیض هر یک از حکمهای زیر را تعیین کنید.

الف) خانم K در درسهایش پیشرفت خواهد کرد اگر درس خواندن را بر تفریح مقدم بدارد.

ب) خانم N تکلیف شب درس ریاضی را انجام می‌دهد و K دروس پیانو را تمرین می‌کند.

ج) اگر L به مرخصی برود، آن‌گاه اگر نگران سفرش با هواپیما نباشد به او خوش خواهد گذشت.

د) اگر H درس پاسکال را بگذراند و طرح ساختارهای داده‌ها را تمام کند، آن‌گاه در انتهای نیمسال فارغ‌التحصیل خواهد شد.

۶. نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین و گزاره‌های حاصل را ساده کنید.

الف) $p \wedge (q \vee r) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q} \vee r)$ **ب)** $(p \wedge q) \to r$

ج) $p \to (\overline{q} \wedge r)$ **د)** $p \vee q \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r)$

ه) $p \leftrightarrow q$ **و)** $p \wedge (p \to q) \wedge (q \to r)$

۷. **الف)** ثابت کنید که $(\overline{p} \vee q) \wedge (p \wedge (p \wedge q)) \Leftrightarrow (p \wedge q)$

ب) دوگان نتیجهٔ قسمت (الف) را بنویسید.

۸. دوگان گزاره‌های (الف) $q \to p$، (ب) $p \to (q \wedge r)$، (ج) $p \leftrightarrow q$ و (د) $p \veebar q$ را بنویسید.

۹. عکس، عکس مستوی، و عکس نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) اگر چهار ضلعی $ABCD$ مربع باشد، آن‌گاه چهار ضلعی $ABCD$ مستطیل است.

ب) اگر n عدد صحیح زوج باشد، آن‌گاه n^2 نیز عدد صحیح زوج است.

ج) اگر دوخط متمایز در صفحهٔ xy موازی باشند، آن‌گاه شیب آنها یکی است.

۱۰. تعیین کنید که هر یک از گزاره‌های زیر راست است یا دروغ. در اینجا p، q، و r گزاره هستند.

الف) یک صورت از عکس «p شرط کافی برای q است» خواهد شد «p شرط لازم برای q است.»

ب) یک صورت از عکس مستوی «p شرط لازم برای q است» خواهد شد. «$\overline{q}$ شرط کافی برای $\overline{p}$ است.»

ج) یک صورت از عکس نقیض «p شرط لازم برای q است» خواهد شد. «$\overline{q}$ شرط لازم برای $\overline{p}$ است.»

د) یک صورت از عکس نقیض «p تنها اگر q» عبارت است از «$\overline{q}$ شرط لازم برای $\overline{p}$ است.»

ه) یک صورت از عکس $p \to (q \to r)$ عبارت است از $(\overline{q} \vee r) \to p$.

۱۱. مطلوب است صورتی از عکس نقیض $p \to (q \to r)$ با (الف) تنها یک مورد از ادات $\to$؛ (ب) بدون موردی از ادات $\to$.

۱۲. عکس، عکس مستوی، عکس نقیض، و نقیض گزارهٔ «اگر S کارش را تمام کند، به بازی بسکتبال می‌رود مگر آنکه برف ببارد» را بنویسید.

۱۳. دو قطعه برنامهٔ پاسکال را که در شکل ۲.۱ (مثال ۱۴.۲) نشان داده‌ایم در نظر بگیرید. مطلوب تعداد کل مقایسه‌هایی است که در هر قطعه اجرا شده‌است اگر، به‌جای دادن مقدار ۴ به z مقدار (الف) ۲؛ (ب) ۶؛ (ج) ۹؛ (د) ۱۰؛ (ه) ۱۵؛ (و) n، یک عدد صحیح بزرگتر از ۱۰ داده شود.

۱۴. نشان دهید که $\overline{(p \leftrightarrow q)} \Leftrightarrow [(p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)] \Leftrightarrow p \veebar q$.

۱۵. صحّت هم‌ارزی زیر را تحقیق کنید.

$$[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (r \leftrightarrow p)] \Leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (r \to p)]$$

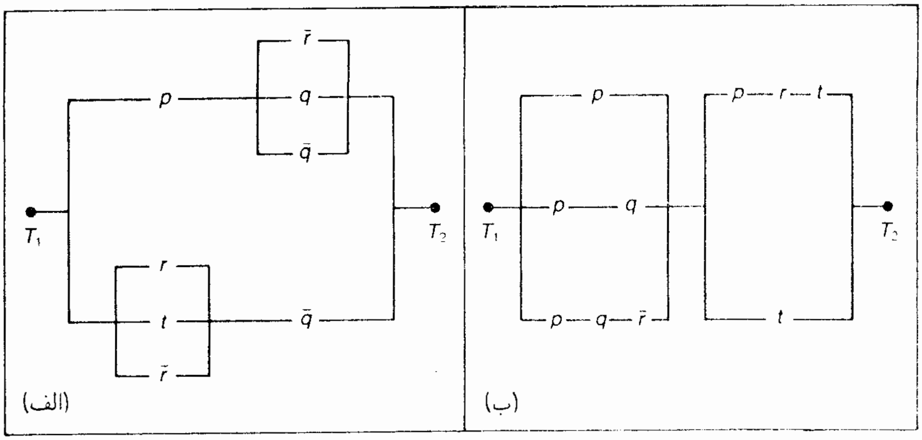
۱۶. **الف)** تحقیق کنید که $p \to [q \to (p \wedge q)]$ یک راستگوست.

ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) همراه با قاعده‌های جایگذاری و قانونهای منطق تحقیق کنید که $(p \vee q) \to [q \to q]$ یک راستگوست.

ج) آیا $(p \vee q) \to [q \to (p \wedge q)]$ یک راستگوست؟

۱۷. ادات منطقی «نه و» یا «نه ... و» را برای گزاره‌های p، q به‌وسیلهٔ $(p \uparrow q) \Leftrightarrow \overline{(p \wedge q)}$ تعریف کنید. تنها با استفاده از این ادات منطقی گزاره‌های زیر را نمایش دهید:

الف) $\overline{p}$ **ب)** $p \vee q$ **ج)** $p \wedge q$ **د)** $p \to q$ **ه)** $p \leftrightarrow q$



شکل ۴.۲

۱۸. ادات منطقی «نه یا» یا «نه ... یا» را برای گزاره‌های p، q به‌وسیلهٔ $(p \downarrow q) \Leftrightarrow \overline{(p \vee q)}$ تعریف کنید. گزاره‌های قسمتهای (الف)ـ(ه) تمرین ۱۷ را تنها با استفاده از این ادات منطقی نمایش دهید.

۱۹. اگر p، q دو گزاره باشند، ثابت کنید که

الف) $\overline{(p \downarrow q)} \Leftrightarrow (\bar p \uparrow \bar q)$ ب) $\overline{(p \uparrow q)} \Leftrightarrow (\bar p \downarrow \bar q)$

۲۰. هر یک از شبکه‌های شکل ۴.۲ را ساده کنید.

۳.۲ استلزام منطقی: قاعده‌های استنتاج

در بخش ۱.۲، مفهوم قضیه را ذکر کردیم: گزاره‌ای (عموماً ریاضیاتی) که می‌توانیم ثابت کنیم که راست است. اینک وقت آن است که مطالعهٔ رسمی مفهوم برهان را که راه استدلال درستی قضیه است، آغاز کنیم.

فهرستی از قاعده‌ها وجود ندارد که بتوانیم با استفاده از آنها حکم کنیم که آیا گزاره‌ای مفروض قضیه هست یا نیست. ساختن برهان، مهارتی است که شخص، با بررسی دقیق ساختهای برهانهای صحیح و یافتن و نوشتن برهانهای گزاره‌هایی که قضیه بودن برخی از آنها از قبل معلوم‌اند، می‌آموزد. مثل همهٔ انواع مسائل ریاضی، نمی‌توانیم تماشاگر محض باشیم. برای کسب توانایی انجام برهانها باید مطالعه و تمرین کنیم.

ابتدا صورت کلی گزاره‌ای را که می‌خواهیم نشان دهیم قضیه است، در نظر می‌گیریم:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$$

در اینجا، گزاره‌های p_1، p_2، p_3، $\cdots$، p_n معرف فرضهای استلزام‌اند. اینها غالباً از (۱) تعریفهای مربوط به موضوع تحت مطالعه، (۲) اصلهای موضوع، یعنی گزاره‌هایی در زمینهٔ موضوع که بدون برهان پذیرفته شده‌اند، و (۳) قضایایی که قبلاً ثابت شده‌اند، استخراج می‌شوند. در تلاش برای تحقیق آنکه گزارهٔ بالا قضیه است، باید نشان دهیم که وقتی تمام فرضهای p_1، p_2، $\cdots$، p_n راست باشند، آن‌گاه q نیز راست است. (توجه کنید که اگر یکی از گزاره‌های p_1، p_2، p_3، $\cdots$، p_n دروغ باشد، آن‌گاه استلزام $q \leftarrow (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n)$ خودبه‌خود راست است.) بنابراین یک راه اثبات حکم مفروض به‌عنوان قضیه نشان دادن راستگو بودن $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$ است.

مثال زیر این تکنیک را نشان می‌دهد.

مثال ۱۶.۲ فرض کنید p_1، p_2، p_3، و q گزاره‌های زیر باشند:

p_1: اگر R درس بخواند، آن‌گاه درس ریاضیات گسسته را خواهد گذراند.

p_2: اگر R تنیس بازی نکند، آن‌گاه درس خواهد خواند.

p_3: R در درس ریاضیات گسسته رد شده‌است.

q: بنابراین R تنیس بازی کرده است.

می‌خواهیم بدانیم که آیا راستی فرضهای p_1، p_2، و p_3 به‌راستی‌نتیجهٔ q منجر می‌شود یا نه. برای تعیین این، فرض کنید p، r، و s به‌صورت زیر داده شوند

p: R درس می‌خواند.

r: R درس ریاضیات گسسته را گذرانده است.

s: R تنیس بازی می‌کند.

در این‌صورت p_1، p_2، p_3، و q را مجدداً به‌صورتهای

$$p_1 : p \to r \qquad p_2 : \overline{s} \to p \qquad p_3 : \overline{r} \qquad q : s$$

می‌نویسیم. اینک می‌توانیم تعیین کنیم که آیا $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \to q$ با در نظرگرفتن جدول ارزش (جدول ۱۳.۲) برای

$$[(p \to r) \wedge (\overline{s} \to p) \wedge \overline{r}] \to s$$

قضیه هست یا نیست.

چون همهٔ درایه‌های ستون آخر جدول ۱۳.۲، ۱ هستند، این نتیجه یک راستگوست. بنابراین می‌توانیم بگوییم که $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \to q$ قضیه است. □

جدول ۱۳.۲

			$p_{۱}$	$p_{۲}$	$p_{۳}$	$(p_{۱} \wedge p_{۲} \wedge p_{۳}) \rightarrow q$
p	r	s	$p \rightarrow r$	$\overline{s} \rightarrow p$	$\overline{r}$	$[(p \rightarrow r) \wedge (\overline{s} \rightarrow p) \wedge \overline{r}] \rightarrow s$
۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۰	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۰	۱

این مفهوم به تعریف زیر منجر می‌شود.

تعریف ۴.۲ اگر p و q آن‌چنان گزاره‌هایی باشند که $p \rightarrow q$ یک راستگو باشد، آن‌گاه می‌گوییم که p منطقاً q را ایجاب می‌کند، و برای نشان دادن آن می‌نویسیم $p \Rightarrow q$.

در حالتی که p و q گزاره‌هایی هستند و $p \Rightarrow q$، استلزام $p \rightarrow q$ راستگوست و به استلزام منطقی موسوم است.

در مثال ۵.۲ متوجه می‌شویم که برای گزاره‌های دلخواه p و q، گزارهٔ $p \rightarrow (p \vee q)$ همیشه راست است (یک راستگو) است. بنابراین، می‌توانیم بگوییم که p منطقاً $p \vee q$ را ایجاب می‌کند و می‌نویسیم $p \Rightarrow (p \vee q)$.

فرض کنید p و q گزاره‌های دلخواهی باشند.

۱. اگر $p \Leftrightarrow q$، آن‌گاه گزارهٔ $p \leftrightarrow q$ راستگوست، لذا گزاره‌های p و q همیشه ارزش راستی همانند دارند. در این شرایط، گزاره‌های $p \rightarrow q$، $q \rightarrow p$ همیشه راست خواهند بود، لذا داریم $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$.

۲. برعکس، فرض کنید که $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$. استلزام منطقی $p \Rightarrow q$ به ما می‌گوید که هرگز گزارهٔ p را با ارزش راستی ۱ و گزارهٔ q را با ارزش راستی ۰ نداریم. امّا آیا می‌توانستیم q را با ارزش راستی ۱ و p را با ارزش راستی ۰ داشته باشیم؟ اگر این روی می‌داد نمی‌توانستیم استلزام منطقی $q \Rightarrow p$ را داشته باشیم. بنابراین: وقتی $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$، گزاره‌های p و q ارزشهای راستی همانندی دارند و $p \Leftrightarrow q$.

سرانجام، نماد $p \not\Rightarrow q$ برای نشان دادن اینکه $p \rightarrow q$ استلزام منطقی نیست به کار می‌رود.

مثال ۱۷.۲ از نتایج مثال ۷.۲ (جدول ۹.۲ را ببینید)، می‌فهمیم که برای گزاره‌های دلخواه p و q داریم

$$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$$

بنابراین، برای گزاره‌های دلخواه p و q استلزامهای زیر را داریم

$$\overline{p} \vee \overline{q} \Rightarrow \overline{p \wedge q} \quad \text{و} \quad \overline{p \wedge q} \Rightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$$

همچنین با توجه به اینکه چون هر یک از گزاره‌های

$$\overline{p} \vee \overline{q} \rightarrow \overline{p \wedge q} \quad \text{و} \quad \overline{p \wedge q} \Rightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$$

یک راستگوست، می‌توانیم بنویسیم

$$[\overline{p} \vee \overline{q} \rightarrow \overline{p \wedge q}] \Leftrightarrow T_0 \quad \text{و} \quad [\,\overline{p \wedge q} \rightarrow \overline{p} \vee \overline{q}\,] \Leftrightarrow T_0$$

□

اینک با برگشت به مطالعهٔ تکنیکهای اثبات قضایا (یا استلزامهای منطقی) باید نگاهی دقیق به‌اندازهٔ جدول ۱۳.۲ بیندازیم. این جدول ۸ سطر دارد زیرا توانستیم سه فرض p_1، p_2، و p_3 و نتیجهٔ q را برحسب سه گزارهٔ p، r، و s نمایش دهیم. اگر مثلاً با اثبات استلزام منطقی (یا قضیه) بودن یا نبودن

$$[(p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (t \vee \overline{s}) \wedge (\overline{t} \vee u) \wedge \overline{u}] \rightarrow \overline{p}$$

مواجه بودیم، جدول لازم، به $۳۲ = ۲^۵$ سطر نیاز داشت. وقتی تعداد فرضها زیادتر شود و جدولهای ارزش به ۶۴، ۱۲۸، ۲۵۶ سطر یا بیشتر برسد، این راه خیلی زود کشش خود را از دست می‌دهد.

به‌علاوه، با نگاهی دوباره به جدول ۱۳.۲، پی می‌بریم که در اثبات اینکه

$$[(p \rightarrow r) \wedge (\overline{s} \rightarrow p) \wedge \overline{r}] \rightarrow s$$

استلزام منطقی هست یا نیست، تنها لازم است که آن سطرهایی از جدول را در نظر بگیریم که در آنها هر سه فرض $p \rightarrow r$، $\overline{s} \rightarrow p$، و $\overline{r}$ ارزش راستی ۱ دارند. (فراموش نکنید که اگر گزارهٔ طرف چپ دروغ باشد، به ارزش راستی گزارهٔ طرف راست اعتنایی نمی‌کنیم.) این، تنها در سطر

دوم رخ می‌دهد، لذا مقدار زیادی از جدول ۱۳.۲ واقعاً ضروری نیست. (همیشه چنین نیست که تنها یک سطر دارای تمام فرضهای راست باشد. این مطلب در ابتدای تمرینهای بخش ۳.۲ نشان داده شده‌است.)

درنتیجه، آنچه در اینجا لازم است تکنیک یا فهرست تکنیکهای راههای میان‌بر ساختن هر جدول ارزش، خصوصاً جدولهای ارزش بزرگ است. این تکنیکها را قاعده‌های استنتاج می‌نامند. اینها به‌صورت زیر به‌ما کمک می‌کنند.

۱. استفاده از این تکنیکها ما را به بررسی حالتهایی قادر می‌سازد که در آنها تنها تمامی فرضها راست‌اند. بنابراین تنها سطرهایی از جدول ارزش را در نظر می‌گیریم که در آنها، هر فرض ارزش راستی ۱ دارد و جدول ارزش را نمی‌سازیم.

۲. قاعده‌های استنتاج، در تکمیل گام به‌گام برهان که نشان می‌دهد چگونه در یک استلزام

$$(p_۱ \wedge p_۲ \wedge p_۳ \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$$

نتیجهٔ q منطقاً از فرضهای $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$، $\cdots$ p_n به‌دست می‌آید جنبهٔ اساسی دارند. این گونه تکمیل، درستی برهان (یا استدلال) را ثابت می‌کند.

هر قاعدهٔ استنتاج از یک استلزام منطقی یا هم‌ارزی منطقی حاصل می‌شود. در هر مورد، این استلزام منطقی یا هم‌ارزی منطقی بدون برهان بیان می‌شود. (تعدادی از این برهانها در تمرینهای بخش مورد بحث قرار خواهند گرفت.)

بسیاری از قاعده‌های استنتاج در مطالعهٔ منطق حاصل می‌شوند. ما توجه خود را بر آنهایی متمرکز می‌کنیم که در اثبات قضایای مورد بحث در فصول باقیماندهٔ این کتاب به ما یاری می‌دهند. در جدول ۱۴.۲ (در صفحهٔ ۸۷) خلاصهٔ قاعده‌هایی که اینک بررسی آنها آغاز می‌شود داده شده‌است.

مثال ۱۸.۲ به‌عنوان اولین مثال، قاعدهٔ استنتاج موسوم به قیاس استثنایی یا قاعدهٔ وضع مقدم را در نظر می‌گیریم. این قاعده به‌صورت نمادی به‌وسیلهٔ استلزام منطقی

$$[p \wedge (p \to q)] \Rightarrow q$$

بیان می‌شود. قاعدهٔ عملی آن به‌صورت جدولی

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{p \to q} \\ \therefore q \end{array}$$

نوشته می‌شود که در آن سه نقطه (∴) معرف واژهٔ «بنابراین» است که نشان می‌دهد q نتیجهٔ منطقی فرضهای p و $p \to q$ است که در بالای خط افقی آمده‌اند. همچنین می‌گوییم که فرضها (گزاره‌های بالای خط افقی) معرف استدلالی معتبر یا برهان برای نتیجهٔ q هستند.

این قاعده در مواردی پیدا می‌شود که استدلال می‌کنیم اگر (۱) p راست باشد، و (۲) $p \to q$ راست باشد (یا $p \Rightarrow q$)، آنگاه نتیجهٔ q نیز باید راست باشد. (سرانجام، اگر q دروغ و p راست بود، آنگاه نمی‌توانستیم بگوییم که $p \to q$ راست است.)

برهان زیر نشان می‌دهد که چگونه می‌توان قاعدهٔ وضع مقدم را در هندسهٔ دبیرستانی به‌کار برد.

(۱) مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. $\qquad p$

(۲) اگر ABC متساوی‌الاضلاع باشد، آنگاه مثلث ABC متساوی‌الساقین است. $\qquad \underline{p \to q}$

(۳) بنابراین مثلث ABC متساوی‌الساقین است. $\qquad \therefore q \quad \square$

مثال ۱۹.۲ قاعدهٔ دوم استنتاج به‌وسیلهٔ استلزام منطقی

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow p \to r$$

داده می‌شود که در آن p، q، r گزاره‌هایی دلخواه‌اند. در ساخت جدولی این استلزام چنین نوشته می‌شود

$$\begin{array}{r} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore p \to r \end{array}$$

این قاعده که به آن قانون قیاس اطلاق می‌شود در بسیاری از برهانها و استدلالهای ریاضیاتی دیگر پیدا می‌شود. در واقع (شاید به‌صورت نادانسته) آن را به دفعات زیاد در حل معادله‌های جبری ساده، به‌صورتی که راه حل (برهان) زیر نشان می‌دهد، به‌کار می‌بریم

(۱) اگر $۲۰ = ۷ - ۳x$، آنگاه $۳x = ۲۷$. $\qquad p \to q$

(۲) اگر $۳x = ۲۷$، آنگاه $x = ۹$. $\qquad \underline{q \to r}$

(۳) بنابراین، اگر $۲۰ = ۷ - ۳x$، آنگاه، $x = ۹$. $\qquad \therefore p \to r \quad \square$

مثال بعدی متضمن برهانی است کمی طولانیتر که در آن از قاعده‌های استنتاجی که در مثالهای ۱۸.۲ و ۱۹.۲ مطرح شدند استفاده می‌شود. در واقع، در می‌یابیم که در اینجا ممکن است بیش از یک راه برای اثبات درستی یک استدلال وجود داشته باشد.

مثال ۲۰.۲ استدلال زیر را در نظر بگیرید.

(۱) در مثلث ABC، طول اضلاع AB و AC برابرند. p
(۲) اگر مثلث ABC دو ضلع برابر داشته باشد، آنگاه مثلث متساوی‌الساقین است. $p \to q$
(۳) اگر مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد، آنگاه زوایای رو به‌رو به اضلاع برابر مساوی‌اند. $q \to r$
(۴) بنابراین، زوایای B و C در مثلث ABC برابرند. $\therefore r$

با توجه به ساختهای گزاره‌های استدلال قبل، می‌توان استدلال را فشرده به‌صورت

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore\ r \end{array} \qquad (*)$$

نوشت. حال لازم نیست نگران چه بودِ گزاره‌ها باشیم. هدف ما استفاده از دو قاعدهٔ استنتاجی است که تاکنون برای نتیجه‌گیری راست بودن حکم r از راست بودن سه فرض p، $p \to q$، و $q \to r$ بررسی کرده‌ایم.

برهان ما به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

گامها		دلیلها
(۱)	$p \to q$	فرض
(۲)	$q \to r$	فرض
(۳)	$p \to r$	این گزاره از گامهای ۱ و ۲ و قانون قیاس نتیجه می‌شود.
(۴)	p	فرض
(۵)	$\therefore r$	این گزاره از گامهای (۴) و (۳) و قاعدهٔ وضع مقدم نتیجه می‌شود.

قبل از پرداختن به سومین قاعدهٔ استنتاج، نشان خواهیم داد که برهان دیگری را هم می‌توان برای استدلالی که در $(*)$ معرفی شد عرضه کرد. در اینجا «دلیلها» را به کوتاهی، به‌صورتی که در بقیهٔ بخش خواهیم آورد ذکر می‌کنیم. امّا، همیشه آنچه را که برای اثبات چگونگی فراهم آمدن هر گام یا حصول آن از گامهای قبلی، در یک برهان لازم است ثبت خواهیم کرد.

برهانی دیگر برای استدلال چنین است

گامها		دلیلها
(۱)	p	فرض
(۲)	$p \to q$	فرض
(۳)	q	(۱)، (۲) و قاعدهٔ وضع مقدم
(۴)	$q \to r$	فرض
(۵)	$\therefore r$	(۳)، (۴) و قاعدهٔ وضع مقدم □

مثال ۲۱.۲ قاعدهٔ استنتاج موسوم به قیاس رفع یا قاعدهٔ رفع تالی به‌وسیلهٔ

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\overline{q}\qquad} \\ \therefore \overline{p} \end{array}$$

داده می‌شود. این نتیجه‌گیری از استلزام منطقی $[(p \to q) \wedge \overline{q}] \Rightarrow \overline{p}$ حاصل می‌شود.
این قاعده را در تکمیل برهانی برای استدلال

$$\begin{array}{l} p \to r \\ r \to s \\ t \vee \overline{s} \\ \overline{t} \vee u \\ \underline{\overline{u}\qquad} \\ \therefore \overline{p} \end{array}$$

به‌کار خواهیم برد.
قانونهای قیاس و قیاس رفع، هر دو، همراه با هم‌ارزی منطقیی که در مثال ۶.۲ به‌دست آوردیم به‌کار می‌آیند.

	گامها	دلیلها
(۱)	$p \to r, r \to s$	فرض
(۲)	$p \to s$	(۱) و قانون قیاس
(۳)	$t \vee \overline{s}$	فرض
(۴)	$\overline{s} \vee t$	(۳) و قانون تعویضپذیری $\vee$
(۵)	$s \to t$	(۴) و هم‌ارزی منطقی $\overline{s} \vee t \Leftrightarrow s \to t$
(۶)	$p \to t$	(۲) و (۵) و قانون قیاس
(۷)	$\overline{t} \vee u$	فرض
(۸)	$t \to u$	(۷) و هم‌ارزی منطقی $\overline{t} \vee u \Leftrightarrow t \to u$
(۹)	$p \to u$	(۶) و (۸) و قانون قیاس
(۱۰)	$\overline{u}$	فرض
(۱۱)	$\therefore \overline{p}$	(۹) و (۱۰) و قیاس رفع □

پیش از اینکه جلوتر برویم، باید قاعدهٔ استنتاج نسبتاً ساده ولی مهمی را ذکر کنیم.

مثال ۲۲.۲ قاعدهٔ استنتاج زیر از این مشاهده حاصل می‌شود که اگر p و q گزاره‌هایی باشند که $p \Leftrightarrow T_\circ$ و $q \Leftrightarrow T_\circ$، آن‌گاه $p \wedge q \Leftrightarrow T_\circ$.

اینک فرض کنید که گزاره‌های p و q در بسط برهانی پیدا می‌شوند. این گزاره‌ها ممکن است فرضها(ی داده شده) یا نتایجی باشند که از فرضها و / یا از نتایجی که قبلاً در برهان به‌دست آمده‌اند حاصل شوند. لذا در این موارد، دوگزارهٔ p و q را می‌توان در ترکیب عطفی $p \wedge q$ ترکیب کرد و این گزارهٔ جدید را می‌توان در گامهای بعدی، که برهان ادامه می‌یابد به‌کار برد.

این قاعده را قاعدهٔ ترکیب عطفی می‌نامیم و در ساخت جدولی چنین می‌نویسیم

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

که مورد استفاده‌اش در مثال ۲۳.۲ نشان داده شده‌است. □

قاعدهٔ بعدی استنتاج گاهی اوقات با روش عکس نقیض برهان که در قیاس رفع به‌کار می‌رود اشتباه می‌شود، زیرا در هر دو قاعده از نقیض گزاره استفاده می‌شود. امّا این دو، قاعده‌هایی متمایزند.

مثال ۲۳.۲ ابتدا یادآور می‌شویم که اگر s گزاره‌ای باشد و $\overline{s} \Rightarrow F_\circ$، آن‌گاه گزارهٔ $\overline{s} \to F_\circ$ همیشه راست است. بنابراین $\overline{s}$ دروغ، و در نتیجه، s راست است.

از استلزام منطقی $\overline{s} \Rightarrow F_\circ$ قاعدهٔ استنتاجی به‌دست می‌آوریم که به برهان خلف موسوم است. این برهان در ساخت جدولی چنین نوشته می‌شود

$$\begin{array}{c} \overline{s} \Rightarrow F_\circ \\ \hline \therefore s \end{array}$$

استفاده از این قاعده را در برهان زیر نشان می‌دهیم. ابتدا یادآور می‌شویم که یک عدد صحیح n را زوج می‌نامند اگر عدد صحیح k وجود داشته باشد که $n = ۲k$. عدد صحیح m را فرد می‌نامند اگر عدد صحیح k وجود داشته باشد که $m = ۲k + ۱$. عدد حقیقی x را گویا می‌گویند اگر $x = a/b$، که در آن a و b اعداد صحیح‌اند و $b \neq ۰$. اگر عدد حقیقی x گویا نباشد آن را گنگ می‌خوانند.

اینک فرض کنید که بخواهیم قضیهٔ زیر را ثابت کنیم

s : عدد حقیقی $\sqrt{۲}$، عددی گنگ است

به‌جای اینکه سعی کنیم گزاره را (مستقیماً) اثبات کنیم، نشان می‌دهیم (غیرمستقیم) که چگونه برای گزارهٔ rای، $\overline{s} \Rightarrow (r \wedge \overline{r})$. (به این دلیل برهان خلف را گاهی برهان غیرمستقیم می‌نامند.)

اینک فرض کنید که $\sqrt{۲}$ گویاست (یعنی، بپذیرید که $\overline{s}$ راست است). در این‌صورت $\sqrt{۲} = a/b$، که در آن a و b اعدادی صحیح‌اند و $b \neq ۰$. بعد می‌پذیریم که در a/b، a و b شمارندهٔ مشترکی ندارند. بنابراین گزارهٔ زیر را داریم

r : تنها عدد صحیح مثبتی که هر دو عدد a و b را می‌شمارد ۱ است

چون $۲ = (\sqrt{۲})^۲$، نتیجه می‌شود که $۲ = (a/b)^۲$ یا $a^۲ = ۲b^۲$، و از اینجا نتیجه می‌شود که $a^۲$ زوج است؛ اگر $a^۲$ زوج باشد، پس a نیز زوج است. لذا برای عدد صحیح cیی، $a = ۲c$. این به $۲b^۲ = a^۲ = (۲c)^۲ = ۴c^۲$ منجر می‌شود، و لذا $b^۲ = ۲c^۲$. امّا $b^۲$ زوج است و b نیز زوج می‌شود. بنابراین، اعداد صحیح a و b دارای شمارندهٔ مثبت ۲ هستند. لذا ۱ تنها عدد صحیح مثبتی نیست که a و b را می‌شمارد؛ از اینجا، گزارهٔ $\overline{r}$ نتیجه می‌شود.

اینک با r و $\overline{r}$، هر دو، (و تناقض $r \wedge \overline{r}$ بنابر قاعدهٔ ترکیب عطفی) چگونه به برهان خاتمه دهیم؟ آنچه موجب این پیشامد شده‌است آن است که وقتی نوشتیم «فرض کنید که $\sqrt{۲}$ گویاست.» فرض کردیم $\overline{s}$ راست است. در نتیجه این فرض عملاً دروغ است، لذا نقیض آن، یعنی s باید راست باشد.

بنابراین، چون $(r \wedge \overline{r}) \Rightarrow \overline{s}$، داریم $\overline{s} \Leftrightarrow F_۰$. در نتیجه، $s \Leftrightarrow T_۰$ و این بدان معناست که $\sqrt{۲}$ گنگ است. □

یک حالت خاص برهان خلف، حالت

$$[\overline{s} \Rightarrow (r \wedge \overline{r})] \Rightarrow (s \Leftrightarrow T_۰)$$

است که بجاست در اینجا به آن اشاره شود.

فرض کنید می‌خواهیم قضیهٔ $p \Rightarrow q$ را ثابت کنیم. با قرار دادن گزارهٔ $p \rightarrow q$ به‌جای گزارهٔ s در بالا، می‌بینیم که ممکن است برای گزارهٔ rای تحقیق کنیم که $\overline{(p \rightarrow q)} \Rightarrow (r \wedge \overline{r})$. پس نتیجه خواهد شد که $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow T_۰$، یا $p \Rightarrow q$.

به‌دلیل برقراری $\overline{(p \rightarrow q)} \Leftrightarrow \overline{(\overline{p} \vee q)} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}$، این حالت خاص برهان خلف را می‌توان به‌صورت

$$[(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow (r \wedge \overline{r})] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

بیان کرد. این، در بسیاری از موارد در سراسر فصلهای بعدی کتاب پیش خواهد آمد.

اینک که پنج قاعدهٔ استنتاج را بررسی کردیم، آنها را خلاصه می‌کنیم و با چند قاعدهٔ دیگر در جدول ۱۴.۲ می‌آوریم.

چهار مثال بعد نشان می‌دهند که چگونه قاعده‌های جدول ۱۴.۲ فهرست شده‌اند و چگونه نتایج دیگری، نظیر قانونهای منطق، در ساختن برهانها به‌کار می‌روند.

مثال ۲۴.۲ اولین مثال، درستی استدلال زیر را نشان می‌دهد

$$\begin{array}{r} p \to r \\ \overline{p} \to q \\ q \to s \\ \hline \therefore \overline{r} \to s \end{array}$$

دلیلها		گامها
فرض	$p \to r$	(۱)
فرض	$q \to s$	(۲)
فرض	$\overline{p} \to q$	(۳)
(۳) و $(\overline{p} \to q) \Leftrightarrow (\overline{\overline{p}} \vee q) \Leftrightarrow (p \vee q)$،که در آن، دومین هم‌ارزی منطقی از **قانون نقیض مضاعف** نتیجه می‌شود.	$p \vee q$	(۴)
(۱)، (۲)، (۴)، و قاعدهٔ قیاس ذوحدّین موجبه	$r \vee s$	(۵)
(۵) و $(r \vee s) \Leftrightarrow (\overline{\overline{r}} \vee s) \Leftrightarrow (\overline{r} \to s)$، که در آن قانون نقیض مضاعف در اولین هم‌ارزی منطقی به‌کار رفته است. □	$\therefore \overline{r} \to s$	(۶)

مثال بعد تا حدّی پیچیده‌تر است.

مثال ۲۵.۲ درستی استدلال‌زیر را ثابت کنید

$$\begin{array}{r} p \to q \\ q \to (r \wedge s) \\ \overline{r} \vee (\overline{t} \vee u) \\ p \wedge t \\ \hline \therefore u \end{array}$$

جدول ۱۴.۲

نام قاعده	استلزام منطقی وابسته یا هم‌ارزی منطقی	قاعدهٔ استنتاج
قاعدهٔ وضع مقدم (قیاس استثنایی)	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \Rightarrow q$	۱. p $p \rightarrow q$ $\therefore q$
قانون قیاس	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$	۲. $p \rightarrow q$ $q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$
قیاس رفع یا قاعدهٔ رفع تالی	$[(p \rightarrow q) \wedge \overline{q}] \Rightarrow \overline{p}$	۳. $p \rightarrow q$ $\overline{q}$ $\therefore \overline{p}$
قاعدهٔ ترکیب عطفی		۴. p q $\therefore p \wedge q$
برهان خلف	$(\overline{s} \Rightarrow F_\circ) \Rightarrow (s \Leftrightarrow T_\circ)$	۵. $\overline{s} \Rightarrow F_\circ$ $\therefore s$
موردی خاص از برهان خلف	$[(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow F_\circ] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	۵′. $(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow F_\circ$ $\therefore p \Rightarrow q$
قاعدهٔ ساده‌سازی ترکیب عطفی	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	۶. $p \wedge q$ $\therefore p$
قاعدهٔ بسط فاصل	$p \Rightarrow p \vee q$	۷. p $\therefore p \vee q$
قاعدهٔ قیاس فاصل	$[(p \vee q) \wedge \overline{p}] \Rightarrow q$	۸. $p \vee q$ $\overline{p}$ $\therefore q$
قاعدهٔ برهان شرطی	$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$	۹. $p \wedge q$ $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ $\therefore r$
قاعدهٔ برهان به‌وسیلهٔ موارد	$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$	۱۰. $p \rightarrow r$ $q \rightarrow r$ $\therefore (p \vee q) \rightarrow r$
قاعدهٔ قیاس ذوحدّین موجبه	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (q \vee s)$	۱۱. $p \rightarrow q$ $r \rightarrow s$ $p \vee r$ $\therefore q \vee s$
قاعدهٔ قیاس ذوحدّین سالبه	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\overline{q} \vee \overline{s})] \Rightarrow (\overline{p} \vee \overline{r})$	۱۲. $p \rightarrow q$ $r \rightarrow s$ $\overline{q} \vee \overline{s}$ $\therefore \overline{p} \vee \overline{r}$

گامها		دلیلها
(۱)	$p \to q$	فرض
(۲)	$q \to (r \wedge s)$	فرض
(۳)	$p \to (r \wedge s)$	(۱)، (۲) و قانون قیاس
(۴)	$p \wedge t$	فرض
(۵)	p	(۴) و قانون ساده‌سازی ترکیب عطفی
(۶)	$r \wedge s$	(۵)، و (۳) و قاعدهٔ قیاس استثنایی (قاعدهٔ وضع مقدم)
(۷)	r	(۶) و قاعدهٔ ساده‌سازی ترکیب عطفی
(۸)	$\overline{r} \vee (\overline{t} \vee u)$	فرض
(۹)	$\overline{(r \wedge t)} \vee u$	(۸)، قانون شرکت‌پذیری ۷، و قوانین دمورگن
(۱۰)	t	(۴) و قانون ساده‌سازی ترکیب عطفی
(۱۱)	$r \wedge t$	(۷)، (۱۰)، و قاعدهٔ ترکیب عطفی
(۱۲)	$\therefore u$	(۹)، (۱۱) و قاعدهٔ قیاس فاصل □

مثال ۲.۲۶ این مثال برهانی است برای استدلال زیر:

اگر ارکستر نتواند برنامه موزیک را اجرا کند یا آشامیدنی به‌موقع توزیع نشود، آن‌گاه جشن سال نو لغو و خانم A عصبانی می‌شود. اگر جشن لغو شود، آن‌گاه باید بهای بلیط شرکت در جشن را پس دهند. بهای بلیطها پس داده نشده است.

بنابراین ارکستر توانسته است موسیقی اجرا کند.

ابتدا با مشخص کردن هر گزاره به‌وسیلهٔ یک حرف به‌صورت زیر، به‌استدلال خود ساخت نمادی می‌دهیم

ارکستر توانسته است موسیقی اجرا کند	$p:$
آشامیدنی به‌موقع توزیع شده‌است	$q:$
جشن سال نو لغو شده‌است	$r:$
خانم A عصبانی شده‌است	$s:$
بهای بلیطها پس داده شده‌است	$t:$

استدلال بالا به‌صورت زیر در می‌آید

$$\begin{array}{l} (\overline{p} \vee \overline{q}) \to (r \wedge s) \\ r \to t \\ \overline{t} \\ \hline \therefore p \end{array}$$

و اینک درستی این استدلال را به‌صورت زیر ثابت می‌کنیم:

گامها		دلیلها
(۱)	$r \to t$	فرض
(۲)	$\overline{t}$	فرض
(۳)	$\overline{r}$	(۱)، (۲) و قاعدهٔ قیاس رفع
(۴)	$\overline{r} \vee \overline{s}$	(۳) و قاعدهٔ بسط فاصل
(۵)	$\overline{r \wedge s}$	(۴) و قوانین دمورگن
(۶)	$(\overline{p} \vee \overline{q}) \to (r \wedge s)$	فرض
(۷)	$\overline{(\overline{p} \vee \overline{q})}$	(۵)، (۶) و قاعدهٔ قیاس رفع
(۸)	$p \wedge q$	(۷)، قوانین دمورگن، و قانون نقیض مضاعف
(۹)	$\therefore p$	(۸) و قاعدهٔ ساده‌سازی ترکیب عطفی □

مثال ۲۷.۲ در این مثال، از برهان خلف استفاده می‌کنیم
استدلال

$$\begin{array}{l} \overline{p} \leftrightarrow q \\ q \to r \\ \overline{r} \\ \hline \therefore p \end{array}$$

را در نظر می‌گیریم.

در اثبات درستی این استدلال، $\overline{p}$ یعنی نقیض نتیجهٔ p را به‌عنوان فرض دیگری می‌پذیریم. اینک، هدف، استفاده از چهار فرض برای استخراج یک تناقض F_0 است. استخراج (برهان) به‌صورت زیر است.

گامها		دلیلها
(۱)	$\overline{p} \leftrightarrow q$	فرض
(۲)	$(\overline{p} \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \overline{p})$	(۱) و $[\overline{p} \leftrightarrow q] \Leftrightarrow [(\overline{p} \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \overline{p})]$
(۳)	$\overline{p} \rightarrow q$	(۲) و قاعدهٔ ساده‌سازی ترکیب عطفی
(۴)	$q \rightarrow r$	فرض
(۵)	$\overline{p} \rightarrow r$	(۳)، (۴) و قانون قیاس
(۶)	$\overline{p}$	فرض (فرضی که پذیرفته شده‌است)
(۷)	r	(۵)، (۶)، و قاعدهٔ قیاس استثنایی (قاعدهٔ وضع مقدم)
(۸)	$\overline{r}$	فرض
(۹)	$r \wedge \overline{r} (\Leftrightarrow F_\circ)$	(۷)، (۸)، و قاعدهٔ ترکیب عطفی
(۱۰)	$\therefore p$	(۶)، (۹)، و برهان خلف

اگر بعداً آنچه را که در اینجا پیش آمده بررسی کنیم، به‌دست می‌آوریم که

$$[(\overline{p} \leftrightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \overline{r} \wedge \overline{p}] \Rightarrow F_\circ$$

این استلزام منطقی مستلزم این است که ارزش راستی $[(\overline{p} \leftrightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \overline{r} \wedge \overline{p}]$ برابر ۰ باشد. چون $\overline{p} \leftrightarrow q$، $q \rightarrow r$ و $\overline{r}$ فرضهای داده شده هستند، هر یک از این گزاره‌ها دارای ارزش راستی ۱ است. بنابراین، برای اینکه $[(\overline{p} \leftrightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \overline{r} \wedge \overline{p}]$ ارزش ۰ داشته باشد باید حکم $\overline{p}$ دارای ارزش راستی ۰ باشد. لذا، p ارزش راستی ۱ دارد، و نتیجهٔ pی استدلال راست است. □

مثالهای ۲۴.۲ تا ۲۷.۲ مفهوم چگونگی اثبات درستی یک استدلال را برای ما روشن می‌کنند. اینک باید فرا بگیریم که چگونه نادرستی یک استدلال را تعیین کنیم.

این مورد، در استدلال

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ \underline{p_n} \\ \therefore q \end{array}$$

رخ می‌دهد، که در آن هر یک از فرضهای p_1، p_2، ...، p_n راست است (ارزش راستی ۱ دارد) و معهذا نتیجهٔ q دروغ (دارای ارزش راستی ۰) است.

مثال بعد روشی غیرمستقیم را نشان می‌دهد که به‌وسیلهٔ آن می‌توانیم نشان دهیم استدلالی که احساس می‌کنیم درست نیست (شاید به‌دلیل اینکه نمی‌توانیم راهی برای نشان‌دادن درستی آن بیابیم) واقعاً نادرست است.

مثال ۲۸.۲ استدلال

$$\begin{array}{l} p \\ p \vee q \\ q \to (r \to s) \\ t \to r \\ \hline \therefore \overline{s} \to \overline{t} \end{array}$$

را در نظر بگیرید.

برای اینکه نشان دهیم این استدلال نادرست است، به‌دادن ارزشهای راستی به هر یک از گزاره‌های p، q، r، s، و t نیاز داریم به‌قسمی که نتیجهٔ $\overline{s} \to \overline{t}$ دروغ (ارزش راستی آن ۰) باشد.

تنها وقتی که نتیجهٔ $\overline{s} \to \overline{t}$ دروغ است وقتی است که $\overline{s}$ راست و $\overline{t}$ دروغ است. از اینجا نتیجه می‌شود که ارزش راستی s برابر ۰، و ارزش راستی t برابر ۱ است.

چون p یکی از فرضهاست، ارزش راستی آن باید ۱ باشد. چون فرض $p \vee q$ ارزش راستی ۱ دارد، q ممکن است یا راست (۱) و یا دروغ (۰) باشد. لذا فرض $t \to r$ را در نظر می‌گیریم که می‌دانیم t در آن راست است. اگر $t \to r$ راست باشد، آن‌گاه r باید راست (با ارزش راستی ۱) باشد. امّا با راست‌بودن r (۱) و دروغ بودن s (۰)، ارزش راستی فرض $q \to (r \to s)$ تنها وقتی برابر ۱ است که q دروغ (۰) باشد.

بنابراین، با دادن ارزشهای راستی

$$p : 1 \qquad q : 0 \qquad r : 1 \qquad s : 0 \qquad t : 1$$

چهار فرض

$$p \qquad p \vee q \qquad q \to (r \to s) \qquad t \to r$$

همگی دارای ارزش راستی ۱ هستند، در حالی که نتیجهٔ

$$\overline{s} \to \overline{t}$$

دارای ارزش راستی ۰ است. در این حالت نشان داده‌ایم که استدلال داده شده نادرست است. □

ارزشهای راستی $p:1$، $q:0$، $r:1$، $s:0$، و $t:1$ در مثال ۲۸.۲ به این مطلب اشاره می‌کند که ممکن است آنچه را که قضیه می‌انگاریم در برخی موارد قضیه نباشد. اینک باید به‌تحقیق این مطلب بپردازیم که در تلاش برای اثبات قضیه‌بودن گزاره‌ای به‌صورت

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$$

باید استدلالی کلی برای همهٔ موارد ممکنی که در آنها فرضهای p_1، p_2، ...، p_n راست‌اند عرضه کنیم. این استدلال قبل از همه بر قاعده‌های استنتاج و قانونهای منطق استوارند. نمی‌توانیم مثال خاصی را به‌عنوان وسیلهٔ اثبات قضیه‌ای کلی به‌کار بریم. امّا، هر وقت می‌خواهیم گزاره‌ای را رد کنیم، کافی است موردی پیدا کنیم که برای آن، این گزاره دروغ باشد. این مورد را مثال نقض می‌نامیم.

مثال دیگری در نظر می‌گیریم تا راه اثبات غیرمستقیم مثال ۲۸.۲ را با آن امتحان کنیم.

مثال ۲۹.۲ دربارهٔ درستی یا نادرستی استدلال زیر چه می‌توانیم بگوییم؟

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow s \\ r \rightarrow \overline{s} \\ \underline{\overline{p} \veebar r} \\ \therefore \overline{p} \end{array}$$

در حالی که چهار فرض، همگی راست‌اند، آیا نتیجهٔ $\overline{p}$ می‌تواند دروغ باشد؟ نتیجهٔ $\overline{p}$ وقتی دروغ است که p دارای ارزش راستی ۱ باشد. پس برای اینکه فرض $p \rightarrow q$ راست باشد، ارزش راستی q باید ۱ باشد. راستی فرض $q \rightarrow s$، و راستی q، موجب راستی s می‌شوند. در این مرحله، دارای گزاره‌های p، q و s هستیم که ارزش راستی همهٔ آنها ۱ است. اگر استدلال را با فرض $r \rightarrow \overline{s}$ ادامه دهیم، پی می‌بریم که به‌دلیل ۱ بودن ارزش راستی s، ارزش راستی r باید ۰ باشد. بنابراین r دروغ است. امّا با $\overline{p}$ی دروغ، و فرض راست $\overline{p} \veebar r$، دارای r راست نیز هستیم. بنابراین درمی‌یابیم که $p \Rightarrow (\overline{r} \wedge r)$.

سعی ما در یافتن مثال نقض برای درستی استدلال داده شده با شکست مواجه شده‌است. امّا، این شکست در برهان درستی یک استدلال، یعنی در برهانی مبتنی بر برهان خلف حاصل شده‌است. □

این مقدمه بر قاعده‌های استنتاج و روشهای برهان، از جامعیت خیلی فاصله دارد. چندین کتاب از فهرست مراجع انتهای این فصل، مطالبی اضافی در اختیار خوانندهٔ مایل به پیگیری بیشتر این عنوان خواهند گذارد.

در فصل ۴، تکنیک برهان خیلی مهّم دیگری به نام استقرای ریاضی به زرادخانهٔ مهمات ما برای یورش به برهانهای قضایای ریاضی افزوده خواهد شد. امّا، ابتدا خواننده باید با دقت تمرینهای این بخش را حل کند.

تمرینهای ۳.۲

۱. هر یک از استدلالهای زیر را به‌وسیلهٔ جدول ارزش ثابت کنید. در هر مورد، تعیین کنید کدام سطرهای جدول برای ارزیابی درستی استدلال مهم بوده و از کدام سطرها می‌توان صرف‌نظر کرد.

الف) $[p \wedge (p \to q) \wedge r] \Rightarrow [(p \vee q) \to r]$

ب) $[[(p \wedge q) \to r] \wedge \overline{q} \wedge (p \to \overline{r})] \Rightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$

ج) $[p \wedge (p \to q) \wedge q] \Rightarrow [(p \vee r) \to q]$

۲. برای تحقیق اینکه هر یک از موارد زیر استلزام منطقی است، از جدولهای ارزش استفاده کنید.

الف) $[p \wedge (p \to q)] \to q$

ب) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

ج) $[(p \to q) \wedge \overline{q}] \to \overline{p}$

د) $[(p \to r) \wedge (q \to r)] \to [(p \vee q) \to r]$

ه) $(p \to q) \to [(p \wedge r) \to (q \wedge r)]$

۳. تحقیق کنید که هر یک از موردهای زیر استلزامی منطقی است، به این ترتیب که نشان دهید امکان ندارد نتیجه، ارزش راستی ۰ داشته باشد در حالی که ارزش هر کدام از فرضها ۱ است.

الف) $(p \wedge q) \to p$

ب) $p \to (p \vee q)$

ج) $[(p \vee q) \wedge \overline{p}] \to q$

د) $[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \vee r)] \to (q \vee s)$

ه) $[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (\overline{q} \vee \overline{s}] \to (\overline{p} \vee \overline{r})$

و) $(p \to q) \to [(p \vee r) \to (q \vee r)]$

ز) $(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$

۴. برای هر جفت از احکام s_1، s_2، تعیین کنید کدام یک از موردهای زیر راست است.

(i) $s_1 \Leftrightarrow s_2$ (ii) $s_1 \Rightarrow s_2, s_2 \not\Rightarrow s_1$

(iii) $s_2 \Rightarrow s_1, s_1 \not\Rightarrow s_2$ (iv) $s_1 \not\Rightarrow s_2, s_2 \not\Rightarrow s_1$

الف) s_1: مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است

s_2: مثلث ABC متساوی‌الزوایاست

ب) s_1: مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است

s_2: مثلث ABC متساوی‌الساقین است

ج) s_1: چهارضلعی $ABCD$ مربع است

s_2: چهارضلعی $ABCD$ لوزی است

د) s_1: چهارضلعی $ABCD$ متساوی‌الاضلاع است

s_2: چهارضلعی $ABCD$ متساوی‌الزوایاست

ه) s_1: چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است

s_2: چهارضلعی $ABCD$ متساوی‌الزوایاست

۵. در برهان برای تأیید

$$[p \wedge (p \to q) \wedge (s \vee r) \wedge (r \to \overline{q})] \Rightarrow (s \vee t)$$

دلیل (دلیلهایی) برای هر گام بیاورید.

گامها		دلیلها
(۱)	p	
(۲)	$p \to q$	
(۳)	q	
(۴)	$r \to \overline{q}$	
(۵)	$q \to \overline{r}$	
(۶)	$\overline{r}$	
(۷)	$s \vee r$	
(۸)	s	
(۹)	$\therefore s \vee t$	

۶. برای گامهایی که در تأیید استدلال زیر به‌کار می‌روند دلیلهایی عرضه کنید

$$(\overline{p} \vee q) \rightarrow r$$
$$r \rightarrow (s \vee t)$$
$$\overline{s} \wedge \overline{u}$$
$$\underline{\overline{u} \rightarrow \overline{t}}$$
$$\therefore p$$

گامها		دلیلها
(۱)	$\overline{s} \wedge \overline{u}$	
(۲)	$\overline{u}$	
(۳)	$\overline{u} \rightarrow \overline{t}$	
(۴)	$\overline{t}$	
(۵)	$\overline{s}$	
(۶)	$\overline{s} \wedge \overline{t}$	
(۷)	$r \rightarrow (s \vee t)$	
(۸)	$\overline{(s \vee t)} \rightarrow \overline{r}$	
(۹)	$(\overline{s} \wedge \overline{t}) \rightarrow \overline{r}$	
(۱۰)	$\overline{r}$	
(۱۱)	$(\overline{p} \vee q) \rightarrow r$	
(۱۲)	$\overline{r} \rightarrow \overline{(\overline{p} \vee q)}$	
(۱۳)	$\overline{r} \rightarrow (p \wedge \overline{q})$	
(۱۴)	$p \wedge \overline{q}$	
(۱۵)	$\therefore p$	

۷. **الف)** برای هر مرحله از برهان خلف زیر دلیلهایی اقامه کنید

$$[(p \rightarrow q) \wedge (\overline{r} \vee s) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (\overline{q} \rightarrow s)$$

گامها		دلیلها
(۱)	$\overline{(\overline{q} \rightarrow s)}$	
(۲)	$\overline{q} \wedge \overline{s}$	

گامها		دلیلها
(۳)	$\overline{s}$	
(۴)	$\overline{r} \vee s$	
(۵)	$\overline{r}$	
(۶)	$p \to q$	
(۷)	$\overline{p} \vee q$	
(۸)	$\overline{q}$	
(۹)	$\overline{p}$	
(۱۰)	$p \vee r$	
(۱۱)	r	
(۱۲)	$\overline{r} \wedge r$	
(۱۳)	$\therefore \overline{q} \to s$	

ب) برای قضیّهٔ قسمت (الف) برهانی مستقیم ارائه دهید.

ج) برای قضیّهٔ مربوط به مثال ۲۷.۲ برهانی مستقیم بیاورید.

۸. درستی استدلالهای زیر را ثابت کنید.

الف) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

ب) $[p \wedge (p \to q) \wedge (\overline{q} \vee r)] \Rightarrow r$

ج)
$$\begin{array}{l} p \to q \\ \overline{q} \\ \underline{\overline{r}} \\ \therefore \overline{p \vee r} \end{array}$$

د)
$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to \overline{q} \\ \underline{r} \\ \therefore \overline{p} \end{array}$$

ه)
$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ \overline{q} \to \overline{p} \\ \underline{p} \\ \therefore r \end{array}$$

و)
$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \to (r \wedge q) \\ r \to (s \vee t) \\ \underline{\overline{s}} \\ \therefore t \end{array}$$

ز)
$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \vee s \\ t \to q \\ \underline{\overline{s}} \\ \therefore \overline{r} \to \overline{t} \end{array}$$

۹. ثابت کنید که $\sqrt[3]{۲}$ عددی گنگ است.

۱۰. با ارائهٔ مثالی نقض ـــ یعنی دادن ارزشهای راستی به گزاره‌های داده شده، به‌قسمی که تمام فرضها راست (دارای ارزش راستی ۱) باشند، در حالی که نتیجه دروغ (دارای رازش راستی ۰) است ـــ نشان دهید که هر یک از استدلالهای زیر نادرست است.

الف) $[(p \wedge \overline{q}) \wedge [p \rightarrow (q \rightarrow r)]] \Rightarrow \overline{r}$

ب) $[[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge (\overline{q} \vee r)] \Rightarrow p$

ج)
$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ q \rightarrow r \\ r \vee \overline{s} \\ \overline{s} \rightarrow q \\ \hline \therefore s \end{array}$$

د)
$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow r \\ p \rightarrow (q \vee \overline{r}) \\ \overline{q} \vee \overline{s} \\ \hline \therefore s \end{array}$$

۱۱. هر یک از استدلالهای زیر را به‌صورت نمادی بنویسید. سپس برهانی برای این استدلال اقامه کنید یا برای نشان دادن نادرستی آن مثال نقضی بیاورید.

الف) اگر R شغل سرپرستی را به‌دست آورد و سخت کار کند، آن‌گاه ترفیع می‌گیرد. اگر ترفیع بگیرد ماشین نو خواهد خرید. او ماشین نو نخریده است، بنابراین یا R شغل سرپرستی را به‌دست نیاورده است یا سخت کار نکرده است.

ب) اگر D به‌مسابقهٔ اتومبیلرانی برود، H عصبانی خواهد شد. اگر R تمام شب ورق‌بازی کند، آن‌گاه C عصبانی خواهد شد. اگر نه C و نه H هیچکدام عصبانی نشوند، به V (وکیل آنها) گزارش داده می‌شود. V دربارهٔ این دو مشتریش هیچ گزارشی دریافت نکرده است. بنابراین D به مسابقهٔ اتومبیلرانی نرفته است و R تمام شب ورق بازی نکرده است.

ج) اگر N به‌جلسهٔ صبح سه‌شنبه‌اش برود باید صبح زود از خواب برخیزد. اگر دوشنبه شب به کنسرت برود، تا ۱۱ بعدازظهر به‌خانه نخواهد آمد. اگر N در چنین ساعتی به‌خانه بیاید و صبح زود از خواب برخیزد، آن‌گاه مجبور خواهد بود بعد از کمتر از هفت ساعت خواب به‌سر کار برود. متأسفانه، N با خواب کمتر از هفت ساعت نمی‌تواند کار کند. در نتیجه، N یا باید به‌کنسرت نرود و یا در جلسهٔ صبح سه‌شنبه شرکت نکند.

د) M در کلاس زبان پاسکال تدریس خواهد کرد اگر و تنها اگر ترفیع پیدا کند. اگر M ترفیع پیدا کند، تعطیلات خود را در این زمستان در هاوایی می‌گذارند. اگر در کلاس پاسکال تدریس نکند، آن‌گاه در این زمستان برای تماشای پرندگان به تنسی می‌رود. M در زمستان، یا فرصت سفر به هاوایی را از دست می‌دهد یا برای تماشای پرندگان به تنسی می‌رود. بنابراین، M در این زمستان برای تماشای پرندگان به تنسی نمی‌رود.

هـ) در برنامهٔ پاسکال داده شده‌ای، اگر به متغیر صحیح n، مقداری آغازی در برنامه داده نشده باشد، آن‌گاه $n > 0$. اگر $n > 0$، آن‌گاه در اجرای حکم «Write» مقدار $n^2 + n$ بعدتر چاپ می‌شود. اگر مقدار n به‌وسیلهٔ استفاده‌کننده از برنامه در حکم «Read» مشخص شود، آن‌گاه n در برنامه مقداری آغازی نمی‌گیرد. مقدار $n^2 + n$ در طی اجرای برنامه چاپ نشده است. بنابراین، استفاده‌کننده مقدار متغیر صحیح n را مشخص نکرده است.

و) خانم L، اگر روسری خود را گم کرده باشد یا شانس بارندگی وجود داشته باشد چمن خانه‌اش را کوتاه نخواهد کرد. هر وقت درجهٔ حرارت بالای 80° فارنهایت باشد، شانس بارندگی صفر است. امروز درجهٔ حرارت 85° فارنهایت است و L روسری خود را بسته است. بنابراین L

(در موقعی از روز) چمن خانه‌اش را کوتاه خواهد کرد.

۴.۲ استفاده از سورها

در بخش ۱.۲ تذکر دادیم که چگونه جمله‌هایی که شامل متغیری، نظیر x، هستند لازم نیست که گزاره باشند. مثلاً، جملهٔ «عدد ۲ + x عدد صحیح زوج است» الزاماً راست یا دروغ نیست مگر آنکه بدانیم به‌جای x چه مقداری قرار می‌گیرد. اگر انتخابهای ما به‌اعداد صحیح محدود باشد، وقتی به‌جای x عددهای ۵−، ۱−، یا ۳ قرار گیرد، گزارهٔ حاصل دروغ است. در واقع، هر وقت به‌جای x عددی فرد قرار گیرد این جمله دروغ است. امّا، وقتی عددی زوج به‌جای x قرار گیرد گزارهٔ حاصل راست است.

جملهٔ «عدد ۲ + x عددی زوج است» را گزارهٔ باز یا گزاره‌نما می‌نامند، که ما آن را رسماً به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵.۲ جملهٔ خبری، یک گزاره‌نماست اگر

۱. شامل یک یا چند متغیر باشد، و

۲. گزاره نباشد، و

۳. وقتی به‌صورت گزاره در آید که به‌جای متغیرهای آن انتخابهایی مجاز قرار گیرند. —

وقتی جملهٔ «عدد ۲ + x عددی زوج است» را با توجه به این تعریف بررسی می‌کنیم، درمی‌یابیم که این جمله، گزاره‌نمایی است شامل یک متغیر x. در خصوص سومین قسمت تعریف، در بحث قبلی، برای اعداد صحیح به «انتخابهایی مجاز» محدود شدیم. این انتخابهای مجاز چیزی را تشکیل می‌دهند که عالم سخن برای گزاره‌نما نامیده می‌شود. عالم سخن شامل انتخابهایی است که در گزاره‌نما می‌خواهیم برای متغیر (متغیرها) در نظر بگیریم و یا مقادیر مجازی برای متغیرها هستند. (عالم سخن مثالی از یک مجموعه است، مفهومی که در فصل بعد به‌تفصیل بررسی خواهیم کرد.)

در بحث مربوط به‌گزاره‌نماها نمادهای زیر را به‌کار می‌بریم:

گزاره‌نمای «عدد ۲ + x عددی زوج است» را با $p(x)$ [یا $q(x)$، $r(x)$ و غیره] نشان می‌دهیم. در این‌صورت $\overline{p(x)}$ را می‌توان به‌صورت «عدد ۲ + x عدد زوج نیست» بخوانیم.

$q(x,y)$ را برای نمایش گزاره‌نمایی که شامل دو متغیر است به‌کار خواهیم برد، نظیر

$$q(x,y): \text{عددهای } y+۲\text{، } x-y\text{، و } x+۲y \text{ زوج‌اند}$$

در حالت $q(x,y)$، بیش از یک مورد از هر یک از متغیرهای x و y وجود دارند. معلوم است که وقتی به‌جای یکی از xها انتخابی از عالم سخن را قرار دادیم به‌جای xهای دیگر نیز همین

انتخاب را قرار می‌دهیم. همچنین وقتی برای یک مورد y مقداری (از عالم سخن) را قرار دادیم به‌جای موردهای دیگر متغیر y نیز همین مقدار را قرار می‌دهیم.

اگر $p(x)$ و $q(x,y)$ مثل بالا باشند، و عالم سخن تصریح کند که تنها انتخابهای مجاز، عددهای صحیح‌اند، وقتی جایگذاریهایی را برای متغیرهای x و y انجام دهیم نتیجه‌های زیر را به‌دست می‌آوریم

$p(۵)$: عدد $(۲+۵=)۷$ عدد زوج است (دروغ)
$\overline{p(۷)}$: عدد ۹ عدد زوج نیست (راست)
$q(۴,۲)$: عددهای ۴، ۲، و ۸ عددهایی زوج‌اند (راست)

همچنین توجه می‌کنیم که مثلاً $q(۵,۲)$ و $q(۴,۷)$ هر دو گزاره‌هایی دروغ‌اند، در حالی‌که $\overline{q(۵,۲)}$ و $\overline{q(۴,۷)}$ راست‌اند.

بنابراین، می‌بینیم که برای $p(x)$ و $q(x,y)$ هر دو، بعضی از جایگذاریها گزاره‌های راست و برخی دیگر گزاره‌هایی دروغ می‌دهند. بنابراین می‌توانیم گزاره‌های راست زیر را بسازیم

۱. برای xی، $p(x)$
۲. برای xی و yی، $q(x,y)$.

توجه کنید که در این وضعیت، گزاره‌های «برای xی، $\overline{p(x)}$» و برای xی و yی، $\overline{q(x,y)}$» نیز راست‌اند.

عبارتهای «برای xی» و «برای xی و yی» را به‌ترتیب سورهای گزاره‌نماهای $p(x)$ و $q(x,y)$ می‌گویند. بسیاری از اصلهای موضوع، تعریفها، و قضایا در ریاضیات متضمن گزاره‌هایی هستند که گزاره‌نماهای مسوّرند. اینها از دو نوع سور نتیجه می‌شوند، که سور وجودی و سور عمومی خوانده می‌شوند.

در گزارهٔ (۱)، سور وجودی «برای xی» به‌کار می‌رود که می‌توان آن را به‌صورت «برای حداقل یک x» یا «xی وجود دارد به‌قسمی که» هم بیان کرد. این سور به‌صورت نمادی به‌شکل $\exists x$ نوشته می‌شود. بنابراین گزارهٔ «برای xی، $p(x)$» به‌صورت نمادی به‌شکل $\exists x p(x)$ درمی‌آید.

گزارهٔ (۲)، به‌صورت نمادی به‌شکل $\exists x \exists y q(x,y)$ در می‌آید. نمادگذاری $\exists x,y$ را می‌توان برای خلاصه کردن $\exists x \exists y q(x,y)$ به‌صورت $\exists x,y q(x,y)$ به‌کار برد.

سور عمومی را به‌صورت $\forall x$ نشان می‌دهند و می‌خوانند «برای همهٔ xها»، یا «برای هر x».

با اختیار کردن $p(x)$ به‌صورتی که قبلاً تعریف شد و استفاده از سور عمومی، می‌توانیم گزاره‌نمای $p(x)$ را به‌گزارهٔ (مسوّر) $\forall x p(x)$، که گزاره‌ای دروغ است، تبدیل کنیم.

اگر گزاره نمای $r(x)$: «$۲x$ عدد زوج است» را با همان عالم سخن (همهٔ اعداد صحیح) در نظر بگیریم، آنگاه گزارهٔ (مسوّر) $\forall x\, r(x)$، گزاره‌ای راست است. وقتی می‌گوییم $\forall x\, r(x)$ راست است، منظور آن است که هر عدد صحیحی (از عالم سخن) به‌جای x قرار بگیرد، گزارهٔ حاصل

راست است. همچنین توجه کنید که گزارهٔ $\exists x\ r(x)$ گزاره‌ای راست است، در حالی‌که $\forall x\ \overline{r(x)}$ و $\exists x\ \overline{r(x)}$ هر دو دروغ‌اند.

مثال زیر نشان می‌دهد که چگونه این مفاهیم جدید سورها را می‌توان با ادات منطقی بیان کرد.

مثال ۳۰.۲ در اینجا عالم سخن شامل همهٔ اعداد حقیقی است. گزاره‌نماهای $p(x)$، $q(x)$، $r(x)$، و $s(x)$ به‌صورت زیر داده شده‌اند

$$\begin{aligned} p(x):&\quad x \geq ۰ \\ q(x):&\quad x^۲ \geq ۰ \\ r(x):&\quad x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \\ s(x):&\quad x^۲ - ۳ > ۰ \end{aligned}$$

در این صورت گزاره‌های زیر راست‌اند.

۱. $$\exists x[p(x) \wedge r(x)]$$

این گزاره بدین دلیل نتیجه می‌شود که مثلاً عدد حقیقی ۴، عضوی از عالم سخن، و به‌گونه‌ای است که گزاره‌های $p(۴)$ و $r(۴)$ هر دو راست‌اند.

۲. $$\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$$

اگر در $p(x)$ به‌جای x عدد حقیقی منفی a را قرار دهیم، آن‌گاه $p(a)$ دروغ می‌شود، امّا $p(a) \rightarrow q(a)$، ارزش راستی $q(a)$ هر چه باشد، راست است. با قرار دادن عدد حقیقی نامنفی b به‌جای x در $p(x)$، ملاحظه می‌کنیم که $p(b)$ و $q(b)$، هر دو راست‌اند، و همچنین $p(b) \rightarrow q(b)$. در نتیجه، $p(x) \rightarrow q(x)$ به‌ازای همهٔ مقادیر عالم اعداد حقیقی که به‌جای x گذاشته می‌شود، راست است و گزارهٔ (مسوّر) $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$ راست است.

این گزاره را می‌توان به یکی از دو صورت زیر تبدیل کرد:

الف) برای هر عدد حقیقی x، اگر $x \geq ۰$، آن‌گاه $x^۲ \geq ۰$.

ب) هر عدد حقیقی نامنفی دارای مربع نامنفی است.

همچنین گزارهٔ $\exists x[p(x) \rightarrow q(x)]$ راست است.

گزاره‌های بعدی که بررسی می‌کنیم دروغ‌اند.

۱′. $$\forall x[q(x) \rightarrow s(x)]$$

می‌خواهیم نشان دهیم که این گزاره دروغ است، لذا نیاز به ارائهٔ یک مثال نقض داریم–یعنی به‌جای اثبات گزاره برای همهٔ xها، نظیر آنچه برای گزارهٔ (۲) انجام دادیم، مقداری از x را می‌یابیم که به‌ازای آن $q(x) \to s(x)$ دروغ باشد. به‌جای x مقدار ۱ قرار می‌دهیم، و ملاحظه می‌کنیم که $q(۱)$ راست و $s(۱)$ دروغ است. بنابراین $q(۱) \to s(۱)$ دروغ است، و در نتیجهٔ گزارهٔ (مسوّر) $\forall x[q(x) \to s(x)]$ دروغ است. (توجه کنید که $x = ۱$ تنها مثال نقض را به ما نمی‌دهد: هر عدد حقیقی a بین $-\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۳}$، $q(a)$ را به‌گزارهٔ راست و $s(a)$ را به‌گزاره دروغ بدل می‌کند.)

.۲′ $$\forall x[r(x) \vee s(x)]$$

در اینجا مثالهای نقض زیادی، نظیر ۱، $\frac{۱}{۲}$، $-\frac{۳}{۲}$، و ۰ وجود دارند. امّا با تعویض سورها متوجه می‌شویم که گزارهٔ $\exists x[r(x) \vee s(x)]$ راست است.

.۳′ $$\forall x[r(x) \to p(x)]$$

عدد حقیقی -۱ جواب معادلهٔ $x^۲ - ۳x - ۴ = ۰$ است، پس $r(-۱)$ راست است در حالی‌که $p(-۱)$ دروغ است. بنابراین انتخاب -۱، تنها مثال نقضی را که برای اثبات راست نبودن این گزارهٔ (مسوّر) لازم داریم به ما می‌دهد.

گزارهٔ (۳′) را می‌توان به‌یکی از دو صورت زیر برگرداند:

الف) برای هر عدد حقیقی x، اگر $x^۲ - ۳x - ۴ = ۰$، آن‌گاه $x \geq ۰$.

ب) برای هر عدد حقیقی x، اگر x جواب معادلهٔ $x^۲ - ۳x - ۴ = ۰$ باشد، آن‌گاه $x \geq ۰$. □

از مطالعهٔ مثال ۳۰.۲، به ملاحظات ذیل می‌رسیم. فرض کنید $p(x)$ معرف گزاره نمایی (برحسب متغیر x) است که عالم سخن آن از پیش ناتهی گرفته شده (یعنی عالم سخن آن شامل حداقل یک درایه) است. در این‌صورت اگر $\forall x p(x)$ راست باشد، $\exists x p(x)$ نیز راست است، یا

$$\forall x p(x) \Rightarrow \exists x p(x)$$

امّا، اگر $\exists x p(x)$ راست باشد، لازم نمی‌آید که $\forall x p(x)$ راست باشد. بنابراین $\exists x p(x)$ منطقاً مستلزم $\forall x p(x)$ نیست.

مثال بعد نشان می‌دهد که چگونه ارزش راستی گزارهٔ مسوّر ممکن است به‌عالم سخنی از پیش تعیین شده بستگی داشته باشد.

مثال ۳۱.۲ گزاره‌نمای $p(x) : x^۲ \geq ۰$ را در نظر بگیرید.

۱. اگر عالم سخن، همهٔ اعداد حقیقی باشد، آن‌گاه گزارهٔ مسوّر $\forall x p(x)$ راست است.

۲. امّا وقتی عالم سخن اعداد مختلط‌اند، همین گزارهٔ مسوّر $\forall xp(x)$ دروغ است. عدد مختلط i یکی از بسیار مثالهای نقض ممکن را به ما می‌دهد.

باز هم برای هر کدام از این عالمها، گزارهٔ مسوّر $\exists xp(x)$ راست است. □

استفاده از سورها در علم کامپیوتر در مثال زیر نشان داده شده‌است.

مثال ۳۲.۲ در قطعه برنامهٔ پاسکال زیر، n متغیری صحیح، و متغیر A آرایهٔ $A[۱]$، $A[۲]$، ...، $A[۲۰]$ از ۲۰ مقدار صحیح است

```
For n := 1 to 20 do
    A[n] := n*n - n;
```

گزاره‌های زیر دربارهٔ آرایهٔ A را می‌توان به‌صورت مسوّر زیر نمایش داد، که در آن، عالم سخن، همهٔ اعداد صحیح از ۱ تا ۲۰ و خود ۲۰ است.

۱. هر درایه در آرایه، نامنفی است:

$$\forall n(A[n] \geq ۰)$$

۲. عدد صحیح $A[۲۰]$ بزرگترین درایه در آرایه است:

$$\forall n[(۱ \leq n \leq ۱۹) \rightarrow (A(n) < A[۲۰])]$$

۳. دو درایهٔ متوالی در A وجود دارند که درایهٔ بزرگتر دو برابر درایهٔ کوچکتر است:

$$\exists n(A[n+۱] = ۲A[n])$$

۴. درایه‌های این آرایه به‌ترتیب صعودی مرتب شده‌اند:

$$\forall n[(۱ \leq n \leq ۱۹) \rightarrow (A[n] < A[n+۱])]$$

آخرین گزاره مستلزم استفاده از دو متغیر m و n است.

۵. درایه‌های این آرایه از هم متمایزند:

$$\forall m \forall n[(m \neq n) \rightarrow (A[m] \neq A[n])]$$

یا

$$\forall m,n[(m < n) \rightarrow (A[m] \neq A[n])]$$ □

جدول ۱۵.۲

حکم	چه موقع راست است؟	چه موقع دروغ است؟
$\exists x\ p(x)$	برای (حداقل یک) a در عالم سخن، $p(a)$ راست است.	برای هر a در عالم سخن، $p(a)$ دروغ است.
$\forall x\ p(x)$	برای هر مقدار a از عالم سخن $p(a)$ راست است.	حداقل یک مقدار a از عالم سخن وجود دارد که به‌ازای آن $p(a)$ دروغ است.
$\exists x\ \overline{p(x)}$	برای حداقل یک انتخاب a در عالم سخن، $p(a)$ دروغ است، پس نقیض آن، $\overline{p(a)}$ راست است.	برای هر مقدار a از عالم سخن $p(a)$ راست است.
$\forall x\ \overline{p(x)}$	برای هر مقدار a از عالم سخن، $p(a)$ دروغ است، و نقیض آن $\overline{p(a)}$ راست است.	حداقل یک مقدار a از عالم سخن وجود دارد که به‌ازای آن $\overline{p(a)}$ دروغ است و $p(a)$ راست است.

قبل از ادامه، آنچه را که دربارهٔ سورها فراگرفتیم در جدول ۱۵.۲ خلاصه می‌کنیم و تا حدّی تعمیم می‌دهیم.

به‌دلیل اینکه نتایج جدول ۱۵.۲ متضمن تنها یک گزاره نماست، اینک می‌خواهیم مطالعهٔ سورها را با بررسی گزاره‌هایی که در آنها بیش از یک گزاره‌نما ظاهر می‌شود ادامه دهیم. مثال بعد آغاز راه ماست.

مثال ۳۳.۲ در اینجا عالم سخن همهٔ اعداد صحیح است، و گزاره نماهای $r(x)$ و $s(x)$ با روابط

$$r(x): \quad ۲x + ۱ = ۵$$
$$s(x): \quad x^۲ = ۹$$

داده شده‌اند.

می‌بینیم که حکم $\exists x[r(x) \wedge s(x)]$ دروغ است، زیرا عدد صحیح a وجود ندارد به‌قسمی که $۲a + ۱ = ۵$ و $a^۲ = ۹$. امّا عدد صحیح $b(= ۲)$ موجود است به‌قسمی که $۲b + ۱ = ۵$، و عدد صحیح دومی، چون $c(= ۳$ یا $-۳)$ وجود دارد به‌قسمی که $c^۲ = ۹$. بنابراین گزارهٔ $\exists x\ r(x) \wedge \exists x\ s(x)$ راست است. در نتیجه، سور وجودی $\exists x$ نسبت به‌ادات منطقی $\wedge$ توزیعی

نیست. این مثال نقض کافی برای نشان دادن

$$\exists x[r(x) \wedge s(x)] \not\Leftrightarrow [\exists x\, r(x) \wedge \exists x\, s(x)]$$

است که در آن نماد $\not\Leftrightarrow$ به‌معنی «منطقاً هم‌ارز نیست با» است. همچنین نشان داده می‌شود که

$$[\exists x r(x) \wedge \exists x s(x)] \not\Rightarrow \exists x[r(x) \wedge s(x)]$$

که در آن $\not\Rightarrow$ به‌معنی «منطقاً نتیجه نمی‌شود» است.

امّا دربارهٔ عکس یا به‌طور خلاصه عکس حکم مسوّری به این صورت چه می‌توان گفت؟ در این مرحله استدلالی کلی برای گزاره‌نماهای دلخواه $p(x)$، $q(x)$، و هر عالم سخنی که از پیش توصیف شده ارائه می‌کنیم.

با بررسی گزارهٔ

$$\exists x[p(x) \wedge q(x)] \rightarrow [\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)]$$

درمی‌یابیم که وقتی فرض $\exists x[p(x) \wedge q(x)]$ راست است، حداقل یک عنصر c در عالم سخن وجود دارد که برای آن، گزارهٔ $p(c) \wedge q(c)$ راست است. بنابر قاعدهٔ ساده‌سازی ترکیب عطفی (بخش ۳.۲ را ببینید) $[p(c) \wedge q(c)] \Rightarrow p(c)$. از راستی $p(c)$ گزارهٔ راست $\exists x p(x)$ را به‌دست می‌آوریم. به‌همین منوال، گزارهٔ راست دیگر $\exists x q(x)$ را به‌دست می‌آوریم. سپس قاعدهٔ ترکیب عطفی (که آن هم در بخش ۳.۲ معرفی شد) گزارهٔ راست $\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)$ را می‌دهد. در نتیجه،

$$\exists x[p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow [\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)]$$

□

استدلالهایی نظیر این استدلال، راستگوهایی را که در جدول ۱۶.۲ فهرست شده‌اند در اختیار می‌گذارند. برهانهای بعضی از این قضایا، و مثالهای نقض وابسته به‌آنها، در تمرینهای این بخش بررسی خواهند شد.

علاوه بر رابطه‌هایی که در جدول ۱۶.۲ فهرست شده‌اند، راستگوهای بسیار دیگری را می‌توان از قانونهای منطق و استلزامهای منطقی و هم‌ارزیهای منطقی داده شده در بخشهای ۲.۲ و ۳.۲ نتیجه گرفت. مثال بعدی، فهرست تعدادی از اینها و چگونگی تحقیق درستی دو تا از آنها را نشان می‌دهد.

جدول ۱۶.۲ رابطه‌های منطقی برای گزاره‌های مسوّر یک متغیره

برای عالم سخنی که از پیش توصیف شده و گزاره‌نماهای یک متغیرهٔ $p(x)$ و $q(x)$ برحسب متغیر x، داریم:
$\exists x[p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow [\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)]$
$\exists x[p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow [\exists x p(x) \vee \exists x q(x)]$
$\forall x[p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow [\forall x p(x) \wedge \forall x q(x)]$
$[\forall x p(x) \vee \forall x q(x)] \Rightarrow \forall x[p(x) \vee q(x)]$

مثال ۳۴.۲ فرض کنید $p(x)$، $q(x)$، و $r(x)$ معرّف گزاره نماهایی برای عالم سخن مفروضی باشند. راستگوهای زیر را به‌دست می‌آوریم. (راستگوهای بیشتری هم ممکن است به‌دست آورد.)

۱. $\forall x[p(x) \wedge (q(x) \wedge r(x))] \Leftrightarrow \forall x[(p(x) \wedge q(x)) \wedge r(x)]$

برای اثبات این هم‌ارزی منطقی، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

برای همهٔ aهای عالم سخن، گزاره‌های $p(a) \wedge (q(a) \wedge r(a))$ و $(p(a) \wedge q(a)) \wedge r(a)$ را در نظر می‌گیریم. بنابر قانون توزیعپذیری برای $\wedge$، داریم

$$p(a) \wedge (q(a) \wedge r(a)) \Leftrightarrow (p(a) \wedge q(a)) \wedge r(a)$$

در نتیجه، برای گزاره‌نماهای $p(x) \wedge (q(x) \wedge r(x))$ و $(p(x) \wedge q(x)) \wedge r(x)$ نتیجه می‌شود که

$$\forall x[p(x) \wedge (q(x) \wedge r(x))] \Leftrightarrow \forall x[(p(x) \wedge q(x)) \wedge r(x)]$$

۲. $\exists x[p(x) \rightarrow q(x)] \Leftrightarrow \exists x[\overline{p(x)} \vee q(x)]$

برای هر c در عالم سخن، از مثال ۶.۲ نتیجه می‌شود که

$$[p(c) \rightarrow q(c)] \Leftrightarrow [\overline{p(c)} \vee q(c)]$$

بنابراین، گزاره‌های $\exists x[p(x) \rightarrow q(x)]$ و $\exists x[\overline{p(x)} \vee q(x)]$ همزمان راست (یا دروغ)اند، پس

$$\exists x[p(x) \rightarrow q(x)] \Leftrightarrow \exists x[\overline{p(x)} \vee q(x)]$$

۳. راستگوهای دیگری که اغلب مفیدند شامل راستگوهای زیرند

الف) $\forall x\, \overline{\overline{p(x)}} \Leftrightarrow \forall x p(x)$

ب) $\forall x[\overline{p(x) \wedge q(x)}] \Leftrightarrow \forall x[\overline{p(x)} \vee \overline{q(x)}]$

ج) $\forall x[\overline{p(x) \vee q(x)}] \Leftrightarrow \forall x[\overline{p(x)} \wedge \overline{q(x)}]$

۴. نتایج حاصل از راستگوهای ۳ (الف)، (ب)، و (ج)، وقتی به‌جای همهٔ سورهای عمومی، سورهای وجودی قرار گیرند، معتبر می‌مانند. □

نتایج جدولهای ۱۵.۲ و ۱۶.۲، و مثالهای ۳۳.۲ و ۳۴.۲، حالا در یک مفهوم بسیار مهم به ما یاری می‌دهند. چگونه نقیض گزاره‌های مسوّری را که شامل یک متغیرند به‌دست می‌آوریم؟

گزارهٔ $\forall x p(x)$ را در نظر بگیرید. صورتی از نقیض آن، $\overline{\forall x p(x)}$، را می‌توان به‌صورت «چنین نیست که برای همهٔ x ها، $p(x)$ برقرار است.» بیان کرد.

این نتیجه چندان سودمند نیست. امّا در نظرگرفتن آن بیشتر موجب توجه ما به این است که به ازای مقداری چون a از عالم سخن، گزارهٔ حاصل $p(a)$ برقرار نیست، لذا $\exists x \overline{p(x)}$ راست است.

برعکس، وقتی گزارهٔ $\exists x \overline{p(x)}$ را در نظر می‌گیریم، در می‌یابیم که برای حداقل یک مقدار a از عالم سخن، $\overline{p(a)}$ راست است، لذا $p(a)$ دروغ است. در این‌صورت، گزارهٔ $\forall x p(x)$ دروغ است، لذا $\overline{\forall x p(x)}$ راست است.

این مشاهدات به قاعدهٔ زیر برای به‌دست آوردن نقیض گزارهٔ $\forall x p(x)$ منجر می‌شود.

$$\overline{\forall x p(x)} \Leftrightarrow \exists x \overline{p(x)}$$

به‌همین طریق، جدول ۱۵.۲ نشان می‌دهد که گزارهٔ $\exists x p(x)$ دقیقاً وقتی راست (دروغ) است که گزارهٔ $\forall x \overline{p(x)}$ دروغ (راست) باشد. لذا این مشاهده قاعده‌ای برای یافتن نقیض گزارهٔ $\exists x p(x)$ به ما می‌دهد که چنین است

$$\overline{\exists x p(x)} \Leftrightarrow \forall x\, \overline{p(x)}$$

این دو قاعده برای نقیض، و دو قاعدهٔ دیگری که از آنها نتیجه می‌شوند، برای سهولت مراجعه، در جدول ۱۷.۲ داده شده‌اند

در مثالهای زیر، قاعده‌های به‌دست آوردن گزاره‌های مسوّر را به‌کار می‌بریم.

مثال ۳۵.۲ در اینجا نقیض دو گزاره را به‌دست می‌آوریم که عالم سخن آنها همهٔ اعداد صحیح است.

جدول ۱۷.۲ قاعده‌هایی برای به‌دست آوردن نقیض
گزاره‌هایی که یک سور دارند

$$\overline{\forall x p(x)} \Leftrightarrow \exists x \overline{p(x)}$$
$$\overline{\exists x p(x)} \Leftrightarrow \forall x \overline{p(x)}$$
$$\overline{\forall x\ \overline{p(x)}} \Leftrightarrow \exists x\ \overline{\overline{p(x)}} \Leftrightarrow \exists x p(x)$$
$$\overline{\exists x\ \overline{p\ (x)}} \Leftrightarrow \forall x\ \overline{\overline{p(x)}} \Leftrightarrow \forall x p(x)$$

۱. فرض کنید $p(x)$ و $q(x)$ به‌وسیلهٔ

$$p(x): \quad x \text{ فرد است}$$
$$q(x): \quad x^۲ - ۱ \text{ زوج است}$$

داده شده باشند.
گزارهٔ «اگر x فرد باشد، آن‌گاه $x^۲ - ۱$ زوج است» را می‌توان به‌صورت نمادی $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$ نوشت. (این، گزاره‌ای راست است.)
نقیض این گزاره به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\overline{\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]} \Leftrightarrow \exists x\overline{[p(x) \rightarrow q(x)]} \Leftrightarrow \exists x\overline{[\overline{p(x)} \vee q(x)]}$$
$$\Leftrightarrow \exists x[\overline{\overline{p(x)}} \wedge \overline{q(x)}] \Leftrightarrow \exists x[p(x) \wedge \overline{q(x)}]$$

به‌صورت کلامی، این نقیض می‌گوید «عدد صحیح xی وجود دارد به‌قسمی که x فرد است و $x^۲ - ۱$ فرد است (یعنی، زوج نیست).» (این گزاره دروغ است.)
۲. نظیر مثال ۳۳.۲، فرض کنید $r(x)$ و $s(x)$ گزاره‌نما باشند.

$$r(x): \quad ۲x + ۱ = ۵$$
$$s(x): \quad x^۲ = ۹$$

گزارهٔ مسوّر $\exists x[r(x) \wedge s(x)]$ دروغ است زیرا وجود حداقل یک عدد صحیح a را تصدیق می‌کند به‌قسمی که $۲a + ۱ = ۵$، $(a = ۲)$، و $a^۲ = ۹$ $(a = ۳$ یا $a = -۳)$. در نتیجه، نقیض آن

$$\overline{\exists x[r(x) \wedge s(x)]} \Leftrightarrow \forall x\overline{[r(x) \wedge s(x)]} \Leftrightarrow \forall x[\overline{r(x)} \vee \overline{s(x)}]$$

راست است. به‌صورت کلامی، این نقیض را می‌توان چنین بیان کرد «برای هر عدد صحیح x، $2x+1 \neq 5$ یا $x^2 \neq 9$.» □

چون یک گزارهٔ ریاضیاتی ممکن است متضمن بیش از یک سور باشد، این بخش را با عرضه چند مثال و انجام مشاهداتی از این نوع گزاره‌ها ادامه می‌دهیم.

مثال ۳۶.۲ در اینجا دو متغیر x و y داریم که هر دو اعداد حقیقی‌اند. (عالم سخن متشکل از همهٔ اعداد حقیقی است.) قانون تعویض‌پذیری برای جمع اعداد حقیقی را می‌توان به‌وسیلهٔ

$$\forall x \forall y (x+y=y+x)$$

بیان کرد. این گزاره را می‌توان به‌صورت

$$\forall y \forall x (x+y=y+x)$$

نیز نوشت.

همچنین، در مورد ضرب اعداد حقیقی، می‌توانیم بنویسیم

$$\forall x \forall y (xy=yx) \text{ یا } \forall y \forall x (xy=yx)$$

این دو مثال، نتیجهٔ کلی زیر را القا می‌کند. اگر $p(x,y)$ گزاره‌نمایی برحسب دو متغیر x و y باشد (خواه با یک عالم سخن معین برای x و y هر دو، یا خواه یک عالم سخن معین برای x و یک عالم سخن دیگر برای y)، آن‌گاه گزاره‌های $\forall x \forall y p(x,y)$ و $\forall y \forall x p(x,y)$ منطقاً هم‌ارزند، یعنی

$$\forall x \forall y p(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x p(x,y)$$

□

مثال ۳۷.۲ وقتی با قانون شرکت‌پذیری جمع اعداد حقیقی سر و کار داریم ملاحظه می‌کنیم که برای اعداد حقیقی دلخواه x، y، و z داریم

$$x+(y+z)=(x+y)+z$$

با استفاده از سورهای عمومی (با عالم سخن همهٔ اعداد حقیقی)، می‌توان این برابری را به‌وسیلهٔ

$$\forall x \forall y \forall z[x+(y+z)=(x+y)+z]$$

یا

$$\forall y \forall x \forall z[x+(y+z)=(x+y)+z]$$

بیان کرد. در واقع $۶ = ۳!$ راه برای مرتب کردن این سه سور عمومی، وجود دارد، و همهٔ شش گزارهٔ مسوّر منطقاً هم‌ارز با هم‌اند.

این در واقع برای همهٔ گزاره نماهای $p(x, y, z)$ راست است، و برای کوتاه کردن نمادها، می‌توان مثلاً نوشت

$$\forall x, y, z\ p(x, y, z) \Leftrightarrow \forall y, x, z\ p(x, y, z) \Leftrightarrow \forall z, x, y\ p(x, y, z)$$

که بیانگر هم‌ارزی منطقی سه گزاره از شش گزاره است. □

نتایجی مشابه برای گزاره‌هایی با بیش از یک سور وجودی برقرارند ــ این مطلب در مثال زیر نشان داده شده‌است.

مثال ۳۸.۲ برای عالم سخن همهٔ اعداد صحیح، گزارهٔ راست «اعداد صحیح x و y وجود دارند به‌قسمی که $x + y = ۶$» را در نظر بگیرید. این گزاره را می‌توان به‌صورت نمادی به‌وسیلهٔ

$$\exists x \exists y\ (x + y = ۶)$$

نمایش داد. در اینجا $p(x, y)$ معرف گزاره‌نمای «$x + y = ۶$» است. همین نتیجه را می‌توان به‌وسیلهٔ $\exists y \exists x\ p(x, y)$ نیز بیان کرد.

به‌طورکلی، برای هرگزاره‌نمای $p(x, y)$ و عالم (عالمهای) سخن مشخص برای متغیرهای x و y

$$\exists x \exists y\ p(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x p(x, y)$$

نتایجی مشابه برای گزاره‌هایی که متضمن سه سور یا بیشترند حاصل می‌شوند. □

وقتی گزاره‌ای شامل هم سورهای وجودی و هم سورهای عمومی است، باید دربارهٔ ترتیب نوشتن سورها دقت کنیم. مثال ۳۹.۲ این مطلب را روشن می‌کند.

مثال ۳۹.۲ در اینجا خود را به‌عالم سخن همهٔ اعداد صحیح مقید و فرض می‌کنیم $p(x, y)$ معرف گزاره‌نمای «$x + y = ۱۷$» باشد.

۱. گزارهٔ

$$\forall x \exists y\ p(x, y)$$

می‌گوید که «برای هر عدد صحیح x، عدد yی وجود دارد به‌قسمی که $x + y = ۱۷$» (سورها را از چپ به‌راست می‌خوانیم.)

این گزاره راست است؛ به‌محض اینکه xی انتخاب کنیم عدد صحیح $y = ۱۷ - x$ وجود دارد و $x + y = x + (۱۷ - x) = ۱۷$. امّا ملاحظه می‌کنیم که مقادیر متفاوت x به مقادیر متفاوتی از y منجر می‌شوند.

۲. اینک گزارهٔ

$$\exists y \forall x\ p(x, y)$$

را در نظر بگیرید.

این گزاره چنین خوانده می‌شود «عدد صحیح yی وجود دارد به‌قسمی که برای همهٔ اعداد صحیح x، $x + y = ۱۷$.» این قطعاً دروغ است. به‌محض اینکه یک عدد صحیح y انتخاب شود، تنها مقداری که x می‌تواند داشته باشد (و باز در $x + y = ۱۷$ صادق باشد) برابر $۱۷ - y$ است.

اگر گزارهٔ $\exists y \forall x p(x, y)$ راست بود، آن‌گاه هر عدد صحیح (x) به‌ازای مقدار معینی از y برابر با $۱۷ - y$ می‌شد. در نتیجه این گزاره می‌گوید که همهٔ اعداد صحیح با هم برابرند!

در نتیجه، مواردی وجود دارند که گزاره‌های $\forall x \exists y p(x, y)$ و $\exists y \forall x p(x, y)$ منطقاً هم‌ارز نیستند. $\square$

برگردان گزاره‌های ریاضیاتی ــ خواه اصول موضوع باشند، یا خواه تعریفها، یا قضایا ــ به‌صورت نمادی به‌دو دلیل مهمّ می‌تواند مفید باشد.

۱. واداشتن ما به اینکه دربارهٔ معانی گزاره‌ها، معانی جمله‌هایی نظیر «برای همهٔ xها» و «xی وجود دارد» و ترتیبی که در آن این جمله‌ها ظاهر می‌شوند بسیار محتاط و دقیق باشیم.

۲. به‌کار بردن قواعدی که فراگرفتیم ــ البته پس از برگردان یک گزارهٔ ریاضی به‌صورت نمادی ــ هنگامی که می‌خواهیم گزاره‌های وابسته‌ای نظیر نقیض، یا اگر مناسب باشد، عکس نقیض، عکس، یا عکس مستوی، را تعیین کنیم.

دو مثال بعدی ما این مطلب را روشن می‌کند. و با این کار، نتایج جدول ۱۷.۲ را توسیع می‌بخشد.

مثال ۴۰.۲ فرض کنید $p(x, y)$، $q(x, y)$، و $r(x, y)$ معرف سه گزاره‌نما باشند که برای جایگذاریها، متغیرهای x، y از عالم(های) سخن مشخصی انتخاب می‌شوند. نقیض گزارهٔ زیر چیست؟

$$\forall x \exists y [(p(x, y) \wedge q(x, y)) \to r(x, y)]$$

چنین به‌دست می‌آوریم که

$$\begin{aligned}
&\overline{\forall x \exists y[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y)]} \\
\Leftrightarrow &\exists x \overline{\exists y[(p(x,y) \wedge q(x,y) \rightarrow r(x,y)]} \\
\Leftrightarrow &\exists x \forall y[\overline{(p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y)}] \\
\Leftrightarrow &\exists x \forall y[\overline{\overline{(p(x,y) \wedge q(x,y))} \vee r(x,y)}] \\
\Leftrightarrow &\exists x \forall y[\overline{\overline{(p(x,y) \wedge q(x,y)}} \wedge \overline{r(x,y)}] \\
\Leftrightarrow &\exists x \forall y[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \wedge \overline{r(x,y)}]
\end{aligned}$$

اینک فرض کنید که می‌خواهیم قضیه‌ای را ثابت کنیم که

$$\forall x \exists y[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y)]$$

حکم آن است. اگر بخواهیم قضیه را به‌روش برهان خلف ثابتِ کنیم، نقیض این حکم را به‌عنوان فرضی اضافی می‌پذیریم. در نتیجه، فرض اضافی، حکم زیر است

$$\exists x \forall y[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \wedge \overline{r(x,y)}]$$

□

بالاخره، می‌خواهیم ببینیم چگونه نقیض تعریف حدّ را، که مفهومی اساسی در حسابان است، به‌دست می‌آوریم.

مثال ۴۱.۲ در حسابان، ویژگیهای تابعهای حقیقی-مقدار را مطالعه می‌کنند. (تابعها در فصل ۵ این کتاب بررسی خواهند شد.) یکی از این ویژگیها، ویژگی وجود حدّ است، که تعریف آن چنین است: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ اگر (و تنها اگر) برای هر $\epsilon > 0$، δیی مثبت وجود داشته باشد به‌قسمی که برای همهٔ مقادیر x (که برای آن $f(x)$ تعریف شده‌است)،

$$(0 < |x-a| < \delta) \rightarrow (|f(x) - L| < \epsilon)$$

این مطلب را می‌توان به‌صورت نمادی زیر بیان کرد

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x[(0 < |x-a| < \delta) \rightarrow (|f(x) - L| < \epsilon)]$$

(در اینجا، عالم سخن، اعداد حقیقی است و ما تنها آن مقادیر حقیقی x را که به‌ازای آنها $f(x)$ تعریف شده است در نظر می‌گیریم. همچنین سورهای $\forall \epsilon > 0$ و $\exists \delta > 0$ اینک متضمن

اطلاعاتی محدودند.) در این‌صورت، برای پیدا کردن نقیض این تعریف، مطابق زیر عمل می‌کنیم (چند گام را ترکیب کرده‌ایم):

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to a} f(x) \neq L \\
\Leftrightarrow &\overline{\forall\epsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \forall x[(0<|x-a|<\delta)\to(|f(x)-L|<\epsilon)]} \\
\Leftrightarrow &\exists\epsilon>0\quad \forall\delta>0\quad \exists x[\overline{\overline{(0<|x-a|<\delta)}\vee(|f(x)-L|<\epsilon)}] \\
\Leftrightarrow &\exists\epsilon>0\quad \forall\delta>0\quad \exists x[(0<|x-a|<\delta)\wedge\overline{(|f(x)-L|<\epsilon)}] \\
\Leftrightarrow &\exists\epsilon>0\quad \forall\delta>0\quad \exists x[(0<|x-a|<\delta)\wedge(|f(x)-L|\geq\epsilon)]
\end{aligned}
$$

از برگردان آن به بیان کلامی، به‌دست می‌آوریم که $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$، اگر و تنها اگر عدد مثبت (حقیقی) ϵای وجود داشته باشد به‌قسمی که برای هر عدد (حقیقی) مثبت δ، یک مقدار x موجود باشد (که برای آن $f(x)$ تعریف شده‌است) به‌قسمی که $0<|x-a|<\delta$ (یعنی، $x\neq a$ و فاصله‌اش از a کمتر از δ) امّا $|f(x)-L|\geq\epsilon$ (یعنی، مقدار $f(x)$ حداقل به‌اندازه ϵ با L تفاوت داشته‌باشد). □

تمرینهای ۴.۲

۱. برای عالم سخن همهٔ اعداد صحیح، فرض کنید $p(x)$، $q(x)$، $r(x)$، $s(x)$، و $t(x)$ گزاره‌نماهای زیر باشند

$p(x)$: $x>0$

$q(x)$: x زوج است

$r(x)$: x مربع کامل است

$s(x)$: x (دقیقاً) بر ۴ تقسیمپذیر است

$r(x)$: x (دقیقاً) بر ۵ تقسیمپذیر است

الف) گزاره‌های زیر را به‌صورت نمادی بنویسید.

(**i**) عدد صحیح مثبتی وجود دارد که زوج است.

(**ii**) اگر x زوج باشد، آن‌گاه x بر ۵ تقسیمپذیر نیست.

(**iii**) هر عدد صحیح زوج بر ۵ تقسیمپذیر نیست.

(**iv**) عدد صحیح زوجی وجود دارد که بر ۵ تقسیمپذیر است.

(**v**) اگر x زوج و مربع کامل باشد، x بر ۴ تقسیمپذیر است.

ب) تعیین کنید که از پنج گزارهٔ قسمت (الف) کدامها راست و کدامها دروغ‌اند.

برای هر کدام که دروغ است مثال نقضی پیدا کنید.

ج) هر یک از نمایشهای نمادی زیر را به‌صورت کلامی بیان کنید.

(i) $\forall x[r(x) \to p(x)]$ (iv) $\exists x[s(x) \wedge \overline{r(x)}]$

(ii) $\forall x[s(x) \to q(x)]$ (v) $\forall x[\overline{r(x)} \vee \overline{q(x)} \vee s(x)]$

(iii) $\forall x[s(x) \to \overline{t(x)}]$

د) برای هر یک از پنج گزارهٔ قسمت (ج) که دروغ است مثالی نقض پیدا کنید.

۲. فرض کنید $p(x)$، $q(x)$، و $r(x)$ معرف گزاره‌نماهای زیرند.

$p(x):\ x^{۲} - ۸x + ۱۵ = ۰$

$q(x):$ x فرد است

$r(x):\ x > ۰$

برای عالم سخن همهٔ اعداد صحیح، راست بودن یا دروغ بودن هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید. اگر گزاره‌ای دروغ است، مثالی نقض برای آن ارائه دهید.

الف) $\forall x[p(x) \to q(x)]$ ب) $\forall x[q(x) \to p(x)]$

ج) $\exists x[p(x) \to q(x)]$ د) $\exists x[q(x) \to p(x)]$

ه) $\exists x[r(x) \wedge p(x)]$ و) $\forall x[p(x) \to r(x)]$

ز) $\exists x[r(x) \to p(x)]$ ح) $\forall x[\overline{q(x)} \to \overline{p(x)}]$

ط) $\exists x[p(x) \to q(x) \wedge r(x))]$ ی) $\forall x[(p(x) \vee q(x)) \to r(x)]$

۳. فرض کنید $p(x)$، $q(x)$، و $r(x)$ گزاره‌نماهای زیر باشند

$p(x):\ x^{۲} - ۷x + ۱۰ = ۰$

$q(x):\ x^{۲} - ۲x - ۳ = ۰$

$r(x):\ x < ۰$

الف) راست بودن یا دروغ بودن گزاره‌های زیر را، که برای آنها عالم سخن همهٔ اعداد صحیح است تعیین کنید. اگر گزاره‌ای دروغ است، مثالی نقض یا توضیحی برای آن تهیه کنید.

(i) $\forall x[p(x) \to \overline{r(x)}]$ (iii) $\exists x[q(x) \to r(x)]$

(ii) $\forall x[q(x) \to r(x)]$ (iv) $\exists x[p(x) \to r(x)]$

ب) وقتی عالم سخن، همهٔ اعداد صحیح مثبت است، به‌قسمت (الف) پاسخ دهید.

ج) وقتی عالم سخن، تنها اعداد ۲ و ۵ است پاسخهای قسمت (الف) را بیابید.

۴. برای قطعه برنامهٔ پاسکال زیر، m و n متغیرهای صحیح‌اند. متغیر A، آرایهٔ دو بعدی $A[1,1]$، $A[1,2]$، ...، $A[1,20]$، ...، $A[10,1]$، ...، $A[10,20]$، با ۱۰ سطر (با اندیس از ۱ تا ۱۰) و ۲۰ ستون (با اندیس از ۱ تا ۲۰) است.

```
For m := 1 to 10 do
   For n := 1 to 20 do
      A[m,n] := m + 3*n;
```

گزاره‌های زیر را به‌صورت نمادی بنویسید. (عالم سخن برای متغیر m، تنها اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰ است؛ برای n، عالم سخن، اعداد صحیح از ۱ تا ۲۰ است.)

الف) همهٔ درایه‌های A مثبت‌اند.

ب) تمام درایه‌های A مثبت و کوچکتر از ۷۰ یا برابر آن هستند.

ج) بعضی از درایه‌های A از ۶۰ زیادترند.

د) درایه‌های هر سطر A به‌ترتیب صعودی مرتب شده‌اند.

ه) درایه‌های هر ستون A به‌ترتیب صعودی مرتب شده‌اند.

و) درایه‌های سه سطر اول A از هم متمایزند.

ز) درایه‌های هر سه سطر متوالی A از هم متمایزند.

ح) برای هر دو سطر متوالی A، مجموع درایه‌های سطر دوم (سطری که در این دو سطر اندیس سطری بزرگتر را دارد) ۲۰ تا بیشتر از مجموع درایه‌های سطر قبلی است.

ط) در هر دو ستون مجاور A درایه‌هایی تکراری وجود دارند.

ی) همهٔ درایه‌های سوّمین، ششمین، و نهمین سطر A بر ۳ تقسیم‌پذیرند.

۵. نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را به‌دست آورید و آن را ساده کنید.

الف) $\exists x[p(x) \vee q(x)]$ ب) $\forall x[p(x) \wedge \overline{q(x)}]$

ج) $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$ د) $\exists x[(p(x) \vee q(x)) \rightarrow r(x)]$

ه) $\exists x[p(x) \rightarrow (q(x) \wedge r(x))]$

۶. الف) فرض کنید $p(x)$ و $q(x)$ گزاره‌نماهایی برحسب متغیر x، با عالم سخن مفروض، باشند. ثابت کنید که

$$\forall x p(x) \vee \forall x q(x) \Rightarrow \forall x\, [p(x) \vee q(x)]$$

ب) برای عکس قسمت (الف) مثالی نقض بیابید. یعنی گزاره‌نماهای $p(x)$ و $q(x)$ و عالم سخنی بیابید به‌قسمی که $\forall x[p(x) \vee q(x)]$ راست باشد، در حالی‌که $\forall x p(x) \vee \forall x q(x)$ دروغ باشد.

۷. برای عالم سخنی معین و گزاره‌نماهای دلخواه $p(x)$ و $q(x)$ برحسب متغیر x، ثابت کنید که

الف) $\exists x[p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow \exists x p(x) \vee \exists x q(x)$

ب) $\forall x[p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow \forall x p(x) \wedge \forall x q(x)$

۸. برای گزاره‌های زیر، عالم سخن شامل همهٔ اعداد صحیح غیر صفر است. ارزش راستی هر گزاره را تعیین کنید.

الف) $\exists x \exists y[xy = ۱]$

ب) $\exists x \forall y[xy = ۱]$

ج) $\forall x \exists y[xy = ۱]$

د) $\forall x \forall y[\sin^۲ x + \cos^۲ x = \sin^۲ y + \cos^۲ y]$

هـ) $\exists x \exists y[(۲x + y = ۵) \wedge (x - ۳y = -۸)]$

و) $\exists x \exists y[(۳x - y = ۷) \wedge (۲x + ۴y = ۳)]$

۹. برای عالم سخن همهٔ اعداد حقیقی غیر صفر به تمرین ۸ پاسخ دهید.

۱۰. در حساب اعداد حقیقی، عددی حقیقی به‌نام عنصر همانی جمع، که همان ۰ است، وجود دارد، زیرا برای هر عدد حقیقی a، $a + ۰ = ۰ + a = a$. این مطلب را می‌توان به‌صورت نمادی به‌وسیلهٔ

$$\exists z \forall a[a + z = z + a = a]$$

بیان کرد. (می‌پذیریم که عالم سخن متشکل از همهٔ اعداد حقیقی است.)

الف) همراه با وجود یک عنصر همانی جمعی، وجود وارونهای جمعی است. گزاره‌ای مسوّر بنویسید که بیان کند «هر عدد حقیقی یک وارون جمعی دارد.» (در گزارهٔ خود هیچ جا از علامت منفی استفاده نکنید).

ب) گزاره‌ای مسوّر بنویسید که دالّ بر وجود عنصر همانی ضربی در حساب اعداد حقیقی باشد.

ج) گزاره‌ای مسوّر بنویسید که شامل وجود وارونهای ضربی برای اعداد حقیقی غیر صفر باشد. (در گزارهٔ خود در هیچ جا نمای ۱− را به‌کار نبرید.)

د) آیا وقتی عالم سخن به اعداد صحیح محدود است، نتایج قسمتهای (ب) و (ج) تغییر می‌کنند؟

۱۱. گزارهٔ مسوّر $\forall x \exists y[x + y = ۱۷]$ را در نظر بگیرید. تعیین کنید که آیا برای هر یک از عالمهای سخن زیر، این حکم راست است یا دروغ: (الف) اعداد صحیح؛ (ب) اعداد صحیح مثبت؛ (ج)

اعداد صحیح برای x، اعداد صحیح مثبت برای y؛ (د) اعداد صحیح مثبت برای x، اعداد صحیح برای y.

۱۲. فرض کنید برای متغیرهای موجود درگزاره‌های زیر، عالم سخن متشکل از همهٔ اعداد حقیقی باشد. در هر مورد، نقیض گزارهٔ داده شده را پیدا و آن را ساده کنید.

الف) $\forall x \forall y[(x > y \rightarrow (x - y > 0)]$

ب) $\forall x \forall y[[(x > 0) \wedge (y = \log_{10} x)] \rightarrow (x = 10^y)]$

ج) $\forall x \forall y[(x < y) \rightarrow \exists z(x < z < y)]$

د) $\forall x \forall y[(|x| = |y|) \rightarrow (y = \pm x)]$

ه) $[\forall x \forall y((x > 0) \wedge (y > 0))] \rightarrow \exists z(xz > y)]$

۱۳. در ریاضیات غالباً نه تنها می‌خواهیم وجود یک شیء a را (خواه عدد، مثلث یا هر چیز دیگر) که درگزاره‌نمای $p(x)$ صدق می‌کند تصدیق کنیم بلکه می‌خواهیم این واقعیت را تصدیق کنیم که شیء a تنها شیئی است که برای آن $p(x)$ صادق (راست) است. بنابراین شیء مزبور یکتاست. این امر، به‌وسیلهٔ سور $\exists! x$ نشان داده می‌شود و آن را « xی یکتا وجود دارد» می‌خوانند. این سور را می‌توان برحسب سورهای وجودی و عمومی تعریف کرد:

$$[\exists! x p(x)] \Leftrightarrow \{[\exists x p(x)] \wedge [\forall x \forall y[(p(x) \wedge p(y)) \rightarrow (x = y)]]\}$$

این تعریف نشان می‌دهد که «برهان وجود یکتا» هم نیاز به «برهان وجود» دارد، که غالباً با ساختن یک مثال صادق در $p(x)$ انجام می‌شود، و هم به «یکتایی برهان».

الف) گزاره‌های زیر را، با استفاده از این سور جدید به‌صورت نمادی بنویسید. (عالم سخن، همهٔ اعداد حقیقی فرض شده‌است.)

(i) هر عدد حقیقی غیر صفر دارای وارون ضربی یکتاست.

(ii) مجموع هر دو عدد حقیقی عددی یکتاست.

(iii) برای هر مختص x، مختص y متناظر با آن بر خط $y = 3x + 7$ یکتاست.

ب) فرض کنید $p(x, y)$ معرف گزاره‌نمای « $y = -2x$ » باشد. (در اینجا عالم سخن همهٔ اعداد صحیح است.) تعیین کنید که هر یک ازگزاره‌های زیر راست است یا دروغ.

(i) $[\forall x \exists! y p(x, y)] \rightarrow [\exists! y \forall x p(x, y)]$

(ii) $[\exists! y \forall x p(x, y)] \rightarrow [\forall x \exists! y p(x, y)]$

ج) برای گزاره نمای

$$p(x, y) : \text{زوج است } x + y$$

به قسمت (ب) پاسخ دهید.

د) گزارهٔ $p : \exists! x(x > 1)$ را در نظر بگیرید. مثالی از عالم سخن بیاورید که در آن p راست باشد و مثالی بیاورید که در آن p دروغ باشد.

۵.۲ خلاصه و مرور تاریخی

در این قسمت از فصل دوم بعضی از مبانی منطق ــبه‌ویژه، برخی از قاعده‌های استنتاج لازم برای اثبات قضایای ریاضیــ را معرفی کردیم.

اولین مطالعهٔ نظام‌مند استدلال منطقی در کارهای فیلسوف یونانی، ارسطو (۳۸۴ـ۳۲۲ قبل از میلاد) یافت شده‌است. این نوع منطق، به‌صورتی اصلاح شده تا قرون وسطی و در سراسر این قرون آموخته می‌شد.

ریاضیدان آلمانی گوتفریت ویلهلم لایبنیتس (۱۶۴۶ـ۱۷۱۶) را غالباً اولین عالمی می‌دانند که به‌صورت جدّی، بسط منطق نمادی را به‌عنوان زبان علمی جهانی پیگیری کرده‌است. این مطلب را در رساله‌اش در فن ترکیب[1]، که در ۱۶۶۶ منتشر شده بیان کرده‌است. پژوهش او در زمینهٔ منطق نمادی از ۱۶۷۹ تا ۱۶۹۰ انجام شده‌است و تکان قابل ملاحظه‌ای به آفرینش این نظام ریاضیاتی داده است.

در دنبال کار لایبنیتس، تا سدهٔ نوزدهم، که ریاضیدان انگلیسی، جورج بول (۱۸۱۵ـ۱۸۶۴) نظام منطق ریاضی را در ۱۸۴۷ در رسالهٔ تحلیل ریاضیاتی منطق[2]، کوششی در جهت حساب استدلال منطقی، عرضه کرد تغییر چندانی پدید نیامد. در همین سال، هموطن بول، اوگاستس دمورگن (۱۸۰۶ـ۱۸۷۱) منطق صوری؛ یا حساب استنتاج، لازم و محتمل را انتشار داد. این رساله به‌طرقی کار بول را به‌صورتی قابل ملاحظه وسعت داد. سپس، بول در ۱۸۵۴ افکار و پژوهشهای بعدی خود را در اثر مهمش، تحقیق در قوانین اندیشه، که نظریه‌های ریاضی منطق و احتمال بر پایهٔ آنها استوار است، به تفصیل بیان کرد.

مفاهیمی که به‌وسیلهٔ بول فرمولبندی شدند در اثر عالم آلمانی دیگر، ارنست شرودر[3] (۱۸۴۱ـ۱۹۰۲)، کاملاً مورد مطالعه قرار گرفتند. این نتایج جمعاً به‌صورت درسهایی در جبر منطق معروف شده‌اند. اینها از ۱۸۹۰ تا ۱۸۹۵ منتشر شدند.

بسطهای بعدی در این زمینه که حتی با روشی تازه‌تری تکامل یافته بودند در اثر منطقدان آلمانی گوتلیپ‌فرگه[4] (۱۸۴۸ـ۱۹۲۵) بین سالهای ۱۸۷۹ و ۱۹۰۳ ظاهر شدند. این کتاب تاثیری چشمگیر بر پرینکیپیا ماتماتیکا[5] (=اصول ریاضیات) (۱۹۱۰ـ۱۹۱۳) اثر عظیم آلفرد نورث وایتهد[6] (۱۸۶۱ـ۱۹۴۷) و برتراند راسل (۱۸۷۲ـ۱۹۷۰) داشت. در اینجا آنچه را که بول شروع کرده بود سرانجام به بار نشست. به برکت این تلاش استثنایی و آثار ریاضیدانان و منطقدانان دیگر

---
1. De Arte Combinatoria 2. The Mathematical Analysis of Logic
3. Ernst Schröder 4. Gottlieb Frege 5. Principia Mathematica
6. Alfred North Whitehead

قرن بیستم، به‌ویژه کتاب مبانی ریاضیات (۱۹۳۴ـ۱۹۳۹) اثر جامع داوید هیلبرت(۱۸۶۲ـ۱۹۴۳) و پاول برنیس[1] (۱۸۸۸ـ۱۹۷۷)، اینک تکنیکهای شسته رفته‌تر منطق ریاضی معاصر در دسترس قرار گرفته‌اند.

در چندین بخش این فصل تکیه بر اهمیت برهان شده‌است. در ریاضیات، برهان، مرجعیت‌بخش چیزی است که اگر آن چیز به‌عنوان یک عقیدهٔ محض ــ بدون استفاده از برهان ــ بیان شود ممکن است مورد قبول قرار نگیرد. برهان، تجسّم‌بخش قدرت و عظمت استدلال محض است. بلکه حتی برتر از آن. برهان، الهام‌بخش اندیشه‌های جدید ریاضیات است. مفهوم برهان تنگاتنگ مفهوم قضیه به‌پیش می‌رود. قضیه، گزاره‌ای ریاضیاتی است که راستی آن را می‌خواهیم از راه استدلال منطقی، یعنی، برهان تنفیذ کنیم. برای آنهایی که احساس می‌کنند می‌توانند اهمیت منطق و قاعده‌های استنتاج را نادیده بگیرند، سخن حکیمانهٔ زیر از آخیلس در کتاب لویس کارول، آنچه سنگ‌پشت به آخیلس گفت را در اینجا می‌آوریم «آن‌گاه، منطق گلوی تو را خواهد فشرد و تو را مجبور به‌انجام آن خواهد کرد!»

مطالبی مشابه مطالبی را که در این فصل عرضه شده‌اند می‌توان در فصلهای ۲ و ۶ کتاب درسی اثر راس[2] و رایت[3] [۵] و در فصل ۱ اثر استنت[4] و مک‌آلیستر[5] [۷] یافت. کتاب درسی اثر دولانگ[6] [۱] بررسیی تاریخی است از منطق ریاضی، همراه با بررسی ماهیت نتایج آن و پیامدهای فلسفی این نتایج. کتابهای درسی اثر ایوز[7] و نیوسم[8] [۲]، استول[9] [۸]، و وایلدر[10] نیز از این قبیل‌اند که در آنها بستگی بین منطق، برهان، و نظریهٔ مجموعه‌ها (موضوع فصل بعد این کتاب) از لحاظ نقش آنها در اصول ریاضیات بررسی شده‌است.

کتاب درسی اثر مندلسن[11] [۳] درآمدِ متوسط جالبی است برای خوانندگانی که می‌خواهند موضوعهایی اضافی در منطق ریاضی را دنبال کنند. هدف اثر موراش[12] [۴] آماده کردن دانشجو با زمینهٔ حسابان برای ریاضیاتی است که بیشتر جنبهٔ نظری دارد و در جبر مجرد و آنالیز حقیقی با آن مواجه می‌شوند. این اثر، مقدمه‌ای عالی بر روشهای پایه‌ای برهان است. سرانجام، کتاب بی‌همتای سالو[13] [۶] تماماً اختصاص به معرفی تکنیکهای اولیهٔ مورد استفاده در نگارش برهانهای ریاضی برای خواننده‌ای دارد که دارای پایهٔ ریاضیات دبیرستانی است.

مراجع

1. Delong, Howard. *A Profile of Mathematical Logic*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1970.
2. Eves, Howard, and Newsom, Carroll V. *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, rev. ed. New York: Holt, 1965.

1. Paul Bernays 2. K. A. Ross 3. C. R. B. Wright 4. D. F. Stanat
5. D. F. Mc Allister 6. H. Delong 7. H. Eves 8. C. V. Newsom
9. R. R. stoll 10. R. L. Wilder 11. E. Mendelson 12. R. P. Morash
13. D. Solow

3. Mendelson, Elliott. *Introduction to Mathematical Logic*, 3rd ed. Monterey, Calif.: Wadsworth and Brooks/Cole, 1987.
4. Morash, Ronald P. *Bridge to Abstract Mathematics: Mathematical Proof and Structures*. New York: Random House/Birkhaüser, 1987.
5. Ross, Kenneth A., and Wright, Charles R. B. *Discrete Mathematics*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1985.
6. Solow, Daniel. *How to Read and Do Proofs*. New York: Wiley, 1982.
7. Stanat, Donald F., and McAllister, David F. *Discrete Mathematics in Computer Science*. Englewood-Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1977.
8. Stoll, Robert R. *Set Theory and Logic*. San Francisco: Freeman, 1963.
9. Wilder, Raymond L. *Introduction to the Foundations of Mathematics*, 2nd ed. New York: Wiley, 1965.

تمرینهای گوناگون

۱. جدول ارزشی برای $p \leftrightarrow [(q \wedge r) \rightarrow \overline{(s \vee r)}]$ بسازید.

۲. **الف)** جدول ارزشی برای $(p \rightarrow q) \wedge (\overline{p} \rightarrow r)$ بسازید.

ب) گزارهٔ قسمت (الف) را به‌صورت کلامی درآورید به‌قسمی که واژهٔ «نه» در برگردان آن ظاهر نشود.

۳. فرض کنید p، q، r معرف گزاره هستند. هر یک از گزاره‌های زیر را ثابت یا رد کنید (برای رد، مثال نقض تهیه کنید.)

الف) $[p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r]$

ب) $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow r]$

۴. نقیض گزارهٔ $p \leftrightarrow q$ را برحسب ادات $\wedge$ و $\vee$ بیان کنید.

۵. **الف)** دوگان گزارهٔ $(\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (T_\circ \wedge p) \vee p$ را بیابید.

ب) با استفاده از قوانین منطق نشان دهید که نتیجهٔ قسمت (الف) منطقاً هم‌ارز با $p \wedge \overline{q}$ است.

۶. عکس مستوی، عکس، عکس نقیض، و نقیض گزارهٔ $p \vee q$ را بیابید.

۷. در هر یک از گزاره‌های زیر، فضای خالی را، با واژهٔ عکس مستوی، عکس، یا عکس نقیض پر کنید به قسمی که نتیجه گزاره‌ای راست باشد.

الف) عکس عکس مستوی $p \rightarrow q$ .... $p \rightarrow q$ است.

ب) عکس عکس مستوی $p \rightarrow q$ .... $q \rightarrow p$ است.

ج) عکس مستوی عکس $p \rightarrow q$ .... $p \rightarrow q$ است.

د) عکس مستوی عکس $p \rightarrow q$ .... $q \rightarrow p$ است.

هـ) عکس عکس نقیض $p \rightarrow q$ .... $p \rightarrow q$ است.

و) عکس عکس نقیض $p \rightarrow q$ .... $q \rightarrow p$ است.

ز) عکس مستوی عکس نقیض $p \rightarrow q$ .... $p \rightarrow q$ است.

ح) عکس نقیض عکس مستوی $p \to q$ .... $p \to q$ است.
ط) عکس عکس مستوی عکس نقیض $p \to q$ .... $q \to p$ است.
ی) عکس مستوی عکس نقیض عکس $p \to q$ .... $q \to p$ است.

۸. درستی استدلال

$$[(p \to q) \wedge [(q \wedge r) \to s] \wedge r] \Rightarrow (p \to s)$$

را ثابت کنید.

۹. گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید. p، q و r گزاره‌هایی دلخواه‌اند.

الف) $[(p \veebar q) \veebar r] \Leftrightarrow [p \veebar (q \veebar r)]$

ب) $[p \veebar (q \to r)] \Leftrightarrow [(p \veebar q) \to (p \veebar r)]$

ج) $[p \to (q \veebar r)] \Rightarrow [(p \to q) \veebar (p \to r)]$

د) $[(p \to q) \veebar (p \to r)] \Rightarrow [p \to (q \veebar r)]$

۱۰. هر یک از گزاره‌های زیر را به‌صورت نمادی بنویسیا. سپس یا برهانی برای استدلال بیاورید و یا برای نشان دادن نادرستی آن مثالی نقض ارائه دهید.

الف) اگر این جمعه هوا سرد باشد، آنگاه C کت جیرش را به‌شرطی که جیبهای آن رفو شده باشد، می‌پوشد. هواشناسی برای جمعه هوای سردی را پیش‌بینی کرده است، امّا جیبهای کت رفو نشده‌اند. بنابراین، C این جمعه کت جیرش را نمی‌پوشد.

ب) اگر P امسال بازنشسته شود، آن‌گاه همسرش B خوشحال خواهد شد. شادی زندگی P در تضمین خوشحالی B است. بنابراین اگر P امسال بازنشسته شود آن‌گاه خوشحالی B شرط لازم برای این است که P زندگیش شاد باشد.

ج) مقاطعه انجام خواهد شد اگر و تنها اگر پنجره‌های جدید خانه در ماه ژوئن نصب شده‌باشد. اگر پنجره‌های جدید در ماه ژوئن نصب شوند، آن‌گاه E می‌تواند در اوّل ژوئیه به‌خانهٔ جدیدش نقل مکان کند. اگر E نتواند در اول ژوئیهٔ نقل مکان کند آن‌گاه باید اجارهٔ ماه ژوئیهٔ آپارتمانش را بپردازد. پنجره‌ها در ماه ژوئن نصب شده‌اند یا E باید اجارهٔ ژوئیهٔ آپارتمانش را بپردازد. بنابراین، E مجبور نخواهد بود که اجارهٔ ماه ژوئیهٔ آپارتمانش را بپردازد.

۱۱. راستی گزارهٔ زیر را از راه برهان خلف ثابت کنید. در این گزاره، عالم سخن از اعداد صحیح تشکیل شده‌است

$$\forall x \forall y [(۳x + \sqrt{۲} y = ۰) \to [(x = ۰) \wedge (y = ۰)]]$$

۱۲. اگر عالم سخن، همهٔ اعداد حقیقی باشند، گزارهٔ زیر را از راه برهان خلف ثابت کنید

$$\forall x \forall y [((\text{گویا}\, x) \wedge (\text{گنگ}\, y)) \to (\text{گنگ}\, x + y)]$$

۱۳. فرض کنید عالم سخن، مجموعهٔ همهٔ اعداد زوج باشد. گزارهٔ $\forall x \exists y \exists z[x = yz]$ را ثابت یا (با یافتن مثالی نقض) رد کنید.

۱۴. هر یک از گزاره‌های زیر را به‌صورت نمادی بنویسید. عالم سخن، همهٔ اعداد حقیقی مثبت است.

الف) کوچکترین عدد حقیقی وجود ندارد.

ب) عدد حقیقی مثبت یکتایی وجود دارد که با مربّعش برابر است.

ج) هر عدد حقیقی مثبت دارای وارون ضربی یکتاست.

۳

نظریهٔ مجموعه‌ها

زیربنای ریاضیاتی که ما در جبر، هندسه، ترکیبیات، و تقریباً در همهٔ زمینه‌های دیگر ریاضیات عصر حاضر مطالعه می‌کنیم، مفهوم مجموعه است. غالباً این مفهوم، برای فرمولبندی اختصاری عناوین ریاضیی که بررسی می‌شوند، ساختاری زیربنایی فراهم می‌کند. در نتیجه، بسیاری از کتابهای ریاضی، فصلی مقدماتی دربارهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها دارند و یا قسمتهایی از نظریهٔ مجموعه‌ها را که در متن کتاب مورد نیازند در پیوستی ذکر می‌کنند. در اینجا به‌نظر می‌رسد که وقتی فصل اول را با اصول شمارش آغاز کردیم، نظریهٔ مجموعه‌ها را نادیده گرفته‌ایم. در واقع اتکای ما به شهود بود، زیرا هر بار که در فصل ۱ به‌واژهٔ «گردایه» اشاره کردیم با یک مجموعه سروکار داشتیم. همچنین، در بخش ۴.۲ از مفهوم مجموعه (البته نه از خود این اصطلاح)، وقتی از عالم سخن برای گزاره‌نما بحث می‌کردیم، کمک گرفتیم.

سعی در تعریف مجموعه کاری است مشکل، و غالباً به استفادهٔ دوری از واژه‌های مترادفی نظیر «رده»، «گردایه»، و «انبوهه»، منجر می‌شود. وقتی ابتدا به مطالعهٔ هندسه می‌پردازیم، برای درک مفاهیم نقطه، خط، و وقوع از شهودمان استفاده می‌کنیم. سپس با تکیه بر این مفاهیم شهودی و چند اصل موضوع به تعریف اصطلاحات جدید و اثبات قضایا می‌پردازیم. در مطالعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها، یک بار دیگر از شهود استمداد می‌جوییم، منتها این‌بار برای بیان مفاهیم قابل مقایسهٔ عنصر، مجموعه، و عضویت.

خواهیم دید ایده‌هایی را که در فصل ۲ از منطق به‌دست آوردیم پیوندی نزدیک با نظریهٔ

مجموعه‌ها دارند. به‌علاوه بسیاری از برهانهایی که در این فصل مطالعه خواهیم کرد از روشهایی که در فصل ۲ به‌دست آوردیم نتیجه می‌شوند، حتی مواردی هم وجود دارند که در آنها نوع ترکیبیاتی برهان (با توجه به فصل ۱) به‌کار خواهند رفت.

۱.۳ مجموعه‌ها و زیرمجموعه‌ها

«احساس غریزی» ما این است که مجموعه باید گردایه‌ای خوشتعریف از اشیاء باشد. این اشیاء را عنصر می‌نامند و می‌گویند عضوهای مجموعه‌اند.

صفت «خوشتعریف» ایجاب می‌کند که برای هر شیء مورد نظر بتوانیم تعیین کنیم که آیا در مجموعهٔ تحت بررسی قرار دارد یا نه. در نتیجه با مجموعه‌هایی، نظیر مجموعهٔ آبشار زنهای برجستهٔ باشگاهها در سال ۱۹۷۰، که به نظر افراد بستگی دارند، سر و کار نداریم.

برای نمایش مجموعه‌ها حروف بزرگ A، B، C، ... ، و برای عنصرها حروف کوچک را به‌کار می‌بریم. برای مجموعهٔ A، اگر x عنصری از A باشد می‌نویسیم $x \in A$؛ $A \not\ni y$ نشان می‌دهد که y عضو A نیست.

مثال ۱.۳ مجموعه را می‌توان به‌وسیلهٔ فهرست‌کردن عناصرش در درون ابروها مشخص کرد. مثلاً اگر A مجموعهٔ متشکل از اولین پنج عدد صحیح مثبت باشد، آن‌گاه می‌نویسیم $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$. در اینجا $۲ \in A$ اما $۶ \notin A$.

نماد متعارف دیگر برای این مجموعه به‌صورت $A = \{x | ۱ \leq x \leq ۵$ و x عدد صحیح است$\}$ مشخص می‌شود. در اینجا خط $|$ در درون ابروها، «به قسمی که» خوانده می‌شود. نمادهای $\{x | \cdots\}$ خوانده می‌شوند «مجموعهٔ همهٔ xها به قسمی که ... ». ویژگیهای بعداز $|$، به ما در تعیین عناصر مجموعه‌ای که قرار است توصیف شود، کمک می‌کنند.

توجه کنید که $\{x | ۱ \leq x \leq ۵\}$ توصیفی کافی از مجموعهٔ A نیست مگر آنکه از قبل پذیرفته باشیم که عناصری که در نظر گرفته‌ایم اعداد صحیح‌اند. وقتی چنین قراری مورد قبول باشد، می‌گوییم عالم سخن را ــ که در حساب مجموعه‌ها به آن مجموعهٔ عام خواهیم گفت و معمولاً آن را با $\mathscr{U}$ نشان می‌دهیم ــ مشخص کرده‌ایم. در این صورت عناصر مجموعه‌ها را فقط از $\mathscr{U}$ انتخاب می‌کنیم. در این مسألهٔ خاص، اگر $\mathscr{U}$ مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح یا مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبت باشند، آن‌گاه $\{x | ۱ \leq x \leq ۵\}$ کافی برای توصیف A است. اگر $\mathscr{U}$ مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی باشد، آن‌گاه $\{x | ۱ \leq x \leq ۵\}$ باید شامل تمام اعداد حقیقی از ۱ تا ۵ باشد؛ اگر $\mathscr{U}$ تنها متشکل از اعداد زوج باشد، آن‌گاه، تنها اعضای $\{x | ۱ \leq x \leq ۵\}$ اعداد ۲ و ۴ هستند.□

مثال ۲.۳ برای مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت، $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳, \ldots\}$، فرض کنید

الف) $A = \{۱, ۴, ۹, \ldots, ۶۴, ۸۱\} = \{x^۲ | x \in \mathscr{U}, x^۲ < ۱۰۰\}$

ب) $B = \{۱, ۴, ۹, ۱۶\} = \{y^۲ | y \in \mathscr{U}, y^۲ < ۲۰\} = \{y^۲ | y \in \mathscr{U}, y^۲ < ۲۳\}$

ج) $C = \{۲, ۴, ۶, ۸, \ldots\} = \{۲k | k \in \mathscr{U}\}$

مجموعه‌های A و B مثالهایی از مجموعه‌های متناهی و C مجموعه‌ای نامتناهی است. وقتی با مجموعه‌هایی نظیر A یا C سروکار داریم، می‌توانیم مجموعه‌ها را یا برحسب ویژگیهایی که باید عنصرها داشته باشند توصیف کنیم یا عنصرها را به تعداد کافی فهرست کنیم با این امید که الگوی روشنی را نشان دهند. برای هر مجموعهٔ متناهی A، $|A|$ معرف تعداد عنصرهای A است و به آن توان یا عدد اصلی یا اندازهٔ مجموعه گفته می‌شود.

در اینجا مجموعه‌های A و B آن چنان هستند که هر عنصر B، عنصر A هم هست. این بستگی مهم در کل نظریهٔ مجموعه‌ها و کاربردهایش پیدا می‌شود، و به تعریف زیر می‌انجامد.□

تعریف ۱.۳ اگر C و D مجموعه‌هایی از مجموعهٔ عام $\mathscr{U}$ باشند، می‌گوییم C زیرمجموعهٔ D است و می‌نویسیم $C \subseteq D$ یا $D \supseteq C$، اگر هر عنصر C عنصری از D باشد. اگر به‌علاوه، عنصری از D وجود داشته باشد که در C نباشد، C را زیرمجموعهٔ سره D می‌خوانند و به‌صورت $C \subset D$ یا $D \supset C$ نشان می‌دهند.

باید توجه کرد که برای هر دو مجموعهٔ C و D از عالم سخن $\mathscr{U}$، اگر $C \subseteq D$، آن‌گاه $x \in C \Rightarrow x \in D$. همچنین اگر C و D متناهی باشند $C \subseteq D \Rightarrow |C| \leq |D|$، و $C \subset D \Rightarrow C \subseteq D$، امّا $C \subseteq D \nRightarrow C \subset D$.

مثال ۳.۳ یک نام متغیر در **فورترن** ANSI*، از یک حرف و به دنبال آن، حداکثر پنج نویسه (حرف یا رقم) تشکیل شده است. اگر $\mathscr{U}$ مجموعهٔ همهٔ این نامهای متغیر باشد، آن‌گاه بنابر اصلهای جمع و ضرب

$$|\mathscr{U}| = ۲۶ + ۲۶(۳۶) + ۲۶(۳۶)^۲ + \cdots + ۲۶(۳۶)^۵ = ۲۶\sum_{i=۰}^{۵} ۳۶^i = ۱۶۱۷۰۳۸۳۰۶$$

به قسمی که $\mathscr{U}$ مجموعه‌ای بزرگ ولی متناهی است. در این زبان برنامه‌ریزی یک متغیر صحیح باید با I، J، K، L، M، و N شروع شود. بنابراین اگر A زیرمجموعهٔ همهٔ متغیرهای صحیح در **فورترن** ANSI باشد،

* ANSI مخفف American National Standards Institute است.

$$|A| = ۶ + ۶(۳۶) + ۶(۳۶)^۲ + \cdots + ۶(۳۶)^۵ = ۶ \sum_{i=۰}^{۵} ۳۶^i = ۳۷۳۱۶۲۶۸۶$$

□

اینک مفهوم زیرمجموعه را ممکن است برای بسط مفهوم برابری مجموعه‌ها به‌کار برد. ابتدا مثال زیر را در نظر می‌گیریم.

مثال ۴.۳ برای مجموعهٔ عام $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$، مجموعهٔ $A = \{۱, ۲\}$ را در نظر بگیرید. اگر $B = \{x|x^۲ \in \mathscr{U}\}$، آن‌گاه اعضای B، ۱ و ۲ هستند. در اینجا A و B عناصری همانند دارند ــ و عضو دیگری ندارند. این مطلب به درک برابری مجموعه‌های A و B منجر می‌شود.

اما در اینجا درست است که $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$، ولی ترجیح می‌دهیم که به‌صورت رسمی مفهوم برابری مجموعه‌ها را با استفاده از این رابطه‌های زیرمجموعه‌ای تعریف کنیم. این مطلب ما را به تعریف زیر هدایت می‌کند. □

تعریف ۲.۳ برای مجموعهٔ عام مفروض $\mathscr{U}$، مجموعه‌های C و D را (که از $\mathscr{U}$ گرفته شده‌اند) برابر می‌نامند و می‌نویسند $C = D$، وقتی که $C \subseteq D$ و $D \subseteq C$.

از این مفاهیم دربارهٔ برابری مجموعه‌ها، متوجه می‌شویم که ترتیب و تکرار در مجموعهٔ کلی بی‌تأثیر است. بنابراین $\{۱, ۲, ۱, ۳, ۱\} = \{۲, ۲, ۱, ۳\} = \{۳, ۱, ۲\} = \{۱, ۲, ۳\}$.

اینک که مفاهیم زیر مجموعه و برابری مجموعه‌ها را تعریف کردیم، سورهای بخش ۴.۲ را برای بررسی نقیضهای این مفاهیم به‌کار خواهیم برد.

برای مجموعهٔ عام مفروض $\mathscr{U}$، فرض کنید A و B مجموعه‌هایی باشند که از $\mathscr{U}$ گرفته شده‌اند. در این صورت می‌توانیم بنویسیم

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \Rightarrow x \in B]$$

(در اینجا، سور عمومی $\forall x$ نشان می‌دهد که منظور ما همهٔ عناصر x از مجموعهٔ عام $\mathscr{U}$ است که از قبل مشخص شده‌اند.)

با توجه به این مطلب، داریم

$$\begin{aligned} A \not\subseteq B & \text{ (یعنی، } A \text{ زیرمجموعهٔ } B \text{ نیست)} \\ & \Leftrightarrow \overline{\forall x[x \in A \Rightarrow x \in B]} \\ & \Leftrightarrow \exists x\overline{[x \in A \vee x \in B]} \\ & \Leftrightarrow \exists x[x \in A \wedge x \notin B] \end{aligned}$$

بنابراین $A \not\subseteq B$، اگر حداقل یک عنصر x در مجموعهٔ عام موجود باشد که عضو A باشد اما عضو B نباشد.

به‌روشی مشابه، چون $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$، پس

$$A \neq B \Leftrightarrow \overline{A \subseteq B \wedge B \subseteq A} \Leftrightarrow \overline{A \subseteq B} \vee \overline{B \subseteq A} \Leftrightarrow A \not\subseteq B \vee B \not\subseteq A$$

بنابراین، دو مجموعهٔ A و B برابر نیستند اگر و تنها اگر (۱) حداقل یک عنصر x در $\mathscr{U}$ وجود داشته باشد که $x \in A$ اما $x \notin B$، یا (۲) حداقل یک عنصر y در $\mathscr{U}$ وجود داشته باشد که $y \in B$ و $y \notin A$ (یا شاید هردو).

همچنین توجه می‌کنیم که برای مجموعه‌های دلخواه $C, D \subseteq \mathscr{U}$ (یعنی $C \subseteq \mathscr{U}$ و $D \subseteq \mathscr{U}$)

$$C \subset D \Leftrightarrow C \subseteq D \wedge C \neq D$$

اینک که مفاهیم برابری مجموعه‌ها، زیرمجموعه، و زیرمجموعهٔ سره را معرفی کردیم، اثبات اولین قضیهٔ این فصل نسبتاً سرراست است.

قضیه ۱.۳ فرض کنید $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$.

الف) اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$، آن‌گاه $A \subseteq C$.
ب) اگر $A \subset B$ و $B \subseteq C$، آن‌گاه $A \subset C$.
ج) اگر $A \subseteq B$ و $B \subset C$، آن‌گاه $A \subset C$.
د) اگر $A \subset B$، و $B \subset C$، آن‌گاه $A \subset C$.

برهان قسمتهای (الف) و (ب) را ثابت می‌کنیم و اثبات بقیهٔ قسمتها را برای تمرین باقی می‌گذاریم.

الف) برای اثبات $A \subseteq C$، لازم است تحقیق کنیم که به‌ازای همهٔ مقادیر $x \in \mathscr{U}$، اگر $x \in A$ آن‌گاه، $x \in C$. با عنصر x از A شروع می‌کنیم. چون $A \subseteq B$، $x \in A$ نتیجه می‌دهد $x \in B$. در این‌صورت با $B \subseteq C$، $x \in B$ نتیجه می‌دهد که $x \in C$. لذا $x \in A$ نتیجه می‌دهد $x \in C$ (بنابر قانون قیاس ــ قاعدهٔ ۲ در جدول ۱۴.۲)، و $A \subseteq C$.

ب) چون $A \subset B$، اگر $x \in A$ آن‌گاه $x \in B$. با توجه به $B \subseteq C$ نتیجه می‌شود که $x \in C$، لذا $A \subseteq C$. اما $A \subset B$ نتیجه می‌دهد که عنصر $b \in B$ وجود دارد به‌قسمی که $b \notin A$. چون $B \subseteq C$، پس $b \in B \Rightarrow b \in C$. از این‌رو $A \subseteq C$، و یک عنصر $b \in C$ با $b \notin A$ وجود دارد. لذا $A \subset C$. ■

مثال بعدی شامل چند رابطهٔ زیرمجموعه‌ای است.

مثال ۵.۳ فرض کنید $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $A = \{۱, ۲, ۳\}$، $B = \{۳, ۴\}$، و $C = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$. در این صورت، روابط زیرمجموعه‌ای زیر برقرارند:

الف) $A \subseteq C$ **ب)** $A \subset C$ **ج)** $B \subset C$

د) $A \subseteq A$ ه) $A \nsubseteq B$ و) $A \not\subset A$ (یعنی، A زیرمجموعهٔ سره A نیست.)
می‌خواهیم تعیین کنیم که مجموعهٔ C علاوه‌بر A و B کلاً چند زیرمجموعه دارد. اما قبل از پاسخ دادن به این مطلب لازم است که مجموعهٔ بدون عضو را تعریف کنیم. □

تعریف ۳.۳ مجموعهٔ صفر یا تهی، مجموعه‌ای است که هیچ عضوی ندارد، و آن را با $\emptyset$ یا $\{\}$ نمایش می‌دهند.

توجه کنید که $|\emptyset| = ۰$ اما $\emptyset \neq \{۰\}$. همچنین $\{\emptyset\} \neq \emptyset$ زیرا $\{\emptyset\}$ مجموعه‌ای با یک عنصر، یعنی مجموعهٔ تهی است.

مجموعهٔ تهی در ویژگی زیر صادق است. برای اثبات این ویژگی از روش موسوم به برهان خلف (قاعده‌های ۵ و $۵'$ جدول ۱۴.۲) استفاده می‌کنیم.

قضیه ۲.۳ برای هر مجموعهٔ A، $\emptyset \subseteq A$؛ $\emptyset \subset A$ اگر $A \neq \emptyset$.

برهان اگر اولین قسمت قضیّه درست نباشد، آن‌گاه $\emptyset \nsubseteq A$، لذا عنصری مانند x از مجموعهٔ عام وجود دارد که $x \in \emptyset$ اما $x \notin A$. ولی $x \in \emptyset$ غیرممکن است. لذا فرض $\emptyset \nsubseteq A$ رد می‌شود و ملاحظه می‌کنیم که $\emptyset \subseteq A$. به‌علاوه، اگر $A \neq \emptyset$، آن‌گاه عنصری مانند $a \in A$ (و $a \notin \emptyset$) وجود دارد، لذا $\emptyset \subset A$. ■

مثال ۶.۳ اینک به مثال ۵.۳ باز می‌گردیم و تعداد زیر مجموعه‌های مجموعهٔ $C = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ را تعیین می‌کنیم. در ساختن یک زیرمجموعه از C، برای هر عضو x از C، دو انتخاب متمایز یعنی گنجاندن یا نگنجاندن آن را در زیرمجموعه، داریم. لذا کلاً $۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$ انتخاب داریم که در نتیجه $۱۶ = ۲^۴$ زیرمجموعه برای C به‌دست می‌آید. این تعداد شامل مجموعهٔ تهی و خود مجموعهٔ C نیز هست. اگر به تعداد زیرمجموعه‌های دو عنصری C نیاز باشد، برابر تعداد راههایی است که می‌توان دو شیء را از بین چهار شیء انتخاب کرد، یعنی $C(۴, ۲)$ یا $\binom{۴}{۲}$. در نتیجه، تعداد کل زیرمجموعه‌های C، یعنی $۲^۴$، را می‌توان به‌صورت مجموع $\binom{۴}{۰} + \binom{۴}{۱} + \binom{۴}{۲} + \binom{۴}{۳} + \binom{۴}{۴}$ نیز در نظر گرفت، که در آن اولین جمعوند برای مجموعهٔ تهی، دومین جمعوند برای ۴ زیرمجموعهٔ تک‌عنصری، سومین جمعوند برای ۶ زیرمجموعهٔ دوعنصری، و غیره است. بنابراین $۲^۴ = \sum_{k=۰}^{۴} \binom{۴}{k}$. □

تعریف ۴.۳ اگر A مجموعه‌ای از مجموعهٔ عام $\mathscr{U}$ باشد، مجموعهٔ توانی A که با $\mathscr{P}(A)$ نشان

داده می‌شود، گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A است. ▬

مثال ۷.۳ برای مجموعهٔ Cی مثال ۶.۳،

$$\mathscr{P}(C) = \{\emptyset, \{۱\}, \{۲\}, \{۳\}, \{۴\}, \{۱,۲\}, \{۱,۳\}, \{۱,۴\}, \{۲,۳\}, \{۲,۴\}, \{۳,۴\}, \{۱,۲,۳\}, \{۱,۲,۴\}, \{۱,۳,۴\}, \{۲,۳,۴\}, C\} \quad \square$$

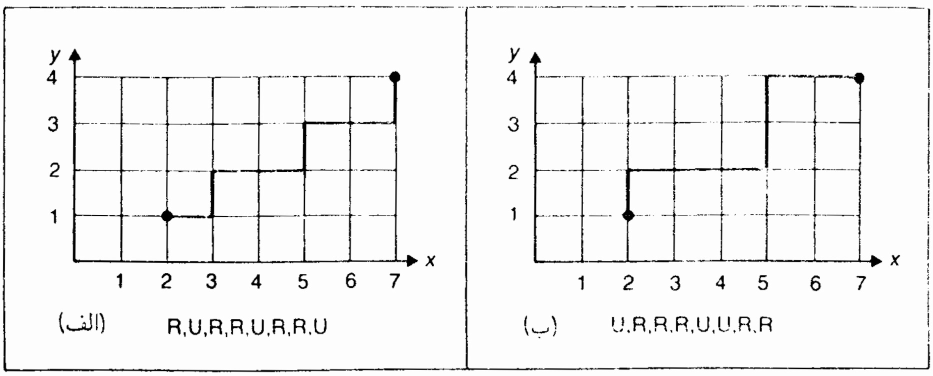
> به‌طور کلی برای هر مجموعهٔ متناهی A، با $|A| = n \geq ۰$، A دارای ۲^n زیرمجموعه است، به‌طوری که $|\mathscr{P}(A)| = ۲^n$. به‌ازای هر $۰ \leq k \leq n$، $\binom{n}{k}$ زیرمجموعه با اندازهٔ k وجود دارد. اگر تعداد زیرمجموعه‌های A را برحسب تعداد عناصر، k، در یک زیرمجموعه حساب کنیم، اتحاد ترکیبیاتی زیر را خواهیم داشت. به‌ازای $n \geq ۰$، $\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \cdots + \binom{n}{n} = ۲^n$.

این اتحاد قبلاً در فرع ۱.۱(الف) اثبات شده بود. معرفی آن در اینجا، مثالی از برهان ترکیبیاتی است زیرا اتحاد مزبور به‌وسیلهٔ شمارش یک گردایه از اشیاء (زیرمجموعه‌های A)، به دو راه مختلف اثبات شده است.

امکان شمارش زیرمجموعه‌هایی معین از مجموعهٔ مفروض، رهیافتی دیگر برای حلّ یکی از مثالهای قبلی ما به‌دست می‌دهد.

مثال ۸.۳ در مثال ۱۴.۱ تعداد مسیرها (پله‌ها)ی $(۲,۱)$ تا $(۷,۴)$ در صفحهٔ xy را حساب کردیم، که در آن هر مسیر از تک پله‌ای ساخته شده بود که یک واحد به راست (R) یا یک واحد به بالا (U) می‌رفت. شکل ۱.۳ همان شکل ۱.۱ است که در آن دو مسیر ممکن نشان داده شده‌اند.

مسیر شکل ۱.۳(الف) سه حرکت به‌سوی بالا (U)، در وضعیتهای ۲، ۵، و ۸ فهرست زیر شکل را دارد. در نتیجه این مسیر، یک زیرمجموعهٔ سه‌عنصری $\{۲,۵,۸\}$ از مجموعهٔ



شکل ۱.۳

$\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۸\}$ را معین می‌کند. در شکل ۱.۳(ب) مسیر، زیرمجموعهٔ سه‌عنصری $\{۱, ۵, ۶\}$ را تعیین می‌کند. برعکس، اگر، مثلاً، با زیرمجموعهٔ $\{۱, ۳, ۷\}$ از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۸\}$ شروع کنیم، آن‌گاه مسیری که این زیرمجموعه را معین می‌کند به‌وسیلهٔ U، R، U، R، R، R، U، R داده می‌شود.

در نتیجه، تعداد مسیرهایی که در اینجا جستجو می‌شود برابر با تعداد زیرمجموعه‌های A از $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۸\}$ است، که در آن $|A| = ۳$. همان‌طور که در مثال ۱۴.۱ به‌دست آمد، تعداد $۵۶ = \frac{۸!}{۳!۵!} = \binom{۸}{۳}$ مسیر از این مسیرها (و زیرمجموعه‌ها) وجود دارند.

اگر به‌جای حرکتهای به‌سوی بالای U، حرکتهای به‌سمت راست R را در نظر می‌گرفتیم، پاسخی که به‌دست می‌آمد تعداد زیرمجموعه‌های B از $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۸\}$ بود که برای آنها $|B| = ۵$. تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر $۵۶ = \frac{۸!}{۳!۵!} = \binom{۸}{۵}$ است. (مفهومی را که در اینجا عرضه کردیم قبلاً برای نتیجه‌ای که در جدول ۳.۱ بسط داده شده بود بررسی کردیم.) □

مثال بعد، اتحاد ترکیبیاتی مهم دیگری را به‌دست می‌دهد.

مثال ۹.۳ برای اعداد صحیح n و r با شرط $n \geq r \geq ۱$

$$\binom{n+۱}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-۱}$$

گرچه این اتحاد را می‌توان از راه جبری با توجه به تعریف $\binom{n}{r}$ یعنی $n!/(r!(n-r)!)$ ثابت کرد، اما ما روشی ترکیبیاتی را به‌کار می‌بریم. فرض کنید $A = \{x, a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$، همهٔ زیرمجموعه‌های r عنصری A را در نظر می‌گیریم. تعداد چنین زیرمجموعه‌هایی برابر $\binom{n+۱}{r}$ است. این زیرمجموعه‌ها دقیقاً یکی از دو مورد زیرند: آنهایی که شامل عنصر xاند و آنهایی که شامل این عنصر نیستند. برای به‌دست آوردن زیرمجموعهٔ C از A، که در آن، $x \in C$ و $|C| = r$، x را در C قرار می‌دهیم و سپس $r-۱$ عنصر از $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، را انتخاب می‌کنیم. این کار را می‌توان به $\binom{n}{r-۱}$ راه انجام داد. برای مورد دیگر، زیرمجموعهٔ B از A را با شرایط $|B| = r$ و $x \notin B$ لازم داریم. لذا بین $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، r عنصر انتخاب می‌کنیم. این انتخاب را می‌توانیم به $\binom{n}{r}$ راه انجام دهیم. لذا بنابر اصل جمع نتیجه می‌شود که $\binom{n+۱}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-۱}$. □

مثال ۱۰.۳ حال ببینید که اتحاد مثال ۹.۳ چگونه در حل مسألهٔ ۳۲.۱ که دنبال جوابهای صحیح نامنفی نابرابری $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۶ < ۱۰$ بودیم می‌تواند به ما کمک کند.

برای هر عدد صحیح k، $۰ \leq k \leq ۹$ تعداد جوابهای $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۶ = k$ برابر است با $\binom{۵+k}{k} = \binom{۶+k-۱}{k}$. بنابراین تعداد جوابهای صحیح نامنفی $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۶ < ۱۰$

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
(n=0) & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
(n=1) & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
(n=2) & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
(n=3) & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
(n=4) & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
(n=5) & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

شکل ۲.۳

برابر است با

$$
\begin{aligned}
&\binom{۵}{۰}+\binom{۶}{۱}+\binom{۷}{۲}+\binom{۸}{۳}+\cdots+\binom{۱۴}{۹}\\
&=\left[\binom{۶}{۰}+\binom{۶}{۱}\right]+\binom{۷}{۲}+\binom{۸}{۳}+\cdots+\binom{۱۴}{۹}\\
&=\left[\binom{۷}{۱}+\binom{۷}{۲}\right]+\binom{۸}{۳}+\cdots+\binom{۱۴}{۹}=\left[\binom{۸}{۲}+\binom{۸}{۳}\right]+\binom{۹}{۴}+\cdots+\binom{۱۴}{۹}\\
&=\left[\binom{۹}{۳}+\binom{۹}{۴}\right]+\cdots+\binom{۱۴}{۹}=\cdots=\binom{۱۴}{۸}+\binom{۱۴}{۹}=\binom{۱۵}{۹}=۵۰۰۵
\end{aligned}
$$

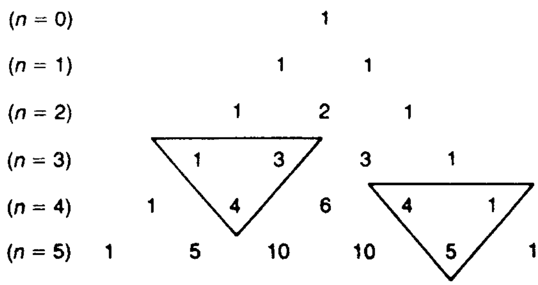
□

مثال ۱۱.۳ در شکل ۲.۳ قسمتی از آرایهٔ خیلی مفید و جالبی از اعداد را که به مثلث پاسکال موسوم است، ملاحظه می‌کنیم.

توجه می‌کنید که در فهرست‌بندی جزئی بالا، دو مثلثی که نشان داده‌ایم در این شرط صدق می‌کنند که ضریب دوجمله‌ای رأس پایین مثلث برابر با مجموع ضرایب دو جملهٔ دیگر مثلث‌اند. این مطلب، از اتحاد مثال ۹.۳ نتیجه می‌شود.

اگر به‌جای هر ضریب دوجمله‌ای مقدار عددیش را قرار دهیم، مثلث پاسکال به‌صورت شکل ۳.۳ در می‌آید. □

مجموعه‌هایی از اعداد وجود دارند که غالباً در سراسر این کتاب ظاهر می‌شوند. لذا، این بخش



شکل ۳.۳

را با عرضهٔ این مجموعه‌ها با نمادهای زیر، خاتمه می‌دهیم.

الف) $\mathbf{Z} =$ مجموعهٔ اعداد صحیح $= \{۰, ۱, -۱, ۲, -۲, ۳, -۳, \dots\}$

ب) $\mathbf{N} =$ مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی یا اعداد طبیعی $= \{۰, ۱, ۲, ۳, \dots\}$

ج) $\mathbf{Z}^+ =$ مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت $= \{۱, ۲, ۳, \dots\} = \{x \in \mathbf{Z} | x > ۰\}$

د) $\mathbf{Q} =$ مجموعهٔ اعداد گویا $= \{a/b | a, b \in \mathbf{Z}, b \neq ۰\}$

ه) $\mathbf{Q}^+ =$ مجموعهٔ اعداد گویای مثبت $= \{a/b | a/b \in \mathbf{Q}, a/b > ۰\}$

و) $\mathbf{Q}^* =$ مجموعهٔ اعداد گویای مخالف صفر

ز) $\mathbf{R} =$ مجموعهٔ اعداد حقیقی

ح) $\mathbf{R}^+ =$ مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت

ط) $\mathbf{R}^* =$ مجموعهٔ اعداد حقیقی مخالف صفر

ی) $\mathbf{C} =$ مجموعهٔ اعداد مختلط $= \{x + yi | x, y \in \mathbf{R}, i^۲ = -۱\}$

ک) $\mathbf{C}^* =$ مجموعهٔ اعداد مختلط مخالف صفر

ل) به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $\mathbf{Z}_n = \{۰, ۱, ۲, \dots, n - ۱\}$

م) به‌ازای اعداد حقیقی a و b با $a < b$، $[a, b] = \{x | x \in \mathbf{R}, a \leq x \leq b\}$

$(a, b) = \{x | x \in \mathbf{R}, a < x < b\}$، $[a, b) = \{x | x \in \mathbf{R}, a \leq x < b\}$،

$(a, b] = \{x | x \in \mathbf{R}, a < x \leq b\}$

اولین مجموعه را، بازهٔ بسته، دومین مجموعه را بازهٔ باز و دو مجموعهٔ دیگر را بازه‌های نیمباز می‌نامند.

تمرینهای ۱.۳

۱. کدامین مجموعه‌های زیر با هم برابرند؟

الف) $\{۱, ۲, ۳\}$ ب) $\{۳, ۲, ۱, ۳\}$، ج) $\{۳, ۱, ۲, ۳\}$، د) $\{۱, ۲, ۲, ۳\}$

۲. فرض کنید $A = \{۱, \{۱\}, \{۲\}\}$. کدام گزاره‌های زیردرست‌اند؟

الف) $۱ \in A$ ب) $\{۱\} \in A$ ج) $\{۱\} \subseteq A$ د) $\{\{۱\}\} \subseteq A$

ه) $\{۲\} \in A$ و) $\{۲\} \subseteq A$ ز) $\{\{۲\}\} \subseteq A$ ح) $\{\{۲\}\} \subset A$

۳. برای $A = \{۱, ۲, \{۲\}\}$، چه گزاره‌هایی از ۸ گزارهٔ تمرین ۲ درست‌اند؟

۴. کدامین گزاره‌های زیردرست‌اند؟

الف) $\emptyset \in \emptyset$ ب) $\emptyset \subset \emptyset$ ج) $\emptyset \subseteq \emptyset$ د) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

ه) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ و) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

۵. فرض کنید A و B مجموعه‌هایی از مجموعهٔ عام $\mathscr{U}$ باشند.

الف) گزارهٔ مسوّری بنویسید که بیانگر رابطهٔ زیرمجموعهٔ سره $A \subset B$ باشد.

ب) نقیض نتیجهٔ (الف) را برای تعیین $A \not\subset B$ به‌دست آورید.

۶. برای $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$، مطلوب است تعداد

الف) زیرمجموعه‌های A.

ب) زیرمجموعه‌های ناتهی A.

ج) زیرمجموعه‌های سره A.

د) زیرمجموعه‌های سره ناتهی A.

ه) زیرمجموعه‌های سه‌عنصری A.

و) زیرمجموعه‌هایی از A که شامل ۱ و ۲ هستند.

ز) زیرمجموعه‌هایی از A که دارای ۵ عنصر از جمله ۱ و ۲ هستند.

ح) زیرمجموعه‌های سره‌ای از A که شامل ۱ و ۲ هستند.

ط) زیرمجموعه‌هایی از A که تعداد عنصرهای آنها زوج است.

ی) زیرمجموعه‌هایی از A که تعداد عنصرهای آنها فرد است.

ک) زیرمجموعه‌هایی که تعداد عنصرهای آنها فرد است و شامل ۳ هستند.

۷. الف) اگر مجموعهٔ A دارای ۶۳ زیرمجموعهٔ سره باشد، $|A|$ چقدر است؟

ب) اگر مجموعهٔ B دارای ۶۴ زیرمجموعه با توان فرد باشد، $|B|$ چقدر است؟

ج) نتیجهٔ قسمت (ب) را تعمیم دهید.

۸. کدام مجموعه‌های زیر ناتهی هستند؟

الف) $\{x | x \in \mathbf{N}, ۲x + ۷ = ۳\}$ ب) $\{x | x \in \mathbf{Z}, ۳x + ۵ = ۹\}$

ج) $\{x | x \in \mathbf{Q}, x^۲ + ۴ = ۶\}$ د) $\{x | x \in \mathbf{R}, x^۲ + ۴ = ۶\}$

ه) $\{x | x \in \mathbf{R}, x^۲ + ۵ = ۴\}$ و) $\{x | x \in \mathbf{R}, x^۲ + ۳x + ۳ = ۰\}$

ز) $\{x | x \in \mathbf{C}, x^۲ + ۳x + ۳ = ۰\}$.

۹. مردی هنگام ترک یک رستوران ملاحظه می‌کند یک ۱۰ ریالی، یک ۲۰ ریالی، یک ۵۰ ریالی، یک ۱۰۰ ریالی، و یک ۲۰۰ ریالی دارد. به چند راه می‌تواند مقداری (حداقل یکی) از سکه‌هایش را به‌عنوان انعام بپردازد، اگر

الف) هیچ محدودیتی وجود نداشته باشد.
ب) بخواهد پولی هم برایش باقی بماند.
ج) بخواهد حداقل ۳۰ ریال بپردازد.

۱۰. **الف)** چند تا از زیرمجموعه‌های $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۱\}$ شامل حداقل یک عدد صحیح زوج است؟

ب) چند تا از زیرمجموعه‌های $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۲\}$ شامل حداقل یک عدد صحیح زوج است؟

ج) نتایج قسمتهای (الف) و (ب) را تعمیم دهید.

۱۱. مثالی در مورد سه مجموعهٔ W، X، Y بزنید به‌قسمی که $W \in X$، $X \in Y$، اما $W \notin Y$.

۱۲. در شکل ۳.۳ سه‌سطر بعدی مثلث پاسکال را بنویسید.

۱۳. برهان قضیهٔ ۱.۳ را کامل کنید.

۱۴. برای مجموعه‌های $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$، گزارهٔ زیر را اثبات یا (با آوردن مثالی نقض) رد کنید: اگر $A \subseteq B$، $B \nsubseteq C$، آن‌گاه $A \nsubseteq C$.

۱۵. یک چهارم زیرمجموعه‌های ۵ عنصری مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$، شامل عنصر ۷ هستند. n را تعیین کنید.

۱۶. اتحاد مثال ۹.۳ را از راه جبری ثابت کنید.

۱۷. برای اثبات برابری

$$\binom{n+۲}{r} = \binom{n}{r} + ۲\binom{n}{r-۱} + \binom{n}{r-۲}$$

به‌ازای اعداد صحیح n و r و شرط $n \geq r \geq ۲$، استدلالی ترکیباتی عرضه کنید.

۱۸. نشان دهید که به‌ازای اعداد صحیح مثبت n و r داریم

$$\binom{n+r+۱}{r} = \binom{n+r}{r} + \binom{n+r-۱}{r-۱} + \cdots + \binom{n+۲}{۲} + \binom{n+۱}{۱} + \binom{n}{۰}$$

۱۹. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۳۹, ۴۰\}$.

الف) برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید) که زیرمجموعه‌های ۶ عنصری A را تولید کند.

ب) برای مجموعهٔ $B = \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۳۱, ۳۷\}$ برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید) که یک زیرمجموعهٔ ۶ عنصری از A را بنویسد و سپس تعیین کند که این، زیرمجموعهٔ B هست یا نیست.

۲۰. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۷\}$. برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید) که همهٔ زیرمجموعه‌های Bی A را، که در آنها $|B| = ۴$، فهرست کند.

۲۱. برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید) که همهٔ زیرمجموعه‌های $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ را، که در آنها $۱ \leq n \leq ۱۰$، چاپ کند. (مقدار n را طی اجرای برنامه باید مشخص کرد.)

۲.۳ عملهای مجموعه‌ای و قانونهای نظریهٔ مجموعه‌ها

دانشجو پس از یادگیری چگونگی شمارش، معمولاً با روشهایی برای شمارش ترکیبی اعداد مواجه می‌شود. این‌کار قبل از همه از راه جمع انجام می‌شود. معمولاً دنیای ریاضی دانشجو در حول مجموعهٔ $\mathbf{Z}^+$ (یا زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{Z}^+$ که می‌توان دربارهٔ آن چیزی گفت یا نوشت و برای ماشین حساب دستی منگنه کرد) دور می‌زند و در این مجموعه، مجموع دو عنصر $\mathbf{Z}^+$ به عنصر سومی از $\mathbf{Z}^+$ به‌نام مجموع منجر می‌شود. بنابراین، دانشجو می‌تواند توجه خود را بر عمل جمع متمرکز کند بدون آنکه دنیای ریاضی خود را فراتر از $\mathbf{Z}^+$ بگیرد. این مطلب برای عمل ضرب نیز درست است.

جمع و ضرب اعداد صحیح مثبت را عملهای دوتایی (که بر دو عدد صحیح مثبت عمل می‌کنند) بر $\mathbf{Z}^+$ می‌گویند. (مفهوم کلی عمل دوتایی در بخش ۴.۵ خواهد آمد.)

در زیر، به راهی مشابه، عملهای دوتایی را برای مجموعه‌ها وارد می‌کنیم.

تعریف ۵.۳ برای $A, B \subseteq \mathscr{U}$ عملهای زیر را تعریف می‌کنیم:

الف) $A \cup B$ (اجتماع A و B) $= \{x | x \in A \vee x \in B\}$

ب) $A \cap B$ (اشتراک A و B) $= \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

ج) $A \triangle B$ (تفاضل متقارن A و B) $= \{x | (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin A \cap B\}$
$= \{x | x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$

توجه کنید که اگر $A, B \subseteq \mathscr{U}$، آنگاه $A \cap B \subseteq \mathscr{U}$، $A \cup B \subseteq \mathscr{U}$، $A \triangle B \subseteq \mathscr{U}$. بنابراین، $\cap$، $\cup$، $\triangle$ عملهای دوتایی روی $\mathscr{P}(\mathscr{U})$ هستند، یا می‌توانیم بگوییم که $\mathscr{P}(\mathscr{U})$ تحت این اعمال بسته است.

مثال ۱۲.۳ با $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۹\}$، $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$، $B = \{۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$، $C = \{۷, ۸, ۹\}$ داریم:

الف) $A \cap B = \{۳, ۴, ۵\}$ ب) $A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$ ج) $B \cap C = \{۷\}$

د) $A \cap C = \emptyset$ ه) $A \triangle B = \{۱, ۲, ۶, ۷\}$ و) $A \cup C = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۷, ۸, ۹\}$

ز) $A \triangle C = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۷, ۸, ۹\}$ □

در مثال ۱۲.۳ می‌بینیم که $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$. این نتیجه فقط خاص این مثال نیست بلکه در حالت کلی راست است، زیرا

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$$

(بنابر قاعدهٔ ساده‌سازی ترکیب عطفی ــ قاعدهٔ ۶ از جدول ۱۴.۲)، و

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

(که در آن اولین استلزام منطقی نتیجهٔ قاعدهٔ بسط فاصل ــ قاعدهٔ ۷ جدول ۱۴.۲ است.)

از قسمتهای (د)، (و) و (ز)ی مثال ۱۲.۳ مفاهیم کلی زیر را به‌دست می‌آوریم.

تعریف ۶.۳ اگر $S, T \subseteq \mathscr{U}$، آن‌گاه S و T را مجزا یا دوبه‌دو مجزا می‌نامند وقتی که $S \cap T = \emptyset$.

قضیه ۳.۳ اگر $S, T \subseteq \mathscr{U}$، آن‌گاه S و T مجزا هستند اگر و تنها اگر $S \cup T = S \triangle T$.

برهان کار را با S و Tی مجزا شروع می‌کنیم (برای اثبات $S \cup T = S \triangle T$، قضیهٔ ۲.۳ را به‌کار می‌بریم. چون اولین مورد استفاده از این قضیه است تا حدی محتاط خواهیم بود و جزئیات را ذکر خواهیم کرد.) اگر $x \in S \cup T$، آن‌گاه $x \in S$ یا $x \in T$ (یا شاید متعلق به هردو). اما چون S و T مجزا هستند، $x \notin S \cap T$ لذا $x \in S \triangle T$. در نتیجه چون $x \in S \cup T$ نتیجه می‌دهد که $x \in S \triangle T$، پس داریم $S \cup T \subseteq S \triangle T$. برای عکس شمول، اگر $y \in S \triangle T$، آن‌گاه $y \in S$ یا $y \in T$. (اما $y \notin S \cap T$؛ عملاً از این مطلب در اینجا استفاده نمی‌کنیم.) لذا $y \in S \cup T$. بنابراین $S \triangle T \subseteq S \cup T$ و بنابر تعریف ۲.۳ نتیجه می‌شود که $S \triangle T = S \cup T$.

برعکس، اگر $S \cup T = S \triangle T$ و $S \cap T \neq \emptyset$، فرض کنید $x \in S \cap T$. آن‌گاه $x \in S$ و $x \in T$، بنابراین $x \in S \cup T$. اما $x \notin S \triangle T$، که متناقض با برابری مجموعهٔ مفروض است. در نتیجه، S و T مجزا هستند. ■

در اثبات اولین قسمت قضیهٔ ۳.۳ نشان دادیم که اگر S و T دو مجموعهٔ دلخواه باشند، آن‌گاه $S \triangle T \subseteq S \cup T$. مجزا بودن S و T تنها برای نتیجه‌گیری عکس شمول لازم بود.

پس از کسب مهارت در جمع معمولاً نوبت تفریق می‌رسد. در اینجا مجموعهٔ $\mathbf{N}$ مشکلی به‌وجود می‌آورد. مثلاً، $\mathbf{N}$ شامل ۲ و ۵ هست اما $-۳ = ۵ - ۲$ را شامل نیست و $-۳ \notin \mathbf{N}$. بنابراین $\mathbf{N}$ تحت عمل تفریق بسته نیست و تفریق عملی دوتایی بر $\mathbf{N}$ نیست. اما بر زیرمجموعهٔ $\mathbf{Z}$ از $\mathbf{N}$، عملی دوتایی است. لذا، در $\mathbf{Z}$ می‌توانیم عمل یکتایی نفی را با «گرفتن منها»ی یک

عدد، نظیر ۳ که ۳− را به‌دست می‌دهد، معرفی کنیم. (تعریف کلی عمل یکتایی در بخش ۴.۵ آمده است.)

اینک عمل یکتایی قابل مقایسه‌ای را برای مجموعه‌ها عرضه می‌کنیم.

تعریف ۷.۳ برای مجموعهٔ $A \subseteq \mathscr{U}$، متمم A که آن را با $\mathscr{U} - A$ یا $\overline{A}$ نشان می‌دهند به‌وسیلهٔ $\{x | x \in \mathscr{U} \wedge x \notin A\}$ داده می‌شود.

مثال ۱۳.۳ برای مجموعه‌های مثال ۱۲.۳، $\overline{A} = \{۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰\}$، $\overline{B} = \{۱, ۲, ۸, ۹, ۱۰\}$، و $\overline{C} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۱۰\}$. □

برای هر مجموعهٔ عام $\mathscr{U}$ و هر مجموعهٔ $A \subseteq \mathscr{U}$، به‌دست می‌آوریم که $\overline{A} \subseteq \mathscr{U}$. بنابراین، $\mathscr{P}(\mathscr{U})$ تحت عمل یکتایی، که به‌وسیلهٔ متمم تعریف شده است، بسته است.

در ارتباط با مفهوم متمم، تعریف زیر را داریم:

تعریف ۸.۳ برای $A, B \subseteq \mathscr{U}$، متمم (نسبی) A نسبت به B که آن را با $B - A$ نشان می‌دهند با $\{x | x \in B \wedge x \notin A\}$ داده می‌شود.

مثال ۱۴.۳ برای مجموعه‌های مثال ۱۲.۳، داریم:

الف) $B - A = \{۶, ۷\}$ ب) $A - B = \{۱, ۲\}$ ج) $A - C = A$

د) $C - A = C$ ه) $A - A = \emptyset$ و) $\mathscr{U} - A = \overline{A}$ □

در قضیهٔ بعد باز از تعریف ۲.۳ استفاده خواهیم کرد. این قضیه پیوندهایی بین مفاهیم زیرمجموعه، اجتماع، اشتراک، و متمم برقرار می‌کند.

قضیه ۴.۳ برای مجموعه‌های $A, B \subseteq \mathscr{U}$، گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

الف) $A \subseteq B$؛ ب) $A \cup B = B$؛ ج) $A \cap B = A$

د) $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

برهان برای اثبات قضیه، ثابت می‌کنیم که (ب) ⇐ (الف)، (ج) ⇐ (ب)، (د) ⇐ (ج) و (الف) ⇐ (د). (خواننده در صورت تمایل می‌تواند به تمرین ۱۵ در انتهای بخش ۲.۲ رجوع کند.)

i) (ب) ⇐ (الف) اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، آنگاه $B \subseteq A \cup B$. برای حالت عکس شمول، اگر $x \in A \cup B$، آنگاه $x \in A$ یا $x \in B$، اما چون $A \subseteq B$، در هر یک از دو حالت داریم $x \in B$. بنابراین $A \cup B \subseteq B$ و برابری نتیجه می‌شود.

ii) (ج) ⇐ (ب) برای مجموعه‌های مفروض A و B همیشه داریم $A \supseteq A \cap B$. برای

حالت عکس شمول، فرض کنید $y \in A$. باتوجه به $A \cup B = B$، داریم

$$y \in A \Rightarrow y \in A \cup B \Rightarrow y \in B \Rightarrow y \in A \cap B$$

بنابراین، $A \subseteq A \cap B$ و نتیجه می‌گیریم که $A = A \cap B$.

iii) (د) $\Rightarrow$ (ج) $z \in \overline{B} \Rightarrow z \notin B \Rightarrow z \notin A \cap B$ زیرا $A \cap B \subseteq B$. با توجه به $A \cap B = A$، داریم $z \notin A \cap B \Rightarrow z \notin A \Rightarrow z \in \overline{A}$ بنابراین، $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

iv) (الف) $\Rightarrow$ (د) سرانجام، $w \in A \Rightarrow w \notin \overline{A}$، و چون $\overline{B} \subseteq \overline{A}$، $w \notin \overline{A} \Rightarrow w \notin \overline{B}$. پس $w \notin \overline{B} \Rightarrow w \in B$، بنابراین $A \subseteq B$. ■

اینک با تعداد کمی قضیه که اثبات و آماده کرده‌ایم قانونهای مهم حاکم بر نظریهٔ مجموعه‌ها را معرفی می‌کنیم. این قانونها شباهت بارزی به قانونهای منطق دارند که در بخش ۲.۲ عرضه کردیم. در بسیاری از موارد این اصلهای نظریه‌ای مجموعه‌ها شباهتهایی به ویژگیهای حسابی اعداد حقیقی دارند که در مجموعه‌ها «$\cup$» نقش «$+$» را دارد و «$\cap$» نقش «$\times$» را. اما تفاوتهایی موجودند.

قانونهای نظریهٔ مجموعه‌ها

برای مجموعه‌های دلخواه A، B، C که از مجموعهٔ عام $\mathscr{U}$ اختیار شده‌اند

۱.	$\overline{\overline{A}} = A$	قانون متمم مضاعف
۲.	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	قانونهای دمورگن
	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	
۳.	$A \cup B = B \cup A$	قانونهای تعویضپذیری
	$A \cap B = B \cap A$	
۴.	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	قانونهای شرکتپذیری
	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	
۵.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	قانونهای توزیعپذیری
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
۶.	$A \cup A = A$	قانونهای خود توانی
	$A \cap A = A$	
۷.	$A \cup \emptyset = A$	قانونهای همانی
	$A \cap \mathscr{U} = A$	
۸.	$A \cup \overline{A} = \mathscr{U}$	قانونهای عکس
	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	
۹.	$A \cup \mathscr{U} = \mathscr{U}$	قانونهای غلبه
	$A \cap \emptyset = \emptyset$	
۱۰.	$A \cup (A \cap B) = A$	قانونهای جذب
	$A \cap (A \cup B) = A$	

همهٔ قانونهای بالا را می‌توان مثل قسمت اول برهان قضیهٔ ۳.۳ اثبات کرد. ما این مطلب را با اثبات اولین قانون دمورگن و دومین قانون توزیع‌پذیری اشتراک نسبت به اجتماع نشان می‌دهیم.

برهان فرض کنید $x \in \mathscr{U}$. در این‌صورت $x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ و $x \notin B \Rightarrow x \in \overline{A}$ و $x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$، لذا $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. برای اثبات حالت عکس شمول، بررسی می‌کنیم که ببینیم آیا عکس هر استلزام منطقی یک استلزام منطقی هست یا نیست (یعنی که هر استلزام منطقی، در واقع، یک هم‌ارزی منطقی است). در نتیجه به‌دست می‌آوریم که $x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}$ و $x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin A$ و $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$. بنابراین $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. بنابراین، با توجه به $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ و $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ از تعریف ۲.۳ نتیجه می‌شود که $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. ■

در برهان دوم، هر دو رابطهٔ زیرمجموعه‌ای را همزمان، با استفاده از هم‌ارزی منطقی ($\Leftrightarrow$) به‌صورت عکس استلزامهای منطقی ($\Rightarrow$ و $\Leftarrow$) اثبات خواهیم کرد.

برهان برای هر $x \in \mathscr{U}$، $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A)$ و $(x \in B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A$ و $x \in B)$ یا $(x \in A$ و $x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \cap B)$ یا $(x \in A \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. چون در همه‌جا، گزاره‌های هم‌ارز داریم، پس همزمان هر دو رابطهٔ زیرمجموعه‌ای را اثبات کرده‌ایم، بنابراین $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. (هم‌ارزی سومین و چهارمین گزاره از اصل مقایسه‌پذیری در قانونهای منطق، یعنی قانون توزیع‌پذیری عاطف نسبت به فاصل، نتیجه می‌شوند.) ■

بدون شک خواننده فکر می‌کند که آمدن قانونهای ۲ تا ۱۰ به‌صورت زوج از اهمیت خاصی برخوردار است. مانند مورد قانونهای منطق، این زوجهای گزاره‌ها دوگان یکدیگر نام دارند. یک گزاره را می‌توان از گزارهٔ دیگر، با تعویض موارد $\cup$ با $\cap$ و برعکس و تعویض همهٔ موارد $\mathscr{U}$ با $\emptyset$ و برعکس نتیجه گرفت.

این مطلب ما را به تعریف مفهوم زیر رهنمون می‌شود.

تعریف ۹.۳ فرض کنید $X \subseteq \mathscr{U}$ معرف مجموعه‌ای شامل تعدادی متناهی از مجموعه‌ها (نظیر A، $\overline{A}$، B، $\overline{B}$، و غیره) و تنها عمل مجموعه‌ای، نمادهای $\cap$ و $\cup$ باشد. دوگان X، که با X^d نشان داده می‌شود زیرمجموعهٔ $\mathscr{U}$، حاصل از X است که به‌جای هر مورد $\cap(\cup)$ در X، $\cup(\cap)$، و به‌جای هر مورد $\mathscr{U}(\emptyset)$، $\emptyset(\mathscr{U})$ قرار داده می‌شود.

مثل آنچه در بخش ۲.۲ آمد، صورت قضیهٔ زیر را بیان و از آن استفاده می‌کنیم. قضیهٔ کلیتری را در فصل ۱۵ اثبات خواهیم کرد.

قضیه ۵.۳ (اصل دوگانی). فرض کنید $X, Y \subseteq \mathscr{U}$، که در آن X و Y به‌همان صورتی توصیف

می‌شوند که در تعریف ۹.۳ آمده‌است. اگر X، Y معرف دو مجموعه (در حالت کلی) باشد و $X = Y$، آن‌گاه (گزارهٔ دوگان) $X^d = Y^d$ نیز راست است.

استفاده از این اصل کار ما را به میزانی زیاد تقلیل می‌دهد. برای هر زوج از قانونهای ۲ تا ۱۰ به اثبات یکی از احکام نیاز است، و آن‌گاه برای به‌دست آوردن گزارهٔ دیگر هر زوج، از این اصل استمداد می‌کنیم.

درکاربرد قضیهٔ ۵.۳ باید خیلی محتاط باشیم. این قضیه را نمی‌توان در حالتهای خاص به‌کار برد ولی می‌توان آنها را تنها دربارهٔ قضایای مجموعه‌ها در حالت کلی به‌کار برد. مثلاً حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که در آن $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، $B = \{۱, ۲, ۳, ۵\}$، $C = \{۱, ۲\}$، و $D = \{۱, ۳\}$. تحت این شرایط

$$A \cap B = \{۱, ۲, ۳\} = C \cup D$$

اما، نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که $A \cap B = C \cup D \Rightarrow (A \cap B)^d = (C \cup D)^d$. یعنی که $A \cup B = C \cap D$. در این مورد، $A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$، درحالی که $C \cap D = \{۱\}$. دلیل اینکه چرا قضیهٔ ۵.۳ را نمی‌توان در اینجا به‌کار برد آن است که گرچه در این مثال خاص $A \cap B = C \cup D$، ولی این برابری در حالت کلی (یعنی، برای مجموعه‌های دلخواه A، B، C، و Dیی که از مجموعهٔ عام $\mathscr{U}$ گرفته شده‌اند) درست نیست.

مثال ۱۵.۳ از آنجایی که تعریف ۹.۳ و قضیهٔ ۵.۳ هیچ اشاره‌ای دربارهٔ زیرمجموعه‌ها ندارند، آیا می‌توانیم دوگانی برای گزارهٔ $A \subseteq B$ (که در آن $A, B \subseteq \mathscr{U}$) بیابیم؟

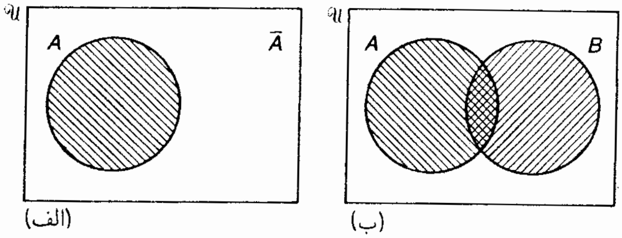
در اینجا فرصتی به‌دست آمده است تا از نتایج قضیهٔ ۴.۳ استفاده کنیم. به‌خصوص، با استفاده از گزارهٔ هم‌ارز $A \cup B = B$ می‌توانیم دربارهٔ گزارهٔ $A \subseteq B$ بحث کنیم.

دوگان $A \cup B = B$، نتیجه می‌دهد که $A \cap B = B$. اما $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$. در نتیجه، دوگان گزارهٔ $A \subseteq B$، گزارهٔ $B \subseteq A$ است.

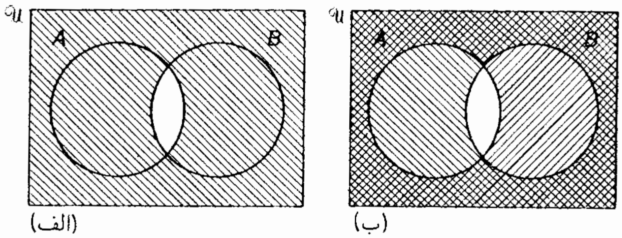
(این نتیجه را می‌توانستیم با استفاده از $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$ نیز به‌دست آوریم. از خواننده می‌خواهیم که درستی این مطلب را در تمرینهای این بخش تحقیق کند.) □

وقتی حداکثر در یک برابری‌مجموعه‌ای یا گزارهٔ زیرمجموعه‌ای، چهار مجموعه دخالت دارند، می‌توانیم به‌صورت نموداری مسائل را بررسی کنیم.

نمودار ون را که به افتخار جان ون منطقدان انگلیسی (۱۸۳۴ـ۱۸۸۳) به این نام می‌خوانند به‌صورت زیر می‌سازند: $\mathscr{U}$ را نقاط داخل یک مستطیل می‌گیرند، و زیرمجموعه‌های $\mathscr{U}$ را با نقاط داخل دایره‌ها و خمهای بسته دیگر نشان می‌دهند. شکل ۴.۳، دو نمودار ون را نمایش می‌دهد. ناحیهٔ پرداز زدهٔ ۴.۳(الف) معرف مجموعهٔ A است درحالی که $\overline{A}$ با ناحیهٔ پردازنزده نشان داده شده است. ناحیهٔ پرداززدهٔ شکل ۴.۳(ب) معرف $A \cup B$ است. مجموعهٔ $A \cap B$ ناحیه‌ای است که در شکل به‌صورت ضربدری پرداز خورده است.



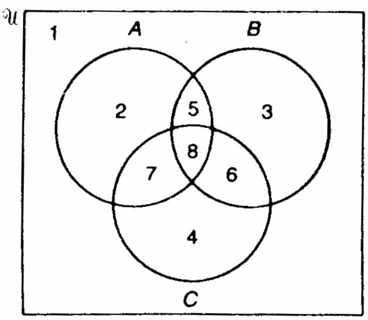
شکل ۴.۳



شکل ۵.۳

در شکل ۵.۳ نمودارهای ون برای اثبات یکی از قانونهای دمورگن به‌کار رفته است. شکل ۵.۳(الف) در همه‌جا، جز $A \cap B$، پرداز خورده است. در شکل ۵.۳(ب)، $\overline{A}$ ناحیه‌ای است که با خطوطی از چپ و پایین به راست و بالا پرداز خورده است. ناحیه‌ای که با خطوطی از چپ و بالا به راست و پایین پرداز خورده است معرف $\overline{B}$ است. برای این نمودارهای ون، ناحیهٔ پرداز خوردهٔ قسمت (ب) همان ناحیهٔ پرداز خوردهٔ ناحیهٔ (الف) است. در نتیجه، $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

بعداً از این نمودارها برای نشان دادن برابری $\overline{(A \cup B) \cap C} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \overline{C}$ به‌ازای مجموعه‌های دلخواه $A,\ B,\ C \subseteq \mathscr{U}$، استفاده خواهیم کرد. به‌جای پرداز زدن ناحیه‌ها، روش دیگر استفاده از نمودارهای ون، به‌کار بردن شماره‌گذاری ناحیه‌ها نظیر شکل ۶.۳ است که در آن مثلاً ناحیهٔ ۳ معرف $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$ و ناحیهٔ ۷ معرف $A \cap \overline{B} \cap C$ است. هر ناحیه، مجموعه‌ای



شکل ۶.۳

به‌شکل $S_۱ \cap S_۲ \cap S_۳$ است که در آن به‌جای $S_۱$ مجموعهٔ A یا $\overline{A}$ و به‌جای $S_۲$، مجموعهٔ B یا $\overline{B}$ و به‌جای $S_۳$، مجموعهٔ C یا $\overline{C}$ قرار می‌گیرد. در نتیجه بنابر اصل ضرب هشت ناحیهٔ ممکن وجود دارند.

با مراجعه به شکل ۶.۳، می‌بینیم که $A \cup B$ شامل ناحیه‌های ۲، ۳، ۵، ۶، ۷، ۸ است و ناحیه‌های ۴، ۶، ۷، ۸ مجموعهٔ C را می‌سازند. بنابراین، $(A \cup B) \cap C$ مشتمل بر نواحی مشترک $A \cup B$ و C: یعنی، نواحی ۶، ۷، ۸ است. در نتیجه، مجموعهٔ $\overline{(A \cup B) \cap C}$ از ناحیه‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ ساخته شده‌است. مجموعهٔ $\overline{A}$ متشکل است از ناحیه‌های ۱، ۳، ۴، ۶ درحالی که ناحیه‌های ۱، ۲، ۴، ۷ مجموعهٔ $\overline{B}$ را می‌سازند. لذا، $\overline{A} \cap \overline{B}$ شامل ناحیه‌های ۱ و ۴ است. چون نواحی ۴، ۶، ۷، ۸ مجموعهٔ C را تشکیل می‌دهند، مجموعهٔ $\overline{C}$ از نواحی ۱، ۲، ۳، ۵ ساخته می‌شود. سپس با یافتن اجتماع $\overline{A} \cap \overline{B}$ و $\overline{C}$، به ناحیه‌های ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵ می‌رسیم که معرف همان $\overline{(A \cup B) \cap C}$ است و اثبات به پایان می‌رسد.

تکنیک دیگر اثبات برابریهای مجموعه‌ای، جدول عضویت است. (این روش، شبیه استفاده از جدول ارزش بخش ۱.۲ است.)

مشاهده می‌کنیم که برای مجموعه‌های $A, B \subseteq \mathscr{U}$، یک عنصر $x \in \mathscr{U}$ دقیقاً در یکی از چهار وضعیت زیر صدق می‌کند:

الف) $x \notin A, x \notin B$ **ب)** $x \notin A, x \in B$

ج) $x \in A, x \notin B$ **د)** $x \in A, x \in B$

وقتی x عنصری از مجموعه‌ای مفروض است در ستون معرف آن مجموعه، می‌نویسیم ۱؛ و وقتی x در آن مجموعه نیست می‌نویسیم ۰. با استفاده از این نمادگذاری، جدولهای عضویت برای $A \cap B$، $A \cup B$، و $\overline{A}$ را در جدول ۱.۳ عرضه کرده‌ایم. در اینجا، مثلاً سطر سوم قسمت (الف) جدول به ما می‌گوید که وقتی عنصر $x \in \mathscr{U}$ در مجموعه A بوده ولی در B نیست، لذا در $A \cap B$ نیست ولی در $A \cup B$ هست.

این عملها که روی ۰ و ۱ انجام می‌گیرند نظیر عملهای حساب معمولی‌اند جز عمل $۱ \cup ۱ = ۱$.

جدول ۱.۳

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$
۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۱
۱	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۱

(الف)

A	$\overline{A}$
۰	۱
۱	۰

(ب)

جدول ۲.۳

A	B	C	$B \cup C$	$A \cup (B \cap C)$	$A \cup B$	$A \cup$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

چون این ستونها یکی هستند نتیجه می‌گیریم که

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

با استفاده از جدولهای عضویت، از مقایسهٔ ستونهای مربوط به آنها در جدول، برابری دو مجموعه را می‌توان اثبات کرد. جدول ۲.۳ این مطلب را برای قانون توزیعپذیری اجتماع نسبت به اشتراک نشان می‌دهد. در اینجا می‌بینیم که چگونه هر یک از هشت سطر، با دقیقاً یکی از هشت ناحیهٔ نمودار ون شکل ۶.۳ متناظر می‌شود. مثلاً سطر ۱ متناظر با ناحیهٔ $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$: ۱؛ و سطر ۶ متناظر با ناحیهٔ $A \cap \overline{B} \cap C$: ۷ است.

اینک که قانونهای نظریهٔ مجموعه‌ها را داریم با آنها چه‌کار می‌توانیم بکنیم؟ مثالهای زیر نشان خواهند داد که چگونه قانونها می‌توانند برای ساده کردن یک عبارت مجموعه‌ای پیچیده، یا نتیجه‌گیری برابریهای جدید مجموعه‌ای به‌کار روند.

مثال ۱۶.۳ عبارت $\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \overline{B}}$ را ساده کنید.

دلیلها	
	$\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \overline{B}}$
قانون دمورگن	$= \overline{\overline{((A \cup B) \cap C)}} \cap \overline{\overline{B}}$
قانون متمم مضاعف	$= ((A \cup B) \cap C) \cap B$
قانون شرکتپذیری اشتراک	$= (A \cup B) \cap (C \cap B)$
قانون تعویضپذیری اشتراک	$= (A \cup B) \cap (B \cap C)$
قانون شرکتپذیری اشتراک	$= [(A \cup B) \cap B] \cap C$
قانون جذب	$= B \cap C$ □

مثال ۱۷.۳ عبارت $\overline{A-B}$ را برحسب $\cup$ و $^-$ بیان کنید.

از تعریف متمم نسبی داریم $A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}=A\cap\overline{B}$. بنابراین

دلیلها	
	$\overline{A-B}=\overline{A\cap\overline{B}}$
قانون دمورگن	$=\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}$
قانون متمم مضاعف	$=\overline{A}\cup B$ □

مثال ۱۸.۳ با توجه به آنچه در مثال ۱۷.۳ ملاحظه کردیم، داریم

$$A\triangle B=\{x|x\in A\cup B\wedge x\notin A\cap B\}=(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}$$

بنابراین

دلیلها	
	$\overline{A\triangle B}=\overline{(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}}$
قانون دمورگن	$=\overline{(A\cup B)}\cup\overline{\overline{(A\cap B)}}$
قانون متمم مضاعف	$=\overline{(A\cup B)}\cup(A\cap B)$
قانون تعویضپذیری $\cup$	$=(A\cap B)\cup\overline{(A\cup B)}$
قانون دمورگن	$=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$
قانون توزیعپذیری $\cup$ نسبت به $\cap$	$=[(A\cap B)\cup\overline{A}]\cap[(A\cap B)\cup\overline{B}]$
قانون توزیعپذیری $\cup$ نسبت به $\cap$	$=[(A\cup\overline{A})\cap(B\cup\overline{A})]\cap$ $[(A\cup\overline{B})\cap(B\cup\overline{B})]$
قانون عکس	$=[\mathscr{U}\cap(B\cup\overline{A})]\cap[(A\cup\overline{B})\cap\mathscr{U}]$
قانون همانی	$=(B\cup\overline{A})\cap(A\cup\overline{B})$
قانون تعویضپذیری$\cup$	$=(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B})$
قانون دمورگن	$=(\overline{A}\cup B)\cap\overline{(\overline{A}\cap B)}$
	$=\overline{A}\triangle B$
قانون تعویضپذیری $\cap$	$=(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)$
قانون دمورگن	$=(A\cup\overline{B})\cap\overline{(A\cap\overline{B})}$
	$=A\triangle\overline{B}$ □

قبل از خاتمه دادن به این بخش، عملهای مجموعه‌ای $\cup$ و $\cap$ را برای بیش از سه مجموعه تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۳ فرض کنید I مجموعه‌ای ناتهی و $\mathscr{U}$ مجموعهٔ عام باشد. برای هر $i\in I$، فرض

کنید $A_i \subseteq \mathscr{U}$. در این صورت I را مجموعهٔ اندیسگذار (یا مجموعهٔ اندیسها) می‌نامند و هر $i \in I$ یک اندیس نامیده می‌شود.

تحت این شرایط

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x | x \in A_i \quad \text{برای حداقل یک } i \in I\}$$

و

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x | x \in A_i \quad \text{برای هر } i \in I\}$$

نتایج مربوط به تعریف ۱۰.۳ را می‌توانیم با استفاده از سورها به‌صورت دیگری بیان کنیم

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I \quad (x \in A_i)$$
$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I \quad (x \in A_i)$$

در این‌صورت $x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \overline{\exists i \in I \ (x \in A_i)} \Leftrightarrow \forall i \in I \ (x \notin A_i)$؛ یعنی $x \notin \bigcup_{i\in I} A_i$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر اندیس $i \in I$، $x \notin A_i$. همچنین

$$x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \overline{\forall i \in I \ \ (x \in A_i)} \Leftrightarrow \exists i \in I \quad (x \notin A_i)$$

یعنی، $x \notin \bigcap_{i\in I} A_i$ اگر و تنها اگر به‌ازای حداقل یک اندیس $i \in I$، $x \notin A_i$.

اگر مجموعهٔ اندیسگذار I، مجموعهٔ $\mathbf{Z}^+$ باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$\bigcup_{i\in \mathbf{Z}^+} A_i = A_۱ \bigcup A_۲ \bigcup \cdots = \bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i, \quad \bigcap_{i\in \mathbf{Z}^+} A_i = A_۱ \cap A_۲ \cap \cdots = \bigcap_{i=۱}^{\infty} A_i$$

مثال ۱۹.۳ فرض کنید $I = \{۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$ و به‌ازای $i \in I$ فرض کنید

$$A_i = \{۱, ۲, ۳, \ldots, i\} \subseteq \mathscr{U} = \mathbf{Z}^+$$

در این‌صورت

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i=۳}^{۷} A_i = A_۳ \cup A_۴ \cup \cdots \cup A_۷ = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۷\} = A_۷$$

در حالی که $A_۳ = \{۱, ۲, ۳,\} = \bigcap_{i\in I} A_i$. $\square$

مثال ۲۰.۳ فرض کنید $\mathscr{U} = \mathbf{R}$ و $I = \mathbf{R}^+$. اگر به‌ازای هر $r \in \mathbf{R}^+$، $A_r = [-r, r]$، آن‌گاه $\bigcup_{r\in I} A_r = \mathbf{R}$، $\bigcap_{r\in I} A_r = \{۰\}$. $\square$

وقتی با اجتماعها و اشتراکهای تعمیم یافته سر و کار داریم، جدولهای عضویت و نمودارهای ون، متأسفانه تقریباً بی‌استفاده هستند، اما روشی قوی نظیر آنچه در قسمت اول برهان قضیهٔ ۳.۳ نشان داده شده هنوز در دسترس است.

قضیه ۶.۳ (تعمیم قانونهای دمورگن) فرض کنید I مجموعهٔ اندیسگذار باشد که در آن، به ازای هر $i \in I$، $A_i \subseteq \mathscr{U}$. در این صورت

الف) $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A}_i$ **ب)** $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A}_i$

برهان قسمت (الف) قضیهٔ ۶.۳ را ثابت خواهیم کرد و اثبات قسمت (ب) را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. به‌ازای هر $x \in \mathscr{U}$، $x \in \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow x \notin A_i$، به‌ازای همهٔ مقادیر $i \in I \Leftrightarrow x \in \overline{A}_i$، به‌ازای همه مقادیر $i \in I \Leftrightarrow x \bigcap_{i\in I} \overline{A}_i$. $\blacksquare$

تمرینهای ۲.۳

۱. برای $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۹, ۱۰\}$ فرض‌کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$، $B = \{۱, ۲, ۴, ۸\}$، $C = \{۱, ۲, ۳, ۵, ۷\}$، و $D = \{۲, ۴, ۶, ۸\}$ هر یک از مجموعه‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $(A \cup B) \cap C$ **ب)** $A \cup (B \cap C)$ **ج)** $\overline{C} \cup \overline{D}$

د) $\overline{C \cap D}$ **ه)** $(A \cup B) - C$ **و)** $A \cup (B - C)$

ز) $(B - C) - D$ **ح)** $B - (C - D)$ **ط)** $(A \cup B) - (C \cap D)$

۲. اگر $A = [۰, ۳]$، $B = [۲, ۷)$، و $\mathscr{U} = \mathbf{R}$، هر یک از مجموعه‌های زیر را تعیین کنید:

الف) $A \cap B$ **ب)** $A \cup B$ **ج)** $\overline{A}$

د) $A \triangle B$ **ه)** $A - B$ **و)** $B - A$

۳. فرض کنید $\mathscr{U} = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$، با $A = \{a, b, c\}$ و $C = \{a, b, d, e\}$. اگر $|A \cap B| = ۲$ و $(A \cap B) \subset B \subset C$، B را تعیین کنید.

۴. هر یک از نتایج زیر را بدون استفاده از نمودارهای ون یا جدولهای عضویت ثابت کنید. (یک مجموعهٔ عام $\mathscr{U}$ فرض کنید)

الف) اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$، آن‌گاه $A \cap C \subseteq B \cap D$ و $A \cup C \subseteq B \cup D$.

ب) اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$، آن‌گاه $A \cap B \subseteq C$ و $A \cup B \subseteq C$.

ج) اگر $A \subseteq B$ و $A \subseteq C$، آن‌گاه $A \subseteq B \cap C$ و $A \subseteq B \cup C$.

د) $A \subseteq B$ اگر و تنها اگر $A \cap \overline{B} = \emptyset$. ه) $A \subseteq B$ اگر و تنها اگر $\overline{A} \cup B = \mathscr{U}$.

۵. درستی یا نادرستی هر یک از رابطه‌های زیر را ثابت کنید

الف) برای مجموعه‌های $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$، $A \cap C = B \cap C \Rightarrow A = B$

ب) برای مجموعه‌های $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$، $A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$

ج) برای مجموعه‌های $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$، $[(A\cap C = B\cap C)\wedge(A\cup C = B\cup C)] \Rightarrow A = B$

د) برای مجموعه‌های $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$ ، $A \triangle C = B \triangle C \Rightarrow A = B$.

۶. برای مجموعه‌های $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$ با استفاده از نمودارهای ون درستی یا نادرستی هر یک از برابریهای زیر را بررسی کنید.

الف) $A\triangle(B \cap C) = (A\triangle B) \cap (A\triangle C)$

ب) $A \cap (B\triangle C) = (A \cap B)\triangle(A \cap C)$

ج) $A\triangle(B \cup C) = (A\triangle B) \cup (A\triangle C)$

د) $A \cup (B\triangle C) = (A \cup B)\triangle(A \cup C)$

ه) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

و) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

ز) $A\triangle(B\triangle C) = (A\triangle B)\triangle C$

۷. اگر $A = \{a, b, d\}$، $B = \{d, x, y\}$، $C = \{x, z\}$، برای مجموعهٔ $(A \cap B) \cup C$ چند زیرمجموعهٔ سره وجود دارند؟ برای مجموعهٔ $A \cap (B \cup C)$ چندتا؟

۸. برای مجموعهٔ عام مفروض $\mathscr{U}$، هر زیرمجموعهٔ Aی $\mathscr{U}$ در قانونهای خودتوانی‌اجتماع و اشتراک صدق می‌کند. (الف) آیا اعدادی حقیقی وجود دارند که در ویژگی خودتوانی برای جمع صدق کنند؟ (یعنی می‌توان عددی (اعدادی) حقیقی مانند x یافت که $x + x = x$؟) (ب) با در نظر گرفتن ضرب به‌جای جمع، به‌قسمت (الف) پاسخ دهید.

۹. دوگان هر یک از قضایای نظریه‌ای مجموعه‌ها را بنویسید.

الف) $\mathscr{U} = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

ب) $A = A \cap (A \cup B)$

ج) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

د) $A = (A \cup B) \cap (A \cup \emptyset)$

۱۰. با استفاده از هم‌ارزی $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$، نشان دهید که دوگان گزارهٔ $A \subseteq B$ گزارهٔ $B \subseteq A$ است.

۱۱. درستی یا نادرستی هر یک از برابریهای زیر را برای مجموعه‌های $A, B \subseteq \mathscr{U}$ ثابت کنید.

الف) $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$ ب) $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$

۱۲. جدولهای عضویت را برای اثبات هر یک از برابریهای زیر به‌کار برید:

الف) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ب) $A \cup A = A$ ج) $A \cup (A \cap B) = A$

د) $\overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap C)} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{C})$

۱۳. **الف)** برای ساختن جدول عضویت $A\cap(B\cup C)\cap(D\cup\overline{E}\cup\overline{F})$ چند سطر لازم است؟

ب) برای ساختن جدول عضویت مجموعه‌ای که از مجموعه‌های A_1، A_2، ...، A_n با استفاده از $\cap$، $\cup$، و $^-$ ساخته می‌شود چند سطر لازم است؟

ج) با داشتن جدولهای عضویت دو مجموعهٔ A و B چگونه می‌توان رابطهٔ $A\subseteq B$ را تشخیص داد؟

د) با استفاده از جدولهای عضویت، تعیین کنید که آیا گزارهٔ $A\cup\overline{B}\supseteq(A\cap B)\cup(\overline{B\cap C})$ راست است یا نه؟

۱۴. با استفاده از قانونهای نظریهٔ مجموعه‌ها هر یک از مجموعه‌های زیر را ساده کنید:

الف) $A\cap(B-A)$ **ب)** $(A\cap B)\cup(A\cap B\cap\overline{C}\cap D)\cup(\overline{A}\cap B)$

ج) $(A-B)\cup(A\cap B)$ **د)** $\overline{A}\cup\overline{B}\cup(A\cap B\cap\overline{C})$

هـ) $\overline{A}\cup(A\cap\overline{B})\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup\cdots$

۱۵. فرض کنید $\mathbf{R}=\mathscr{U}$ و $I=\mathbf{Z}^+$. برای هر $n\in\mathbf{Z}^+$ فرض کنید $A_n=[-2n,3n]$. مطلوب است:

الف) A_3 **ب)** A_4 **ج)** A_3-A_4 **د)** $A_3\triangle A_4$

هـ) $\bigcup_{n=1}^{7}A_n$ **و)** $\bigcap_{n=1}^{7}A_n$ **ز)** $\bigcup_{n\in\mathbf{Z}^+}A_n$

ح) $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$

۱۶. قضیهٔ ۶.۳(ب) را با ذکر جزئیات ثابت کنید.

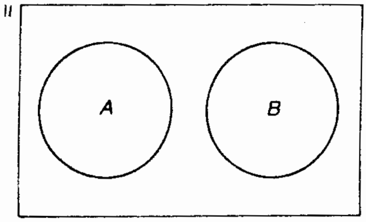
۱۷. با فرض داشتن مجموعهٔ عام $\mathscr{U}$ و مجموعهٔ اندیسگذار I، برای هر $i\in I$ فرض کنید $B_i\subseteq\mathscr{U}$. ثابت کنید که برای $A\subseteq\mathscr{U}$، $A\cap(\bigcup_{i\in I}B_i)=\bigcup_{i\in I}(A\cap B_i)$، و $A\cup(\bigcap_{i\in I}B_i)=\bigcap_{i\in I}(A\cup B_i)$ (تعمیم قانونهای توزیعپذیری).

۳.۳ شمارش و نمودارهای ون

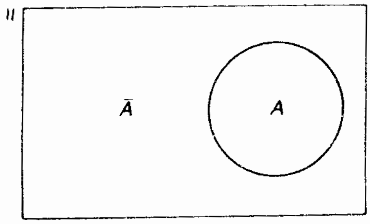
با همهٔ کارهای نظری و اثبات قضایایی که در آخرین بخش انجام دادیم، اینک زمانی مناسب برای برگشت به موضوع فصل و بررسی برخی مسائل شمارشی دیگر است.

برای مجموعه‌های A و B از مجموعهٔ عام متناهی $\mathscr{U}$، نمودارهای ون زیر در به‌دست آوردن فرمولهای شمارشی برای $|\overline{A}|$ و $|A\cup B|$ برحسب $|A|$، $|B|$، و $|A\cap B|$ به‌ما کمک خواهند کرد.

همان‌طور که شکل ۷.۳ نشان می‌دهد، $A\cup\overline{A}=\mathscr{U}$ و $A\cap\overline{A}=\emptyset$، لذا بنابر اصل جمع $|\mathscr{U}|=|A|+|\overline{A}|$ یا $|\overline{A}|=|\mathscr{U}|-|A|$. در شکل ۸.۳ مجموعه‌های A و B اشتراکی ندارند به قسمی که در اینجا اصل جمع به $|A\cup B|=|A|+|B|$ منجر می‌شود، و لازم است که A و B متناهی باشند ولی لازم نیست که دربارهٔ توان مجموعهٔ $\mathscr{U}$ شرطی موجود باشد.



شکل ۸.۳



شکل ۷.۳

با برگشت به حالتی که در آن، A و B مجزا نیستند، می‌خواهیم فرمولی برای $|A\cup B|$ با مثال زیر به‌دست آوریم.

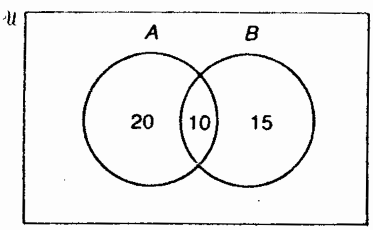
مثال ۲۱.۳ از ۵۰ دانشجوی یک کالج، ۳۰ نفر زبان **بیسیک**، ۲۵ نفر زبان پاسکال، و ۱۰ نفر هر دو زبان را می‌آموزند. چند نفر دانشجو یکی از دو زبان را می‌آموزند؟

فرض کنید $\mathcal{U}$ مجموعهٔ ۵۰ دانشجوست، و A زیرمجموعهٔ دانشجویانی است که زبان **بیسیک** و B زیرمجموعهٔ دانشجویانی است که زبان پاسکال را می‌آموزند. برای پاسخ دادن به سؤال، به $|A\cup B|$ نیاز داریم. در شکل ۹.۳، تعداد دانشجو در هر ناحیه از روی اطلاعات داده شده به‌دست آمده‌اند: $|A|=30$، $|B|=25$، $|A\cap B|=10$. در نتیجه، $|A\cup B|=45\neq|A|+|B|$، زیرا $|A|+|B|$ دانشجویانی را که در $|A\cap B|$ هستند دوبار به‌حساب می‌آورد. برای جبران این شمارش اضافی، $|A\cap B|$ را از $|A|+|B|$ کم می‌کنیم تا این فرمول صحیح $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ به‌دست آید.□

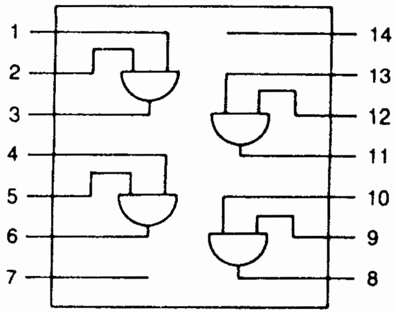
برای حالت کلی، در صورتی که مجموعه‌های A، B متناهی باشند $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$. در نتیجه، مجموعه‌های متناهی A و B مجزا هستند اگر و تنها اگر $|A\cup B|=|A|+|B|$.

به‌طوری که در مثال زیر دیده می‌شود این حالت را می‌توان برای سه مجموعه نیز تعمیم داد.

مثال ۲۲.۳ یک تراشهٔ منطقی ۱۴ سنجاقی دارای ۴ دریچهٔ و است. هر دریچه دو ورودی و



شکل ۹.۳



شکل۱۰.۳

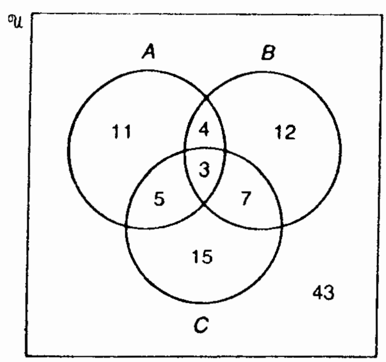
یک خروجی دارد. (شکل ۱۰.۳ را ببینید.) اولین دریچهٔ و (یعنی دریچهٔ مربوط به سنجاقهای ۱، ۲، ۳) می‌تواند همه یا یکی از خرابیهای زیر را داشته باشد:

$D_1 =$ اولین ورودی (سنجاق ۱) در ۰ گیر می‌کند.
$D_2 =$ دومین ورودی (سنجاق ۲) در ۰ گیر می‌کند.
$D_3 =$ خروجی (سنجاق ۳) در ۱ گیر می‌کند.

برای نمونه‌ای مرکب از ۱۰۰ تراشهٔ منطقی از این نوع، فرض می‌کنیم A، B، و C زیرمجموعه‌هایی باشند که به‌ترتیب خرابیهای D_1، D_2، و D_3 را دارند. با $|A| = ۲۳$، $|B| = ۲۶$، $|A \cap B| = ۷$، $|C| = ۳۰$، $|A \cap C| = ۸$، $|B \cap C| = ۱۰$، و $|A \cap B \cap C| = ۳$. چند تراشه در این نمونه خراب‌اند؟
با حرکتی قهقرایی از $|A \cap B \cap C| = ۳$ به $|A| = ۲۳$، ناحیه‌ها را مطابق شکل ۱۱.۳ نشانه‌گذاری می‌کنیم و ملاحظه می‌کنیم که

$$|A \cup B \cup C| = ۵۷ = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

□



شکل۱۱.۳

از فرمول مربوط به $|A\cup B\cup C|$ و قانون دمورگن نتیجه می‌شود که اگر A، B، و C مجموعه‌هایی از مجموعهٔ عام متناهی $\mathscr{U}$ باشند، آنگاه

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|\overline{A\cup B\cup C}|=|\mathscr{U}|-|A\cup B\cup C|=|\mathscr{U}|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|$$

این بخش را با مسأله‌ای که این نتیجه در آن به‌کار برده شده خاتمه می‌دهیم.

مثال ۲۳.۳ دانشجویی هر روز بعد از کلاس درس به باشگاهی می‌رود و به یکی از سه بازی کامپیوتری L، M، یا S می‌پردازد. به چند راه می‌تواند هر روز به یک بازی بپردازد به قسمی که در طول یک هفتهٔ تحصیلی (۵ روز) هر یک از سه نوع بازی را حداقل یک بار انجام دهد؟

در اینجا یک نکتهٔ انحرافی کوچک وجود دارد. مجموعهٔ $\mathscr{U}$ مرکب از تمام جایگشتهای به‌اندازهٔ ۵ است که از مجموعهٔ سه بازی اختیار می‌شوند و تکرار در این اختیار مجاز است. مجموعهٔ A معرف زیرمجموعهٔ همهٔ دنباله‌هایی از ۵ بازی در طول هفته است که در آنها بازی L انجام نمی‌شود. مجموعه‌های B و C به‌صورتی مشابه تعریف می‌شوند و به ترتیب شامل بازی M و S نیستند. تکنیکهای شمارش فصل ۱ به ما می‌دهد

$$|\mathscr{U}|=۳^۵, |A|=|B|=|C|=۲^۵, |A\cap B|=|A\cap C|=|B\cap C|=۱^۵ = ۱, |A\cap B\cap C|=۰$$

لذا بنابر فرمول بالا، دانشجو به $|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=۳^۵-۳\times۲^۵+۳\times۱^۵-۰=۱۵۰$ راه می‌تواند در طول هفته، بازی روزانه‌اش را انتخاب کند که هر یک از سه نوع بازی را حداقل یک بار انجام دهد.

این مثال را می‌توان به‌صورت توزیعی هم‌ارز بیان کرد، زیرا ما تعداد راههای توزیع ۵ شیء متمایز (دوشنبه، سه‌شنبه، ... ، جمعه) را در ۳ جعبهٔ متمایز (بازیهای کامپیوتری) جستجو می‌کنیم به‌طوری که هیچ جعبه‌ای تهی نباشد. دربارهٔ این مطلب در فصل ۵ بیشتر گفتگو می‌کنیم.□

۴.۳ چند کلمه‌ای دربارهٔ احتمال

وقتی فردی آزمایشی نظیر پرتاب یک تاس یا انتخاب دو دانشجو از کلاس ۲۰ نفری را برای کار بر روی طرحی انجام می‌دهد، فهرستی از همهٔ برآمدهای ممکن برای وضعیت مورد نظر تهیه می‌کند که آن را یک فضای نمونه‌ای می‌نامند. بنابراین، $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ برای اولین آزمایش بالا یک فضای نمونه‌ای است، درحالی که $\{\{a_i,a_j\}|۱\leq i,j\leq ۲۰, i\neq j\}$ را می‌توان

به‌عنوان فضای نمونه‌ای آزمایش دیگر به‌کار برد که در آن a_i، iامین دانشجو $1 \leq i \leq 20$ را نشان می‌دهد.

متأسفانه برای آزمایشی معلوم، بیش از یک فضای نمونه‌ای می‌تواند وجود داشته باشد. اگر سکه‌ای را سه بار پرتاب کنیم و برآمدها را در نظر بگیریم، یک فضای نمونه‌ای ممکن برای این آزمایش عبارت است از $\{0, 1, 2, 3\}$، که در آن i، $0 \leq i \leq 3$، معرف تعداد شیرهایی است که در این سه پرتاب رخ می‌دهند. برآمدها را می‌توان با فضای نمونه‌ای

$$\mathscr{S} = \{\text{HHH}, \text{THH}, \text{HTH}, \text{HHT}, \text{TTH}, \text{THT}, \text{HTT}, \text{TTT}\}$$

نیز عرضه کرد، که در آن، توجه می‌کنیم که رخداد هر یک از هشت برآمد ممکن، احتمالی یکسان دارد. چنین حالتی را با فضای نمونه‌ای $\{0, 1, 2, 3\}$ نداریم که در آن احساس می‌کنیم شانس آمدن یک شیر در سه پرتاب بیش از نیامدن شیر است.

در این کتاب همیشه آن فضای نمونه‌ای را به‌کار می‌بریم که احتمال رخداد تمام عنصرهای آن یکی باشد. تحت این پذیرهٔ متساوی الاحتمال بودن، ما تعریفی را برای احتمال به‌کار می‌بریم که اولین بار به‌وسیلهٔ پییر-سیمون دولاپلاس (۱۷۴۹-۱۸۲۷)، ریاضیدان فرانسوی در نظریهٔ تحلیلی احتمال او به‌کار برده شده‌است.

> تحت پذیرهٔ متساوی الاحتمال بودن برای یک فضای نمونه‌ای $\mathscr{S}$ مربوط به آزمایش $\mathscr{E}$، هر زیرمجموعهٔ A از $\mathscr{S}$ را یک پیشامد می‌نامند. هر عنصر $\mathscr{S}$ را یک پیشامد مقدماتی می‌گویند، به‌قسمی که اگر $|\mathscr{S}| = n$ و $a \in \mathscr{S}$، $A \subseteq \mathscr{S}$، آن‌گاه
>
> $$Pr(a) = \text{احتمال رخ دادن } a = \frac{1}{n} = \frac{|\{a\}|}{|\mathscr{S}|}$$
>
> و
>
> $$Pr(A) = \text{احتمال رخ دادن } A = \frac{|A|}{|\mathscr{S}|} = \frac{|A|}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{a \in A} |\{a\}|\right)$$
>
> زیرا A اجتماع زیرمجموعه‌های تک عضوی مجزای آن است.

ما این نکته‌ها را در مثالهای زیر نشان می‌دهیم.

مثال ۲۴.۳ در یک پرتاب تاسی، احتمال آمدن ۵ یا ۶ چقدر است؟

در اینجا $\mathscr{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و پیشامد A را که ما می‌خواهیم بررسی کنیم پیشامد

$\{5,6\}$ است. بنابراین

$$Pr(A) = \frac{|A|}{|\mathscr{S}|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
□

مثال ۲۵.۳ اگر سکه‌ای را ۴ بار بیندازیم احتمال آمدن دو شیر و دو خط چقدر است؟

در اینجا فضای نمونه‌ای متشکّل از همهٔ دنباله‌هایی به‌صورت x_1، x_2، x_3، x_4 است که در آن به‌جای هر x_i، $4 \geq i \geq 1$، یک T یا یک H قرار می‌گیرد. بنابراین، $|\mathscr{S}| = 2^4 = 16$. پیشامد A که مورد توجه ماست، حالت مشتمل بر همهٔ آرایشهای چهار نماد H، H، T، T است، لذا $|A| = 4!/(2!2!) = 6$. در نتیجه $Pr(A) = 6/16 = 3/8$. □

در مثال ۲۵.۳، برآمد هر پرتاب مستقل از برآمدهای پرتاب قبلی است. چنین موردی را امتحان برنولی می‌نامند. این امتحانها، در اولین درس احتمال و در رابطه با توزیع برنولی که مثالی مهم از توزیع احتمال گسسته است بررسی می‌شوند. ما به این مطلب در فصل ۱۶، وقتی کاربرد گروههای آبلی را در نظریهٔ کد گذاری مطالعه می‌کنیم، دوباره برمی‌گردیم.

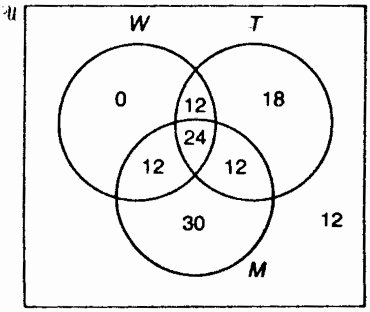
در آخرین مثال، مفاهیم نمودارهای ون و احتمال را به‌کار می‌بریم.

مثال ۲۶.۳ یک خط هوایی در بررسی از ۱۲۰ مسافر، متوجه می‌شود که ۴۸ نفر ترجیح می‌دهند که با غذایشان کوکا بنوشند، ۷۸ نفر پپسی، و ۶۶ نفر چای خنک. به‌علاوه ۳۶ نفر هر دو تا از نوشیدنیها و ۲۴ مسافر هر سه نوشیدنی را دوست دارند. اگر به تصادف دو مسافر از نمونهٔ ۱۲۰ نفری تحت بررسی انتخاب شوند، مطلوب است احتمال آنکه

الف) (پیشامد A) هر دو نفر فقط چای خنک با غذایشان صرف کنند؟

ب) (پیشامد B) هر دو نفر دقیقاً دو تا از سه نوشیدنی را بنوشند؟

با توجه به اطلاعات موجود، نمودار ون شکل ۱۲.۳ را می‌سازیم. فضای نمونه‌ای $\mathscr{S}$ عبارت است از زوج مسافرینی که می‌توان از نمونهٔ ۱۲۰ نفری انتخاب کرد. بنابراین، $|\mathscr{S}| = \binom{120}{2} = 7140$.



شکل ۱۲.۳

نمودار ون نشان می‌دهد که ۱۸ مسافر وجود دارند که تنها چای خنک می‌نوشند، بنابراین $|A| = \binom{۱۸}{۲}$ و $Pr(A) = ۵۱/۲۳۸۰$. خواننده باید تحقیق کند که $Pr(B) = ۳/۳۴$. □

تمرینهای ۳.۳ و ۴.۳

۱. چند جایگشت از ۲۶ حرف مختلف الفبای انگلیسی وجود دارند که شامل (الف) یا الگوی «OUT» یا الگوی «DIG»اند؟ (ب) نه شامل الگوی «MAN» و نه شامل الگوی «ANT» هستند؟

۲. یک نام متغیر شش نویسه‌ای در فورترن ANSI با یک حرف الفبا شروع می‌شود. هر یک از پنج نویسهٔ دیگر می‌تواند یک حرف یا یک رقم باشد. (تکرار مجاز است.) چند نام متغیر شش نویسه‌ای شامل الگوی «FUN» یا الگوی «TIP»اند؟

۳. چند جایگشت از ارقام ۰،۱،۲،...،۹ یا با ۳ شروع و یا به ۷ ختم می‌شوند و یا با ۳ شروع و به ۷ ختم می‌شوند؟

۴. استادی دو دوجین کتاب درسی مقدماتی دربارهٔ علم کامپیوتر دارد و می‌خواهد بداند که این کتابها شامل مباحث همگردانها، (A)؛ ساختارهای داده‌ها، (B)؛ و مفسّرها، (C)، هستند یا نه. داده‌های زیر فهرست تعداد کتابهایی است که شامل مطالبی دربارهٔ این مباحث‌اند

$$|A| = ۸ \qquad |C| = ۱۳ \qquad |A\cap C| = ۳ \qquad |A\cap B\cap C| = ۲$$
$$|B| = ۱۳ \qquad |A\cap B| = ۵ \qquad |B\cap C| = ۶$$

(الف) چندتا از این کتابها شامل مطالبی دقیقاً دربارهٔ یکی از این مباحث‌اند؟
(ب) چندتا از کتابها شامل هیچیک از مباحث نیستند؟
(ج) چندتا از کتابها دربارهٔ همگردانها مطلبی ندارند؟

۵. از واژهٔ «chemistry» حرفی به تصادف انتخاب شده است. (الف) احتمال اینکه این حرف e یا i باشد چقدر است؟ (ب) احتمال اینکه این حرف انتخابی قبل از حرف q در الفبا نباشد چقدر است؟

۶. دانشکده‌ای در انتخاب کامپیوتری جدید برای مرکز محاسباتش، ۱۵ مدل مختلف را با توجه به ملاحظات زیر بررسی می‌کند:
نوار چرخان مغناطیسی، (A)؛ پایانه برای نمایش نموداری، (B)؛ حافظهٔ نیم هادی،(C) (علاوه بر حافظهٔ هسته‌ای). تعداد کامپیوترهایی که یک یا چند تا از این جنبه‌ها را دارند در زیر داده شده است:

$$|A| = |B| = |C| = ۶,\quad |A\cap B| = |B\cap C| = ۱$$
$$|A\cap C| = ۲,\quad |A\cap B\cap C| = ۰$$

(الف) چند مدل، دقیقاً یکی از جنبه‌های مورد نظر را دارند؟ (ب) چند مدل هیچیک از جنبه‌ها را ندارند؟ (ج) اگر مدلی را به تصادف انتخاب کنیم احتمال اینکه دقیقاً دو تا از جنبه‌ها را داشته باشد چقدر است؟

۷. **الف)** چند آرایش از حروف واژهٔ MISCELLANEOUS، دارای دو حرف متوالی همانند نیستند؟

ب) اگر آرایشی به تصادف از این حروف تولید شود، احتمال این پیشامد که در آن دو حرف متوالی مثل هم نباشند چقدر است؟

۸. در چند آرایش از حروف واژهٔ «CHEMIST»، H قبل از E، یا E قبل از T، یا T قبل از M است؟ (در اینجا «قبل» به‌معنای قبل، هر جا که باشد است و نه به‌معنای بلافاصله قبل.)

۹. عددی صحیح به تصادف از اعداد ۳ تا ۱۷ انتخاب شده است. اگر A پیشامد تقسیمپذیری عدد منتخب بر ۳ و B پیشامد بزرگتر از ۱۰ بودن این عدد باشد، تعیین کنید $Pr(A)$، Pr(B)، $Pr(A\cap B)$، و $Pr(A\cup B)$. $Pr(A\cup B)$ را چه رابطه‌ای با $Pr(A)$، $Pr(B)$، و $Pr(A\cap B)$ دارد؟

۱۰. کلاس اول یک دانشکدهٔ مهندسی ۳۰۰ دانشجو دارد. می‌دانیم که ۱۸۰ نفر می‌توانند به‌زبان پاسکال، ۱۲۰ نفر به زبان فورترن، ۳۰ نفر به زبان APL، ۱۲ نفر به زبانهای پاسکال و APL، ۱۸ نفر به زبانهای فورترن و APL، ۱۲ نفر به زبانهای پاسکال و فورترن، و ۶ نفر به هر سه زبان برنامه بنویسند.

الف) اگر دانشجویی به تصادف انتخاب شود، احتمال اینکه بتواند دقیقاً به دو زبان برنامه بنویسد چقدر است؟

ب) اگر دو دانشجو به تصادف انتخاب شوند، مطلوب است احتمال اینکه

i) هر دو بتوانند به زبان پاسکال برنامه بنویسند

ii) هر دو فقط بتوانند به زبان پاسکال برنامه بنویسند

۱۱. هشت کتاب مختلف، سه تا در فیزیک و پنج تا در مهندسی برق به تصادف در قفسه‌ای از یک کتابخانه قرار دارند. احتمال اینکه سه کتاب فیزیک پهلوی هم باشند چقدر است؟

۱۲. محموله‌ای از ۲۴ ماشین جدید، شامل ۱۵ ماشین با کیفیت عالی، ۶ تا با معایب جزئی، و ۳ تا با معایب عمده است. اگر دو ماشین به تصادف از محموله انتخاب شوند، مطلوب است احتمال آنکه (الف) هر دو در شرایط عالی باشند؟ (ب) هر دو معایب جزئی داشته باشند؟ (ج) حداکثر یکی از آنها معایب جزئی داشته باشد؟ (د) حداقل یکی از آنها معایب جزئی داشته باشد؟ (ه) دقیقاً یکی از آنها معایب جزئی داشته باشد؟ (ز) هیچکدام معایب جزئی نداشته باشد؟

نتایج قسمتهای (ب)، (ه)، و (ز) چه ارتباطی با هم دارند؟

۱۳. اگر حروف کلمهٔ CORRESPONDENT به‌ترتیب تصادفی آرایش یابند، احتمال اینکه آرایشی با یک حرف شروع و به همان حرف ختم شود چقدر است؟

۵.۳ خلاصه و مرور تاریخی

در این فصل بعضی از مبانی نظریهٔ مجموعه‌ها را با ملاحظاتی دربارهٔ شمارش و احتمال مقدماتی معرفی کردیم.

جبر نظریهٔ مجموعه‌ها در طی سدهٔ نوزدهم و اوایل سدهٔ بیستم توسعه یافت. در انگلستان، جورج پیکاک[1] (۱۷۹۱ـ۱۸۵۸) پیشتاز نوآوریهای ریاضیاتی و در شمار اولین کسانی بود که در رساله‌اش دربارهٔ جبر، کل مفهوم جبر و حساب را دگرگون کرد. اندیشه‌های او را بعداً دانکن گریگوری[2] (۱۸۱۳ـ۱۸۴۴)، ویلیام روئن همیلتن (۱۸۰۵ـ۱۸۶۵)، و اوگاستس دمورگن[3] (۱۸۰۶ـ۱۸۷۱) بسط دادند و سعی کردند ابهام را از جبر مقدماتی بزدایند و آن را در قالب اصل موضوعی دقیق بریزند. اما، تا ۱۸۵۴ که بول بررسی قوانین اندیشهٔ خود را منتشرکرد و در آن جبری راکه با مجموعه‌ها و منطق سر و کار داشت به‌صورت رسمی عرضه کرد، کار پیکاک و معاصرانش توسعه پیدا نکرد.

در اینجا قبل از همه سر و کار ما با مجموعه‌های متناهی است. اما، بررسی مجموعه‌های نامتناهی و توان آنها فکر بسیاری از ریاضیدانان و فلاسفه را به خود مشغول داشته است. رهیافت شهودی برای نظریهٔ مجموعه‌ها از زمانی پذیرفته شد که گئورگ کانتور (۱۸۴۵ـ۱۹۱۸) مجموعه را در ۱۸۹۵ به‌راهی قابل قیاس با «احساس غریزی» که در شروع بخش ۱.۳ به آن اشاره کردیم تعریف کرد. اما، تعریف او یکی از مشکلات دست و پاگیری بود که کانتور هرگز نتوانست به‌طور کامل آن را از نظریهٔ مجموعهٔ خود حذف کند.

در دهٔ ۱۸۷۰، وقتی کانتور در سریهای مثلثاتی و سریهای اعداد حقیقی تحقیق می‌کرد، به ابزاری نیاز داشت که اندازه‌های مجموعه‌های نامتناهی اعداد را با هم مقایسه کند. برداشت او از نامتناهی به‌عنوان یک امر مسلم، در همان سطح متناهی، کاملاً انقلابی بود. بعضی ازکارهایش رد شد، اما قسمت عمدهٔ کارهایش چنان مقبولیتی پیدا کرد که در ۱۸۹۰ نظریهٔ مجموعه‌ها، متناهی و نامتناهی، در اصل به‌عنوان شاخه‌ای از ریاضیات مورد توجه قرار گرفت.

تقریباً در اواخر قرن گذشته، نظریه به‌صورتی جامع پذیرفته شد، اما در ۱۹۰۱ پارادوکسی که اینک به پارادوکس راسل معرف است نشان داد که نظریهٔ مجموعه‌ها، به‌صورتی که در ابتدا مطرح شده بود، از نظر درونی ناسازگار است. به‌نظر می‌رسید که مشکل در طریق بی‌قید و شرط تعریفی است که برای مجموعه‌ها قایل می‌شویم؛ به‌خصوص این مفهوم عضو خود بودن یک مجموعه مشکوک به‌نظر می‌رسید. برتراند راسل (۱۸۷۲ـ۱۹۷۰) و آلفرد نورث وایتهد[4] (۱۸۶۱ـ۱۹۴۷) در اثر خود، پرینکیپیا ماتماتیکا، سلسله مراتبی را در نظریهٔ مجموعه‌ها که به نظریهٔ انواع معروف است بسط دادند. این نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها، از جمله فرمولبندیهای دیگر قرن بیستم بود که گرفتاری پارادوکس راسل را نداشت.

اگر بخواهیم اهمیت نقش نظریهٔ مجموعه‌ها را در بسط ریاضیات سدهٔ بیستم خلاصه کنیم، گفتهٔ زیر که منسوب به ریاضیدان آلمانی داوید هیلبرت (۱۸۶۲ـ۱۹۴۳) است قابل تعمق است:

1. George Peacock 2. Duncan Gregory 3. Augustus DeMorgan
4. Alfred North Whitehead

«هیچکس ما را از بهشتی که کانتور برای ما آفریده است بیرون نخواهد کرد.»

در بخش ۱.۳، به آرایه‌ای از اعداد، معروف به مثلث پاسکال، اشاره کردیم. می‌توانستیم این کار را در فصل ۱ به کمک قضیهٔ دو جمله‌ای انجام دهیم، اما صبر کردیم تا بعضی از اتحادهای ترکیبیاتی را که برای تحقیق چگونگی بنای این مثلث لازم بودند به‌دست آوریم. این آرایه در اثر جبردان چینی چوشی کی[1] (۱۳۰۳) پیدا شده است، اما اولین ظهور آن در اروپا در سدهٔ شانزدهم، در صفحهٔ عنوان کتابی اثر پطروس آپیانوس[2] بوده است. نیکولو تارتاگلیا[3] (۱۴۹۹ـ۱۵۵۹) این مثلث را در محاسبهٔ توانهای $(x+y)$ به‌کار برده است. به دلیل کارهای ریاضیدان فرانسوی بلز پاسکال[4] (۱۶۲۳ـ۱۶۶۲) در زمینهٔ ویژگیها و کاربردهای این مثلث، آرایه را به افتخار او مثلث پاسکال نامیده‌اند.

سرانجام، گرچه منشاء احتمال، بازیهای شانسی و مسائل شمارشی است، ما در اینجا آن را به این دلیل ذکر کردیم که نظریهٔ مجموعه‌ها به‌عنوان وسیله‌ای دقیق و لازم برای بیان و حل مسائل این زمینهٔ ریاضیات کاربردی مهم معاصر شکل گرفته است.

در فصل ۲۶ از اثر بویر[5] [۱] مطالب بیشتری دربارهٔ تاریخچه و بسط نظریهٔ مجموعه‌ها می‌توان یافت. بسطهای رسمی نظریهٔ مجموعه‌ها، از جمله قضایای مربوط به مجموعه‌های نامتناهی را می‌توان در آثار هالموس[6] [۳] و اثر ساپس[7] [۵] یافت. تاریخچه‌ای جالب از آغاز پیدایش مفاهیم احتمال و آمار، تا عصر نیوتن، را می‌توان در اثر دیوید[8] [۲] پیدا کرد. فصلهای ۱ و ۲ اثر میر[9] [۴] منبعی عالی برای کسانی است که علاقه‌مند به یادگیری بیشتر در زمینهٔ احتمال گسسته هستند.

مراجع

1. Boyer, Carl B. *History of Mathematics*. New York: Wiley, 1968.
2. David, Florence Nightingale. *Games, Gods, and Gambling*. New York: Hafner, 1962.
3. Halmos, Paul R. *Naive Set Theory*. New York: Van Nostrand, 1960.
4. Meyer, Paul L. *Introductory Probability and Statistical Applications*, 2nd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1970.
5. Suppes, Patrick C. *Axiomatic Set Theory*. New York: Van Nostrand, 1960.

تمرینهای گوناگون

۱. فرض کنید $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$. ثابت کنید که $(A-B) \subseteq C$ اگر و تنها اگر $(A-C) \subseteq B$.

۲. اگر $A, B \subseteq \mathscr{U}$، ثابت کنید که $A \subseteq B$ اگر و تنها اگر $[\forall C \subseteq \mathscr{U}(C \subseteq A \Rightarrow C \subseteq B)]$.

۳. فرض کنید $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$. هر یک از موارد زیر را ثابت یا (با ارائهٔ مثالی نقض) رد کنید:

الف) $A - C = B - C \Rightarrow A = B$

1. Chu Shi-kie 2. Petrus Apianus 3. Niccolo Tartaglia 4. Blaise Pascal
5. C. Boyer 6. P. Halmos 7. P. Suppes 8. F. N. David 9. P. Meyer

ب) $[(A \cap C) = B \cap C) \wedge (A - C = B - C)] \Rightarrow A = B$

ج) $[(A \cup C = B \cup C) \wedge (A - C = B - C)] \Rightarrow A = B$

د) $\mathscr{P}(A - B) = \mathscr{P}(A) - \mathscr{P}(B)$

۴. **الف)** برای اعداد مثبت صحیح m، n، و r با شرط $r \leq \min\{m, n\}$، نشان دهید که

$$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{۰}\binom{n}{r} + \binom{m}{۱}\binom{n}{r-۱} + \binom{m}{۲}\binom{n}{r-۲} + \cdots + \binom{m}{r}\binom{n}{۰} = \sum_{k=۰}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$$

ب) برای مقدار مثبت و صحیح n، نشان دهید که

$$\binom{۲n}{n} = \sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}^{۲}$$

۵. **الف)** معلم به چند راه می‌تواند یک گروه هفت نفره از دانشجویان را به دو دسته که هر یک حداقل یک دانشجو دارد تقسیم کند؟ حداقل دو دانشجو چطور؟

ب) به‌جای عدد هفت، عدد صحیح مثبت $n \geq ۴$ را قرار دهید و به قسمت (الف) پاسخ دهید.

۶. تعیین کنید هر یک از گزاره‌های زیر راست است یا دروغ. برای هر گزارهٔ دروغ، یک مثال نقض بیاورید.

الف) اگر A و B مجموعه‌های نامتناهی باشند، آن‌گاه $A \cap B$ نامتناهی است.

ب) اگر B نامتناهی باشد و $A \subseteq B$، آن‌گاه A نامتناهی است.

ج) اگر $A \subseteq B$ و B متناهی باشد، آن‌گاه A متناهی است.

د) اگر $A \subseteq B$ و A متناهی باشد، آن‌گاه B متناهی است.

۷. مجموعه‌ای ۱۲۸ زیرمجموعه با توان زوج دارد. (الف) چند زیرمجموعهٔ A دارای توان فردند؟ (ب) مقدار $|A|$ چقدر است؟

۸. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۵\}$.

الف) چند تا از زیرمجموعه‌های A شامل تمام اعداد صحیح فرد موجود در A هستند؟

ب) چند تا از زیرمجموعه‌های A شامل دقیقاً سه عدد صحیح فردند؟

ج) چند تا از زیرمجموعه‌های ۸ عنصری A شامل دقیقاً سه عدد صحیح فردند؟

د) برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید یا الگوریتمی بسازید که زیرمجموعه‌ای ۸ عنصری از A را تولید و ثبت کند که چند تا از ۸ عنصر فردند.

۹. فرض کنید $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$. ثابت کنید که $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ اگر و تنها اگر $C \subseteq A$.

۱۰. برای هر $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$ ثابت کنید که $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$.

۱۱. برای هر $A, B \subseteq \mathscr{U}$ ثابت کنید که

الف) $A \cup B = \mathscr{U}$ اگر و تنها اگر $\overline{A} \subseteq B$؛

ب) $A \cap B = \emptyset$ اگر و تنها اگر $\overline{A} \supseteq B$.

۱۲. فرض کنید $\mathscr{U}$ مجموعهٔ عام مفروضی با $A, B \subseteq \mathscr{U}$، $|A \cap B| = ۳$، $|A \cup B| = ۸$، و $|\mathscr{U}| = ۱۲$ باشد.

الف) چند زیرمجموعهٔ $C \subseteq \mathscr{U}$ در $A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B$ صدق می‌کنند؟ چند تا از این زیرمجموعه‌های C شامل تعداد زوجی عنصر هستند؟

ب) چند زیرمجموعهٔ $D \subseteq \mathscr{U}$ در $\overline{A \cup B} \subseteq D \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ صدق می‌کنند؟ چند تا از این زیرمجموعه‌های D شامل تعداد زوجی عنصر هستند؟

۱۳. فرض کنید $\mathscr{U} = \mathbf{R}$ و مجموعهٔ اندیسگذار $I = \mathbf{Q}^+$ باشد. برای هر $q \in \mathbf{Q}^+$ قرار دهید $A_q = [۰, ۲q]$، $B_q = (۰, ۳q]$. هر یک از مجموعه‌های زیر را معین کنید:

الف) $A_{۷/۳}$ ب) $B_{۳/۵}$ ج) $A_۳ - B_۴$ د) $A_۳ \triangle B_۴$

ه) $\bigcup_{q \in I} A_q$ و) $\bigcup_{q \in I} B_q$ ز) $\bigcap_{q \in I} A_q$ ح) $\bigcap_{q \in I} B_q$

۱۴. برای مجموعهٔ عام $\mathscr{U}$ و زیرمجموعه‌های $A, B \subseteq \mathscr{U}$، رابطه‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $A \triangle B = B \triangle A$ ب) $A \triangle \overline{A} = \mathscr{U}$ ج) $A \triangle \mathscr{U} = \overline{A}$

د) $A \triangle \emptyset = A$، لذا $\emptyset$ برای $\triangle$ و همچنین برای $\cup$، همانی است.

۱۵. جدول عضویت (جدول ۳.۳) را در نظر بگیرید. اگر شرط $A \subseteq B$ را به ما داده باشند، باید تنها سطرهایی از جدول را در نظر بگیریم که برای آنها این شرط راست باشد، مثلاً سطرهای ۱، ۲، و ۴ که با پیکان نشان داده‌ایم. برای این سطرها، ستونهای مربوط به B و $A \cup B$ دقیقاً مثل هم هستند و بنابراین در اینجا جدول عضویت نشان می‌دهد که $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$.

جدولهای عضویت را برای تحقیق درستی هر یک از رابطه‌های زیر به‌کار برید.

جدول ۳.۳

	A	B	$A \cup B$
$\longrightarrow$	۰	۰	۰
$\longrightarrow$	۰	۱	۱
	۱	۰	۱
$\longrightarrow$	۱	۱	۱

الف) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$
ب) $[(A \cap B = A) \wedge (B \cup C = C)] \Rightarrow A \cup B \cup C = C$
ج) $C \subsetneq B \subsetneq A \Rightarrow (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C}) = A \cap \overline{C}$
د) $A \triangle B = C \Rightarrow A \triangle C = B$ و $B \triangle C = A$.

۱۶. دوگان هر قضیه از تمرین ۱۵ را بیان کنید. (در اینجا نیاز دارید که قضیهٔ مثال ۱۵.۳ را در ارتباط با قضیهٔ ۵.۳ به‌کار برید.)

۱۷. الف) تعداد آرایشهای خطی m تا ۱ و r تا ۰ را، بدون اینکه ۱ها مجاور هم باشند، بیابید (شرط (شرایط) لازم برای m و r را بیان کنید.)

ب) اگر $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$، چند مجموعهٔ $A \subseteq \mathscr{U}$ هستند که $|A| = k$ و A شامل اعداد صحیح متوالی نباشد؟ (شرط (شرایط) لازم برای n و k را بیان کنید.)

۱۸. در مؤسسه‌ای که طرحهای علمی دانش‌آموزان دبیرستان را بررسی می‌کند، ۳۴ دانش‌آموز برای طرحهای علمی خود جایزه دریافت کرده‌اند. به ۱۴ نفر برای طرحهای مربوط به زیست‌شناسی، به ۱۳ نفر برای طرحهای مربوط به شیمی، و به ۲۱ نفر برای طرحهای مربوط به فیزیک جایزه داده‌اند. اگر سه دانش‌آموز در هر سه زمینه جایزه گرفته باشند، مطلوب است تعداد جایزه‌های دریافتی برای دقیقاً (الف) یک زمینه؟ (ب) دو زمینه؟

۱۹. اگر هشت نفر دور میزی گرد نشسته باشند، احتمال آنکه یک زوج مشخص پهلوی هم باشند چقدر است؟

۲۰. اگر حرفهای واژهٔ BOOLEAN به تصادف آرایش یابند، احتمال آنکه در این آرایش دو حرف O پهلوی هم باقی بمانند چقدر است؟

۲۱. اگر ۱۶ شکلات بین ۴ طفل توزیع شود مطلوب است احتمال آنکه هر طفل (الف) حداقل یک شکلات دریافت کند؟ (ب) حداقل دو شکلات دریافت کند؟ (ج) چهار شکلات دریافت کند؟

۲۲. پنجاه دانشجو که هر یک ۷۵ سنت دارند به باشگاه مثال ۲۳.۳ رفته‌اند. هفده دانشجو هر یک سه‌بازی کامپیوتری کرده‌اند و سی و هفت دانشجو حداقل دو بازی کرده‌اند. هیچ دانشجویی در باشگاه بازی دیگری نکرده است وهیچ دانشجویی بازی معینی را بیش از یک بار انجام نداده است. هزینهٔ هر بازی ۲۵ سنت است و مجموع کل پرداختهای دانشجویان ۲۴٫۲۵ دلار بوده است. چند دانشجو ترجیح داده‌اند که تماشاگر باشند و بازیی نکنند؟

۲۳. به چند راه می‌توان ۱۵ دستیار آزمایشگاه را به کار یک، دو، یا سه آزمایش مختلف گماشت به قسمی که در هر آزمایش حداقل یک نفر زمانی را برای آن صرف کند؟

۲۴. استادی به دانشجویان کلاس شیمی خود آزمونی شامل سه سؤال داده است. ۲۱ دانشجو در کلاس او هستند، و هر دانشجو به حداقل یک سؤال پاسخ داده است. پنج دانشجو به اولین سؤال پاسخ نداده‌اند، هفت دانشجو موفق به پاسخ دادن به سؤال دوم نشده‌اند، و شش نفر به سومین سؤال پاسخ نداده‌اند. اگر نه دانشجو به هر سه سؤال پاسخ داده باشند، چند دانشجو دقیقاً به یک سؤال پاسخ داده‌اند؟

۲۵. فرض کنید $\mathscr{U}$ مجموعه‌ای است عام با $A, B \subseteq \mathscr{U}$، $A \cap B = \emptyset$، $|A| = ۱۲$، و $|B| = ۱۰$. اگر از $A \cup B$ هفت عنصر انتخاب شوند، احتمال اینکه این انتخاب شامل چهار عنصر از A و سه عنصر از B باشد چقدر است؟

۲۶. برای مجموعهٔ متناهی A از اعداد صحیح، فرض کنید $\sigma(A)$ معرف مجموع عناصر A باشد. در این‌صورت اگر $\mathscr{U}$ مجموعهٔ عام متناهی منتخب از $\mathbf{Z}^+$ باشد، $\sum_{A \in \mathscr{P}(\mathscr{U})} \sigma(A)$ معرف مجموع همهٔ عناصر تمام زیرمجموعه‌های $\mathscr{U}$ است. مطلوب است $\sum_{A \in \mathscr{P}(\mathscr{U})} \sigma(A)$ برای

الف) $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳\}$

ب) $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$

ج) $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$

د) $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$

ه) $\mathscr{U} = \{a_۱, a_۲, a_۳, \ldots, a_n\}$، که در آن $s = a_۱ + a_۲ + a_۳ + \cdots + a_n$.

۲۷. **الف)** در بازی شطرنج، شاه می‌تواند یک خانه در هر جهتی حرکت کند. با قبول اینکه شاه تنها به جلو حرکت می‌کند (یک خانه به بالا، به راست، یا به‌صورت قطری به سمت شمال شرقی)، شاه در صفحهٔ معمولی ۸×۸ شطرنج، در طول چند مسیر مختلف می‌تواند از خانهٔ گوشهٔ پایین سمت چپ به خانهٔ گوشهٔ بالای سمت راست حرکت کند؟

ب) برای مسیرهای قسمت (الف) مطلوب است احتمال اینکه مسیری شامل (i) دقیقاً دو حرکت قطری باشد؟ (ii) دقیقاً دو حرکت قطری متوالی باشد؟ (iii) تعداد زوجی حرکت قطری باشد؟

۴

ویژگیهای اعداد صحیح: استقرای ریاضی

در اولین رویاروییهای خود با حساب، اطلاعاتی در مورد اعداد صحیح به‌دست آوردیم. در این فصل ویژگی خاصی را که زیرمجموعهٔ اعداد صحیح مثبت دارد بررسی می‌کنیم. با این ویژگی می‌توانیم به‌وسیلهٔ کاربرد تکنیکی موسوم به استقرای ریاضی برخی فرمولهای ریاضی و قضایا را ثابت کنیم. این روش اثبات در بسیاری از نتایجی که در فصول بعد این کتاب به‌دست می‌آید نقشی کلیدی دارد.

وقتی $x, y \in \mathbf{Z}$، می‌دانیم که $x+y,\ x-y,\ xy \in \mathbf{Z}$. پس می‌گوییم که مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ تحت (عملهای دوتایی) جمع، ضرب، و تفریق بسته است. امّا، دربارهٔ تقسیم، در می‌یابیم که مثلاً $۲, ۳ \in \mathbf{Z}$ ولی عدد گویای $۲/۳$ عضو $\mathbf{Z}$ نیست. بنابراین، $\mathbf{Z}$ تحت عمل تقسیم بر عدد مخالف صفر بسته نیست. برای فایق آمدن بر این دشواری، صورتی تقریباً مشروط از تقسیم را برای $\mathbf{Z}$ معرفی خواهیم کرد و توجه را بر عنصرهایی خاص از $\mathbf{Z}^+$ که اعداد اوّل نامیده می‌شوند متمرکز می‌کنیم. این اعداد اول به «بلوکهای سازندهٔ» اعداد صحیح بدل می‌شوند و اولین مثال از یک قضیهٔ نمایش را ــ که در این مورد قضیهٔ اصلی حساب است ــ به ما می‌دهند.

۱.۴ اصل خوشترتیبی: استقرای ریاضی

اگر x و y دو عدد صحیح متمایز دلخواه باشند، می‌دانیم که یا باید $x < y$ یا $y < x$. امّا، این مطلب اگر x و y به جای اینکه اعداد صحیح باشند، اعداد گویا، یا حقیقی باشند هم درست

است. چه چیزی در این مورد، $\mathbf{Z}$ را استثنا می‌کند؟

فرض کنید سعی بر این باشد که زیرمجموعهٔ $\mathbf{Z}^+$ از $\mathbf{Z}$ را با استفاده از نمادهای نابرابری $>$ و $\geq$ بیان کنیم. متوجه می‌شویم که می‌توانیم مجموعهٔ عنصرهای مثبت Z را به صورت

$$\mathbf{Z}^+ = \{x \in \mathbf{Z} | x > ۰\} = \{x \in \mathbf{Z} | x \geq ۱\}$$

تعریف کنیم. امّا وقتی بخواهیم چنین کاری را برای اعداد گویا و حقیقی انجام دهیم ملاحظه می‌کنیم که

$$\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} | x > ۰\} \quad \text{و} \quad \mathbf{Q}^+ = \{x \in \mathbf{Q} | x > ۰\}$$

ولی نمی‌توانیم $\mathbf{Q}^+$ یا $\mathbf{R}^+$ را با استفاده از $\geq$، نظیر آنچه برای $\mathbf{Z}^+$ انجام دادیم، نمایش دهیم.

تفاوت مجموعهٔ $\mathbf{Z}^+$ با مجموعه‌های $\mathbf{Q}^+$ و $\mathbf{R}^+$ در این است که هر زیرمجموعهٔ ناتهی X از $\mathbf{Z}^+$ شامل یک عدد صحیح $a \in X$ است به قسمی که برای هر $x \in X$، $a \leq x$ (یعنی، شامل کوچکترین عنصر است). برای $\mathbf{Q}^+$ و $\mathbf{R}^+$ چنین نیست. این مجموعه‌ها خودشان شامل کوچکترین عنصر نیستند. کوچکترین عدد گویای مثبت یا کوچکترین عدد حقیقی مثبت وجود ندارد. اگر می‌توانستیم، مثلاً، کوچکترین عدد گویای مثبت q را به‌دست آوریم، آن‌گاه چون $q > q/۲ > ۰$، می‌توانستیم عدد گویای مثبت کوچکتر $q/۲$ را داشته باشیم.

این مشاهدات ما را به ویژگی زیر از مجموعهٔ $\mathbf{Z}^+ \subset \mathbf{Z}$ هدایت می‌کند.

اصل خوشترتیبی. هر زیرمجموعهٔ ناتهی از $\mathbf{Z}^+$ یک کوچکترین عنصر دارد (غالباً این مطلب را با این عبارت که $\mathbf{Z}^+$ خوشترتیب است بیان می‌کنیم.)

این اصل برای تمایز $\mathbf{Z}^+$ از $\mathbf{Q}^+$ و $\mathbf{R}^+$ به‌کار می‌رود. امّا آیا این اصل به جایی می‌رسد که از نظر ریاضی جالب یا مفید باشد؟ پاسخ یک «آری» طنین‌دار است. این اصل، پایهٔ تکنیک برهانی به نام استقرای ریاضی است. این تکنیک کمک می‌کند که یک گزارهٔ کلی ریاضی متضمن عددی صحیح را، وقتی مواردی از آن گزاره الگویی کلی را القا می‌کند، ثابت کنیم.

اینک پایهٔ این تکنیک استقرا را ثابت می‌کنیم

قضیه ۱.۴ (اصل استقرای متناهی، یا اصل استقرای ریاضی) فرض کنید $S(n)$ معرف یک گزارهٔ ریاضی (یا مجموعه‌ای از گزاره‌ها) متضمن یک یا چند مورد از نماد n باشد، که n نمایش عدد صحیح مثبت است.

الف) اگر $S(۱)$ درست باشد؛ و

ب) اگر هر وقت $S(k)$ به‌ازای kیی متعلق به $\mathbf{Z}^+$ درست باشد، این درستی مستلزم درستی $S(k+۱)$ باشد؛

آن‌گاه $S(n)$ برای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است.

برهان فرض کنید $S(n)$ گزاره‌ای باشد که در شرایط (الف) و (ب) صدق کند، و فرض کنید

$$F = \{t \in \mathbf{Z}^+ | \text{نادرست است } S(t)\}$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که $F = \emptyset$.

اگر $F \neq \emptyset$، پس بنابر اصل خوشترتیبی، F دارای یک کوچکترین عنصر s است. چون $S(۱)$ درست است نتیجه می‌شود که $s \neq ۱$، بنابراین $s > ۱$، و در نتیجه $s - ۱ \in \mathbf{Z}^+$. با $s - ۱ \notin F$، داریم $S(s - ۱)$ درست است. لذا بنابر شرط (ب) نتیجه می‌شود که $S((s - ۱) + ۱) = S(s)$ درست است که با $s \in F$ تناقض دارد. این تناقض حاصل از فرض $F \neq \emptyset$ است. بنابراین، $F = \emptyset$. ∎

انتخاب ۱ در اولین شرط قضیهٔ ۱.۴ جنبهٔ الزامی ندارد. آنچه لازم است این است که گزارهٔ $S(n)$ برای $n_۰$ی متعلق به $\mathbf{Z}$ درست باشد، لذا فرایند استقرا دارای نقطهٔ شروعی است. عدد صحیح $n_۰$ می‌تواند به‌جای ۱ مثلاً ۵ باشد. می‌تواند حتی صفر یا منفی باشد، زیرا اجتماع مجموعهٔ $\mathbf{Z}^+$ با $\{۰\}$ یا هر مجموعهٔ متناهی از اعداد صحیح منفی مجموعه‌ای خوشترتیب است. (و وقتی برهانی استقرایی را با $n_۰ < ۰$ شروع می‌کنیم، اجتماع مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح منفی متوالی ناکوچکتر از $n_۰$ را با $\{۰\}$ و $\mathbf{Z}^+$ درنظر می‌گیریم.)

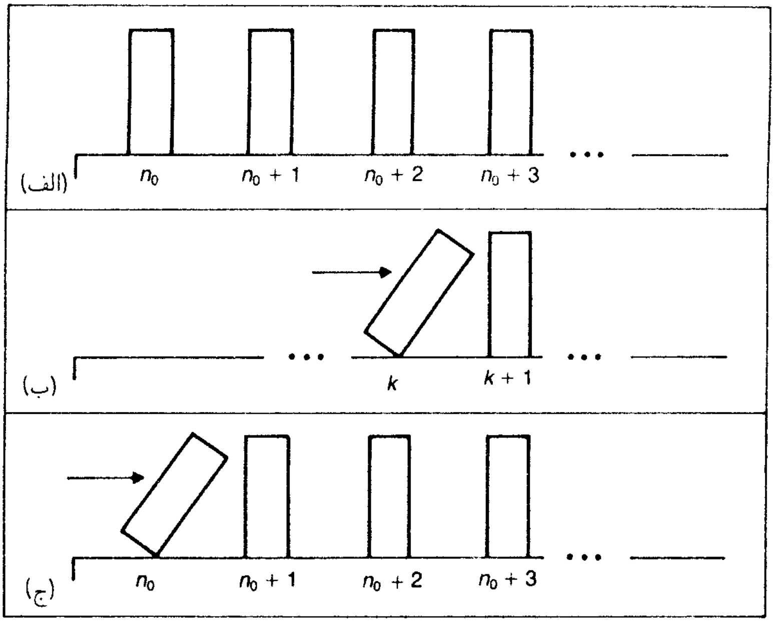
پس، در این موقعیتها می‌توانیم اصل استقرای متناهی را با استفاده از سورها، به‌صورت

$$[S(n_۰) \wedge [\forall k \geq n_۰ [S(k) \Rightarrow S(k + ۱)]]] \Rightarrow \forall n \geq n_۰ \; S(n)$$

بیان کنیم.

با استفاده از شهود خود و وضعیتی که در شکل ۱.۴ نمایش داده‌ایم، می‌توانیم دلیل معتبر بودن این روش برهان را بهتر درک کنیم.

در قسمت (الف) شکل، ۴ مهرهٔ اول از آرایش نامتناهی (مرتب) مهره‌هایی را می‌بینیم که راست بر قاعدهٔ کوچک خود قرار دارند. فضای بین هر دو مهرهٔ متوالی همیشه مقداری ثابت، و به قسمی است که اگر یک مهره (مثلاً kام) به راست رانده شود، آن‌گاه به مهرهٔ بعدی ($(k + ۱)$ام) برخورد می‌کند. این مطلب در شکل ۱.۴ (ب) نشان داده شده است. شهود ما این احساس را به‌وجود می‌آورد که فرایند برخورد ادامه خواهد یافت، یعنی $(k + ۱)$ امین مهره (به راست) می‌افتد و به $(k + ۲)$ امین مهره برخورد می‌کند، و همین‌طور تا آخر. قسمت (ج) شکل نشان می‌دهد که چگونه درستی $S(n_۰)$، افتادن (به راست) اولین مهره (در $n_۰$) را موجب می‌شود. این فرایند افتادن ادامه می‌یابد. درستی $S(k)$ اجباراً درستی $S(k + ۱)$ و ادامهٔ فرایند افتادن را به دنبال



شکل ۱.۴

دارد. لذا، از این واقعیت استنتاج می‌شود که $S(n)$ به‌ازای همهٔ $n \geq n_0$، که به صورت افتادنهای همهٔ مهره‌های متوالی (به راست) تصور می‌شود، درست است.

اینک، چند نتیجه را که مستلزم استفاده از قضیهٔ ۱.۴ هستند ثابت می‌کنیم.

مثال ۱.۴ برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = (n)(n+1)/2$

برهان: برای $n = 1$، حکم $S(1)$ عبارت است از $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = (1)(1+1)/2$. پس $S(1)$ درست است و نقطهٔ شروعی برای استقرا داریم. با فرض اینکه نتیجه برای $n = k$، به‌ازای kیی متعلق به $\mathbf{Z}^+$، درست باشد، می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه درستی $S(k)$ ما را «ملزم» به پذیرش درستی $S(k+1)$ می‌کند. (پذیرهٔ درستی $S(k)$، فرض استقراست.) برای اثبات $S(k+1)$، لازم است نشان دهیم که

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = 1 + 2 + \cdots + k + (k+1)$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

زیرا درستی $S(k)$ را پذیرفته‌ایم. امّا

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

که شرط (ب) قضیه را ثابت می‌کند.

درنتیجه، بنابر اصل استقرای متناهی، $S(n)$ به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است. □

اینک که فرمول مجموعیابی $\sum_{i=1}^{n} i$ را به دو راه (مثال ۳۵.۱ را ببینید) به دست آوردیم، از موضوع اصلی، برای پرداختن به مثالی که در آن از این فرمول مجموعیابی استفاده می‌شود، خارج می‌شویم.

مثال ۲.۴ یک چرخ شانس دارای شماره‌های از ۱ تا ۳۶ است که شماره‌ها به تصادف روی آن نوشته شده‌اند. نشان دهید که صرف‌نظر از چگونگی قرارگرفتن شماره‌ها، سه‌شمارهٔ متوالی وجود دارند که مجموع آنها ۵۵ یا بیشتر است.

فرض کنید x_1 شماره‌ای روی چرخ باشد. از x_1 به بعد در جهت حرکت عقربهٔ ساعت شماره‌های دیگر را با x_2، x_3، . . . ، x_{36} برچسب می‌زنیم. برای‌اینکه نتیجه نادرست باشد باید داشته باشیم $x_1 + x_2 + x_3 < 55$، . . . ، $x_{34} + x_{35} + x_{36} < 55$، $x_{35} + x_{36} + x_1 < 55$، و $x_{36} + x_1 + x_2 < 55$. در این ۳۶ نابرابری، هر یک از جملات x_1، x_2، . . . ، x_{36} دقیقاً ۳ بار ظاهر می‌شوند، لذا هر یک از اعداد صحیح ۱، ۲، . . . ، ۳۶ سه‌بار ظاهر می‌شوند. با جمع‌کردن این ۳۶ نابرابری، به‌دست می‌آوریم که $3\sum_{i=1}^{36} x_i = 3\sum_{i=1}^{36} i < 36(55) = 1980$. امّا $\sum_{i=1}^{36} i = (36)(37)/2 = 666$، که با $1980 > 3(666) = 1998$ متناقض است. □

فرمول مجموعیابی بعدی مربوط به مجموع مربعهای اولین n عدد صحیح است.

مثال ۳.۴ برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ ثابت کنید که $\sum_{i=1}^{n} i^2 = (n)(n+1)(2n+1)/6$.

برهان: با $S(1)$ شروع می‌کنیم. در اینجا $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1 = (1)(1+1)(2+1)/6$، پس $S(1)$ درست است. با قبول $S(k)$: $\sum_{i=1}^{k} i^2 = (k)(k+1)(2k+1)/6$، برای $k \in \mathbf{Z}^+$، می‌خواهیم درستی

$$S(k+1): \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = (k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)/6$$
$$= (k+1)(k+2)(2k+3)/6$$

را نتیجه بگیریم. با استفاده از فرض استقرای $S(k)$ به دست می‌آوریم که

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2$$
$$= [(k)(k+1)(2k+1)/6] + (k+1)^2$$

با توجه به این رابطه داریم

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = (k+1)[(k)(2k+1)/6 + (k+1)] = (k+1)[(2k^2+7k+6)/6]$$
$$= (k+1)(k+2)(2k+3)/6$$

و نتیجهٔ کلی به وسیلهٔ استقرای ریاضی حاصل می‌شود. □

برنامه‌های پاسکال زیر را درنظر بگیرید. در برنامهٔ شکل ۲.۴ از حلقهٔ repeat-until برای روی هم انباشتن مربعات اعداد استفاده شده است. برنامهٔ دوم (شکل ۳.۴) نشان می‌دهد که چگونه نتیجهٔ مثال ۳.۴ را می‌توان به جای چنین حلقه‌ای به کاربرد. هر برنامه برای محاسبهٔ مجموع مربعات اولین ۱۷ عدد صحیح به‌کار رفته است. امّا، در حالی که برنامهٔ شکل ۲.۴ مستلزم $2n(=34)$ جمع و $n(=17)$ کاربردفرایندمربع‌کردن (sqr) است، برنامهٔ شکل ۳.۴ مستلزم تنها دو عمل جمع، سه عمل ضرب و یک عمل تقسیم (عدد صحیح) است. و تعداد کل جمعها، ضربها و تقسیمهای (صحیح)، اگر مقدار n بزرگتر شود، باز ۶ تاست. درنتیجه، برنامهٔ شکل ۳.۴ کاراتر به‌نظر می‌رسد. (این ایدهٔ برنامهٔ کاراتر، بعداً در بخشهای ۷.۵ و ۸.۵ بررسی خواهد شد.)

با ملاحظهٔ دوکاربرد استقرای ریاضی ممکن است تصور شود که این اصل تنها در تحقیق فرمولهای مجموعیابی شناخته‌شده به‌کار می‌رود. چهار مثال بعد نشان می‌دهند که استقرای ریاضی ابزاری ضروری در بسیاری از موارد دیگر نیز هست.

مثال ۴.۴ مجموعهای اعداد صحیح مثبت فرد متوالی را درنظر بگیرید.

```
Program SumOfSquares1 (input,output);
Var
        i,n,s: integer;
Begin
        Writeln('We wish to find the sum of the squares of the first ');
        Write('n positive integers where n= ');
        Read(n);
        s := 0;
        i := 0;
        Repeat
                i := i + 1;
                s := s + sqr(i)
        Until i = n;
        Writeln('The sum of the squares of the first ', n:0);
        Write(' positive integers is ', s:0)
End.

We wish to find the sum of the squares of the first
n positive integers where n = 17
The sum of the squares of the first 17
positive integers is 1785
```

شکل ۲.۴

```
Program SumOfSquares2 (input, output);
Var
        n,s: integer;
Begin
         Writeln('We wish to find the sum of the squares of the ');
         Write('first n positive integers where n = ');
         Read(n);
         s := (n)*(n + 1)*(2 * n + 1) Div 6;
         Writeln('The sum of the squares of the first ', n:0);
         Write(' positive integers is ', s:0)
End.

We wish to find the sum of the squares of the
first n positive integers where n = 17
The sum of the squares of the first 17
positive integers is 1785
```

شکل ۳.۴

(۱ $(= ۱^{۲})$ $= ۱$ ۱

(۲ $(= ۲^{۲})$ $= ۴$ $۱ + ۳$

(۳ $(= ۳^{۲})$ $= ۹$ $۱ + ۳ + ۵$

(۴ $(= ۴^{۲})$ $= ۱۶$ $۱ + ۳ + ۵ + ۷$

(۵ $(= ۵^{۲})$ $= ۲۵$ $۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹$

(۶ $(= ۶^{۲})$ $= ۳۶$ $۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱$

از این اولین شش مورد نتیجهٔ زیر را حدس می‌زنیم: مجموع اولین n عدد صحیح مثبت فرد متوالی برابر $n^۲$ است؛ یعنی

$$S(n) : \sum_{i=۱}^{n}(۲i - ۱) = n^۲$$

اینک که فهمیدیم آنچه احساس می‌کنیم یک فرمول مجموعیابی درستی است، اصل استقرای ریاضی را برای تحقیق درستی آن به ازای همهٔ مقادیر n به‌کار می‌بریم.

با توجّه به محاسبات بالا، می‌بینیم که $S(۱)$درست است [همچنان که $S(۲)$، $S(۳)$، $S(۴)$، $S(۵)$، و $S(۶)$ درست‌اند]. با قبول درستی $S(k)$، داریم

$$\sum_{i=۱}^{k}(۲i - ۱) = k^۲ \qquad \text{برای } k \in \mathbf{Z}^+،$$

اینک درستی $S(k + ۱)$ را نتیجه می‌گیریم

$$S(k + ۱) : \sum_{i=۱}^{k+۱}(۲i - ۱) = (k + ۱)^۲$$

چون درستی $S(k)$ را، که فرض استقرای ماست، پذیرفتیم، اینک می‌نویسیم

$$\sum_{i=۱}^{k+۱}(۲i - ۱) = \sum_{i=۱}^{k}(۲i - ۱) + [۲(k + ۱) - ۱] = k^۲ + [۲(k + ۱) - ۱]$$
$$= k^۲ + ۲k + ۱ = (k + ۱)^۲$$

بنابراین، نتیجهٔ $S(n)$ برای هر $n \geq ۱$، بنابر اصل استقرای ریاضی درست است. □

موقع آن رسیده است که نتایجی را بررسی کنیم که فرمولهای مجموعیابی نیستند.

مثال ۵.۴ در جدول ۱.۴ در ستونهای مجاور، مقادیر $۴n$ و $n^۲ - ۷$ را به‌ازای اعداد صحیح مثبت n، $۱ \leq n \leq ۸$، ثبت کرده‌ایم. از روی جدول می‌بینیم که به ازای $n = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$، $(n^۲ - ۷) < ۴n$، ولی وقتی $n = ۶, ۷, ۸$، داریم $۴n < (n^۲ - ۷)$. این سه مشاهدهٔ آخر ما را به حدس

$$S(n) : ۴n < (n^۲ - ۷)، \quad n \geq ۶ \text{ به ازای همهٔ مقادیر}$$

جدول ۱.۴

n	$۴n$	$n^۲ - ۷$	n	$۴n$	$n^۲ - ۷$
۱	۴	-۶	۵	۲۰	۱۸
۲	۸	-۳	۶	۲۴	۲۹
۳	۱۲	۲	۷	۲۸	۴۲
۴	۱۶	۹	۸	۳۲	۵۷

هدایت می‌کند.

یک بار دیگر، اصل استقرای متناهی، تکنیک برهانی است که برای تحقیق درستی این حدس لازم داریم.

جدول ۱.۴ تأیید می‌کند که $S(۶)$ درست است [همان‌طورکه $S(۷)$ و $S(۸)$ درست بودند]. (بالاخره به مثالی رسیدیم که در آن نقطهٔ شروع، یک عدد صحیح $n_۰ \neq ۱$ است.)

در این مثال، فرض استقرا عبارت است از

$$S(k): \quad ۴k < (k^۲ - ۷)$$

که در آن $k \in \mathbf{Z}^+$ و $k \geq ۶$. لازم است که درستی $S(k+۱)$ را از روی درستی $S(k)$ به‌دست آوریم. یعنی باید از نابرابری $۴k < (k^۲ - ۷)$ نابرابری $۴(k+۱) < [(k+۱)^۲ - ۷]$ را نتیجه بگیریم. در اینجا گامهای لازم عبارت‌اند از

$$۴k < (k^۲ - ۷) \Rightarrow ۴k + ۴ < (k^۲ - ۷) + ۴ < (k^۲ - ۷) + (۲k + ۱)$$

(زیرا برای $k \geq ۶$، به‌دست می‌آوریم که $۲k + ۱ \geq ۱۳ > ۴$)، و

$$\begin{aligned} &۴k + ۴ < (k^۲ - ۷) + (۲k + ۱) \\ &\Rightarrow ۴(k+۱) < (k^۲ + ۲k + ۱) - ۷ = (k+۱)^۲ - ۷ \end{aligned}$$

لذا، بنابر اصل استقرای متناهی، $S(n)$ به‌ازای همهٔ مقادیر $n \geq ۶$ درست است. □

مثال ۶.۴ برای $n \geq ۰$، فرض کنید $A_n \subset \mathbf{R}$، که در آن $|A_n| = ۲^n$ و عنصرهای A_n به ترتیب صعودی ثبت شده‌اند. اگر $r \in \mathbf{R}$، ثابت کنید برای تعیین اینکه آیا $r \in A_n$ یا نیست (بنابر شیوه‌ای که در زیر بسط یافته است)، باید r را با تعدادی نابیشتر از $n+۱$ عنصر در A_n مقایسه کنیم.

وقتی $n = 0$، $A_0 = \{a\}$ و تنها یک مقایسه لازم است. پس برای $n = 0$ نتیجه درست است. برای $n = 1$، $A_1 = \{a_1, a_2\}$ با $a_1 < a_2$. برای تعیین اینکه r عضو A_1 هست یا نیست، حداکثر دو مقایسه باید انجام شود. بنابراین وقتی $n = 1$، قضیّه حاصل می‌شود. اینک اگر $n = 2$ می‌نویسیم $A_2 = \{b_1, b_2, c_1, c_2\} = B_1 \cup C_1$، که در آن $b_1 < b_2 < c_1 < c_2$، $B_1 = \{b_1, b_2\}$، $C_1 = \{c_1, c_2\}$. با مقایسه r و b_2، تعیین می‌کنیم که کدام یک از امکانهای $r \in B_1$ یا $r \in C_1$ ممکن است رخ دهد. چون $|B_1| = |C_1| = 2^1 = 2$، هر امکان مستلزم حداکثر دو مقایسهٔ دیگر است (با توجه به حالت قبل، یعنی $n = 1$). درنتیجه، با انجام تعدادی نابیشتر از $n + 1 = 2 + 1$ مقایسه می‌توانیم تعیین کنیم که $r \in A_2$ هست یا نیست.

اینک در حالت کلی استدلال می‌کنیم. فرض می‌کنیم که قضیّه برای یک مقدار $k \geq 0$ درست است و حالت A_{k+1} را، که در آن $|A_{k+1}| = 2^{k+1}$، درنظر می‌گیریم. فرض کنید $A_{k+1} = B_k \cup C_k$، که در آن $|B_k| = |C_k| = 2^k$، و عنصرهای B_k، C_k به ترتیب صعودی مرتب شده‌اند، و بزرگترین عنصر x در B_k کوچکتر از کوچکترین عنصر C_k است. فرض کنید $r \in \mathbf{R}$. برای اینکه تعیین کنیم r عضو A_{k+1} هست یا نیست، بررسی می‌کنیم که کدام یک از $r \in B_k$ یا $r \in C_k$ برقرار است.

الف) ابتدا r را با x مقایسه می‌کنیم. (یک مقایسه)

ب) اگر $r \leq x$، آنگاه به دلیل اینکه $|B_k| = 2^k$، بنابر فرض استقرا نتیجه می‌شود که می‌توانیم با انجام تعدادی نابیشتر از $k + 1$ مقایسهٔ دیگر تعیین کنیم که آیا $r \in B_k$ یا نیست. درنتیجه، در کل، حداکثر $1 + (k + 1)$ مقایسه انجام می‌شود.

ج) اگر $r > x$، همین کار را با عنصرهای C_k می‌کنیم. برای ملاحظهٔ اینکه آیا $r \in C_k$ یا نیست حداکثر $k + 1$ مقایسهٔ اضافی انجام می‌دهیم.

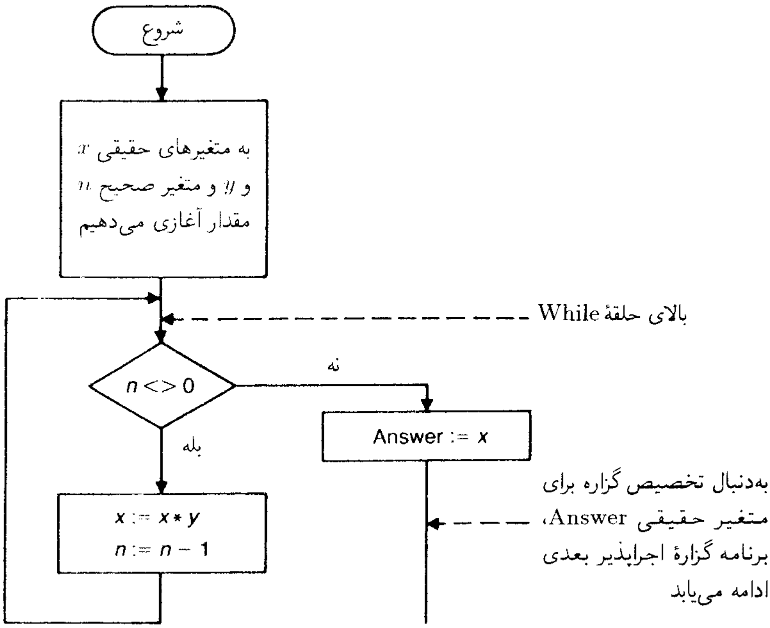
اینک بنابر اصل استقرای متناهی قضیّهٔ کلی ثابت می‌شود. □

مثال ۷.۴ یکی از اولین نگرانیهای ما به هنگام ارزیابی کیفیت برنامهٔ کامپیوتری این است که آیا برنامه آنچه را که قرار است انجام دهد، انجام می‌دهد یا نه. همان‌طور که نمی‌توانیم قضیه‌ای را با بررسی حالتهای خاص اثبات کنیم، درستی برنامه را نیز صرفاً با آزمون مجموعه‌های مختلف داده‌ها نمی‌توانیم ثابت کنیم. (به‌علاوه، انجام این‌کار، اگر برنامهٔ ما قسمتی از بستهٔ نرم‌افزار بزرگتری باشد کاملاً مشکل خواهد بود.) چون اینک، بسط نرم‌افزار تأکیدی زیاد بر برنامه‌ریزی ساختاری دارد، این تاکید نیاز به تحقیق درستی برنامه را ضروری می‌سازد. دراینجا، برنامه‌ریز، یا تیم برنامه‌ریزی باید ثابت کنند که برنامه بسط یافته، مجموعهٔ داده‌های حاصل هر چه باشد، صحیح است. کوششی که در این مرحله منظور می‌شود زمانی را که باید برای اشکال‌زدایی برنامه (یا بستهٔ نرم‌افزار) صرف شود به صورتی چشمگیر کاهش می‌دهد. یکی از روشهایی که می‌تواند نقشی عمده در چنین تحقیق برنامه‌ای داشته باشد استقرای ریاضی است. می‌بینیم چگونه.

فرض می‌شود که قطعه برنامهٔ پاسکال شکل ۴.۴، مقادیر $x(y^n)$ را برای اعداد حقیقی x،

```
While n <> 0 do
  Begin
    x := x*y;
    n := n - 1
  End;
Answer := x;
```

شکل ۴.۴



شکل ۵.۴

y، و عدد صحیح نامنفی n تولید کند. (استفاده کننده، مقادیر این سه متغیر را قبلاً در برنامه معین کرده است.) صحت این قطعه برنامه را به وسیلهٔ استقرای ریاضی برای گزارهٔ $S(n)$ تحقیق خواهیم کرد: برای هر $x, y \in \mathbf{R}$، اگر برنامه به بالای حلقهٔ While با $n \in \mathbf{Z}$، $n \geq 0$، برسد، آن‌گاه بعد از اجرای این حلقه (یا ردشدن از آن)، مقدار حقیقی متغیر Answer برابر $x(y^n)$ است.

روندنمای این قطعه برنامه در شکل ۵.۴ نشان داده شده است. رجوع به این روندنما، هنگام اقامهٔ برهان، به ما کمک می‌کند.

ابتدا $S(0)$، یعنی حکم برای حالت $n = 0$ را درنظر بگیرید. دراینجا برنامه به بالای حلقهٔ While می‌رسد، امّا چون $n = 0$، شاخه‌ای در روندنما حاصل نمی‌شود و به Answer مقدار $x = x(1) = x(y^0)$ تخصیص می‌یابد، لذا $S(0)$ درست است.

اینک فرض استقرای $S(k)$ را می‌پذیریم: برای هر $x, y \in \mathbf{R}$، اگر برنامه به بالای حلقهٔ

While با $k \in \mathbf{Z}$، $k \geq ۰$ برسد، آن‌گاه بعد از اجرای حلقه (یا ردشدن از آن)، مقدار متغیر حقیقی Answer برابر $x(y^k)$ است.

برای اثبات $S(k+۱)$، اشاره می‌کنیم که چون $k + ۱ \geq ۱$، برنامه صرفاً شاخهٔ No را دنبال نخواهد کرد و از حلقهٔ While می‌گذرد. حلقهٔ While حداقل یک‌بار اجرا می‌شود. وقتی برنامه برای اولین بار به بالای حلقهٔ While می‌رسد، $n = k + ۱ > ۰$، لذا دستورهای حلقه اجرا می‌شوند و برنامه به بالای حلقهٔ While بر می‌گردد که اینک برای آن داریم

- مقدار y تغییر نکرده است.
- مقدار x برابر است با $x_۱ = x(y^۱) = xy$.
- مقدار n برابر است با $(k+۱) - ۱ = k$.

امّا حالا بنا بر فرض استقرا (که در مورد اعداد حقیقی $x_۱$ و y به‌کار می‌رود)، می‌دانیم که بعد از اجرای حلقهٔ While برای $x_۱$، y، و $n = k$ (یا گذر از آن) مقداری که به متغیر حقیقی Answer تخصیص می‌یابد عبارت است از

$$x_۱(y^k) = (xy)(y^k) = x(y^{k+۱})$$

بنابراین، $S(n)$ برای تمام مقادیر $n \geq ۰$ درست است، و بنابر اصل استقرای ریاضی درستی قطعه برنامهٔ پاسکال داده شده را تحقیق کرده‌ایم. □

دو مثال بعد، بیانگر مفهوم یک تعریف استقرایی (یا بازگشتی) است. این مثالها نشان می‌دهند که چگونه می‌توانیم قوانین شرکتپذیری موجود در نظریهٔ منطق و مجموعه‌ها را توسیع بخشیم. در مثال اوّل، به مسأله‌ای که در پایان بخش ۱.۲ ذکر کردیم می‌پردازیم.

مثال ۸.۴ اگر $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$ گزاره‌هایی باشند، می‌دانیم که

$$p_۱ \wedge (p_۲ \wedge p_۳) \Leftrightarrow (p_۱ \wedge p_۲) \wedge p_۳$$

لذا اصلاً ابهامی در نوشتن $p_۱ \wedge p_۲ \wedge p_۳$ وجود ندارد. ارزش راستی ترکیب عطفی سه گزاره به راه دخالت پرانترها برای تشکیل ترکیبهای عطفی جفتهای گزاره‌ها (ی مفروض یا حاصل) بستگی ندارد.

ترکیب عطفی گزاره‌ها برای تنها دو گزاره (در یک بار) تعریف شد. در این صورت، چگونه با عبارتی نظیر $p_۱ \wedge p_۲ \wedge p_۳ \wedge p_۴$ عمل کنیم؟ برای پاسخ دادن به این سؤال، ایدهٔ یک تعریف استقرایی (یا بازگشتی) را پیش می‌کشیم، که در آن، مفهومی در [$(n+۱)$ امین] گام از مفهوم مشابه گام قبلی [n امین] به‌دست می‌آید. بحث زیر این ایده را روشن می‌کند.

برای گزاره‌های دلخواه p_1، p_2، . . . ، p_n، p_{n+1}، (۱) ترکیب عطفی p_1، p_2 را با $p_1 \wedge p_2$ تعریف می‌کنیم و (۲) ترکیب عطفی p_1، p_2، . . . ، p_n، p_{n+1} را با

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge p_{n+1} \Leftrightarrow (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \wedge p_{n+1}$$

[توجه کنید که نتیجهٔ طرف راست در قسمت (۲)، ترکیب عطفی دو گزاره است: p_{n+1} و گزارهٔ تعیین‌شدهٔ قبلی $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$].

بنابراین، ترکیب عطفی p_1، p_2، p_3، p_4 را به وسیلهٔ

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4 \Leftrightarrow (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \wedge p_4$$

تعریف می‌کنیم.

در این صورت، بنابر قانون شرکتپذیری $\wedge$، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \wedge p_4 &\Leftrightarrow [(p_1 \wedge p_2) \wedge p_3] \wedge p_4 \\ &\Leftrightarrow (p_1 \wedge p_2) \wedge (p_3 \wedge p_4) \\ &\Leftrightarrow p_1 \wedge [p_2 \wedge (p_3 \wedge p_4)] \\ &\Leftrightarrow p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3 \wedge p_4)\end{aligned}$$

این هم ارزیهای منطقی نشان می‌دهند که ارزش راستی ترکیب عطفی چهار گزاره نیز از نحوهٔ دخالت دادن پرانتزها برای نشان‌دادن چگونگی شرکتپذیری گزاره‌های مفروض، مستقل است.

با استفاده از تعریف بالا، اینک نتایج خود را برای «تعمیم قانون شرکتپذیری $\wedge$» بسط می‌دهیم.

$S(n)$: برای هر $n \in \mathbf{Z}$، $n \geq 3$، فرض کنید $r \in \mathbf{Z}^+$، که در آن $1 \leq r < n$. در این صورت برای گزاره‌های دلخواه p_1، p_2، . . . ، p_r، p_{r+1}، . . . ، p_n، داریم

$$\begin{gathered}(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_r) \wedge (p_{r+1} \wedge \ldots \wedge p_n) \\ \Leftrightarrow p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_r \wedge p_{r+1} \wedge \ldots \wedge p_n\end{gathered}$$

برهان: درستی گزارهٔ $S(3)$ از قانون شرکتپذیری $\wedge$ نتیجه می‌شود.

اینک می‌پذیریم که نتیجه برای هر $k \geq 3$ و هر $1 \leq r < k$ درست باشد. یعنی

$$\begin{gathered}(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_r) \wedge (p_{r+1} \wedge \ldots \wedge p_k) \\ \Leftrightarrow p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_r \wedge p_{r+1} \wedge \ldots \wedge p_k\end{gathered}$$

وقتی $k+1$ گزاره را درنظر می‌گیریم، به‌دست می‌آوریم که

$$\begin{aligned}(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_r) \wedge (p_{r+1} \wedge \ldots \wedge p_k \wedge p_{k+1}) \\ &\Leftrightarrow (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_r) \wedge [(p_{r+1} \wedge \ldots \wedge p_k) \wedge p_{k+1}] \\ &\Leftrightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_r) \wedge (p_{r+1} \wedge \ldots \wedge p_k)] \wedge p_{k+1} \\ &\Leftrightarrow (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_r \wedge p_{r+1} \wedge \ldots \wedge p_k) \wedge p_{k+1} \\ &\Leftrightarrow p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_r \wedge p_{r+1} \wedge \ldots \wedge p_k \wedge p_{k+1}\end{aligned}$$

پس، بنابر اصل استقرای ریاضی، $S(n)$ برای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{Z}^+$، $n \geq 3$ درست است. □

مثال ۹.۴ در تعریف ۹.۳، عملهای دوتایی $\cup$ و $\cap$ را برای هر تعداد (متناهی یا نامتناهی) دلخواه از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ عام مفروض $\mathscr{U}$ بسط دادیم. امّا، این تعریفها بر ماهیت دوتایی عملهای موجود متکی نیستند و راهی نظام‌مند برای تعیین اجتماع و اشتراک هر تعداد متناهی از مجموعه‌ها فراهم نمی‌کنند.

برای غلبه بر این مشکل، اجتماع مجموعه‌های $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ را از جنبهٔ استقرایی چنین تعریف می‌کنیم:

۱. اجتماع A_1، A_2 به صورت $A_1 \cup A_2$ است.

۲. اجتماع A_1، A_2، ...، A_n، A_{n+1} به‌وسیلهٔ

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1} = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}$$

داده شده است، یعنی اجتماع دو مجموعهٔ $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ و A_{n+1}.

از این تعریف، «تعمیم قانون شرکتپذیری برای $\cup$» را به‌دست می‌آوریم

$S(n)$: برای هر $n, r \in \mathbf{Z}^+$ که $n \geq 3$، $1 \leq r < n$،

$$\begin{aligned}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r) \cup (A_{r+1} \cup \ldots \cup A_n) = \\ A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r \cup A_{r+1} \cup \ldots \cup A_n\end{aligned}$$

که در آن، $A_i \subseteq \mathscr{U}$، $1 \leq i \leq n$.

برهان: درستی $S(3)$ از قانون شرکتپذیری $\cup$ نتیجه می‌شود. با قبول درستی $S(k)$ برای

$k \geq ۳$، وقتی با $k+۱$ مجموعه سروکار داریم به‌دست می‌آوریم که

$$\begin{aligned}
&(A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_r) \cup (A_{r+۱} \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+۱}) \\
&\quad = (A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_r) \cup [(A_{r+۱} \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+۱}] \\
&\quad = [(A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_r) \cup (A_{r+۱} \cup \ldots \cup A_k)] \cup A_{k+۱} \\
&\quad = (A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_r \cup A_{r+۱} \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+۱} \\
&\quad = A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_r \cup A_{r+۱} \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+۱}
\end{aligned}$$

و بنابر اصل استقرای ریاضی، $S(n)$ به ازای همهٔ اعداد صحیح $n \geq ۳$ درست است. □

به این بخش با صورتی دیگر از قضیهٔ ۱.۴ خاتمه می‌دهیم. این قضیه را گاهی استقرای کامل می‌نامند.

قضیه ۲.۴ (صورت دیگر اصل استقرای متناهی) فرض کنید $S(n)$ معرف گزاره‌ای (یا مجموعه‌ای از گزاره‌های) ریاضی باشد که متضمن عدد صحیح مثبت n است.

الف) اگر $S(۱)$ درست باشد؛ و

ب) اگر $S(k+۱)$، برای $k \in \mathbf{Z}^+$، وقتی گزاره‌های $S(۱)$، $S(۲)$، ...، $S(k)$ درست‌اند درست باشد،

آن‌گاه $S(n)$ برای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{Z}^+$ درست است.

برهان اثبات این قضیه و هم‌ارزی آن با قضیهٔ ۱.۴ را برای تمرین باقی می‌گذاریم. ■

وقتی این صورت اصل را بررسی می‌کنیم، می‌بینیم که برای اثبات درستی $S(k+۱)$ ممکن است به درستی گزاره‌هایی غیر از گزارهٔ $S(k)$ نیاز داشته باشیم. مثالهای زیر نشان می‌دهند که چگونه این حالت ممکن است پیش آید، و نظیر مثالهای قبل نشان می‌دهند که لازم نیست همیشه از $n_۰ = ۱$ شروع کنیم.

مثال ۱۰.۴ محاسبات زیر نشان می‌دهند که می‌توان (بدون توجه به ترتیب) اعداد ۱۴، ۱۵، ۱۶ را با استفاده از تنها اعداد ۳ و/ یا ۸ به عنوان جمعوند نوشت.

$$۱۴ = ۳ + ۳ + ۸$$
$$۱۵ = ۳ + ۳ + ۳ + ۳ + ۳$$
$$۱۶ = ۸ + ۸$$

بر پایهٔ این سه نتیجه، حدس زیر را می‌زنیم

$S(n)$: برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، اگر $n \geq ۱۴$، آن‌گاه می‌توان n را به صورت مجموعی از ۳ها و/یا ۸ها بیان کرد

برهان: واضح است که $S(۱۴)$، و همچنین $S(۱۵)$ و $S(۱۶)$ درست‌اند. اینک فرض استقرا را می‌پذیریم. دراینجا، فرض این است که $S(۱۴)$، $S(۱۵)$، . . . ، $S(k-۲)$، $S(k-۱)$، $S(k)$، که برای آنها $k \geq ۱۶$، همگی درست‌اند. حال اگر $n = k+۱$، آن‌گاه $n \geq ۱۷$ و $k+۱ = (k-۲)+۳$. امّا چون $k \geq k-۲ \geq ۱۴$، بنابر درستی $S(k-۲)$ می‌دانیم که $(k-۲)$ را می‌توان به صورت مجموع ۳ها و / یا ۸ها نوشت، پس $(k+۱) = (k-۲)+۳$ را نیز می‌توان به این صورت نوشت. درنتیجه، $S(n)$ برای همهٔ مقادیر $n \geq ۱۴$، بنابر صورت دیگر اصل استقرای ریاضی، درست است. □

در مثال ۱۰.۴، دیدیم که چگونه درستی $S(k+۱)$، با استفاده از درستی نتیجهٔ قبلی $S(k-۲)$ نتیجه شد. مثال بعد نشان می‌دهد که مواردی وجود دارند که در آنها درستی بیش از یک نتیجهٔ قبلی مورد نیاز است.

مثال ۱۱.۴ پس از n ماه آزمایش گلخانه‌ای، $P(n)$، یعنی تعداد گیاهانی از نوع خاص، در معادله‌های $P(۰) = ۳$، $P(۱) = ۷$، و $P(n) = ۳P(n-۱) - ۲P(n-۲)$، $n \geq ۲$، صدق می‌کنند. [پس، مثلاً $P(۲) = ۳P(۱) - ۲P(۰) = ۳(۷) - ۲(۳) = ۱۵$ و $P(۳) = ۳P(۲) - ۲P(۱) = ۳(۱۵) - ۲(۷) = ۳۱$] با استقرای ریاضی نشان دهید که به‌ازای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{Z}$، $n \geq ۰$، $P(n) = ۲^{n+۲} - ۱$.

برهان: در اینجا حکم زیر را داریم

$S(n)$: اگر $P(۰) = ۳$، $P(۱) = ۷$، و $P(n) = ۳P(n-۱) - ۲P(n-۲)$، آن‌گاه برای $n \geq ۰$، $P(n) = ۲^{n+۲} - ۱$.

چون، $P(۰) = ۳ = ۲^{۰+۲} - ۱$، پس داریم $S(۰)$ درست است. همچنین، $P(۱) = ۷ = ۲^{۱+۲} - ۱$، پس $S(۱)$ درست است.

اینک درستی $S(۰)$، $S(۱)$، . . . ، $S(k-۱)$، $S(k)$ را می‌پذیریم و حالتی را درنظر می‌گیریم که $n = k+۱ \geq ۲$. پس

$$\begin{aligned}
P(k+۱) &= ۳P(k) - ۲P(k-۱) \\
&= ۳[۲^{k+۲} - ۱] - ۲[۲^{(k-۱)+۲} - ۱] \\
&= ۳(۲^{k+۲}) - ۳ - ۲^{(k-۱)+۳} + ۲ \\
&= ۳(۲^{k+۲}) - (۲^{k+۲}) - ۱ \\
&= ۲(۲^{k+۲}) - ۱ = ۲^{(k+۱)+۲} - ۱
\end{aligned}$$

[در اینجا جایگذاریهای مربوط به $P(k)$ و $P(k-1)$ بر پایهٔ فرض استقرا برای دو نتیجهٔ قبلی $S(k)$ و $S(k-1)$ صورت گرفته است.]

درنتیجه، بنابر صورت دیگر اصل استقرای ریاضی، $S(n)$ برای همهٔ مقادیر $n \geq 0$ درست است. (در فصل ۱۰، برای یافتن چنین جوابی برای $P(n)$ بررسی بیشتری خواهیم کرد.) □

به عنوان نتیجه‌ای از صورت دیگر اصل استقرای ریاضی، ممکن است تعریفی استقرایی (یا بازگشتی) داشته باشیم که در آن، مفهوم مربوط به $(n+1)$ امین گام از یک یا چند مفهوم مشابه در گامهای جلوتر اول، دوم، ... ، و nام نتیجه شود.

تمرینهای ۱.۴

۱. هر یک از موردهای زیر را به وسیلهٔ اصل استقرای متناهی ثابت کنید.

الف) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = (n)(2n-1)(2n+1)/3$

ب) $(1\times 3) + (2\times 4) + (3\times 5) + \cdots + n(n+2) = (n)(n+1)(2n+7)/6$

ج) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

د) $\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$

ه) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$

۲. هر یک از موردهای زیر را به وسیلهٔ استقرای ریاضی ثابت کنید.

الف) $\sum_{i=1}^{n} i(2^i) = 2 + (n-1)2^{n+1}$

ب) $\sum_{i=1}^{n} 2(3^{i-1}) = 3^n - 1$

ج) $\sum_{i=1}^{n} (i)(i!) = (n+1)! - 1$

۳. برنامهٔ **بیسیک** زیر را درنظر بگیرید

```
10  FOR I = 1 TO 123
20      FOR J = 1 TO I
30              PRINT I*J
40      NEXT J
50  NEXT I
60  END
```

الف) گزارهٔ PRINT در سطر ۳۰، چندبار اجرا شده است؟

ب) در سطر ۲۰ به‌جای I قرار دهید I**2، و به سؤال قسمت (الف) پاسخ دهید.

۴. بر یک گردونهٔ شانس اعداد صحیح ۱ تا ۲۵ به‌طریقی تصادفی ثبت شده‌اند. نشان دهید که به هر طریق این اعداد بر گردونه نوشته شده باشند، سه عدد مجاور وجود دارند که مجموع آنها حداقل ۳۹ است.

۵. مقادیر **الف)** $\sum_{i=11}^{33} i$؛ **ب)** $\sum_{i=11}^{33} i^2$ را حساب کنید.

۶. **الف)** ثابت کنید که $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$ ، که در آن $i \in \mathbf{C}$ و $i^2 = -1$.

ب) با استفاده از استقرا ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$،

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

(این قضیه به قضیهٔ دموآور موسوم است.)

ج) تحقیق کنید که $1 + i = \sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$، و $(1+i)^{100}$ را حساب کنید.

۷. برای $n \in \mathbf{Z}^+$، اگر $n > 10$، ثابت کنید که

$$n - 2 < \frac{n^2 - n}{12}$$

۸. ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $n > 3 \Rightarrow 2^n < n!$.

۹. ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $n > 4 \Rightarrow n^2 < 2^n$.

۱۰. ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $n > 9 \Rightarrow n^3 < 2^n$.

۱۱. فرض کنید $S(n)$ گزارهٔ زیر باشد: برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$،

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n + (1/2))^2}{2}$$

نشان دهید که درستی $S(k)$، درستی $S(k+1)$ را به ازای هر $k \in \mathbf{Z}^+$ نتیجه می‌دهد.
آیا برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $S(n)$ درست است؟

۱۲. فرض کنید S_1 و S_2 دو مجموعه هستند که برای آنها به‌ازای $m, n \in \mathbf{Z}^+$، $|S_1| = m$، $|S_2| = n$، و عنصرهای S_1 و S_2 به ترتیب صعودی‌اند. می‌توان نشان داد که عنصرهای موجود در S_1 و S_2 می‌توانند با انجام تعدادی نابیشتر از $m + n - 1$ مقایسه به ترتیب صعودی درآیند. (لم ۱.۱۲ را ببینید.) این نتیجه را برای اثبات موضوع زیر، به‌کار برید.

برای $n \geq 0$، فرض کنید S مجموعه‌ای با $|S| = 2^n$ باشد. ثابت کنید که تعداد مقایسه‌های لازم برای قراردادن عنصرهای S به ترتیب صعودی از $n \cdot 2^n$ تجاوز نمی‌کند.

۱۳. اگر $n \in \mathbf{Z}^+$، ثابت کنید که

الف) $(\cos\theta)(\cos 2\theta)(\cos 4\theta)(\cos 8\theta)\ldots[\cos(2^{n-1}\theta)] = \dfrac{\sin(2^n\theta)}{2^n \sin\theta}$

ب) $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cdots + \cos(2n-1)\theta = \dfrac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$

```
While n <> 0 do
  Begin
    x := x + y;
    n := n - 1
  End;
Answer := x;
```

شکل ۶.۴

```
While n <> 0 do
  Begin
    x := x*n;
    n := n - 1
  End;
Answer := x;
```

شکل ۷.۴

۱۴. در قطعهٔ برنامهٔ پاسکالی که در شکل ۶.۴ نشان داده‌ایم، x، y و Answer متغیرهای حقیقی‌اند، و n متغیری صحیح است. قبل از اجرای این حلقهٔ While، استفاده کننده مقادیری حقیقی برای x و y و مقدار صحیح نامنفی برای n منظور می‌کند. ثابت کنید که (بنابر استقرای ریاضی) به‌ازای هر $x, y \in \mathbf{R}$ اگر برنامه به بالای حلقهٔ While، با $n \in \mathbf{Z}$، $n \geq ۰$ برسد، آن‌گاه بعد از اجرای حلقه (یا گذر از آن)، مقداری که به Answer تخصیص می‌یابد برابر $x + ny$ است.

۱۵. در طول اجرای یک برنامهٔ پاسکال، استفاده کننده به متغیرهای صحیح x و n هر عدد صحیح مثبتی را (که ممکن است متفاوت باشند) تخصیص می‌دهد. از قطعهٔ پاسکالی که در شکل ۷.۴ نشان داده‌ایم بی‌درنگ این تخصیصها نتیجه می‌شوند. اگر برنامه به بالای حلقهٔ While برسد، بیان و ثابت کنید (به‌وسیلهٔ استقرای ریاضی) که چه مقداری به Answer، بعد از اجرای حلقه (یا گذر از آن) تخصیص داده می‌شود؟

۱۶. یک تعریف استقرایی (یا بازگشتی) برای $n!$، $n \in \mathbf{N}$، ارائه دهید.

۱۷. **الف)** یک تعریف استقرایی (یا بازگشتی) برای جمع n عدد حقیقی $x_۱$، $x_۲$، $\ldots$ ، x_n، $n \geq ۲$، ارائه دهید.

ب) برای اعداد حقیقی دلخواه $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$ قانون شرکتپذیری جمع بیان می‌کند که $x_۱+(x_۲+x_۳) = (x_۱+x_۲)+x_۳$. ثابت کنید که اگر $n, r \in \mathbf{Z}^+$، $n \geq ۳$ و $۱ \leq r < n$، آن‌گاه

$$(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_r) + (x_{r+۱} + \cdots + x_n)$$
$$= x_۱ + x_۲ + \cdots + x_r + x_{r+۱} + \cdots + x_n$$

۱۸. برای هر $x \in \mathbf{R}$

$$|x| = \sqrt{x^۲} = \begin{cases} x, & \text{اگر } x \geq ۰ \\ -x, & \text{اگر } x < ۰ \end{cases}$$

و $-|x| \leq x \leq |x|$. درنتیجه برای هر $x, y \in \mathbf{R}$،

$$\begin{aligned} |x+y|^۲ &= (x+y)^۲ = x^۲ + ۲xy + y^۲ \leq x^۲ + ۲|x||y| + y^۲ \\ &= |x|^۲ + ۲|x||y| + |y|^۲ = (|x|+|y|)^۲ \end{aligned}$$

و

$$|x+y|^۲ \leq (|x|+|y|)^۲ \Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y|$$

ثابت کنید که اگر $n \in \mathbf{Z}^+$، $n \geq ۲$ و $x_۱, x_۲, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$، آن‌گاه

$$|x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n| \leq |x_۱| + |x_۲| + \cdots + |x_n|$$

۱۹. با استفاده از نتیجهٔ مثال ۸.۴ ثابت کنید که اگر p، $q_۱$، $q_۲$، … ، q_n حکمهایی باشند و $n \geq ۲$، آن‌گاه

$$p \vee (q_۱ \wedge q_۲ \wedge \ldots \wedge q_n) \Leftrightarrow (p \vee q_۱) \wedge (p \vee q_۲) \wedge \ldots \wedge (p \vee q_n)$$

۲۰. **الف)** برای ترکیب فصلی حکمهای $p_۱$، $p_۲$، … ، p_n، $p_{n+۱}$، تعریفی استقرایی ارائه دهید.

ب) نشان دهید که اگر $n, r \in \mathbf{Z}^+$، با $n \geq ۳$ و $۱ \leq r \leq n$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} &(p_۱ \vee p_۲ \vee \ldots \vee p_r) \vee (p_{r+۱} \vee \ldots \vee p_n) \\ &\qquad \Leftrightarrow p_۱ \vee p_۲ \vee \ldots \vee p_r \vee p_{r+۱} \vee \ldots \vee p_n \end{aligned}$$

ج) برای $n \in \mathbf{Z}^+$، $n \geq ۲$ و حکمهای p، $q_۱$، $q_۲$، … ، q_n ثابت کنید که

$$p \wedge (q_۱ \vee q_۲ \vee \ldots \vee q_n) \Leftrightarrow (p \wedge q_۱) \vee (p \wedge q_۲) \vee \ldots \vee (p \wedge q_n)$$

د) برای $n \in \mathbf{Z}^+$، $n \geq ۲$، ثابت کنید که برای حکمهای دلخواه $p_۱$، $p_۲$، . . . ، p_n

$$\overline{(p_۱ \vee p_۲ \vee \ldots \vee p_n)} \Leftrightarrow \overline{p_۱} \wedge \overline{p_۲} \wedge \ldots \wedge \overline{p_n} \qquad \text{(i)}$$

$$\overline{(p_۱ \wedge p_۲ \wedge \ldots \wedge p_n)} \Leftrightarrow \overline{p_۱} \vee \overline{p_۲} \vee \ldots \vee \overline{p_n} \qquad \text{(ii)}$$

۲۱. الف) با استفاده از نتیجهٔ مثال ۹.۴ نشان دهید که اگر مجموعه‌های $A, B_۱, B_۲, \ldots, B_n \subseteq \mathscr{U}$ و $n \geq ۲$، آن‌گاه

$$A \cap (B_۱ \cup B_۲ \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_۱) \cup (A \cap B_۲) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$$

ب) تعریفی استقرایی برای اشتراک مجموعه‌های $A_۱, A_۲, \ldots, A_n, A_{n+۱} \subseteq \mathscr{U}$، $n \geq ۱$ ارائه دهید.

ج) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (ب) نشان دهید که برای هر $n, r \in \mathbf{Z}^+$، $n \geq ۳$ و $۱ \leq r \leq n$

$$(A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_r) \cap (A_{r+۱} \cap \ldots \cap A_n) =$$
$$A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_r \cap A_{r+۱} \cap \ldots \cap A_n$$

د) برای $n \geq ۲$ و مجموعه‌های دلخواه $A_۱, A_۲, \ldots, A_n \subseteq \mathscr{U}$، ثابت کنید که

$$\overline{A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_n} = \overline{A_۱} \cup \overline{A_۲} \cup \ldots \cup \overline{A_n} \qquad \text{(i)}$$

$$\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_۱} \cap \overline{A_۲} \cap \ldots \cap \overline{A_n} \qquad \text{(ii)}$$

ه) برای $n \in \mathbf{Z}^+$، $n \geq ۲$ و مجموعه‌های $A, B_۱, B_۲, \ldots, B_n \subseteq \mathscr{U}$ ثابت کنید که

$$A \cup (B_۱ \cap B_۲ \cap \ldots \cap B_n) = (A \cup B_۱) \cap (A \cup B_۲) \cap \ldots \cap (A \cup B_n)$$

۲۲. الف) فرض کنید $n \in \mathbf{Z}^+$، $n \neq ۱, ۳$. ثابت کنید که n را می‌توان به‌صورت مجموعی از ۲ها و/یا ۵ها بیان کرد.

ب) برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، نشان دهید که اگر $n \geq ۲۴$، آن‌گاه n را می‌توان به‌صورت مجموعی از ۵ها و/یا ۷ها نوشت.

۲۳. برای $n \in \mathbf{Z}^+$، فرض کنید $P(n)$ برابر تعداد (تقریبی) باکتریها در یک کشت بعد از n ساعت است. اگر $P(۱) = ۱۰۰۰$، $P(۲) = ۲۰۰۰$، و به‌ازای همهٔ مقادیر $n > ۲$، $P(n) = P(n-۱) + P(n-۲)$، نشان دهید که

$$P(n) = \left(\frac{۱۰۰۰}{\sqrt{۵}}\right)\left[\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱} - \left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱}\right]$$

۲۴. دنباله‌ای از اعداد $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ... (به صورت استقرایی) به وسیلهٔ

$$a_۱ = ۱$$
$$a_۲ = ۲$$
$$a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}, \quad n \geq ۳$$

تعریف شده است.

الف) مقادیر $a_۳$، $a_۴$، $a_۵$، $a_۶$، و $a_۷$ را تعیین کنید.

ب) ثابت کنید که برای همهٔ مقادیر $n \geq ۱$، $a_n < (۷/۴)^n$.

۲۵. درستی قضیهٔ ۲.۴ را تحقیق کنید.

۲۶. **الف)** برای $n \geq ۲$، اگر $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$، ... ، p_n، $p_{n+۱}$ حکمهایی باشند، ثابت کنید که

$$[(p_۱ \to p_۲) \wedge (p_۲ \to p_۳) \wedge \ldots \wedge (p_n \to p_{n+۱})] \Rightarrow [(p_۱ \wedge p_۲ \wedge \ldots \wedge p_n) \to p_{n+۱}]$$

ب) ثابت کنید که قضیهٔ ۲.۴ مستلزم قضیهٔ ۱.۴ است.

ج) برای اثبات مطلب زیر قضیهٔ ۱.۴ را به‌کار برید:
اگر $\phi \neq S \subseteq \mathbf{Z}^+$ و $n \in S$، آن‌گاه S حداقل یک عنصر دارد.

د) نشان دهید که قضیهٔ ۱.۴ مستلزم قضیهٔ ۲.۴ است.

۲.۴ الگوریتم تقسیم: اعداد اول

گرچه مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ در تقسیم بر عدد مخالف صفر بسته نیست، موارد زیادی وجود دارند که در آنها یک عدد صحیح عدد صحیح دیگر را می‌شمارد، مثلاً ۲ عدد ۶ و ۷ عدد ۲۱ را می‌شمارد. دراینجا عمل تقسیم کامل است و باقیمانده وجود ندارد. پس وقتی ۲ عدد ۶ را می‌شمارد لازمهٔ آن وجود یک خارج قسمت، یعنی ۳ است به قسمی که $۲ \times ۳ = ۶$.

تعریف ۱.۴ اگر $a, b \in \mathbf{Z}$ و $b \neq \circ$، می‌گوییم که b عدد a را می‌شمارد و می‌نویسیم $b|a$ اگر عدد صحیح nی وجود داشته باشد به قسمی که $a = bn$. وقتی چنین باشد، می‌گوییم که b مقسوم‌علیه a، یا a مضرب b است.

با این تعریف می‌توانیم از تقسیم در درون $\mathbf{Z}$ بدون رفتن به $\mathbf{Q}$ صحبت کنیم. به‌علاوه، وقتی برای $b \in \mathbf{Z}$ و a داشته باشیم $ab = \circ$، آن‌گاه یا $a = \circ$ و یا $b = \circ$، و می‌گوییم که $\mathbf{Z}$ مقسوم علیه‌های سره $\circ$ ندارد. با داشتن این ویژگی می‌توانیم عمل حذف را، مثلاً در مورد $۲x = ۲y \Rightarrow x = y$ به ازای $x, y \in \mathbf{Z}$ انجام دهیم، زیرا $۲x = ۲y \Rightarrow ۲(x-y) = \circ \Rightarrow ۲ = \circ$، یا $x - y = \circ \Rightarrow x = y$. (توجه کنید که هیچوقت از ضرب‌کردن دو طرف برابری $۲x = ۲y$ در $۱/۲$ ذکری نمی‌کنیم. عدد $۱/۲$ خارج از دستگاه $\mathbf{Z}$ است.)

اینک بعضی از ویژگیهای این عمل تقسیم را خلاصه می‌کنیم. هر وقت عمل تقسیم بر a را انجام می‌دهیم می‌پذیریم که $a \neq \circ$.

قضیه ۳.۴ برای $a, b, c \in \mathbf{Z}$

الف) $۱|a$ و $a|\circ$. **ب)** $(a|b \wedge b|a) \Rightarrow a = \pm b$.

ج) $(a|b \wedge b|c) \Rightarrow a|c$. **د)** برای همهٔ مقادیر $x \in \mathbf{Z}$، $a|b \Rightarrow a|bx$.

ه) برای $x, y, z \in \mathbf{Z}$، اگر $x = y + z$ و اگر a دو تا از سه عدد صحیح x، y و z را بشمارد آن‌گاه a عدد صحیح سوم را هم می‌شمارد.

و) برای همهٔ مقادیر $x, y \in \mathbf{Z}$، $(a|b \wedge a|c) \Rightarrow a|(bx + cy)$. (عبارت $bx + cy$ را ترکیب خطی b و c می‌نامند.)

ز) برای $۱ \leq i \leq n$، فرض کنید $c_i \in \mathbf{Z}$. اگر a هر یک از c_iها را بشمارد، آن‌گاه برای هر $x_i \in \mathbf{Z}$، $۱ \leq i \leq n$، $a|(c_۱x_۱ + c_۲x_۲ + \cdots + c_nx_n)$.

برهان قسمت (ز) را ثابت می‌کنیم و اثبات بقیهٔ قسمتها را به عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم.

اگر $a|b$ و $a|c$، آن‌گاه برای $m, n \in \mathbf{Z}$، $b = am$، $c = an$. پس (بنابر قانون شرکتپذیری ضرب و قانون توزیعپذیری ضرب نسبت به جمع که هر دو در $\mathbf{Z}$ برقرارند)

$$bx + cy = (am)x + (an)y = a(mx + ny)$$

از $bx + cy = a(mx + ny)$ نتیجه می‌شود که $a|(bx + cy)$.■

با این عمل تقسیم اعداد صحیح، وارد زمینهٔ نظریهٔ اعداد می‌شویم. وقتی مجموعهٔ $\mathbf{Z}^+$ را بیشتر بررسی می‌کنیم متوجه می‌شویم که برای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{Z}^+$، $n > ۱$، n حداقل دو

مقسوم‌علیه مثبت، یعنی ۱ و خودش، n، را دارد. بعضی از اعداد، نظیر ۲، ۳، ۵، ۷، ... دقیقاً دو مقسوم‌علیه مثبت دارند. این اعداد صحیح را اوّل می‌گویند. تمام اعداد مثبت دیگر (بزرگتر از ۱ و غیر اول) را مرکب می‌نامند. یک رابطهٔ نزدیک بین اعداد اول و اعداد مرکب به صورت لِم زیر بیان می‌شود.

لم ۱.۴ اگر $n \in \mathbf{Z}^+$ و n مرکب باشد، آن‌گاه یک عدد اول p وجود دارد به قسمی که $p|n$.

برهان اگر چنین نباشد، فرض کنید S مجموعهٔ تمام اعداد مرکبی باشد که مقسوم‌علیه اول ندارند. اگر $S \neq \emptyset$ ، آن‌گاه بنابر اصل خوشترتیبی S دارای یک کوچکترین عنصر m است. امّا برای عدد مرکب m، $m = m_1 m_2$، که $1 < m_1 < m$، $1 < m_2 < m$. چون $m_1 \notin S$، m_1 اول است یا بر عددی اول تقسیم‌پذیر است. درنتیجه، عدد اول pیی وجود دارد به قسمی که $p|m$، و $S = \emptyset$. ■

امّا چرا قضیهٔ بالا را به‌جای قضیه، لم نامیدیم؟ این لم مثل تمام قضایای دیگر این کتاب تا اینجا، ثابت شد. لم به نوبهٔ خود یک قضیه است، امّا نقش عمدهٔ آن اثبات قضیه‌ای است که در اثبات قضیهٔ دیگری به‌کار خواهد رفت.

در فهرست‌کردن اعداد اول میل داریم باور کنیم که تعدادی نامتناهی از این اعداد وجود دارند. اینک درستی این باور را تحقیق می‌کنیم.

قضیه ۴.۴ (اقلیدس) تعداد اعداد اوّل نامتناهی است.

برهان اگر تعداد اعداد اول نامتناهی نباشد، فرض کنید p_1، p_2، ... ، p_k فهرست متناهی همهٔ اعداد اوّل باشد، و قرار می‌دهیم $B = p_1 p_2 \dots p_k + 1$. چون $B > p_i$، $1 \leq i \leq k$، B نمی‌تواند اول باشد. بنابراین B مرکب است. پس بنابر لم۱.۴ عدد اولی مثل p_j وجود دارد که برای آن $1 \leq j \leq k$ و $p_j|B$. چون $p_j|B$ و $p_j|p_1 p_2 \dots p_k$، بنابر قضیهٔ ۳.۴ (ه) نتیجه می‌شود که $p_j|1$. این تناقض از قبول اینکه تنها تعدادی متناهی عدد اول وجود دارند حاصل شده است؛ پس قضیه ثابت شده است. ■

بله، این همان اقلیدس سدهٔ چهارم قبل از میلاد است که کتاب اصول او بر ۱۳ طومار پوستی نوشته شده است و شامل اولین مطالب سازمان‌یافتهٔ هندسه‌ای است که در دبیرستان فراگرفته‌ایم. امّا، این ۱۳ مقاله مربوط به نظریهٔ اعداد نیز هستند. به‌خصوص، در کتابهای VII، VIII، و IX به این موضوع پرداخته شده است.

اینک به موضوع اصلی این بخش برمی‌گردیم. با این قضیه می‌توانیم از تقسیم بر عدد مخالف صفر در $\mathbf{Z}$، وقتی که تقسیم باقیمانده دارد، بحث کنیم.

قضیه ۵.۴ (الگوریتم تقسیم) اگر $a, b \in \mathbf{Z}$، با $b > 0$، آن‌گاه مقادیر یکتای $q, r \in \mathbf{Z}$ وجود

دارند که $a = bq + r$، $\circ \leq r < b$.

برهان اگر $b|a$، قضیه ثابت است، پس حالتی را درنظر می‌گیریم که $b \nmid a$ (b یعنی عدد b عدد a را نمی‌شمارد.)

فرض کنید $S = \{a - tb | t \in \mathbf{Z}, a - tb > \circ\}$. اگر $a > \circ$ و $t = \circ$، آن‌گاه $a \in S$ و $S \neq \emptyset$. برای $a \leq \circ$ قرار بدهید $t = a - ۱$. دراین صورت $a - tb = a - (a - ۱)b = a(۱ - b) + b$، با $\circ \leq (۱ - b)$، زیرا $b \geq ۱$. پس $a - tb > \circ$ و $S \neq \emptyset$. بنابراین، برای هر $a \in \mathbf{Z}$، S یک زیرمجموعهٔ ناتهی $\mathbf{Z}^+$ است. بنابر اصل خوشترتیبی، S دارای یک کوچکترین عنصر r است،که برای یک عدد $q \in \mathbf{Z}$، $\circ < r = a - qb$. اگر $r = b$، آن‌گاه $a = (q + ۱)b$ و $b|a$، که متناقض با $b \nmid a$ است. اگر $r > b$، آن‌گاه به‌ازای cیی متعلق به $\mathbf{Z}^+$، $r = b + c$، و $a - qb = r = b + c \Rightarrow c = a - (q + ۱)b \in S$ که با این مطلب که r کوچکترین عنصر S است متناقض است.

این برهان، وجود یک خارج‌قسمت q و باقیماندهٔ r، $\circ \leq r < b$ را برای قضیه ثابت می‌کند. امّا آیا qها و rهای دیگری نیز وجود دارند که چنین باشند؟ اگر باشند، فرض کنید $q_۱, q_۲, r_۱, r_۲ \in \mathbf{Z}$ با $a = q_۱ b + r_۱$، $\circ \leq r_۱ < b$، و $a = q_۲ b + r_۲$، $\circ \leq r_۲ < b$. دراین صورت $q_۱ b + r_۱ = q_۲ b + r_۲ \Rightarrow b|q_۱ - q_۲| = |r_۲ - r_۱| < b$، زیرا $\circ \leq r_۱, r_۲ < b$. اگر $q_۱ \neq q_۲$، به تناقض $b|q_۱ - q_۲| < b$ می‌رسیم. بنابراین، $q_۱ = q_۲$، $r_۱ = r_۲$ و خارج‌قسمت و باقیمانده یکتا هستند. ■

با استفاده از الگوریتم تقسیم، به بررسی نتایجی برای نمایش اعداد صحیح در پایه‌هایی غیر از ۱۰ می‌پردازیم.

مثال ۱۲.۴ عدد ۶۱۳۷ را در دستگاه به پایهٔ ۸ (هشت هشتی) بنویسید. در اینجا درپی اعداد صحیح نامنفی $r_\circ$، $r_۱$، ...، r_k هستیم، به قسمی که $r_k > \circ$ و $۶۱۳۷ = (r_k \ldots r_۲ r_۱ r_\circ)_۸$. با $۶۱۳۷ = r_\circ + r_۱ \cdot ۸ + r_۲ ۸^۲ + \cdots + r_k \cdot ۸^k = r_\circ + ۸(r_۱ + r_۲ \cdot ۸ + \cdots + r_k \cdot ۸^{k-۱})$، $r_\circ$ باقیماندهٔ حاصل از الگوریتم تقسیم ۶۱۳۷ بر ۸ است.

درنتیجه، $۶۱۳۷ = ۱ + ۸ \cdot ۷۶۷$، پس $r_\circ = ۱$، و

$$۷۶۷ = r_۱ + r_۲ \cdot ۸ + \cdots + r_k \cdot ۸^{k-۱} = r_۱ + ۸(r_۲ + r_۳ \cdot ۸ + \cdots + r_k \cdot ۸^{k-۲})$$

نتیجه می‌دهد که $r_۱ = ۷$ (باقیماندهٔ تقسیم، وقتی ۷۶۷ بر ۸ تقسیم می‌شود) و

$$۹۵ = r_۲ + r_۳ \cdot ۸ + \cdots + r_k \cdot ۸^{k-۲}$$

با ادامهٔ این روش، به‌دست می‌آوریم که $r_۲ = ۷$، $r_۳ = ۳$، $r_۴ = ۱$، و $r_i = ۰$ برای $i \geq ۵$، پس

$$۶۱۳۷ = ۱ \cdot ۸^۴ + ۳ \cdot ۸^۳ + ۷ \cdot ۸^۲ + ۷ \cdot ۸ + ۱ = (۱۳۷۷۱)_۸$$

می‌توانیم این نتیجهٔ تقسیمهای متوالی بر ۸ را به صورت زیر به‌دست آوریم

$$\begin{array}{r|l c l}
 & & & \text{باقیمانده‌ها} \\
۸ & ۶۱۳۷ & & \\
۸ & ۷۶۷ & & ۱(r_۰) \\
۸ & ۹۵ & & ۷(r_۱) \\
۸ & ۱۱ & & ۷(r_۲) \\
۸ & ۱ & & ۳(r_۳) \\
 & ۰ & & ۱(r_۴)
\end{array}$$

□

مثال ۱۳.۴ در زمینهٔ علم کامپیوتر، دستگاه اعداد دودویی (به پایهٔ ۲) اهمیت خیلی زیاد دارد. در اینجا تنها بیت‌هایی که می‌توان به‌کار برد ۰ و ۱ هستند. در جدول ۲.۴ نمایشهای دودویی اعداد صحیح از ۰ تا ۱۵ ثبت شده‌اند.

دراینجا صفرهای پیشرو را منظورکرده‌ایم و ملاحظه می‌کنیم که به دلیل ۱ پیشرو در نمایش اعداد صحیح از ۸ تا ۱۵ به ۴ بیت نیاز داریم. با پنج بیت می‌توانیم تا ۳۱ (برابر با $۱ - ۲^۵ = ۱ - ۳۲$) ادامه دهیم؛ برای جلورفتن تا ۶۳ (برابر با $۱ - ۲^۶ = ۱ - ۶۴$) شش بیت لازم است. به‌طورکلی،

جدول ۲.۴

پایهٔ ۲	پایهٔ ۱۰	پایهٔ ۲	پایهٔ ۱۰
۱۰۰۰	۸	۰۰۰۰	۰
۱۰۰۱	۹	۰۰۰۱	۱
۱۰۱۰	۱۰	۰۰۱۰	۲
۱۰۱۱	۱۱	۰۰۱۱	۳
۱۱۰۰	۱۲	۰۱۰۰	۴
۱۱۰۱	۱۳	۰۱۰۱	۵
۱۱۱۰	۱۴	۰۱۱۰	۶
۱۱۱۱	۱۵	۰۱۱۱	۷

اگر $x \in \mathbf{Z}$ و $x < ۲^n$ ،$۰ \leq x < ۲^n$، $n \in \mathbf{Z}^+$، آن‌گاه می‌توانیم x در پایهٔ ۲ را به وسیلهٔ n بیت بنویسیم. صفرهای پیشرو وقتی ظاهر می‌شوند که $۰ \leq x < ۲^{n-۱} - ۱$، و برای $۲^{n-۱} \leq x < ۲^n - ۱$، اولین (مهمترین) بیت، ۱ است.

معمولاً اطلاعات در ماشینها برحسب واحدهای هشت بیتی به نام بایت ذخیره می‌شوند، پس در ماشینهایی که سلولهای حافظهٔ یک بایتی دارند، می‌توانیم هر یک از هم‌ارزهای دودویی اعداد صحیح از ۰ تا $۲۵۵ = ۲^۸ - ۱$ را در یک سلول ذخیره کنیم. در ماشینی با سلولهای دو بایتی، هر یک از اعداد صحیح از ۰ تا $۶۵۵۳۵ = ۲^{۱۶} - ۱$ را می‌توان به صورت دودویی در هر سلول ذخیره کرد. در ماشینی با سلولهای چهار بایتی می‌توان تا $۴۲۹۴۹۶۷۲۹۵ = ۲^{۳۲} - ۱$ جلو رفت.

وقتی فردی با دنباله‌های طولانی ۰ و ۱ سروکار دارد، کار به زودی خیلی خسته کننده می‌شود و شانس ارتکاب خطا با خستگی افزایش می‌یابد. درنتیجه، متداول است که (به‌ویژه در مطالعهٔ ماشین و زبانهای برهمگذاری) چنین دنباله‌های طولانی بیت‌ها را با نماد دیگری نمایش می‌دهند. این گونه نمادگذاری، نمادگذاری شانزده شانزدهی (به پایهٔ ۱۶) است. دراینجا ۱۶ نماد وجود دارند، و چون تنها ۱۰ نماد در دستگاه به پایهٔ ۱۰ داریم شش نماد اضافی زیر را وارد می‌کنیم

A(Able) C(Charlie) E(Echo)
B(Baker) D(Dog) F(Fox)

در جدول ۳.۴ اعداد صحیح ۰ تا ۱۵ را هم در دستگاه اعداد دودویی و هم در دستگاه شانزده شانزدهی داده‌ایم.

برای تبدیل از پایهٔ ۱۰ به پایهٔ ۱۶، شیوه‌ای نظیر شیوه‌ای را که در مثال ۱۲.۴ طرحریزی شد

جدول ۳.۴

پایهٔ ۱۰	پایهٔ ۲	پایهٔ ۱۶	پایهٔ ۱۰	پایهٔ ۲	پایهٔ ۱۶
۰	۰۰۰۰	۰	۸	۱۰۰۰	۸
۱	۰۰۰۱	۱	۹	۱۰۰۱	۹
۲	۰۰۱۰	۲	۱۰	۱۰۱۰	A
۳	۰۰۱۱	۳	۱۱	۱۰۱۱	B
۴	۰۱۰۰	۴	۱۲	۱۱۰۰	C
۵	۰۱۰۱	۵	۱۳	۱۱۰۱	D
۶	۰۱۱۰	۶	۱۴	۱۱۱۰	E
۷	۰۱۱۱	۷	۱۵	۱۱۱۱	F

دنبال می‌کنیم. دراینجا به باقیمانده‌های تقسیمهای متوالی بر ۱۶ توجه داریم. بنابراین اگر بخواهیم عدد صحیح ۱۳۸۷۴۹۴۵ را که بر پایهٔ ۱۰ است در دستگاه شانزده شانزدهی نمایش دهیم، محاسبات زیر را انجام می‌دهیم:

	باقیمانده‌ها	
۱۶ | ۱۳۸۷۴۹۴۵		
۱۶ | ۸۶۷۱۸۴	۱	(r_0)
۱۶ | ۵۴۱۹۹	۰	(r_1)
۱۶ | ۳۳۸۷	۷	(r_2)
۱۶ | ۲۱۱	۱۱ $(=B)$	(r_3)
۱۶ | ۱۳	۳	(r_4)
۰	۱۳ $(=D)$	(r_5)

درنتیجه، $\text{۱۳۸۷۴۹۴۵} = (\text{D۳B۷۰۱})_{16}$.

امّا، در بین پایهٔ ۲ و پایهٔ ۱۶ روش آسانتری وجود دارد. مثلاً، اگر بخواهیم عدد صحیح دودویی (یک بایتی) ۰۱۰۰۱۱۰۱ را به همتایش در پایهٔ ۱۶ برگردانیم، عدد را به بلوکهای چهاربیتی تفکیک می‌کنیم:

$$\underbrace{\text{۰۱۰۰}}_{\text{۴}}\quad\underbrace{\text{۱۱۰۱}}_{\text{D}}$$

پس، هر بلوک چهاربیتی را به نمایش آن در پایهٔ ۱۶ (همان‌طورکه در جدول ۳.۴ نشان داده‌ایم) برمی‌گردانیم، و درنتیجه داریم $(\text{۴D})_{16} = (\text{۰۱۰۰۱۱۰۱})_2$. اگر با عددی (دوبایتی) به صورت $(\text{A۱۳F})_{16}$ شروع کنیم و بخواهیم آن را به پایهٔ ۲ ببریم، به جای هر نماد شانزده شانزدهی، هم‌ارز (۴ بیتی) دودویی آن را قرار می‌دهیم (که آن را نیز در جدول ۳.۴ نشان داده‌ایم):

$$\overbrace{\text{۱۰۱۰}}^{\text{A}}\quad\overbrace{\text{۰۰۰۱}}^{\text{۱}}\quad\overbrace{\text{۰۰۱۱}}^{\text{۳}}\quad\overbrace{\text{۱۱۱۱}}^{\text{F}}$$

این شیوه نتیجه می‌دهد که $(\text{A۱۳F})_{16} = (\text{۱۰۱۰۰۰۰۱۰۰۱۱۱۱۱۱})_2$. □

مثال ۱۴.۴ برای انجام عمل تفریق برحسب جمع [یعنی، $(a-b) = a + (-b)$] به اعداد صحیح منفی نیاز داریم. وقتی با نمایش دودویی اعداد صحیح سروکار داریم، می‌توانیم روشی

جدول ۴.۴

نمادگذاری متمم دو	
مقدار نمایش داده شده	الگوی چهار بیتی
۷	۰۱۱۱
۶	۰۱۱۰
۵	۰۱۰۱
۴	۰۱۰۰
۳	۰۰۱۱
۲	۰۰۱۰
۱	۰۰۰۱
۰	۰۰۰۰
−۱	۱۱۱۱
−۲	۱۱۱۰
−۳	۱۱۰۱
−۴	۱۱۰۰
−۵	۱۰۱۱
−۶	۱۰۱۰
−۷	۱۰۰۱
−۸	۱۰۰۰

مناسب را بهکار بریم که انجام جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم (اعداد صحیح) را میسر سازد: روش متمم‌دو. مناسب‌بودن روش،مبتنی بر اجرای آن به وسیلهٔ تنها دو مدار الکترونیک است ـ یکی برای منفی‌کردن و دومی برای جمع‌کردن.

در جدول ۴.۴ اعداد صحیح از −۸ تا ۷ به وسیلهٔ الگوهای چهار بیتی نمایش داده شده‌اند. اعداد صحیح نامنفی همان‌گونه که در جدولهای ۲.۴ و ۳.۴ بودند نمایش داده شده‌اند. برای به‌دست‌آوردن نتایج به‌ازای $-۸ \leq n \leq -۱$، ابتدا نمایش دودویی $|n|$، قدرمطلق n، را درنظر می‌گیریم. سپس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱. به‌جای هر ۰ (۱) در نمایش دودویی $|n|$، ۱ (۰) را قرار می‌دهیم؛ این نتیجه را متمم یک (نمایش مفروض) $|n|$ می‌نامیم.

۲. ۱ (=۰۰۰۱)، در این حالت) را به نتیجهٔ گام ۱ اضافه می‌کنیم. این نتیجه را متمم دوی n می‌نامیم.

مثلاً برای به‌دست‌آوردن متمم دوی (نمایش) −۶، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\begin{array}{c} ۶ \\ \downarrow \\ ۰۱۱۰ \\ \downarrow \\ ۱۰۰۱ \\ \downarrow \\ ۱۰۰۱ + ۰۰۰۱ = ۱۰۱۰ \end{array}$$

۱. با نمایش دودویی ۶ شروع می‌کنیم.
۲. جای ۰ها و ۱ها را با هم عوض می‌کنیم.
این نتیجه، متمم یکِ ۰۱۱۰ است.
۳. ۱ را به نتیجهٔ قبلی اضافه می‌کنیم.

می‌توانیم الگوهای چهاربیتی مقادیر $-۱ \le n \le -۸$ را با استفاده از الگوهای چهاربیتی برای اعداد صحیح از ۰ تا ۷، و متمم‌گیری (تعویض ۰ها و ۱ها با هم) این الگوها نیز، به صورتی که به وسیلهٔ چهار جفت از این الگوها در جدول ۴.۴ نشان داده‌ایم، به‌دست آوریم. توجه کنید که در جدول ۴.۴، الگوهای چهار بیتی برای اعداد صحیح نامنفی با ۰ شروع می‌شوند، در صورتی که برای اعداد صحیح منفی در این جدول، ۱ اولین بیت است. □

مثال ۱۵.۴ با استفاده از روش متمم دو با الگوهای هشت بیتی (= یک بایت)، چگونه می‌توانیم تفریق ۱۵ − ۳۳ را در پایهٔ ۲ انجام دهیم؟

می‌خواهیم $(-۱۵) + ۳۳ = ۱۵ - ۳۳$ را تعیین کنیم. به‌دست می‌آوریم که

$$۱۵ = (۰۰۰۰۱۱۱۱)_۲ \text{ و } ۳۳ = (۰۰۱۰۰۰۰۱)_۲$$

بنابراین ۱۵− را به وسیلهٔ

$$۱۱۱۱۰۰۰۰ + ۰۰۰۰۰۰۰۱ = ۱۱۱۱۰۰۰۱$$

نمایش می‌دهیم.

عمل جمع اعداد صحیح که با نماد متمم دو نمایش داده شده‌اند مثل عمل جمع دودویی معمولی است، جز اینکه همهٔ نتایج باید الگوهای بیتی هم اندازه داشته باشند. این بدان معناست که وقتی دو عدد صحیح به وسیلهٔ روش متمم دو با هم جمع شوند، هر بیت اضافی که در سمت چپ جواب نتیجه شود (به وسیلهٔ انتقال نهایی) باید حذف شود. این مطلب را در محاسبات زیر نشان می‌دهیم

$$\begin{array}{r} ۳۳ \\ \underline{-۱۵} \end{array} \qquad \begin{array}{r} ۰۰۱۰۰۰۰۱ \\ \underline{+۱۱۱۱۰۰۰۱} \\ ۱\underbrace{۰۰۰۱۰۰۱۰} \end{array}$$

این بیت حذف شده‌است.

$۱۸ = (۰۰۰۱۰۰۱۰)_۲ =$ پاسخ

این بیت نشان می‌دهد
که پاسخ نامنفی است.

برای به‌دست‌آوردن ۱۵ − ۳۳ از $_۲$(۰۰۰۰۱۱۱۱) = ۱۵ و $_۲$(۰۰۱۰۰۰۰۱) = ۳۳ استفاده می‌کنیم، پس، برای محاسبهٔ ۱۵ − ۳۳ به صورت (۳۳−) + ۱۵، ۳۳− را به وسیلهٔ ۱۱۰۱۱۱۱۱ = ۱۱۰۱۱۱۱۰+۰۰۰۰۰۰۰۱ نمایش می‌دهیم. این عمل، نتایج زیر را به ما می‌دهد

$$\begin{array}{r} ۱۵ \\ \underline{-۳۳} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} ۰۰۰۰۱۱۱۱ \\ \underline{+۱۱۰۱۱۱۱۱} \\ ۱۱۱۰۱۱۱۰ \end{array}$$

↓
این بیت نشان می‌دهد
که پاسخ منفی است.

برای به‌دست آوردن صورت مثبت پاسخ، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱۱۱۰۱۱۱۰
↓
۱. روش متمم یک را به‌کار می‌بریم ۰۰۰۱۰۰۰۱
↓
۲. ۱ را به نتیجهٔ قبلی اضافه می‌کنیم ۰۰۰۱۰۰۱۰

چون $_۲$(۰۰۰۱۰۰۱۰) = ۱۸، پاسخ ۱۸− است.

مسأله‌ای که در دو محاسبهٔ قبل از آن دوری جستیم، متضمن اندازهٔ اعداد صحیح است که می‌توانیم آنها را با الگوهای هشت بیتی نمایش دهیم. مهم نیست که الگوهایی با چه اندازه به‌کار می‌بریم، ولی برای اندازهٔ اعداد صحیحی که می‌توان نمایش داد حدّی وجود دارد. وقتی از این اندازه تجاوز کنیم، خطای سرریز نتیجه می‌شود. مثلاً، اگر با الگوهای هشت بیتی کار کنیم، و سعی نماییم که ۱۱۷ را با ۸۸ جمع کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{array}{r} ۱۱۷ \\ \underline{+\ ۸۸} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} ۰۱۱۱۰۱۰۱ \\ \underline{+۰۱۰۱۱۰۰۰} \\ ۱۱۰۰۱۱۰۱ \end{array}$$

↓
این بیت نشان می‌دهد
که پاسخ منفی است.

این نتیجه نشان می‌دهد که چگونه می‌توانیم خطای سرریز را به هنگام جمع دو عدد کشف کنیم. در اینجا یک خطای سرریز نشان داده شده است: مجموع الگوهای هشت‌بیتی برای دو عدد صحیح مثبت، نتیجه‌ای در الگوی هشت بیتی برای عدد صحیح منفی به‌دست داده است. همین‌طور، وقتی جمع (الگوهای هشت بیتی) دو عدد صحیح منفی، الگوی هشت بیتی عدد صحیح مثبت را نتیجه می‌دهد یک خطای سرریز کشف می‌شود. □

برای اینکه به علّت کارایی شیوهٔ مثال ۱۵.۴ در حالت کلی پی ببریم، فرض کنید $x, y \in \mathbf{Z}^+$ با $x > y$.

فرض کنید $۲^{n-۱} \leq x < ۲^n$. در این صورت، نمایش دودویی x از n بیت (با بیت پیشرو ۱) ساخته می‌شود. نمایش دودویی برای ۲^n، متشکل از $n + ۱$ بیت است: یک بیت پیشروی ۱ و به دنبال آن n تا ۰. نمایش دودویی برای $۲^n - ۱$ متشکل از n تا ۱ است.

وقتی y را از $۲^n - ۱$ کم می‌کنیم، داریم

$$(۲^n - ۱) - y = \underbrace{۱۱\cdots۱}_{n\text{تا}۱} - y \quad \text{متمم یکِ } y،$$

در این صورت $(۲^n - ۱) - y + ۱$، متمم دوی $-y$ را به ما می‌دهد، و

$$x - y = x + [(۲^n - ۱) - y + ۱] - ۲^n$$

که در آن، جملهٔ نهایی -۲^n از حذف بیت اضافی که در سمت چپ پاسخ حاصل شده نتیجه می‌شود.

به این بخش با یک نتیجهٔ نهایی دربارهٔ اعداد صحیح مرکب خاتمه می‌دهیم. (این نتیجه را بعداً، در قطعه برنامهٔ پاسکال که در شکل ۳.۸ نشان داده‌ایم به‌کار خواهیم برد.)

مثال ۱۶.۴ اگر $n \in \mathbf{Z}^+$ و n مرکب باشد، آن‌گاه عدد اول p وجود دارد که $p|n$ و $p \leq \sqrt{n}$.

برهان: چون n مرکب است، $n = n_۱ n_۲$ که $۱ < n_۱, n_۲ < n$. ادعا می‌کنیم که یکی از اعداد صحیح $n_۱$ و $n_۲$ باید کوچکتر از $\sqrt{n}$ یا برابر با آن باشد. اگر چنین نباشد، $n_۱ > \sqrt{n}$ و $n_۲ > \sqrt{n}$ تناقض $n = n_۱ n_۲ > (\sqrt{n})(\sqrt{n}) = n$ را به دست می‌دهد. بدون اینکه از کلیت کاسته شود، فرض خواهیم کرد که $n_۱ \leq \sqrt{n}$. اگر $n_۱$ اول باشد، نتیجه حاصل است. اگر $n_۱$ اول نباشد، آن‌گاه بنابر لم ۱.۴ عدد اول $p < n_۱$ وجود دارد که $p|n_۱$. پس $p|n$ و $p \leq \sqrt{n}$. □

تمرینهای ۲.۴

۱. درستی قسمتهای ماندهٔ قضیهٔ ۳.۴ را تحقیق کنید.

۲. فرض کنید $a, b, c, d \in \mathbf{Z}^+$. ثابت کنید که (الف) $(a|b \wedge c|d) \Rightarrow ac|bd$؛ (ب) $a|b \Rightarrow ac|bc$؛ و (ج) $ac|bc \Rightarrow a|b$.

۳. اگر p و q اول باشند، ثابت کنید که $p|q$، اگر و تنها اگر $p = q$.

۴. اگر $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$ و $a|bc$، آیا نتیجه می‌شود که $a|b$ یا $a|c$؟

۵. فرض کنید $a, b \in \mathbf{Z}^+$. اگر $b|a$ و $b|(a + ۲)$، ثابت کنید که $b = ۱$ یا $b = ۲$.

۶. اگر $n \in \mathbf{Z}^+$، و n فرد باشد، ثابت کنید که $۸|(n^۲ - ۱)$.

۷. اگر $a, b \in \mathbf{Z}^+$، و هر دو فرد باشند، ثابت کنید که $۲|(a^۲ + b^۲)$ ولی $۴ \nmid (a^۲ + b^۲)$.

۸. هر یک از اعداد زیر در پایهٔ ۱۰ را در پایهٔ ۲، در پایهٔ ۴، و در پایهٔ ۸ بنویسید. (الف) ۱۳۷؛ (ب) ۶۲۴۳؛ (ج) ۱۲۳۴۵.

۹. هر یک از اعداد صحیح زیر (در پایهٔ ۱۰) را در پایهٔ ۲ و در پایهٔ ۱۶ بنویسید.
الف) ۲۲ ب) ۵۲۷ ج) ۱۲۳۴ د) ۶۹۲۳

۱۰. هر یک از اعداد شانزده شانزدهی زیر را به پایهٔ ۲ و به پایهٔ ۱۰ برگردانید.
الف) A۷ ب) ۴C۲ ج) ۱C۲B د) A۲DFE

۱۱. هر یک از اعداد دودویی زیر را به پایهٔ ۱۰ و به پایهٔ ۱۶ برگردانید

الف) ۱۱۰۰۱۱۱۰ ب) ۰۰۱۱۰۰۰۱
ج) ۱۱۱۱۰۰۰۰ د) ۰۱۰۱۰۱۱۱

۱۲. هر یک از اعداد صحیح زیر را به صورت نمایش متمم دو بنویسید. دراینجا نتایج، الگوهای هشت بیتی هستند.

الف) ۱۵ ب) ۱۵− ج) ۱۰۰
د) ۶۵− ه) ۱۲۷ و) ۱۲۸−

۱۳. اگر ماشینی اعداد صحیح را با روش متمم دو ذخیره کند، بزرگترین و کوچکترین عدد صحیحی که می‌تواند ذخیره کند چه هستند به شرطی که الگوهای بیتی (الف) ۴ بیتی؛ (ب) ۸ بیتی؛ (ج) ۱۶ بیتی؛ (د) ۳۲ بیتی؛ (ه) 2^n بیتی، $n \in \mathbf{Z}^+$، را به‌کار برد؟

۱۴. در هر یک از مسائل زیر از الگوهای چهاربیتی برای نمایشهای متمم دوی اعداد صحیح از ۸− تا ۷ استفاده کرده‌ایم. هر مسأله را (در صورت امکان) حلّ کنید و سپس نتایج را به پایهٔ ۱۰ برگردانید و پاسخها را بازبینی نمایید. مراقب هر یک از خطاهای سرریز باشید.

الف) $\left(\begin{array}{r} 0101 \\ +\underline{0001} \end{array}\right)$ ب) $\left(\begin{array}{r} 1101 \\ +\underline{1110} \end{array}\right)$ ج) $\left(\begin{array}{r} 0111 \\ +\underline{1000} \end{array}\right)$
د) $\left(\begin{array}{r} 1101 \\ +\underline{1010} \end{array}\right)$ ه) $\left(\begin{array}{r} 1011 \\ +\underline{0101} \end{array}\right)$ و) $\left(\begin{array}{r} 0101 \\ +\underline{0100} \end{array}\right)$

۱۵. اگر $a, x, y \in \mathbf{Z}$، و $a \neq 0$، ثابت کنید که $ax = ay \Rightarrow x = y$.

۱۶. برای تبدیل یک عدد صحیح مثبت در پایهٔ ۱۰ به پایهٔ b، $2 \leq b \leq 9$، برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید).

۱۷. الگوریتم تقسیم را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد: برای $a, b \in \mathbf{Z}$، $b \neq 0$، مقادیر یکتای $q, r \in \mathbf{Z}$ وجود دارند که $a = qb + r$، $0 \leq r < |b|$. با استفاده از قضیهٔ ۵.۴، درستی این صورت تعمیم یافتهٔ الگوریتم را برای $b < 0$ تحقیق کنید.

۱۸. برای به‌دست‌آوردن q و r در الگوریتم تقسیم تعمیم یافتهٔ تمرین قبل، برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید.)

۱۹. برای $n \in \mathbf{Z}^+$ برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید) که همهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت n را چاپ کند.

۲۰ برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید) که یک عدد صحیح در پایهٔ ۱۰ را به پایهٔ ۱۶ برگرداند.

۲۱. فرض کنید $n \in \mathbf{Z}^+$ با $n = r_k \cdot 10^k + \cdots + r_2 \cdot 10^2 + r_1 \cdot 10 + r_0$ (نمایش عدد n در پایهٔ ۱۰). ثابت کنید که (الف) $2|n$ اگر و تنها اگر $2|r_0$؛ (ب) $4|n$ اگر و تنها اگر $4|(r_1 \cdot 10 + r_0)$؛ و (ج) $8|n$ اگر و تنها اگر $8|(r_2 \cdot 10^2 + r_1 \cdot 10 + r_0)$.

یک قضیهٔ کلی را که این نتایج به‌ذهن القا می‌کنند بیان کنید.

۳.۴ بزرگترین مقسوم‌علیهٔ مشترک: الگوریتم اقلیدسی

در ادامهٔ عمل تقسیم که در بخش ۲.۴ مطرح شد، توجه خود را به مقسوم‌علیه‌های یک جفت عدد صحیح معطوف می‌کنیم.

تعریف ۲.۴ برای $a, b \in \mathbf{Z}$، عدد صحیح c را مقسوم‌علیهٔ مشترک a و b می‌نامند اگر $c|a$ و $c|b$.

مثال ۱۷.۴ مقسوم‌علیه‌های مشترک ۴۲ و ۷۰ عبارت‌اند از ۱، ۲، ۷، و ۱۴. ۱۴ بزرگترین مقسوم‌علیه‌های مشترک آنهاست. □

تعریف ۳.۴ فرض کنید $a, b \in \mathbf{Z}$، که حداقل یکی از دو عدد a و b مخالف صفر است. در این صورت $c \in \mathbf{Z}^+$ را بزرگترین مقسوم‌علیهٔ مشترک a و b (ب.م.م) می‌نامند اگر

الف) $c|a$، $c|b$ (یعنی c مقسوم‌علیه مشترک a و b باشد)، و

ب) برای هر مقسوم‌علیهٔ مشترک dی دو عدد a و b، داشته باشیم $d|c$.

نتیجهٔ مثال ۱۷.۴ در این شرطها صدق می‌کند. امّا این مثال با دو عدد صحیح کوچک سروکار داشت. اگر دو عدد هر یک ۲۰ رقمی باشند چه باید کرد؟ سؤالات زیر را درنظر می‌گیریم.

۱. $a, b \in \mathbf{Z}$ داده شده‌اند، آیا همیشه بزرگترین مقسوم‌علیهٔ مشترک a و b وجود دارد؟ اگر چنین است، چگونه می‌توان چنین عدد صحیحی را یافت؟

۲. یک جفت عدد صحیح، چند بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دارند؟

در بحث مربوط به این سؤالات، توجه خود را بر $a, b \in \mathbf{Z}^+$ متمرکز می‌کنیم.

قضیه ۶.۴ برای هر $a, b \in \mathbf{Z}^+$، عدد یکتای $c \in \mathbf{Z}^+$ وجود دارد که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است.

برهان با $a, b \in \mathbf{Z}^+$، فرض کنید $S = \{as + bt | s, t \in \mathbf{Z}, as + bt > 0\}$. چون $S \neq \emptyset$، بنابر اصل خوشترتیبی، S دارای یک کوچکترین عنصر c است. ادعا می‌کنیم که c بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است.

چون $c \in S$، برای x و yیی متعلق به $\mathbf{Z}$، $c = ax + by$. درنتیجه، اگر $d \in \mathbf{Z}$ و $d|a$ و $d|b$، آن‌گاه بنابر قضیهٔ ۳.۴ (و) $d|(ax + by)$، پس $d|c$.

اگر $c \nmid a$، آن‌گاه بنابر الگوریتم تقسیم $a = qc + r$، با $0 < r < c$. در این صورت $r = a - qc = a - q(ax + by) = (1 - qx)a + (-qy)b$، پس $r \in S$، که متناقض با انتخاب c به عنوان کوچکترین عنصر S است. درنتیجه، $c|a$، و بنابر استدلالی مشابه، $c|b$.

بنابراین، هر دو عدد $a, b \in \mathbf{Z}^+$ دارای یک بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک‌اند. اگر c_1 و c_2 در هر دو شرط تعریف ۳.۴ صدق کنند، آن‌گاه با c_1 به عنوان بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک، و c_2 هم به عنوان بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک، نتیجه می‌دهد که $c_2|c_1$. با تعویض نقشها، می‌بینیم که $c_1|c_2$ و چون $c_1, c_2 \in \mathbf{Z}^+$، پس $c_1 = c_2$. ■

اینک می‌دانیم که برای $a, b \in \mathbf{Z}^+$، ب.م.م وجود دارد و یکتاست. این عدد را با (a, b) نشان می‌دهیم. دراینجا $(a, b) = (b, a)$، و برای $a \in \mathbf{Z}$، $a \neq 0$، $(a, 0) = |a|$. همچنین، برای $a, b \in \mathbf{Z}^+$، $(-a, b) = (a, -b) = (-a, -b) = (a, b)$. سرانجام $(0, 0)$ تعریف نشده و مورد توجه ما هم نیست.

از قضیهٔ ۶.۴ نتیجه می‌گیریم که نه تنها (a, b) وجود دارد بلکه (a, b) کوچکترین عدد صحیح مثبتی است که می‌توانیم به عنوان ترکیبی خطی از a و b بنویسیم. اعداد صحیح a و b را نسبت به هم اول می‌گویند وقتی که $(a, b) = 1$، یعنی وقتی که x و yیی متعلق به $\mathbf{Z}$ وجود داشته باشند که $ax + by = 1$.

مثال ۱۸.۴ چون $14 = (42, 70)$، می‌توانیم x و yیی متعلق به $\mathbf{Z}$ بیابیم که $42x + 70y = 14$، یا $3x + 5y = 1$. از راه تجسس می‌بینیم که $x = 2$، $y = -1$ یک جواب است؛ $1 = 3(2) + 5(-1)$. امّا برای $k \in \mathbf{Z}$، $3(2 - 5k) + 5(-1 + 3k) = 1$، پس $42(2 - 5k) + 70(-1 + 3k) = 14$، و جوابهای x و y یکتا نیستند.

به‌طور کلی، اگر $(a, b) = d$، آن‌گاه $((a/d), (b/d)) = 1$. (درستی این برابری را تحقیق کنید.!) اگر $(a/d)x_0 + (b/d)y_0 = 1$، آن‌گاه برای هر $k \in \mathbf{Z}$،

$$1 = (a/d)(x_0 - (b/d)k) + (b/d)(y_0 + (a/d)k)$$

پس $d = a(x_0 - (b/d)k) + b(y_0 + (a/d)k)$، که تعدادی نامتناهی جواب برای $ax + by = d$ به ما می‌دهد. □

در این مثال و مشاهدات قبلی، وقتی a و b نسبتاً کوچک‌اند، پیدا کردن (a, b) مشکلی ایجاد

نمی‌کند. ولی برای مقادیر دلخواه $a, b \in \mathbf{Z}^+$، چگونه می‌توان (a, b) را یافت؟ برای این منظور، به قضیهٔ زیر که مدیون اقلیدس هستیم رجوع می‌کنیم.

قضیه ۷.۴ (الگوریتم اقلیدس) اگر $a, b \in \mathbf{Z}^+$، الگوریتم تقسیم را به صورت زیر به‌کار می‌بریم:

$$
\begin{array}{ll}
a = q_1 b + r_1, & 0 < r_1 < b \\
b = q_2 r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 = q_3 r_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\
r_i = q_{i+2} r_{i+1} + r_{i+2}, & 0 < r_{i+2} < r_{i+1} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\
r_{k-3} = q_{k-1} r_{k-2} + r_{k-1}, & 0 < r_{k-1} < r_{k-2} \\
r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k, & 0 < r_k < r_{k-1} \\
r_{k-1} = q_{k+1} r_k &
\end{array}
$$

در این صورت r_k، آخرین باقیماندهٔ مخالف صفر، برابر با (a, b) است.

برهان برای تحقیق اینکه $r_k = (a, b)$، شرایط تعریف ۳.۴ را ثابت می‌کنیم.

با اولین فرایند تقسیم، که در بالا ثبت شده است شروع می‌کنیم. اگر $c|a$ و $c|b$، آن‌گاه چون $a = q_1 b + r_1$، نتیجه می‌شود که $c|r_1$. سپس $c|r_1 \Rightarrow c|r_2, c|b$، زیرا $b = q_2 r_1 + r_2$. با ادامهٔ کار در فرایندهای بعدی تقسیم، به‌دست می‌آوریم که $c|r_{k-2}$ و $c|r_{k-1}$. از معادلهٔ ماقبل آخر نتیجه می‌گیریم که $c|r_k$، و این مؤید درستی شرط (ب)ی تعریف ۳.۴ است.

برای اثبات شرط (الف) به ترتیب عکس عمل می‌کنیم. بنابر آخرین معادله، $r_k|r_{k-1}$، و لذا $r_k|r_{k-2}$، زیرا $r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k$. با ادامهٔ این عمل برای معادلات بالاتر، به‌جایی می‌رسیم که $r_k|r_3$ و $r_k|r_2$، پس $r_k|r_1$. در این صورت، $r_1 \Rightarrow r_k|b, r_k|r_2$، و سرانجام $b \Rightarrow r_k|a, r_k|r_1$. بنابراین $r_k = (a, b)$. ■

واژهٔ «الگوریتم» را برای شرح شیوه‌هایی که در قضایای ۵.۴ و ۷.۴ بیان شد به‌کار بردیم. این اصطلاح غالباً در سراسر فصلهای دیگر کتاب نیز تکرار خواهد شد، لذا شاید این فکر خوبی باشد که بررسی کنیم که الگوریتم اشارهٔ ضمنی به چه چیزی دارد. قبل از هر چیز، یک الگوریتم فهرستی از دستورهای دقیقی است که برای حل نوع خاصی مسأله، و نه فقط برای موردی خاص، طرحریزی می‌شود. در قضیهٔ ۵.۴ برای محاسبهٔ خارج‌قسمت و باقیمانده، هنگام تقسیم عدد صحیح a بر عدد صحیح مثبت b، از این مورد استفاده شده است. در اینجا، دو عدد صحیح a و b به عنوان

ورودی‌اند، و الگوریتم، به‌صورت خروجی، خارج‌قسمت و باقیمانده را تولید می‌کند. در قضیهٔ ۷.۴ مسأله تعیین ب.م.م هر دو عدد صحیح مثبت است. لذا این الگوریتم دو عدد صحیح مثبت a و b را به عنوان ورودی دریافت و ب.م.م را به صورت خروجی تولید می‌کند.

به‌طورکلی، انتظار داریم که همهٔ الگوریتمها ورودیی را دریافت و پاسخ(های) لازم را به صورت خروجی به‌دست دهند. همچنین، وقتی مقادیر ورودی را تکرار می‌کنیم الگوریتم باید یک پاسخ را به‌دست دهد. این، وقتی رخ می‌دهد که فهرست دستورها به قسمی باشد که نتایج واسطی که در اجرای هر دستور حاصل می‌شوند یکتا باشند، و تنها به ورودی (آغازی) و به نتایجی که در دستورهای قبلی ممکن حاصل شده‌اند بستگی داشته باشند. سرانجام، الگوریتمها نمی‌توانند به دفعات نامتناهی ادامه یابند. باید بعد از اجرای دستورها به دفعات متناهی خاتمه یابند.

اینک الگوریتم اقلیدس (قضیهٔ ۷.۴) را در مثالهای زیر به‌کار می‌بریم

مثال ۱۹.۴ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک ۲۵۰ و ۱۱۱ را بیابید و نتیجه را به صورت ترکیب خطی از این اعداد صحیح بیان کنید.

$$۲۵۰ = ۲(۱۱۱) + ۲۸, \qquad ۰ < ۲۸ < ۱۱۱$$
$$۱۱۱ = ۳(۲۸) + ۲۷, \qquad ۰ < ۲۷ < ۲۸$$
$$۲۸ = ۱(۲۷) + ۱, \qquad ۰ < ۱ < ۲۷$$
$$۲۷ = ۲۷(۱) + ۰$$

پس ۱ آخرین باقیمانده غیر صفر است. بنابراین $۱ = (۱۱۱, ۲۵۰)$، و ۲۵۰ و ۱۱۱ نسبت به هم اول‌اند. وقتی به صورت قهقرایی از معادلهٔ سوم به سمت بالا عمل می‌کنیم، داریم

$$۱ = ۲۸ - ۱(۲۷) = ۲۸ - ۱[۱۱۱ - ۳(۲۸)] = (-۱)(۱۱۱) + ۴(۲۸) =$$
$$(-۱)(۱۱۱) + ۴[۲۵۰ - ۲(۱۱۱)] = ۴(۲۵۰) - ۹(۱۱۱)$$

که ترکیبی خطی از ۲۵۰ و ۱۱۱ است.

در این عبارت، ۱ به صورت ترکیب خطی از ۲۵۰ و ۱۱۱ یکتا نیست، زیرا به‌ازای هر $k \in \mathbf{Z}$، $۱ = ۲۵۰[۴ - ۱۱۱k] + ۱۱۱[-۹ + ۲۵۰k]$.

همچنین داریم

$$(-۲۵۰, ۱۱۱) = (۲۵۰, -۱۱۱) = (-۲۵۰, -۱۱۱) = (۲۵۰, ۱۱۱) = ۱$$

□

```
Program EuclideanAlgorithm (input,output);
Var
        a,b,c,d,r: integer;
Begin
        Writeln ('We wish to determine the greatest common ');
        Writeln ('divisor of two positive integers a,b.');
        Write ('a=');
        Read (a);
        Write ('b=');
        Read (b);
        r := a Mod b;
        d := b;
        While r > 0 do
                Begin
                        c := d;
                        d := r;
                        r := c Mod d
                End;
        Writeln ('The greatest common divisor of ',a:0,' and ');
        Write (b:0,' is ',d:0)
End.

We wish to determine the greatest common
divisor of two positive integers a,b.
a = 456
b = 624
The greatest common divisor of 456 and
624 is 24

We wish to determine the greatest common
divisor of two positive integers a,b.
a = 116
b = 641
The greatest common divisor of 116 and
641 is 1
```

شکل ۸.۴

مثال ۲۰.۴ با تعیین ب.م.م در مثال ۱۹.۴، اینک از الگوریتم اقلیدس برای نوشتن برنامه‌ای کامپیوتری که به‌ازای هر $a, b \in \mathbf{Z}^+$، (a, b) را خواهد یافت استفاده می‌کنیم. خروجی این برنامه برای یافتن $(456, 624)$ و $(116, 641)$ نشان داده شده است.

برنامهٔ پاسکال در شکل ۸.۴ عمل دوتایی Mod را به‌کار می‌برد، که در آن برای $x, y \in \mathbf{Z}^+$،

$$x \text{ Mod } y = y \text{ بر } x \text{ باقیمانده پس از تقسیم }$$

مثلاً ۷Mod۳ برابر ۱ است و ۱۸Mod۵ برابر ۳ است. (از«باقیمانده‌های حسابی» در فصل ۱۴

به تفصیل بیشتر بحث خواهیم کرد.) □

مثال ۲۱.۴ مربی دانشجویان درکلاسهای برنامه‌ریزی توجه کرده است که به‌طور متوسط می‌تواند برنامهٔ پاسکال هر دانشجو را در ۶ دقیقه تصحیح کند، ولی تصحیح برنامه‌ای که به زبان APL نوشته شده است ۱۰ دقیقه وقت می‌گیرد. اگر او ۱۰۴ دقیقه پیوسته کار کند و هیچ وقتی را تلف نکند چند برنامه را می‌تواند در هر زبانی تصحیح کند؟

در اینجا می‌خواهیم اعداد صحیح $x, y \geq 0$ را جستجو کنیم که برای آنها $6x + 10y = 104$ یا $3x + 5y = 52$. چون $1 = (3, 5)$ می‌توانیم بنویسیم $1 = 3(2) + 5(-1)$، پس $k \in \mathbf{Z}$ و $52 = 3(104) + 5(-52) = 3(104 - 5k) + 5(-52 + 3k)$. برای به‌دست آوردن $0 \leq x = 104 - 5k$ و $0 \leq y = -52 + 3k$ باید داشته باشیم $(52/3) \leq k \leq (104/5)$. پس $k = 18, 19, 20$ و سه جواب ممکن وجود دارند:

الف) $y = 2\ ,\ x = 14\ :\ (k = 18)$

ب) $y = 5\ ,\ x = 9\ :\ (k = 19)$

ج) $y = 8\ ,\ x = 4\ :\ (k = 20)$ □

معادلهٔ مثال ۲۱.۴ مثالی از معادلهٔ دیوفانتی است: معادله‌ای خطی که دارای جوابهای صحیح است. این نوع معادله را ابتدا جبردان یونانی، دیوفانتوس[1]، که در قرن سوم میلادی زندگی می‌کرد، بررسی کرده است.

با حلّ یک چنین معادله‌ای، تحقیق می‌کنیم که چه موقع معادلهٔ دیوفانتی دارای جواب است. برهان را به خواننده واگذار می‌کنیم.

قضیه ۸.۴ اگر $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$، معادلهٔ دیوفانتی $ax + by = c$ دارای جواب صحیح $x = x_0$، $y = y_0$ است اگر و تنها اگر $(a, b) | c$.

به این بخش با مفهومی که به بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک وابسته است خاتمه می‌دهیم.

تعریف ۴.۴ برای $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$، c را مضرب مشترک a و b می‌نامند اگر c مضربی از a و مضربی از b باشد. به‌علاوه، c کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) دو عدد a و b است اگر کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که مضربهای مشترک a و b هستند. c را به صورت $[a, b]$ نمایش می‌دهند.

قضیه ۹.۴ فرض کنید $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$ با $c = [a, b]$. اگر d مضرب مشترک a و b باشد، آن‌گاه $c | d$.

---
1. Diophantus

برهان اگر چنین نباشد، بنابر الگوریتم تقسیم $d = qc + r$، $0 < r < c$. چون $c = [a, b]$، نتیجه می‌شود که برای mی متعلق به $\mathbf{Z}^+$، $c = ma$. همچنین برای nی متعلق به $\mathbf{Z}^+$، $d = na$، زیرا d مضربی از a است. بنابراین، $na = qma + r \Rightarrow (n - qm)a = r > 0$، و r مضربی از a است. به روشی مشابه می‌بینیم که r مضربی از b هم هست، پس r مضرب مشترک a و b است. امّا، با $0 < r < c$، این مطلب متناقض با این ادعاست که c کوچکترین مضرب مشترک است. بنابراین، $c|d$. ■

آخرین قضیهٔ این بخش، ب.م.م و ک.م.م را به هم پیوند می‌دهد. اثبات قضیه را به خواننده واگذار می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۴ برای $a, b \in \mathbf{Z}^+$، $ab = [a, b](a, b)$.

تمرینهای ۳.۴

۱. برای هر جفت عدد $a, b \in \mathbf{Z}^+$، (a, b) را تعیین، و آن را به صورت ترکیب خطی a و b بیان کنید

الف) ۲۳۱، ۱۸۲۰ ب) ۱۳۶۹، ۲۵۹۷

ج) ۲۶۸۹، ۴۰۰۱ د) ۷۹۸۲، ۷۹۸۳

۲. برای هر جفت a و b در تمرین ۱، $[a, b]$ را بیابید.

۳. برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $(n, n + 1)$ چقدر است؟ $[n, (n + 1)]$ چقدر است؟

۴. برای $a, b \in \mathbf{Z}^+$، $s, t \in \mathbf{Z}$ دربارهٔ (a, b) چه می‌توانیم بگوییم، اگر

الف) $as + bt = 2$؟ ب) $as + bt = 3$؟

ج) $as + bt = 4$؟ د) $as + bt = 6$؟

۵. برای $a, b \in \mathbf{Z}^+$ و $d = (a, b)$، ثابت کنید که $(a/d, b/d) = 1$.

۶. برای $a, b, n \in \mathbf{Z}^+$، ثابت کنید که $(na, nb) = n(a, b)$.

۷. برای $a, b, c, d \in \mathbf{Z}^+$، ثابت کنید که اگر $d = a + bc$، آن‌گاه $(b, d) = (a, b)$.

۸. فرض کنید $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$ و $(a, b) = 1$. اگر $a|c$ و $b|c$، ثابت کنید که $ab|c$. اگر $(a, b) \neq 1$، آیا نتیجه باز هم درست است؟

۹. آن مقادیری از $c \in \mathbf{Z}^+$، $10 < c < 20$، را تعیین کنید که برای آنها معادلهٔ دیوفانتی $84x + 990y = c$ بی‌جواب باشد. برای بقیهٔ مقادیر c، جوابها را تعیین کنید.

۱۰. اگر a و b نسبت به هم اوّل باشند، ثابت کنید که $(a - b, a + b)$ برابر است با ۱ یا ۲.

۱۱. فرض کنید $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$ و $(a, b) = 1$. اگر $a|bc$، ثابت کنید که $a|c$.

۱۲. رئیس اداره‌ای معادل ۲۴۹ دلار اسباب‌بازی برای بچه‌های کارکنانش می‌خرد. برای هر دختر عروسکی به ارزش ۳٫۳۰ دلار؛ برای هر پسر یک دسته سرباز به ارزش ۲٫۹۰ دلار. چند اسباب‌بازی از هر نوع خریده است؟

۱۳. قضیهٔ ۸.۴ را ثابت کنید.

۱۴. قضیهٔ ۱۰.۴ را ثابت کنید.

۴.۴ قضیهٔ اساسی حساب

در این بخش با تعمیم لم ۱.۴، نشان می‌دهیم که برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $n > ۱$، یا n اوّل است یا می‌توان n را به صورت حاصلضرب اعداد اول نوشت که این نمایش، صرف‌نظر از ترتیب، یکتاست. این قضیه را، که به قضیهٔ اساسی حساب معروف است، می‌توان به صورتی هم‌ارز در مقالهٔ IX اصول اقلیدس یافت.

اثبات لمهای زیر مورد نیاز است.

لم ۲.۴ اگر $a, b \in \mathbf{Z}^+$ و p اول باشد، آن‌گاه

$$p|ab \Rightarrow p|a \text{ یا } p|b$$

برهان اگر $p|a$، آن‌گاه کار تمام است. در غیر این صورت چون p اول است، نتیجه می‌شود که $(p, a) = ۱$ و اعداد صحیح x و y با $px + ay = ۱$ وجود دارند. در این صورت $b = p(bx) + (ab)y$ که در آن $p|p$ و $p|ab$. پس بنابر قضیهٔ ۳.۴ (ه)، $p|b$. ■

لم ۳.۴ فرض کنید $a_i \in \mathbf{Z}^+$، $۱ \leq i \leq n$. اگر p اول باشد و $p|a_۱a_۲\ldots a_n$، آن‌گاه برای مقداری از i، $۱ \leq i \leq n$، $p|a_i$.

برهان اثبات لم را به عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم. ■

مثال ۲۲.۴ در مثال ۲۳.۲، با روش برهان خلف نشان دادیم $\sqrt{۲}$ گنگ است. در اینجا این نتیجهٔ قبلی را تعمیم می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر pی اول، $\sqrt{p}$ عددی گنگ است.

اگر چنین نباشد، می‌توانیم بنویسیم $\sqrt{p} = a/b$، که $a, b \in \mathbf{Z}^+$ و $(a, b) = ۱$. در این صورت $\sqrt{p} = a/b \Rightarrow pb^۲ = a^۲ \Rightarrow p|a^۲ \Rightarrow p|a$ (چرا؟). همچنین، برای مقداری از $a_۱$ متعلق به $\mathbf{Z}$، $p|a \Rightarrow a = pa_۱$، پس $pb^۲ = a^۲ = p^۲a_۱^۲$ و $b^۲ = pa_۱^۲$. امّا در این صورت $p|b^۲ \Rightarrow p|b$، و $(a, b) \geq p$ که با $(a, b) = ۱$ متناقض است. □

اینک به قضیهٔ اصلی این بخش می‌پردازیم

قضیه ۱۱.۴ هر عدد صحیح $n > 1$ را می‌توان به صورتی یکتا، صرف‌نظر از ترتیب، به شکل حاصلضرب اعداد اول نوشت. (در اینجا هر عدد اول، حاصلضربی که یک عامل دارد درنظر گرفته می‌شود.)

برهان برهان متشکل از دو قسمت است: اولین قسمت از وجود این تجزیه و قسمت دوم از یکتابودن آن بحث می‌کند.

اگر قضیه درست نباشد، فرض کنید $m > 1$ کوچکترین عدد صحیحی است که به صورت حاصلضرب اعداد اول قابل بیان نیست. چون m اول نیست، می‌توانم بنویسیم $m = m_1 m_2$ که برای آن $1 < m_1 < m$ ،$1 < m_2 < m$. امّا، در این صورت m_1 و m_2 را می‌توان به صورت حاصلضرب اعداد اول نوشت، زیرا کوچکتر از m هستند. درنتیجه، با $m = m_1 m_2$ می‌توان برای m یک تجزیه از اعداد اول را به‌دست آورد.

برای عدد صحیح ۲، یک تجزیه به اعداد اول یکتا داریم و با قبول یکتایی‌نمایش برای ۳، ۴، ۵، ...، $n - 1$ فرض می‌کنیم که

$$n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k} = q_1^{t_1} q_2^{t_2} \cdots q_r^{t_r}$$

که در آن هر p_i، $1 \leq i \leq k$، و هر q_j، $1 \leq j \leq r$، عددی اوّل است. همچنین $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ و $q_1 < q_2 < \cdots < q_r$، و برای $1 \leq i \leq k$، $s_i > 0$ و برای $1 \leq j \leq r$، $t_j > 0$.

چون $p_1 | n$، داریم $p_1 | q_1^{t_1} q_2^{t_2} \cdots q_r^{t_r}$. بنابر لم ۳.۴، برای مقداری از j، $1 \leq j \leq r$، $p_1 | q_j$. با اعداد اول p_1 و q_j داریم $p_1 = q_j$. در واقع $j = 1$، در غیر این صورت $q_1 | n \Rightarrow q_1 = p_e$ برای مقداری از e، $1 < e \leq k$ و $p_1 < p_e = q_1 < q_j = p_1$. با $p_1 = q_1$،

$$n_1 = n/p_1 = p_1^{s_1 - 1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k} = q_1^{t_1 - 1} q_2^{t_2} \cdots q_r^{t_r}$$

چون، $n_1 < n$، بنابر فرض استقرا (قضیهٔ ۲.۴) نتیجه می‌شود که $k = r$، $p_i = q_i$ برای $1 \leq i \leq k$، $s_1 - 1 = t_1 - 1$ (پس $s_1 = t_1$)، و $s_i = t_i$ برای $2 \leq i \leq k$. بنابراین، تجزیه به اعداد اول عدد n، یکتاست. ■

اینک این قضیه را در دو مثال زیر به‌کار می‌بریم.

مثال ۲۳.۴ برای $n \in \mathbf{Z}^+$، می‌خواهیم تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n را حساب کنیم. مثلاً، عدد ۲ دارای دو مقسوم‌علیه مثبت است: ۱ و خود ۲. همچنین، ۱ و ۳ تنها مقسوم‌علیه‌های مثبت ۳ هستند. در مورد ۴، سه مقسوم‌علیه مثبت ۱، ۲، و ۴ را به‌دست می‌آوریم.

برای تعیین نتیجه به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، قضیهٔ ۱۱.۴ را به‌کار می‌بریم و می‌نویسیم $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k}$، که در آن برای $1 \leq i \leq k$، p_i عددی اول است و $e_i > 0$. اگر $m|n$، آن‌گاه $m = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \ldots p_k^{f_k}$ که در آن برای $1 \leq i \leq k$، $0 \leq f_i \leq e_i$. لذا بنابر اصل ضرب، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n برابر است با

$$(e_1 + 1)(e_2 + 1) \ldots (e_k + 1)$$

مثلاً، چون $2^6 3^2 5^4 7 = 25200000$، پس دارای

$$(6 + 1)(2 + 1)(4 + 1)(1 + 1) = (7)(3)(5)(2) = 210$$

مقسوم‌علیه مثبت است. □

مثال ۲۴.۴ اگر $m, n \in \mathbf{Z}^+$، فرض کنید $m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_t^{e_t}$ و $n = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \ldots p_t^{f_t}$ که هر p_i اول است و $0 \leq e_i$ و $0 \leq f_i$ برای $1 \leq i \leq t$. در این صورت اگر $a_i = \min\{e_i, f_i\}$ و $b_i = \max\{e_i, f_i\}$، $1 \leq i \leq t$، داریم

$$(m, n) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t} = \prod_{i=1}^{t} p_i^{a_i}$$

و

$$[m, n] = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots p_t^{b_t} = \prod_{i=1}^{t} p_i^{b_i}$$

مثلاً، فرض کنید $m = 491891400 = 2^3 3^3 5^2 7^2 11^1 13^2$ و

$$n = 1138845708 = 2^2 3^2 7^1 11^2 13^3 17^1$$

در این صورت با $p_1 = 2$، $p_2 = 3$، $p_3 = 5$، $p_4 = 7$، $p_5 = 11$، $p_6 = 13$ و $p_7 = 17$ به‌دست می‌آوریم که $a_1 = 2$، $a_2 = 2$، $a_3 = 0$ (نمای ۵ در تجزیهٔ n برابر ۰ است، زیرا ۵ در تجزیه به عاملهای اول ظاهر نشده است.)، $a_4 = 1$، $a_5 = 1$، $a_6 = 2$ و $a_7 = 0$، پس

$$(m, n) = 2^2 3^2 5^0 7^1 11^1 13^2 17^0 = 468468$$

همچنین داریم $[m, n] = 2^3 3^3 5^2 7^2 11^2 13^3 17^1 = 1195787993400$. □

تمرینهای ۴.۴

۱. هر یک از اعداد زیر را به صورت حاصلضرب اعداد اوّل، یعنی

$$p_۱^{n_۱} p_۲^{n_۲} \dots p_k^{n_k}, \ ۰ < n_i, \ ۱ \leq i \leq k, \ p_۱ < p_۲ < \dots < p_k$$

بنویسید.

الف) ۱۴۸۵۰۰ ب) ۷۱۱۴۸۰۰ ج) ۷۸۸۲۸۷۵

۲. ب.م.م و ک.م.م هر جفت از اعداد تمرین ۱ را تعیین کنید.

۳. با تعمیم نتایج مثال ۲۴.۴، ب.م.م و ک.م.م سه عدد تمرین ۱ را بیابید.

۴. لم ۳.۴ را ثابت کنید.

۵. الف) ثابت کنید که $\log_{۱۰} ۲$ گنگ است.

ب) برای هر عدد اول p، ثابت کنید که $\log_{۱۰} p$ گنگ است.

۶. تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت هر یک از اعداد صحیح تمرین ۱ را بیابید.

۷. برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، ثابت کنید عدد n مربع کامل است (یعنی برای مقداری از k متعلق به $\mathbf{Z}^+$، داریم $n = k^۲$) اگر و تنها اگر دارای تعداد فردی مقسوم‌علیه مثبت باشد.

۸. برای یافتن تجزیهٔ یک عدد صحیح $n > ۱$ به اعداد اول، برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید.)

۹. کوچکترین عدد صحیح مثبت n را بیابید که برای آن حاصلضرب $۱۲۶۰ \times n$ مکعب کامل باشد.

۱۰. در مثلث ABC طول ضلع BC برابر ۲۹۳ است. اگر طول ضلع AB مربع کامل، و طول ضلع AC برابر با توانی از ۲، و طول ضلع AC دو برابر طول ضلع AB باشد، آنگاه محیط مثلث را تعیین کنید.

۵.۴ خلاصه و مرور تاریخی

به گفتهٔ ریاضیدان پروسی، لئوپولد کرونکر (۱۸۲۳ـ۱۸۹۱)، «خداوند اعداد صحیح را آفرید، مابقی کار آدمی است . . . . همهٔ نتایج ژرفترین پژوهشهای ریاضی باید سرانجام در قالب ساده‌ای از ویژگیهای اعداد صحیح قابل بیان باشند.» در چارچوبِ این گفته، در این فصل خواهیم دید که آدمی چگونه کار قادر متعال را در این ۲۴ سدهٔ اخیر بسط داده است.

با شروع از سدهٔ چهارم قبل از میلاد، در اصول اقلیدس نه تنها به هندسهٔ دبیرستانی بلکه به مفاهیم بنیادی نظریهٔ اعداد نیز برمی‌خوریم. قضایای ۱ و ۲ مقالهٔ VII اقلیدس شامل مثالی از الگوریتم تعیین بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح مثبت با استفاده از تکنیک کارای حل این مسالهٔ مشخص با تعدادی متناهی از مراحل است. (اصطلاح «الگوریتم» مثل نیاکانش «الگوریسم»

برای اقلیدس ناشناس بوده است. در واقع این اصطلاح تا اواخر دههٔ ۱۹۵۰، تا وقتی انقلاب کامپیوتری جامعه را تحت تأثیر قرار نداده بود، وارد فرهنگ زبان اکثر مردم نشده بود. این واژه از نام نویسندهٔ معروف متون اسلامی ابوجعفر محمدبن موسی الخوارزمی (حدود ۷۸۰ـ۸۵۰ میلادی مطابق ۲۳۵ـ۳۰۵ هجری قمری) گرفته شده است. تحریف قسمت آخر این نام، الخوارزمی، که به معنای «مردمی از شهر خوارزم» است اصطلاح «الگوریسم» را به وجود آورده است.)

یک سدهٔ بعد از اقلیدس، کمی از نظریهٔ اعداد را در اثر اراتستن می‌یابیم. امّا پنج سدهٔ بعد بود که نخستین پیشبردهای جدید مهم در زمینهٔ نظریهٔ اعداد به‌دست دیوفانتوس انجام شد. در کتاب حساب او، جوابهای صحیح معادله‌های خطی (و درجهٔ بالاتر) وی همچون مشعل فروزان ریاضی بر تارک نظریهٔ اعداد می‌درخشید تا اینکه ریاضیدان فرانسوی، پییردوفرما (۱۶۰۱ـ۱۶۶۵) پا به صحنه گذاشت.

برای کسب اطلاع بیشتر دربارهٔ این ریاضیدانان و دیگرانی که در نظریهٔ اعداد کار کرده‌اند به دیکسن[1] [۲] رجوع کنید. فصل ۵ کتاب نیون[2] و تسوکرمن[3] [۸] به جوابهای معادله‌های دیوفانتی و کاربردهای آنها می‌پردازد. مقاله‌های مرجع [۷] گسترشهای جالب معاصر در زمینهٔ نظریهٔ اعداد را بر می‌شمارد.

جوزپه پئانو[4] (۱۸۵۸ـ۱۹۳۲) در اثر خود، فرمولر ریاضی*، مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی را برمبنای سه اصطلاح تعریف نشدهٔ: صفر، عدد، و تالی تنظیم کرده است. فرمولبندی او به صورت زیر است:

الف) صفر یک عدد است.

ب) برای هر عدد طبیعی n، تالی‌اش یک عدد است.

ج) صفر تالی هیچ عددی نیست.

د) اگر دو عدد m و n یک تالی داشته باشند، آنگاه $m = n$.

ه) اگر T مجموعه‌ای از اعداد باشد که برای آن $0 \in T$، و هر وقت n در T است تالی n در T باشد، آنگاه T مجموعهٔ تمام اعداد صحیح نامنفی است.

در این اصلهای موضوع، ملاحظه می‌شود که مفهوم ترتیب (تالی) و تکنیکی که به استقرای ریاضی موسوم است وابستگی تنگاتنگی با مفهوم عدد (یعنی عدد صحیح نامنفی) دارد.

اولین اروپایی که اصل استقرا را در استدلالهای ریاضی به‌کار برده است، دانشمند ونیزی فرانچسکو ماوروکیلوس (۱۴۹۱ـ۱۵۷۵) بوده است که کتاب حساب او در ۱۵۷۵ منتشر شد، و شامل چنین کاربردی است. در قرن بعد، پییر دوفرما در اثرش که شامل «روش نزول نامتناهی» است این تکنیک را بهبود بخشید. بلز پاسکال (در حدود ۱۶۵۳) در اثبات قضایای ترکیبیاتی نظیر $0 \leq k \leq n-1$، $C(n,k)/C(n,k+1) = (k+1)/(n-k)$، استقرا را به کاربرد و از این تکنیک به عنوان کار ماوروکیلوس نام برد. امّا اصطلاح فعلی «استقرای ریاضی» تا اوایل سدهٔ

1. L. Dickson 2. I. Niven 3. H. Zuckerman 4. Giuseppe Peano

* Formulario Mathematico

نوزدهم، که در کار آگاستس دمورگن (۱۸۰۶ـ۱۸۷۱) ظاهر شد، به‌کار نرفت. (بررسی جالبی دربارهٔ این مطلب را می‌توان در مقالهٔ بوسی[1] [۱] (به‌ویژه در فصل ۲) یافت.) در کتاب درسی ب.ک. یوس [۱۰] کاربردهای بسیار متنوّع اصل استقرای ریاضی در جبر، هندسه، و مثلثات نشان داده شده‌است. دربارهٔ ارتباط بیشتر این نحوهٔ برهان با مسائل برنامه‌ریزی و بسط الگوریتمها، متن و مسائل فراوانی در کتاب درسی م.واند [۹] آمده است.

مطالب بیشتر دربارهٔ نظریهٔ اعداد را می‌توان در کتابهای درسی اثر هاردی و رایت [۳]، لووک[2] [۵]، [۶] و نیون و تسوکرمن [۸] یافت. در سطحی همانند سطح این فصل، فصل ۳ کتاب لارنی[3] [۴] مقدمهٔ دلچسبی از این مطالب را عرضه می‌کند.

مراجع

1. Bussey, W. H. "Origins of Mathematical Induction." *American Mathematical Monthly* 24 (1917): pp. 199–207.
2. Dickson, L. *History of the Theory of Numbers*. Washington, D.C.: Carnegie Institution of Washington, 1919. Reprinted by Chelsea, in New York, in 1950.
3. Hardy, G. H., and Wright, E. M. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed. Oxford, England: Clarendon Press, 1960.
4. Larney, Violet Hachmeister. *Abstract Algebra: A First Course*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1975.
5. LeVeque, William J. *Elementary Theory of Numbers*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962.
6. LeVeque, William J. *Topics in Number Theory*, Vols. I and II. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1956.
7. LeVeque, William J., ed. *Studies in Number Theory*. MAA Studies in Mathematics, Vol. 6. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1969. Published by the Mathematical Association of America.
8. Niven, Ivan, and Zuckerman, Herbert S. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 3rd ed. New York: Wiley, 1972.
9. Wand, Mitchell. *Induction, Recursion, and Programming*. New York: Elsevier North Holland, 1980.
10. Youse, Bevan K. *Mathematical Induction*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964.

تمرینهای گوناگون

۱. فرض کنید a و d اعداد صحیح ثابتی باشند. یک فرمول مجموعیابی برای $n \in \mathbf{Z}^+$، $a + (a+d) + (a+۲d) + \cdots + (a+(n-۱)d)$ تعیین کنید. درستی نتیجه را به وسیلهٔ

1. W. H. Bussey 2. W. J. Le Veque 3. V. Larney

استقرای ریاضی تحقیق کنید.

۲. برای $n \in \mathbf{Z}^+$، هر یک از استقراهای ریاضی زیر را ثابت کنید.

الف) $5|(n^5 - n)$ **ب)** $6|(n^3 + 5n)$

۳. فرض کنید $S(n)$ گزارهٔ: برای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{Z}^+$، $n^2 + n + 41$ عددی اول است، باشد.

الف) تحقیق کنید که $S(n)$ برای همهٔ مقادیر $1 \leq n \leq 9$ درست است.

ب) آیا درستی $S(k)$ نتیجه می‌دهد که $S(k+1)$ به‌ازای هر $k \in \mathbf{Z}^+$ درست است؟

۴. برای $n \in \mathbf{Z}^+$، مجموع s_n را به وسیلهٔ فرمول

$$s_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{(n-1)}{n!} + \frac{n}{(n+1)!}$$

تعریف می‌کنیم.

الف) تحقیق کنید که $s_1 = \frac{1}{2}$، $s_2 = \frac{5}{6}$ و $s_3 = \frac{23}{24}$.

ب) s_4، s_5 و s_6 را حساب کنید.

ج) بر پایهٔ نتایج قسمتهای (الف) و (ب)، فرمولی برای مجموع جملات s_n حدس بزنید.

د) حدس قسمت (ج) را برای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{Z}^+$ از راه اصل استقرای متناهی تحقیق کنید.

۵. برای $n \in \mathbf{Z}^+$، استقرای ریاضی را برای اثبات برابری

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

به‌کار برید.

۶. نشان دهید که برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} i^2 = (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{n} i$$

۷. برای هر $n \in \mathbf{Z}$، $n \geq 0$، ثابت کنید که

الف) $1 + 2^{2n+1}$ بر ۳ تقسیمپذیر است.

ب) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ بر ۹ تقسیمپذیر است.

ج) $\frac{n^7}{7} + \frac{n^3}{3} + \frac{11n}{21}$ عددی صحیح است.

۸. تحقیق کنید که برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \cdots + \sin(2n-1)\theta = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}$$

۹. اگر $n \in \mathbf{Z}^+$ و $n \geq ۲$، ثابت کنید که $۲^n < \binom{۲n}{n} < ۴^n$.

۱۰. اگر $n \in \mathbf{Z}^+$، ثابت کنید که ۵۷ عدد $۷^{n+۲} + ۸^{۲n+۱}$ را می‌شمارد.

۱۱. برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ نشان دهید که

الف) اگر $n \geq ۶۴$، آن‌گاه n را می‌توان به صورت مجموع ۵ها و / یا ۱۷ها نوشت.

ب) اگر $n \geq ۱۰۸$، آن‌گاه n را می‌توان به صورت مجموع ۱۰ها و / یا ۱۳ها نوشت.

۱۲. اگر n بیت (بدون صفرهای پیشرو) برای نوشتن عدد صحیح m در پایهٔ ۲ لازم باشد، نشان دهید که $n \geq \log_۲(m+۱)$.

۱۳. $r \in \mathbf{Z}^+$ داده شده است. می‌نویسیم

$$r = r_۰ + r_۱ \cdot ۱۰ + r_۲ \cdot ۱۰^۲ + \cdots + r_n \cdot ۱۰^n$$

که در آن $۰ \leq r_i \leq ۹$، به‌ازای $۱ \leq i \leq n-۱$، و $۰ < r_n \leq ۹$.

الف) ثابت کنید که $۹|r$ اگر و تنها اگر $۹|(r_n + r_{n-۱} + \cdots + r_۲ + r_۱ + r_۰)$.

ب) ثابت کنید که $۳|r$ اگر و تنها اگر $۳|(r_n + r_{n-۱} + \cdots + r_۲ + r_۱ + r_۰)$.

ج) اگر $t = ۱۳۷۴۸۶\underline{x}۲۲۵$، که در آن x یک تک رقم است، مقدار (مقدارهای) x را به قسمی تعیین کنید که $۳|t$. برای چه مقادیر x عدد t بر ۹ تقسیم‌پذیر است؟

۱۴. آموزگاری ۶٫۲۰ دلار برای جایزه‌های یک مسابقه خرج می‌کند. اگر بهای یک نوع جایزه ۰٫۵۰ دلار و بهای نوع دیگر جایزه ۰٫۲۰ دلار باشد چند جایزه از هر نوع می‌تواند بخرد؟

۱۵. **الف)** چند عدد صحیح مثبت را می‌توانیم به صورت حاصلضرب نه عدد اوّل بیان کنیم به‌طوری که عددهای اول از بین $\{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱\}$ انتخاب شوند؟ (تکرار مجاز بوده و ترتیب مهم نیست.)

ب) چند عدد صحیح مثبت در قسمت (الف) دارای حداقل یک مورد از هر یک از پنج عدد اول است؟

ج) چند نتیجهٔ قسمت (الف) بر ۴ تقسیم‌پذیرند؟ چند نتیجهٔ قسمت (ب) بر ۴ تقسیم‌پذیرند؟

۱۶. فرض‌کنید $a, b, c, d, m, n, s, t \in \mathbf{Z}^+$ با $ad - bc = ۱$، $s = am + bn$، و $t = cm + dn$.

الف) m و n را برحسب s و t حل کنید.

ب) ثابت کنید که $(s, t) = (m, n)$.

۱۷. **الف)** ده دانشجو وارد رخت‌کنی می‌شوند که دارای ۱۰ قفسهٔ جالباسی است. اولین دانشجو تمام قفسه‌ها را باز می‌کند. دومین دانشجو وضع هر قفسه را (از بسته به باز و برعکس) عوض می‌کند و این تعویض را از قفسهٔ دوم شروع می‌کند. آن‌گاه سومین دانشجو، با شروع از سومین قفسه، وضع یک قفسه از هر سه قفسه را عوض می‌کند. به‌طور کلی، برای $۱ < k \leq ۱۰$، kامین دانشجو وضع هر kامین قفسه را، با شروع از قفسهٔ kام تغییر می‌دهد. بعد از اینکه دهمین دانشجو از اطاق رخت‌کن خارج می‌شود، کدام قفسه‌ها بازند؟

ب) اگر عدد $n \in \mathbf{Z}^+$، $n \geq ۲$ به جای ۱۰ قرار بگیرد به قسمت (الف) پاسخ دهید.

۵

رابطه‌ها و تابعها

در این فصل نظریهٔ مجموعه‌های مذکور در فصل ۳ را برای اینکه شامل مفاهیم رابطه و تابع شود تعمیم می‌دهیم. جبر، مثلثات و حساب دیفرانسیل و انتگرال همگی با تابعها سر و کار دارند. اما، در اینجا تابعها را از دیدگاه نظریهٔ مجموعه‌ها که تابعهای متناهی را شامل می‌شود مطالعه و مفاهیم جدید شمارش را در این مطالعه معرفی می‌کنیم. به‌علاوه مفهوم تابع پیچیدگی و نقش آن را در مطالعهٔ تحلیل الگوریتمها نیز بررسی خواهیم کرد.

ما راهی را اختیار می‌کنیم که در آن، پاسخ شش مسألهٔ زیر را (که باهم ارتباطی نزدیک دارند) بتوانیم بیابیم.

۱. وزارت دفاع هفت قرارداد مختلف مربوط به طرح ایمنی مهمی را در دست دارد. چهار شرکت می‌توانند قسمتهای جداگانه‌ای را که در هر قرارداد خواسته شده تامین کنند، و برای رعایت همهٔ مفاد قرارداد تا حد ممکن، بهتر است که هر چهار شرکت روی هر قسمت باهم کار کنند. به چند راه می‌توان این قراردادها را بست به‌قسمی که هر شرکت قراردادی داشته باشد؟

۲. چند دنبالهٔ هفت‌رقمی از چهارتایی (۰، ۱، ۲، ۳) حداقل دارای یک مورد از هریک از ارقام ۰، ۱، ۲، و ۳ است؟

۳. یک ماتریس $m \times n$ صفرـیک، ماتریسی مثل A است که m سطر و n ستون دارد، به‌قسمی که در سطر i، $1 \le i \le m$، و ستون j، $1 \le j \le n$، درایهٔ a_{ij} یا ۰ است و یا ۱. چند ماتریس صفرـیک 4×7 در هر سطر دقیقاً یک ۱ و در هر ستون حداقل یک ۱ دارند؟ (ماتریس صفرـیک، ساختاری داده‌ای است که در کامپیوتر به آن برمی‌خوریم. در فصول بعد دربارهٔ این

موضوع بیشتر صحبت می‌کنیم.)

۴. ۷ نفر (که باهم رابطه‌ای ندارند) وارد سرسرای ساختمانی می‌شوند که چهار طبقه دارد، و سوار آسانسور می‌شوند. مطلوب است احتمال آنکه آسانسور مجبور باشد برای پیاده شدن افراد در هر طبقه توقف کند؟

۵. برای اعداد صحیح مثبت m و n با شرط $m < n$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{n-k}(n-k)^m = 0$$

۶. به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n

$$n! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{n-k}(n-k)^n$$

آیا ارتباط بین چهار مسألهٔ اول را تشخیص می‌دهید؟ سه مسألهٔ اول یک مسأله با بیانهای مختلف‌اند. اما، ارتباط بین دو مسألهٔ آخر یا وجود ارتباطی بین آنها و چهار مسألهٔ اول واضح نیست. ولی این اتحادها با استفاده از همان تکنیکهای شمارشی که برای حل چهار مسألهٔ اول به‌کار برده می‌شوند ثابت خواهند شد.

۱.۵ حاصلضربهای دکارتی و رابطه‌ها

تعریف ۱.۵ برای مجموعه‌های $A, B \subseteq \mathscr{U}$، حاصلضرب دکارتی یا خارجی A و B که با $A \times B$ نشان داده می‌شود برابر است با $\{(a,b) | a \in A, b \in B\}$.

عنصرهای $A \times B$ را جفتهای مرتب می‌گویند. برای $(a,b),(c,d) \in A \times B$، برابری $(a,b) = (c,d)$ برقرار است، اگر و تنها اگر $a = c$ و $b = d$. (متأسفانه، نمادی که برای نمایش یک زوج مرتب به‌کار می‌رود همان نماد بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح است. منظور ما از محتوای کلام معلوم می‌شود.)

اگر A و B متناهی باشند از اصل ضرب نتیجه می‌شود که $|A \times B| = |A|.|B|$. گرچه عموماً $A \times B = B \times A$ برقرار نیست، ولی داریم $|A \times B| = |B \times A|$. همچنین اگرچه $A, B \subseteq \mathscr{U}$، ولی برقراری رابطهٔ $A \times B \subseteq \mathscr{U}$ الزامی نیست، بنابراین $\mathscr{U}$ الزاماً تحت این عمل بسته نیست.

می‌توانیم تعریف حاصلضرب دکارتی، یا خارجی را برای بیش از دو مجموعه تعمیم دهیم. اگر $n \in \mathbf{Z}^+$، $n \geq ۳$، و $A_۱, A_۲, \cdots, A_n \subseteq \mathscr{U}$، آن‌گاه حاصلضرب ($n$تایی) $A_۱$، $A_۲$، $\cdots$، A_n را با $A_۱ \times A_۲ \times \cdots \times A_n$ نشان می‌دهند که برابر است با *

$$\{(a_۱, a_۲, \cdots, a_n) | a_i \in A_i, ۱ \leq i \leq n\}$$

عناصر $A_۱ \times A_۲ \times \cdots \times A_n$ را nتایی مرتب می‌نامند. نظیر مورد جفتها، اگر

$$(a_۱, a_۲, \cdots, a_n), (b_۱, b_۲, \cdots, b_n) \in A_۱ \times A_۲ \times \cdots \times A_n$$

آن‌گاه، $(a_۱, a_۲, \cdots, a_n) = (b_۱, b_۲, \cdots, b_n)$ اگر و تنها اگر به‌ازای همهٔ مقادیر $۱ \leq i \leq n$، $a_i = b_i$.

مثال ۱.۵ فرض کنید $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۷\}$، $A = \{۲, ۳, ۴\}$، $B = \{۴, ۵\}$. پس

الف) $A \times B = \{(۲, ۴), (۲, ۵), (۳, ۴), (۳, ۵), (۴, ۴), (۴, ۵)\}$

ب) $B \times A = \{(۴, ۲), (۴, ۳), (۴, ۴), (۵, ۲), (۵, ۳), (۵, ۴)\}$

ج) $B^۲ = B \times B = \{(۴, ۴), (۴, ۵), (۵, ۴), (۵, ۵)\}$

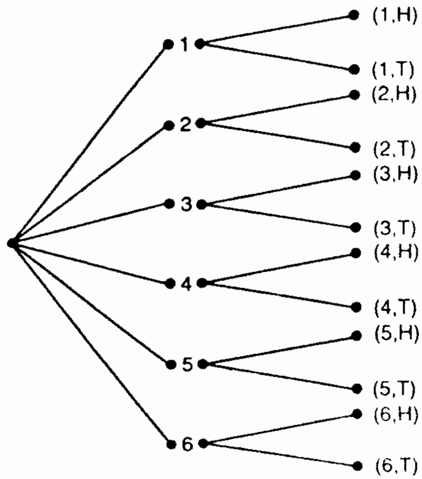
د) $B^۳ = B \times B \times B = \{(a, b, c) | a, b, c \in B\}; (۴, ۵, ۵) \in B^۳$ □

مثال ۲.۵ اگر $\mathscr{U} = \mathbf{R}$، آن‌گاه $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$ همان صفحهٔ مختصات حقیقی در هندسه و در حساب دیفرانسیل و انتگرال دوبعدی است. زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ ناحیهٔ داخل ربع اول این صفحه است. همچنین، $\mathbf{R}^۳$ معرف فضای سه‌بعدی اقلیدسی است، که در آن کره‌های سه‌بعدی و صفحه‌های دوبعدی و خطهای یک‌بعدی زیرمجموعه‌های مهم آن‌اند. □

مثال ۳.۵ آزمایش $\mathscr{E}$ به‌شرح زیر انجام می‌شود: تاسی را می‌اندازند و برآمد آن را یادداشت می‌کنند، و سپس سکه‌ای را می‌اندازند و برآمدش را یادداشت می‌نمایند. برای $\mathscr{E}$ یک فضای نمونه‌ای $\mathscr{S}$ تعیین کنید.

فرض کنید $\mathscr{E}_۱$ معرف قسمت اول آزمایش $\mathscr{E}$، و $\mathscr{S}_۱ = \{۱, ۲, \cdots, ۶\}$ فضای نمونه‌ای $\mathscr{E}_۱$ باشد. همچنین فرض کنید $\mathscr{S}_۲ = \{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}$ فضای نمونه‌ای برای $\mathscr{E}_۲$، قسمت دوم آزمایش

* وقتی با حاصلضرب دکارتی سه مجموعه یا بیشتر سر و کار داریم باید دربارهٔ شرکت‌پذیری محتاط باشیم. مثلاً، در حالت سه مجموعه بین هر دوتا از مجموعه‌های $A_۱ \times A_۲ \times A_۳$، $(A_۱ \times A_۲) \times A_۳$، و $A_۱ \times (A_۲ \times A_۳)$ تفاوتهایی وجود دارد، زیرا عناصر مربوطهٔ آنها سه‌تایی مرتب $(a_۱, a_۲, a_۳)$، و زوجهای مرتب متمایز $((a_۱, a_۲), a_۳)$ و $(a_۱, (a_۲, a_۳))$ هستند. گرچه در مواردی، چنین تفاوتهایی مهم‌اند، ولی ما در اینجا به آن اعتنا نمی‌کنیم و همیشه صورت بدون پرانتز $A_۱ \times A_۲ \times A_۳$ را به‌کار می‌بریم. وقتی با چهار مجموعه یا بیشتر سر و کار داریم باز از همین قرارداد پیروی می‌کنیم.



شکل ۱.۵

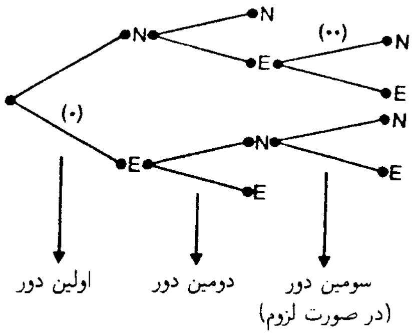
باشد. در این صورت $\mathscr{S}_2 \times \mathscr{S}_1 = \mathscr{S}$ فضای نمونه‌ای $\mathscr{E}$ است.

این فضای نمونه‌ای را می‌توان به‌صورت نموداری با نمودار درختی نشان داد تا همهٔ برآمدهای ممکن آزمایش $\mathscr{E}$ را نمایش دهد. در شکل ۱.۵، چنین نمودار درختی را داریم که از چپ به راست پیش می‌رود. از نقطهٔ شروع سمت چپ، شش شاخه برای شش برآمد اولین مرحلهٔ آزمایش $\mathscr{E}$ رسم شده است. از هر نقطه به شماره‌های ۱، ۲، . . . ، ۶ دو شاخه، معرف برآمدهای پرتاب سکه کشیده شده‌اند. ۱۲ جفت مرتب در نقاط انتهایی سمت راست، فضای نمونه‌ای $\mathscr{S}$ را تشکیل می‌دهند. □

نمودارهای درختی، علاوه بر پیوندی که با حاصلضربهای دکارتی دارند در موارد دیگر نیز ظاهر می‌شوند.

مثال ۴.۵ در مسابقات قهرمانی تنیس، زنها حداکثر سه دور بازی می‌کنند. برنده اولین فردی است که در دو دور برنده می‌شود. اگر دو بازیکن را با N و E نشان دهیم، نمودار درختی شکل ۲.۵، شش راه برد مسابقه را نشان می‌دهد. مثلاً، پاره‌خط ستاره‌دار (یال) نشان می‌دهد که بازیکن E اولین دور را برده است. یال دوستاره‌ای نشان می‌دهد که بازیکن N با بردن دورهای اول و سوم مسابقه را برده است. □

نمودارهای درختی مثالهایی از ساختاری کلی هستند که درخت خوانده می‌شوند. درختها و



شکل ۲.۵

گرافها ساختارهایی مهم‌اند که در علم کامپیوتر و نظریهٔ بهینه‌سازی ظاهر می‌شوند. در فصول بعد این مطالب بررسی خواهند شد.

با برگشت به حاصلضرب خارجی دو مجموعه، به جالب‌بودن زیرمجموعه‌های این ساختار پی خواهیم برد.

تعریف ۲.۵ برای مجموعه‌های $A, B \subseteq \mathscr{U}$، هر زیرمجموعهٔ $A \times B$ را رابطه‌ای از A به B می‌نامند. هر زیرمجموعهٔ $A \times A$ را رابطهٔ دوتایی بر A می‌خوانند.

مثال ۵.۵ A، B، و $\mathscr{U}$ در مثال ۱.۵ را در نظر می‌گیریم، آنچه در زیر می‌آید رابطه‌هایی از A به B هستند.

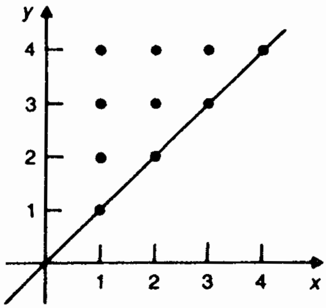
الف) $\emptyset$ **ب)** $\{(۲,۴)\}$ **ج)** $\{(۲,۴),(۲,۵)\}$

د) $\{(۲,۴),(۳,۴),(۴,۴)\}$ **هـ)** $\{(۲,۴),(۳,۴),(۴,۵)\}$ **و)** $A \times B$.

چون $|A \times B| = ۶$، از تعریف ۲.۵ نتیجه می‌شود که $۲^۶$ رابطهٔ ممکن از A به B وجود دارند. □

به‌طور کلی، برای مجموعه‌های متناهی A، B با $|A| = m$، $|B| = n$، ۲^{mn} رابطه از A به B وجود دارند که رابطهٔ تهی و خود رابطهٔ $A \times B$ نیز از آن جمله‌اند.

مثال ۶.۵ فرض کنید $B=\{۱,۲\} \subseteq \mathbf{N}$، $\mathscr{U}=\mathscr{P}(B)$ و $A=\mathscr{U}=\{\emptyset,\{۱\},\{۲\},\{۱,۲\}\}$.



شکل ۳.۵

رابطهٔ زیر مثالی از رابطهٔ دوتایی بر A است:

$$\mathscr{R}=\{(\emptyset,\emptyset),(\emptyset,\{۱\}),(\emptyset,\{۲\}),(\emptyset,\{۱,۲\}),(\{۱\},\{۱\}),(\{۱\},\{۱,۲\}),$$
$$(\{۲\},\{۲\}),(\{۲\},\{۱,۲\}),(\{۱,۲\},\{۱,۲\})\}$$

می‌توانیم بگوییم که هر رابطهٔ $\mathscr{R}$ رابطه‌ای زیرمجموعه‌ای است که در آن $(C,D)\in\mathscr{R}$، اگر و تنها اگر $C,D\subseteq B$ و $C\subseteq D$. $\square$

مثال ۷.۵ با $A=\mathscr{U}=\mathbf{Z}^+$، یک رابطهٔ دوتایی $\mathscr{R}$ بر مجموعهٔ A را به‌صورت $\{(x,y)|x\leq y\}$ تعریف می‌کنیم. این همان رابطهٔ آشنای «کوچکتر است از یا برابر است با» برای مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت است. این رابطه را می‌توان، همان‌طوری که جزئی از آن را در شکل ۳.۵ نشان داده‌ایم، به‌صورت نموداری به‌عنوان مجموعهٔ نقاطی با مؤلفه‌های صحیح مثبت که در بالای خط $y=x$ یا بر آن، در صفحهٔ اقلیدسی قرار دارند نمایش داد. در اینجا نمی‌توانیم مانند مثال ۶.۵، تمام رابطه را ثبت کنیم، ولی متذکر می‌شویم که مثلاً $(۷,۱۱)\in\mathscr{R}$، $(۷,۷)$، اما $(۸,۲)\notin\mathscr{R}$. $(۷,۱۱)\in\mathscr{R}$ را می‌توان به‌صورت $۷\mathscr{R}۱۱$ نشان داد؛ $(۸,۲)\notin\mathscr{R}$ به‌صورت $۸\not\mathscr{R}۲$ درمی‌آید. $۷\mathscr{R}۱۱$ و $۸\not\mathscr{R}۲$ مثالهایی از نمادگذاری میانوند برای یک رابطه است. $\square$

با ملاحظات نهایی زیر به این بخش خاتمه می‌دهیم.

۱) برای هر مجموعهٔ $A\subseteq\mathscr{U}$، $A\times\emptyset=\emptyset$. (اگر $A\times\emptyset\neq\emptyset$، قرار می‌دهیم $(a,b)\in A\times\emptyset$. آن‌گاه $a\in A$ و $b\in\emptyset$، که غیرممکن است!) به همین طریق $\emptyset\times A=\emptyset$.

۲) حاصلضرب دکارتی و عملهای دوتایی اجتماع و اشتراک در قضیهٔ زیر به‌هم مربوط شده‌اند.

قضیه ۱.۵ برای مجموعه‌های دلخواه $A,B,C\subseteq\mathscr{U}$:

الف) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

ب) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

ج) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

د) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

برهان ما قضیهٔ ۱.۵ (الف) را ثابت می‌کنیم و اثبات بقیه را به عهدهٔ خواننده واگذار می‌نماییم. برای هر $a, b \in \mathscr{U}$، $(a,b) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ و $b \in B \cap C \Leftrightarrow a \in A, b \in B$ و $b \in B, C \Leftrightarrow (a,b) \in A \times B$ و $a \in A, b \in C \Leftrightarrow$ و $(a,b) \in A \times C \Leftrightarrow (a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$. ■

تمرینهای ۱.۵

۱. اگر $\mathscr{U} = \mathbf{N}$، $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، $B = \{۲, ۵\}$، و $C = \{۳, ۴, ۷\}$، تعیین کنید $A \times B$؛ $B \times A$؛ $A \cup (B \times C)$؛ $(A \cup B) \times C$؛ $(A \times C) \cup (B \times C)$.

۲. اگر $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$، $A = \{۱, ۲, ۳\}$، $B = \{۲, ۴, ۵\}$، برای موارد زیر مثالهایی بیاورید:

الف) سه رابطهٔ ناتهی از A به B.

ب) سه رابطهٔ دوتایی ناتهی بر A.

۳. برای A، B و $\mathscr{U}$ در تمرین ۲، مطلوب است: (الف) $|A \times B|$ (ب) تعداد رابطه‌های از A به B. (ج) تعداد رابطه‌های دوتایی بر A. (د) تعداد رابطه‌هایی از A به B که شامل $(۱, ۲)$ و $(۱, ۵)$ باشند. (ه) تعداد رابطه‌هایی از A به B که شامل دقیقاً پنج جفت مرتب باشند. (و) تعداد رابطه‌های دوتایی بر A که شامل حداقل هفت عنصر باشند.

۴. برای مجموعه‌های $A, B \subseteq \mathscr{U}$، چه موقع برابری $A \times B = B \times A$ درست است؟

۵. برای $\mathscr{U} = \mathbf{N}$، $A = \{۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$، و $B = \{۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴\}$، عنصرهای رابطهٔ $\mathscr{R} \subseteq A \times B$ را ثبت کنید اگر $\mathscr{R}$ یعنی $a|b$.

۶. در مسابقهٔ نهایی یک بازی، برنده بازیکنی است که در سه دور از مسابقهٔ پنج دوری برنده شود. فرض کنید C و M معرف بازیکنها باشند. برای نشان دادن تمام راههایی که مسابقه به نتیجه می‌رسد نموداری درختی رسم کنید.

۷. اگر $\mathscr{U} = \mathbf{R}$، رابطهٔ $\{(x,y) | x^۲ + y^۲ = ۴\}$ را رسم کنید. اگر $\mathscr{U} = \mathbf{R}^+$، چه پیش می‌آید؟

۸. تراشه‌های منطقی را از ظرفی انتخاب و تک‌تک آنها را آزمون می‌کنند، و به آنها نشان ناقص و خوب می‌زنند. فرایند آزمون را تا وقتی که دو تراشهٔ ناقص پیدا شود و یا در کل پنج تراشه آزمون شوند، ادامه می‌دهند. با استفاده از نمودار درختی، فضایی نمونه‌ای برای این فرایند معرفی کنید.

۹. برهان قضیهٔ ۱.۵ را کامل کنید.

۱۰. شایعه‌ای به‌صورت زیر پخش می‌شود. سازندهٔ شایعه به دو نفر تلفن می‌کند. هریک از این دو نفر به سه رفیق خود تلفن می‌کنند که آنها نیز هریک به پنج آشنای خود تلفن می‌زنند. اگر به هیچ‌یک بیش از یک‌بار تلفن نشود، چند نفر تاکنون از این شایعه خبر دارند؟ چند مکالمهٔ تلفنی انجام شده است؟

۱۱. برای $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$، ثابت کنید که $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

۱۲. فرض می‌کنیم A و B دو مجموعه باشند و $|B| = ۳$. اگر ۴۰۹۶ رابطه از A به B وجود داشته باشد، $|A|$ چقدر است؟

۲.۵ تابعها: ساده و یک به یک

در این بخش توجه خود را به نوعی خاص از رابطه که تابع نام دارد معطوف می‌کنیم. رابطه‌های کلی دوباره در فصل ۷ خواهند آمد.

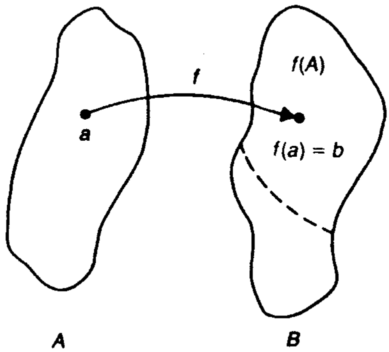
تعریف ۳.۵ برای مجموعه‌های ناتهی A و B، تابع یا نگاشت f از A به B که آن‌را با $f : A \to B$ نشان می‌دهند، رابطه‌ای از A به B است که همهٔ عناصر A هریک دقیقاً یک‌بار به‌عنوان اولین مؤلفهٔ هر زوج مرتب در این رابطه ظاهر می‌شوند.

وقتی (a, b) زوجی مرتب در تابع f است غالباً می‌نویسیم $f(a) = b$. برای $(a, b) \in f$، b را نگاره a تحت f می‌نامند و a را پیشنگارهٔ b گویند. به‌علاوه، تعریف مزبور چنین القا می‌کند که f، روشی برای وابسته کردن هر $a \in A$ به عنصر یکتای $b \in B$ است که این فرایند را با $f(a) = b$ نشان می‌دهند. لذا $(a, b), (a, c) \in f$ نتیجه می‌دهد که $b = c$.

مثال ۸.۵ برای $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{w, x, y, z\}$، $f = \{(۱, w), (۲, x), (۳, x)\}$ یک تابع است، و درنتیجه رابطه‌ای از A به B است. $\mathscr{R}_۱ = \{(۱, w), (۲, x)\}$، $\mathscr{R}_۲ = \{(۱, w), (۲, w), (۲, x), (۳, z)\}$ رابطه‌هایی از A به B هستند و نه تابعهایی از A به B (چرا تابع نیستند؟) □

تعریف ۴.۵ برای تابع $f : A \to B$، A را حوزهٔ f و B را حوزهٔ تمام f می‌نامند. زیرمجموعه‌ای از B، متشکل از عناصری که به‌عنوان دومین مؤلفه در جفتهای مرتب f ظاهر می‌شوند، برد f نامیده می‌شود و آن را با $f(A)$ هم نشان می‌دهند، زیرا مجموعهٔ نگاره‌ها (ی عناصر A) تحت fاند.

در مثال ۸.۵، حوزهٔ f عبارت است از $\{۱, ۲, ۳\}$ و حوزهٔ تمام f عبارت است از $\{w, x, y, z\}$



شکل ۴.۵

و برد f به‌صورت $f = f(A) = \{w, x\}$ است.

نمایشی تصویری از این مفاهیم در شکل ۴.۵ ظاهر شده است. این نمودار این نکته را به ذهن القا می‌کند که a را می‌توان به‌عنوان یک ورودی که به‌وسیلهٔ f به خروجی $f(a)$ تبدیل شده است در نظر گرفت. در این زمینه، همگردان فورترن را می‌توان به‌صورت تابعی در نظر گرفت که یک برنامهٔ مبدأ (ورودی) را به برنامهٔ مقصد (خروجی) متناظرش تبدیل می‌کند.

مثال ۹.۵ تابعهای جالب توجه زیادی در علم کامپیوتر پیش می‌آیند.

الف) در زبان برنامه‌نویسی **بیسیک**، تابع بزرگترین عددِ صحیح که آن‌را با INT نمایش می‌دهند تابعی صحیح-مقدار است که برای حوزهٔ همهٔ اعداد حقیقی تعریف شده است. از این پس می‌نویسیم $\mathrm{INT} : \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$ که اگر X عددی صحیح باشد $\mathrm{INT(X)=X}$؛ و اگر X عدد صحیح نباشد، INT(X) برابر عدد صحیح بلافاصله واقع در سمت چپ X روی محور اعداد حقیقی است. مثلاً، $\mathrm{INT}(۵) = ۵ = \mathrm{INT}(۵٫۱)$، و $\mathrm{INT}(-۷٫۸) = -۸ = \mathrm{INT}(-۸)$.
در اینجا حوزهٔ تمام و برد، هر دو، مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ هستند.

ب) تابع trunc (تابع برش) در زبان پاسکال پیش می‌آید و تابعی صحیح-مقدار است که روی $\mathbf{R}$ تعریف شده است. این تابع قسمت کسری عدد حقیقی را حذف می‌کند. مثلاً، $\mathrm{trunc}(۳٫۸۷) = ۳$، $\mathrm{trunc}(۵) = ۵$، و $\mathrm{trunc}(-۷٫۲۲) = -۷$.

ج) برای ذخیره‌سازی یک ماتریس در آرایه‌ای یک‌بعدی، بسیاری از زبانهای کامپیوتری پیاده‌سازی اصلی سطری را به‌کار می‌برند. در اینجا، اگر $A=(a_{ij})_{n\times n}$ یک ماتریس $n \times n$ باشد سطر اول A، اگر $a_{۱۱}$ را در مکان ۱ قرار دهیم، در مکانهای ۱، ۲، ۳، . . . ، nام ذخیره می‌شود. لذا، درایهٔ $a_{۲۱}$ در مکان $n + ۱$ام و درایهٔ $a_{۳۲}$ در مکان $۴ + ۲n$ام قرار می‌گیرند. برای تعیین

مکان هر درایهٔ a_{ij}، $1 \leq i$، $j \leq n$ از ماتریس A، تابع دستیابی f از درایه‌های A به مکانهای ۱، ۲، ۳، …، n^2 ی آرایه را تعریف می‌کنند. فرمولی برای تابع دستیابی در اینجا عبارت است از $f(a_{ij}) = (i-1)n + j$. □

در مثال ۸.۵، تعداد $4096 = 2^{12}$ رابطه از A به B وجود دارد. از بین این رابطه‌ها یک تابع را بررسی کردیم، و اینک می‌خواهیم تعداد کل تابعهای از A به B را حساب کنیم.

در حالت کلی، فرض کنید A و B مجموعه‌هایی با $|A| = m$، $|B| = n$ عنصر باشند. در نتیجه، اگر $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$، $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$، یک تابع نوعی $f: A \to B$ را می‌توان با $\{(a_1, x_1), (a_2, x_2), \cdots, (a_m, x_m)\}$ بیان کرد. به‌جای x_1، می‌توان هریک از n عنصر B را انتخاب کرد و سپس همین کار را برای x_2 انجام داد. (می‌توانیم به‌جای x_2، هر عنصر دلخواه B را برگزینیم به‌قسمی که ممکن است به‌جای x_1 و x_2 یک عنصر از B را انتخاب کنیم.) این فرایند انتخاب را تا آنجا ادامه می‌دهیم که سرانجام یکی از n عنصر B به‌جای x_m انتخاب شود. بدین طریق، با استفاده از اصل ضرب، تعداد $|B|^{|A|} = n^m$ تابع از A به B وجود دارد.

لذا، در مثال ۸.۵ برای A و B کلاً تعداد $64 = |B|^{|A|} = 4^3$ تابع از A به B، و $81 = |A|^{|B|} = 3^4$ تابع از B به A وجود دارد.

اینک که مفهوم تابع را به‌عنوان نوعی خاص از رابطه دریافته‌ایم، توجه خود را به نوعی خاص از تابع معطوف می‌داریم.

تعریف ۵.۵ تابع $f: A \to B$ را یک به یک (انژکتیو) می‌نامند اگر هر عنصر B حداکثر یک‌بار به‌عنوان نگارهٔ یک عنصر A ظاهر شود.

اگر A و B متناهی باشند، و $f: A \to B$ یک به یک باشد، باید داشته باشیم $|A| \leq |B|$. برای مجموعه‌های کلی A و B اگر $f: A \to B$ یک به یک باشد، آن‌گاه به‌ازای $a_1, a_2 \in A$، $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$. در نتیجه، تابعی از این نوع را می‌توان به‌صورت تابعی مشخص کرد که در آن هر عنصر B حداکثر یک‌بار به‌عنوان مؤلفهٔ دوم یک زوج مرتب در f ظاهر می‌شود.

مثال ۱۰.۵ فرض کنید $A = \{1, 2, 3\}$، $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$، تابع

$$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4)\}$$

تابعی یک به یک از A به B است؛

$$g = \{(۱,۱),(۲,۳),(۳,۳)\}$$

تابعی از A به B است ولی یک به یک نیست زیرا $g(۲) = g(۳)$ اما $۳ \neq ۲$. □

در مثال ۵.۱۰، برای A و B جمعاً تعداد $۲^{۱۵}$ رابطه از A به B وجود دارند که $۵^۳$ تای آنها تابع‌اند. پرسش دیگری که طبعاً مایلیم به آن پاسخ دهیم این است که چندتا از توابع $f : A \to B$ یک به یک‌اند؟ مجدداً مطلب را برای مجموعه‌های متناهی کلی مورد بحث قرار می‌دهیم.

> برای مجموعه‌های $A = \{a_۱, a_۲, a_۳, \cdots, a_m\}$ و $B = \{b_۱, b_۲, b_۳, \cdots, b_n\}$، $m \leq n$، هر تابع یک به یک $f : A \to B$ به‌صورت $\{(a_۱, x_۱), (a_۲, x_۲), (a_۳, x_۳), \cdots, (a_m, x_m)\}$ است، که در آن، n انتخاب برای $x_۱$، (یعنی، هر عنصر B)، $n - ۱$ انتخاب برای $x_۲$ (یعنی، هر عنصر B به استثنای عنصری که به‌جای $x_۱$ انتخاب شده است)، $n - ۲$ انتخاب برای $x_۳$، و نظایر آن، تا سرانجام $n - (m - ۱) = n - m + ۱$ انتخاب برای x_m وجود دارد. بنابر اصل ضرب، تعداد تابعهای یک به یک از A به B برابر است با
>
> $$n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-m+۱) = n!/(n-m)! = P(n,m) = P(|B|,|A|)$$

در نتیجه، برای A و B در مثال ۵.۱۰، تعداد $۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$ تابع یک به یک $f : A \to B$ وجود دارد.

تعریف ۵.۶ اگر $f : A \to B$ و $A_۱ \subseteq A$، آن‌گاه

$$f(A_۱) = \{b \in B | b = f(a), a \in A_۱ \text{ برای عنصر دلخواه }\}$$

و $f(A_۱)$ را نگارهٔ $A_۱$ تحت f می‌نامند.

مثال ۵.۱۱ فرض کنید $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ به‌صورت $f(x) = x^۲$ داده شده باشد. در این صورت

$$f(\mathbf{R}) = f \text{ برد } = [۰, +\infty]$$

نگارهٔ $\mathbf{Z}$ تحت f عبارت است از $f(\mathbf{Z}) = \{۰, ۱, ۴, ۹, ۱۶, \cdots\}$. □

قضیه ۵.۲ فرض کنید $f : A \to B$، با $A_۱, A_۲ \subseteq A$. در این صورت

الف) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ ب) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
ج) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$، وقتی f یک به یک است.

برهان قسمت (ب) را ثابت می‌کنیم و اثبات بقیهٔ قسمتها را به خواننده واگذار می‌کنیم.

به‌ازای هر $b \in B$،
$$b \in f(A_1 \cap A_2) \Rightarrow b = f(a)$$

به‌ازای عنصری مانند

$$a \in A_1 \cap A_2 \Rightarrow (b = f(a), a \in A_1) \wedge (b = f(a), \quad a \in A_2$$ (به‌ازای همان مقدار

و لذا داریم

$$b \in f(A_1) \wedge b \in f(A_2) \Rightarrow b \in f(A_1) \cap f(A_2)$$

بنابراین

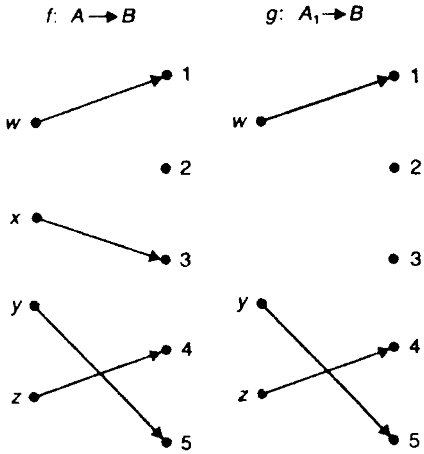
$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

■

تعریف ۷.۵ اگر $f : A \to B$ و $A_1 \subseteq A$، $f|_{A_1} : A_1 \to B$ را تحدید f به A_1 می‌نامند اگر به‌ازای همهٔ مقادیر $a \in A_1$، $f|_{A_1}(a) = f(a)$.

تعریف ۸.۵ فرض کنید $A_1 \subseteq A$، و $f : A_1 \to B$. اگر $g : A \to B$ و به ازای همهٔ مقادیر $a \in A_1$، $g(a) = f(a)$، آن‌گاه g را توسیعی از f به A می‌نامند.

مثال ۱۲.۵ فرض کنید $A = \{w, x, y, z\}$، $B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$، $A_1 = \{w, y, z\}$. فرض کنید $f : A \to B$، $g : A_1 \to B$ به‌وسیلهٔ نمودارهای شکل ۵.۵ نمایش داده شوند. در این صورت، $g = f|_{A_1}$ و f توسیع g از A_1 به A است. متذکر می‌شویم که در مورد تابع مفروض $g : A_1 \to B$ پنج راه برای توسیع g از A_1 به A وجود دارد. □



شکل۵.۵

تمرینهای ۲.۵

۱. کدام رابطه‌های زیر تابع‌اند و کدام تابع نیستند. اگر رابطه‌ای، تابع است برد آن را بیابید.

الف) $\{(x,y)|x,y \in \mathbf{Z}, y = x^۲ + ۷\}$ ب) $\{(x,y)|x,y \in \mathbf{R}, y^۲ = x\}$

ج) $\{(x,y)|(x,y \in \mathbf{R}, y = ۳x + ۱\}$ د) $\{(x,y)|x,y \in \mathbf{Q}, x^۲ + y^۲ = ۱\}$

ه) $\mathscr{R}$، رابطه‌ای از A به B است که، $|A| = ۵$، $|B| = ۶$، $|\mathscr{R}| = ۶$.

۲. آیا می‌توان ضابطهٔ $f(x) = ۱/(x^۲ - ۲)$ را برای تعریف تابع $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ به‌کار برد؟ برای تعریف تابع $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ چطور؟

۳. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، $B = \{x, y, z\}$. (الف) پنج تابع از A به B را ثبت کنید. (ب) چند تابع $f : A \to B$ وجود دارند؟ (ج) چند تابع $f : A \to B$ یک به یک‌اند؟ (د) چند تابع $g : B \to A$ وجود دارند؟ (ه) چند تابع $g : B \to A$ یک به یک‌اند؟ (و) چند تابع $f : A \to B$ در $f(۱) = x$ صدق می‌کنند؟ (ز) چند تابع $f : A \to B$ در $f(۱) = f(۲) = x$ صادق‌اند؟ (ح) چند تابع $f : A \to B$ در $f(۱) = x$، $f(۲) = y$ صدق می‌کنند؟

۴. اگر ۲۱۸۷ تابع $f : A \to B$ وجود داشته باشد و $|B| = ۳$، آنگاه $|A|$ چقدر است؟

۵. تعیین کنید که از تابعهای زیر کدامها یک به یک‌اند و برد آنها را معین کنید.

الف) $f : \mathbf{Z} \to Z, f(x) = ۲x + ۱$ ب) $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}, f(x) = ۲x + ۱$

ج) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(x) = x^۳ - x$ د) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = e^x$

ه) $f : [\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}] \to \mathbf{R}, f(x) = \sin x$ و) $f : [۰, \pi] \to \mathbf{R}, f(x) = \sin x$

۶. فرض کنید $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^۲$. $f(A)$ را برای زیرمجموعه‌های $A \subseteq R$ در زیر تعیین کنید.

الف) $A=\{۲,۳\}$ ب) $A=\{-۳,-۲,۲,۳\}$ ج) $A=(-۳,۳)$
د) $A=(-۳,۲]$ ه) $A=[-۷,۲]$ و) $A=(-۴,-۳)\cup[۵,۶]$

۷. فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، $B=\{w,x,y,z\}$، $A_۱=\{۲,۳,۵\}\subseteq A$، و $g:A_۱\to B$. به چند طریق می‌توان g را به تابع $f:A\to B$ توسیع داد؟

۸. مثالی از یک تابع $f:A\to B$ بیاورید که اگر $A_۱,A_۲\subseteq A$، آن‌گاه $f(A_۱\cap A_۲)\neq f(A_۱)\cap f(A_۲)$. (پس در قضیهٔ ۲.۵(ب)، ممکن است شمول سره باشد)

۹. قسمتهای (الف) و (ج) قضیهٔ ۲.۵ را ثابت کنید.

۱۰. اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و ۶۷۲۰ تابع یک به یک $f:A\to B$ وجود داشته باشد، $|B|$ چقدر است؟

۱۱. تابع دستیابی $f(a_{ij})$ را، به صورتی که در مثال ۹.۵ (ج) شرح دادیم، برای ماتریس $(A)=(a_{ij})_{m\times n}$، که در آن (الف) $m=۱۲$، $n=۱۲$؛ (ب) $m=۷$، $n=۱۰$؛ (ج) $m=۱۰$، $n=۷$ تعیین کنید.

۱۲. برای تابع دستیابی که در مثال ۹.۵ (ج) پیدا کردیم، ماتریس $A=(a_{ij})_{m\times n}$ با استفاده از پیاده‌سازی سطری در آرایهٔ یک‌بعدی ذخیره شده بود. ممکن بود که این ماتریس را با استفاده از پیاده‌سازی ستونی ذخیره کرد که در آن هر درایهٔ $a_{i۱}$، $۱\leq i\leq m$، به‌ترتیب در ستون اول A در مکانهای ۱، ۲، ۳، ...، mام آرایه ذخیره می‌شود، وقتی‌که $a_{۱۱}$ در مکان ۱ ذخیره شده باشد. در این صورت درایه‌های $a_{i۲}$، $۱\leq i\leq m$، در دومین ستون A به‌ترتیب در مکانهای $m+۱$، $m+۲$، $m+۳$، ...، $۲m$ام آرایه، الی آخر ذخیره می‌شوند. فرمولی برای تابع دستیابی $g(a_{ij})$ در این شرایط بیابید.

۱۳. **الف)** فرض کنید A ماتریس $m\times n$ی باشد که قرار است (به روش پُشتِ سرِ هم) در آرایهٔ یک‌بعدی r درایه‌ای ذخیره شود. مطلوب است فرمولی برای تابع دستیابی اگر $a_{۱۱}$ در مکان kام ($k\geq ۱$) آرایه [به‌جای مکان ۱ در مثال ۹.۵ (ج)] ذخیره شود و (i) از پیاده‌سازی سطری؛ (ii) از پیاده‌سازی ستونی استفاده کنیم.

ب) به منظور معتبر بودن نتایج قسمتهای (الف) شرایطی را پیدا کنید که m، n، r و k باید در آنها صدق کنند.

۳.۵ تابعهای پوشا: اعداد نوع دوم استرلینگ

نتایجی که در این بخش به‌دست آوردیم پاسخهای اولین پنج مسأله‌ای را که در آغاز این بخش مطرح کردیم به ما خواهند داد. خواهیم دید که تابع پوشا کلید همهٔ این پاسخهاست.

تعریف ۹.۵ اگر $f:A\to B$، f را پوشا می‌نامند، اگر $f(A)=B$ (یعنی اگر برای هر $b\in B$، حداقل یک $a\in A$ با شرط $f(a)=b$ وجود داشته باشد.)

مثال ۱۳.۵ تابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ که با ضابطهٔ $f(x)=x^{3}$ تعریف شده تابعی پوشاست، ولی تابع $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ که با $g(x)=x^{2}$ داده شده پوشا نیست، زیرا $g(\mathbf{R})=[0,+\infty)\subset\mathbf{R}$. □

مثال ۱۴.۵ با $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{x,y,z\}$، $f_1=\{(1,z),(2,y),(3,x),(4,y)\}$ و $f_2=\{(1,x),(2,x),(3,y),(4,z)\}$ هر دو تابعهایی پوشا از A به B هستند. تابع $g=\{(1,x),(2,x),(3,y),(4,y)\}$ پوشا نیست، زیرا $g(A)=\{x,y\}\subset B$. □

اگر A و B مجموعه‌هایی متناهی باشند، برای هر تابع پوشای ممکن $f:A\to B$، باید داشته باشیم $|A|\geq|B|$. با توجه به آنچه در دو بخش اول این فصل گفتیم، بدون شک خواننده احساس می‌کند وقت آن است که یک‌بار دیگر از اصل ضرب استفاده کنیم و تعداد تابعهای پوشای $f:A\to B$ را که برای آنها $|A|=m\geq n=|B|$، حساب کنیم. متأسفانه در این مورد اصل ضرب کافی به‌نظر نمی‌رسد. ما نتایج لازم برای بعضی مثالهای خاص را به‌دست می‌آوریم و آن‌گاه فرمولی کلی را حدس می‌زنیم. در فصل ۸، با استفاده از اصل شمول و طرد این حدس را اثبات خواهیم کرد.

مثال ۱۵.۵ اگر $A=\{x,y,z\}$ و $B=\{1,2\}$، آن‌گاه همهٔ تابعهای $f:A\to B$ پوشا هستند به‌استثنای $f_1=\{(x,1),(y,1),(z,1)\}$ و $f_2=\{(x,2),(y,2),(z,2)\}$، که تابعهایی ثابت‌اند. بنابراین، $|B|^{|A|}-2=2^{3}-2=6$ تابع پوشا از A به B وجود دارند. □

به‌طور کلی، اگر $|A|=m\geq 2$ و $|B|=2$، آن‌گاه $2^{m}-2$ تابع پوشا از A به B وجود دارند. (آیا وقتی $m=1$، این فرمول بیانگر چیزی هست؟)

مثال ۱۶.۵ برای $A=\{w,x,y,z\}$ و $B=\{1,2,3\}$، 3^{4} تابع از A به B وجود دارند. اگر زیرمجموعه‌های B به‌اندازهٔ ۲ را در نظر بگیریم، 2^{4} تابع از A به $\{1,2\}$ و 2^{4} تابع از A به $\{2,3\}$؛ و 2^{4} تابع از A به $\{1,3\}$ وجود دارند. بنابراین $2^{4}\binom{3}{2}=3(2^{4})$ تابع از A به B وجود دارند که قطعاً پوشا نیستند. اما قبل از اینکه عدد $3^{4}-\binom{3}{2}2^{4}$ را به‌عنوان پاسخ نهایی قبول کنیم، باید محقّق سازیم که همهٔ این $2^{4}\binom{3}{2}$ تابع متمایز نیستند. زیرا وقتی همهٔ تابعهای از A به $\{1,2\}$ را در نظر بگیریم یکی از آنهایی را که کنار می‌گذاریم تابع $\{(w,2),(x,2),(y,2),(z,2)\}$ است. سپس وقتی تابعهای از A به $\{2,3\}$ را در نظر می‌گیریم، باز همین تابع $\{(w,2),(x,2),(y,2),(z,2)\}$ را کنار می‌گذاریم. لذا در نتیجهٔ $3^{4}-\binom{3}{2}2^{4}$، هریک از تابعهای ثابت $f:A\to B$ را که در آنها $f(A)$ یکی از مجموعه‌های $\{1\}$، $\{2\}$، یا $\{3\}$ است دوبار حذف کرده‌ایم. با اصلاح نتیجهٔ فعلی، درمی‌یابیم که $3^{4}-\binom{3}{2}2^{4}+3=\binom{3}{3}3^{4}-\binom{3}{2}2^{4}+\binom{3}{1}1^{4}=36$ تابع پوشا از A به B وجود دارند.

با حفظ B به‌صورت $B=\{1,2,3\}$، برای هر مجموعهٔ A، با $|A|=m\geq 3$، $\binom{3}{3}3^{m}-\binom{3}{2}2^{m}+\binom{3}{1}1^{m}$ تابع پوشا از A به B وجود دارند. (وقتی $m=1$ یا $m=2$، این

فرمول چه نتیجه‌ای به‌دست می‌دهد؟) □

دو مثال اخیر، الگویی را القا می‌کنند که اینک می‌توانیم آن‌را بدون برهان، به‌عنوان فرمولی کلی بیان کنیم.

برای مجموعه‌های متناهی A، B با $|A| = m \geq n = |B|$، تعداد تابعهای پوشا از A به B برابر است با

$$\begin{aligned}\binom{n}{n}n^m - \binom{n}{n-1}(n-1)^m + \binom{n}{n-2}(n-2)^m - \cdots \\ +(-1)^{n-2}\binom{n}{2}2^m + (-1)^{n-1}\binom{n}{1}1^m \\ = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m \\ = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m\end{aligned}$$

مثال ۱۷.۵ فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ و $B = \{w, x, y, z\}$. اگر فرمول کلی را به‌ازای $m = 7$ و $n = 4$ به‌کار بریم، تعداد تابعهای پوشا از A به B برابر است با

$$\begin{aligned}\binom{4}{4}4^7 - \binom{4}{3}3^7 + \binom{4}{2}2^7 - \binom{4}{1}1^7 &= \sum_{k=0}^{3}(-1)^k\binom{4}{4-k}(4-k)^7 \\ &= \sum_{k=0}^{4}(-1)^k\binom{4}{4-k}(4-k)^7 = 8400\end{aligned}$$

□

نتیجهٔ مثال ۱۷.۵، پاسخی هم به اولین سه سؤالی است که در آغاز این فصل مطرح شده‌اند. وقتی واژه‌های غیرضروری را حذف کنیم، متوجه می‌شویم که در هر سه مورد می‌خواهیم، هفت شئ متفاوت را در چهار ظرف متمایز توزیع کنیم به‌طوری که هیچ ظرفی خالی نماند. این‌را می‌توان برحسب تابعهای پوشا حل کرد.

برای مسألهٔ ۴، فضای نمونه‌ای $\mathscr{S}$ متشکل از $4^7 = 16384$ راه است که در آن هفت نفر می‌توانند هریک، یکی از چهار طبقه را برای پیاده شدن انتخاب کنند. (توجه کنید که 4^7، تعداد کل تابعهای $f : A \to B$ نیز هست که در آنها $|A| = 7$، $|B| = 4$). پیشامدی که با آن سر و کار داریم شامل ۸۴۰۰ انتخاب از این نوع است، بنابراین احتمال آنکه آسانسور در هر طبقه توقف کند

برابر است با ۰٫۵۱۲۷ $\doteq$ ۱۶۳۸۴/۸۴۰۰، که کمی بیش از نیم دفعه است.

سرانجام، برای مسألهٔ ۵، چون تعداد تابعهای پوشای $f : A \to B$ به‌ازای $|A| = m$ و $|B| = n$ برابر $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$ است وقتی $m < n$، چنین تابعهایی وجود ندارند و مجموع برابر ۰ است.

مسألهٔ ۶ در بخش ۶.۵ مورد بحث واقع خواهد شد.

قبل از پرداختن به مطلبی جدید، به یک مسألهٔ دیگر توجه می‌کنیم.

مثال ۱۸.۵ مدیر شرکتی، یک منشی و سه دستیار اداری دارد. اگر هفت صورت‌حساب برای حسابرسی موجود باشد، مدیر به چند راه می‌تواند حسابها را برای حسابرسی محوّل کند به‌قسمی که هر دستیار حداقل روی یکی از حسابها کار کند و کار منشی، اگر صورت‌حساب دیگری نباشد پرحجمترین صورت‌حساب باشد؟

قبل از هر چیز، پاسخ نظیر مثال ۱۷.۵ برابر ۸۴۰۰ نیست. در اینجا باید دو مورد فرعی جدا از هم را در نظر بگیریم و آن‌گاه اصل جمع را به‌کار بریم.

الف) اگر منشی فقط روی پرحجمترین حساب کار کند، آن‌گاه شش حساب دیگر را می‌توان به $\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\binom{3}{3-k}(3-k)^6 = 540$ راه بین سه دستیار اداری توزیع کرد. (۵۴۰=تعداد تابعهای پوشای $f : A \to B$ با $|A| = 6$، و $|B| = 3$.)

ب) اگر منشی روی بیش از پرحجمترین حساب کار کند، تخصیص کار را می‌توان به $\sum_{k=0}^{4}(-1)^k\binom{4}{4-k}(4-k)^6 = 1560$ راه انجام داد. (۱۵۶۰=تعداد تابعهای پوشای $g : C \to D$، با $|C| = 6$، $|D| = 4$ است.)

در نتیجه تحت شرایطی که توصیف شده است، تخصیص را می‌توان به $540 + 1560 = 2100$ راه انجام داد. (قبلاً تذکر دادیم که پاسخ نباید ۸۴۰۰ باشد، بلکه برابر

$$(1/4)(8400) = (1/|B|)(8400)$$

است، که در آن ۸۴۰۰ تعداد تابعهای پوشای $f : A \to B$ با $|A| = 7$ و $|B| = 4$ است. این با آنچه که هنگام بحث از قضیهٔ ۳.۵ نتیجه خواهیم گرفت تطبیق نمی‌کند.) □

اینک بحث خود را دربارهٔ توزیع اشیاء متمایز در ظرفها، بدون اینکه ظرفی خالی بماند، ادامه می‌دهیم، ولی در این بحث، ظرفها مشابه‌اند.

مثال ۱۹.۵ اگر $A = \{a, b, c, d\}$، $B = \{1, 2, 3\}$، ۳۶ تابع پوشا از A به B یا هم‌ارز با آن، ۳۶ راه توزیع چهار شئ متمایز در سه ظرف متمایز وجود دارند به‌شرطی که ظرفی خالی باقی نماند (و مکان اشیاء در یک ظرف مفروض مورد توجه نباشد). در بین این ۳۶ توزیع گردایهٔ زیر از ۶ توزیع را پیدا می‌کنیم (یک گردایه از گردایه‌های شش توزیع ممکن):

(۱) $\{a,b\}_1\ \{c\}_2\ \{d\}_3$ (۲) $\{a,b\}_1\ \{d\}_2\ \{c\}_3$

(۳) $\{c\}_1\ \{a,b\}_2\ \{d\}_3$ (۴) $\{c\}_1\ \{d\}_2\ \{a,b\}_3$

(۵) $\{d\}_1\ \{a,b\}_2\ \{c\}_3$ (۶) $\{d\}_1\ \{c\}_2\ \{a,b\}_3$

که در این گردایه، مثلاً، نماد $\{c\}_2$ به‌معنای آن است که c در ظرف دوم است. اینک اگر ظرفها را متمایز بگیریم، این $۳! = ۶$ توزیع همانند می‌شوند، و بنابراین $۳۶/(۳!) = ۶$ راه برای توزیع اشیاء متمایز a، b، c، d بین سه ظرف همانند وجود دارند به‌شرطی که هیچ ظرفی خالی نماند. □

به‌طور کلی، برای $m \geq n$، $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$ راه برای توزیع m شئ مختلف در n ظرف شماره‌دار (اما از هر لحاظ دیگر همانند) وجود دارد بدون اینکه ظرفی خالی بماند. اگر شماره‌ها را از ظرفها حذف کنیم به‌قسمی که کاملاً همانند باشند، ملاحظه می‌کنیم که یک توزیع در این n ظرف همانند (غیرخالی)، متناظر با $n!$ از این‌گونه توزیع در ظرفهای شماره‌دار است. لذا، تعداد راههای توزیع m شئ متمایز در n ظرف همانند بدون اینکه ظرفی خالی بماند برابر است با

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$$

این عدد را با $S(m,n)$ نشان می‌دهند، و آن‌را عدد نوع دوم استرلینگ می‌نامند. توجه می‌کنیم که برای $|A| = m \geq n = |B|$، تعداد تابعهای پوشا از A به B برابر است با $n!S(m,n)$.

در جدول ۱.۵ چندتا از عددهای نوع دوم استرلینگ را ثبت کرده‌ایم.

جدول ۱.۵

$m \backslash n$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۱	۱							
۲	۱	۱						
۳	۱	۳	۱					
۴	۱	۷	۶	۱				
۵	۱	۱۵	۲۵	۱۰	۱			
۶	۱	۳۱	۹۰	۶۵	۱۵	۱		
۷	۱	۶۳	۳۰۱	۳۵۰	۱۴۰	۲۱	۱	
۸	۱	۱۲۷	۹۶۶	۱۷۰۱	۱۰۵۰	۲۶۶	۲۸	۱

مثال ۲۰.۵ برای $m \geq n$، $\sum_{i=1}^{n} S(m, i)$ برابر تعداد راههای توزیع m شئ متمایز در n ظرف همانند، با شرط خالی ماندن مجاز ظرفهاست. باتوجه به سطر چهارم جدول ۱.۵ می‌بینیم که $۱۴ = ۶ + ۷ + ۱$ راه برای توزیع اشیاء a، b، c، d بین سه ظرف همانند وجود دارد که احتمالاً یک یا چند ظرف خالی می‌مانند. □

به این بخش با نتیجه‌گیری اتحادی که متضمن عددهای برنولی است خاتمه می‌دهیم. ماهیت برهان، ترکیبیاتی است.

قضیه ۳.۵ فرض کنید m و n اعداد صحیح مثبتی هستند، $۱ < n \leq m$. در این صورت

$$S(m + ۱, n) = S(m, n - ۱) + nS(m, n)$$

برهان فرض کنید $A = \{a_۱, a_۲, \cdots, a_m, a_{m+۱}\}$. در این صورت $S(m + ۱, n)$ تعداد راههایی است که اشیاء A می‌توانند بین n ظرف همانند توزیع شوند، بدون اینکه ظرفی خالی بماند.

برای توزیع $a_۱$، $a_۲$، $\ldots$ ، a_m بین $n - ۱$ ظرف همانند، بدون اینکه ظرفی خالی بماند $S(m, n - ۱)$ راه وجود دارد. پس با قرار دادن $a_{m+۱}$ در ظرف خالی باقیمانده، از تعداد $S(m + ۱, n)$ راه توزیع، تعداد $S(m, n - ۱)$ راهِ آن یعنی آن تعداد توزیعهایی که در آنها $a_{m+۱}$ به‌تنهایی در یک ظرف آمده حساب شده است. از سوی دیگر، با توزیع $a_۱$، $a_۲$، $\ldots$ ، a_m بین n ظرف همانند، بدون اینکه ظرفی خالی بماند، $S(m, n)$ توزیع داریم. اما اینک برای هریک از این $S(m, n)$ توزیع، n ظرف به‌وسیلهٔ محتوایشان از هم متمایز می‌شوند. با انتخاب یکی از این n ظرف متمایز برای $a_{m+۱}$، دارای $nS(m, n)$ توزیع از تعداد کل $S(m + ۱, n)$ توزیع هستیم: یعنی توزیعهایی که برای آنها، $a_{m+۱}$ در همان ظرفی است که شئ دیگری از A در آن است. پس به‌موجب اصل جمع قضیه ثابت می‌شود. ■

برای تشریح قضیهٔ ۳.۵، مثلثی را که در جدول نشان داده‌ایم در نظر بگیرید. در اینجا بزرگترین عدد متناظر است با $S(m + ۱, n)$، به‌ازای $m = ۷$ و $n = ۳$، و می‌بینیم که

$$S(۷ + ۱, ۳) = ۹۶۶ = ۶۳ + ۳(۳۰۱) = S(۷, ۲) + ۳S(۷, ۳)$$

اتحاد قضیهٔ ۳.۵ را می‌توان در صورت لزوم، به‌عنوان بسط جدول ۱.۵ به‌کار برد.

اگر نتیجهٔ قضیهٔ ۳.۵ را در $(n - ۱)!$ ضرب کنیم، داریم

$$(۱/n)[n!S(m + ۱, n)] = [(n - ۱)!S(m, n - ۱)] + [n!S(m, n)]$$

این صورت جدید معادله اطّلاعاتی از تعداد تابعهای پوشا به‌ما می‌دهد. زیرا اگر $A = \{a_۱, a_۲, \cdots, a_m, a_{m+۱}\}$ و $B = \{b_۱, b_۲, \cdots, b_{n-۱}, b_n\}$ با $m \geq n - ۱$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}(۱/n)(h : A \to B\text{تعداد تابعهای پوشای}) &= (f : A - \{a_{m+۱}\} \to B - \{b_n\}\text{تعداد تابعهای پوشای}) \\ &+ (g : A - \{a_{m+۱}\} \to B\text{تعداد تابعهای پوشای})\end{aligned}$$

بدین دلیل، رابطه‌ای که در انتهای مثال ۱۸.۵ متذکر شدیم صرفاً یک مورد اتفاقی نیست.

تمرینهای ۳.۵

۱. مثالی برای مجموعه‌های متناهی A و B، با $|A|, |B| \geq ۴$ و تابع $f : A \to B$ بزنید به‌قسمی که (الف) f نه یک به یک باشد و نه پوشا؛ (ب) f یک به یک باشد، ولی پوشا نباشد؛ (ج) f پوشا باشد ولی یک به یک نباشد؛ (د) f یک به یک و پوشا باشد.

۲. برای هر یک از تابعهای $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ در زیر، معین کنید که آیا تابع یک به یک است؟ آیا پوشاست؟ اگر تابع پوشا نیست برد $f(\mathbf{Z})$ را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = x + ۷$ ب) $f(x) = ۲x - ۳$ ج) $f(x) = -x + ۵$
د) $f(x) = x^۲$ هـ) $f(x) = x^۲ + x$ و) $f(x) = x^۳$

۳. برای هر یک از تابعهای $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ زیر، معین کنید که آیا تابع یک به یک است؟ آیا پوشاست؟ اگر تابع پوشا نیست، برد $g(\mathbf{R})$ را به‌دست آورید.

الف) $g(x) = x + ۷$ ب) $g(x) = ۲x - ۳$ ج) $g(x) = -x + ۵$
د) $g(x) = x^۲$ هـ) $g(x) = x^۲ + x$ و) $g(x) = x^۳$

۴. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، $B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$.
الف) چند تابع از A به B وجود دارند؟ چندتا از آنها یک به یک هستند؟ چندتا پوشا هستند؟
ب) چند تابع از B به A وجود دارند؟ چندتا از اینها پوشا هستند؟ چندتا یک به یک هستند؟

۵. تحقیق کنید که به‌ازای $n = ۵$، و $m = ۲, ۳, ۴$،

$$\sum_{k=۰}^{n} (-۱)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m = ۰$$

۶. یک پژوهشگر شیمی، که پنج دستیار آزمایشگاهی دارد مشغول انجام طرحی پژوهشی برای تهیهٔ ۹ ترکیب شیمیایی است. این شیمیدان به چند راه می‌تواند تهیهٔ این ترکیبها را به پنج دستیارش محول کند به‌قسمی که هریک از آنها حداقل روی تهیهٔ یک ترکیب کار کند؟

۷. با استفاده از این واقعیت که هر معادلهٔ چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی و از درجهٔ فرد یک ریشهٔ حقیقی دارد نشان دهید که تابع $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ که با ضابطهٔ $f(x) = x^5 - 2x^2 + x$ تعریف می‌شود تابعی پوشاست. آیا f یک به یک است؟

۸. فرض کنید هفت توپ با رنگهای مختلف و چهار ظرف به شماره‌های I، II، III، و IV داریم. (الف) به چند راه می‌توانیم توپها را بین ظرفها توزیع کنیم بدون آنکه ظرفی خالی بماند؟ (ب) در گردایهٔ این هفت توپ رنگی، یکی آبی است. به چند راه می‌توانیم توپها را توزیع کنیم به‌قسمی که ظرفی خالی نماند و توپ آبی در ظرف II قرار گیرد؟ (ج) اگر شمارهٔ ظرفها را برداریم به‌قسمی که ازهم متمایز نباشند به چند راه می‌توانیم هفت توپ رنگی را در این چهار ظرف همانند توزیع کنیم به‌شرط آنکه یک یا چند ظرف بتوانند خالی باشند؟

۹. دو سطر بعدیِ $(m = 9, 10)$ جدول ۱.۵ برای عددهای استرلینگ $S(m,n)$، $1 \le n \le m$ را تعیین کنید.

۱۰. برای محاسبهٔ اعداد استرلینگ $S(m,n)$ وقتی $1 \le m \le 12$ و $1 \le n \le m$، برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید).

۱۱. فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4\}$. برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید) که به تصادف تابعی از A به B را تولید کند و پوشا بودن یا نبودن آن‌را چاپ کند.

۴.۵ تابعهای خاص

در بخش ۲ از فصل ۳ گفتیم که عمل جمع یک عمل دوتایی در مجموعهٔ $\mathbf{Z}^+$ است، در حالی‌که $\cap$ یک عمل دوتایی بر $\mathscr{P}(\mathscr{U})$، برای هر مجموعهٔ عام مفروض $\mathscr{U}$، است. همچنین در آن بخش تذکر دادیم که «منفی کردن» یک عدد صحیح، عملی یکتایی بر $\mathbf{Z}$ است. اینک وقت آن است که مفاهیم عملهای دوتایی و یکتایی را برحسب تابعها دقیقتر تعریف کنیم.

تعریف ۱۰.۵ برای هر مجموعهٔ A، هر تابع $f : A \times A \to A$ را عمل دوتایی بر A می‌نامند.

تعریف ۱۱.۵ تابع $g : A \to A$ را عمل یکتایی بر A می‌نامند.

مثال ۲۱.۵ (الف) تابع $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ که به وسیلهٔ $f(a,b) = a - b$ تعریف می‌شود عملی دوتایی روی $\mathbf{Z}$ است. (ب) اگر $g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ تابعی باشد که برای آن $g(a) = ۱/a$، آن‌گاه g عمل یکتایی بر $\mathbf{R}^+$ است. □

مثال ۲۲.۵ فرض کنید $\mathscr{U}$ مجموعه‌ای عام و $A, B \subseteq \mathscr{U}$. (الف) اگر

$$f : \mathscr{P}(\mathscr{U}) \times \mathscr{P}(\mathscr{U}) \to \mathscr{P}(\mathscr{U})$$

با برابری $f(A, B) = A \cup B$ تعریف شود، آن‌گاه f عملی دوتایی بر $\mathscr{P}(\mathscr{U})$ است. (ب) تابع

$$g : \mathscr{P}(\mathscr{U}) \to \mathscr{P}(\mathscr{U})$$

که با $g(A) = \overline{A}$ تعریف شده است عملی یکتایی بر $\mathscr{P}(\mathscr{U})$ است. □

تعریف ۱۲.۵ فرض کنید $f : A \times A \to A$، یعنی f عملی دوتایی بر A است.

الف) f را تعویضپذیر گویند اگر به‌ازای همهٔ $(a,b) \in A \times A$،

$$f(a,b) = f(b,a)$$

ب) f را شرکتپذیر گویند اگر به‌ازای $a, b, c \in A$،

$$f(f(a,b),c) = f(a, f(b,c))$$

مثال ۲۳.۵ عمل دوتایی مثال ۲۲.۵، عملی تعویضپذیر و شرکتپذیر است، در حالی‌که عمل دوتایی مثال ۲۱.۵ هیچ کدام نیست. □

مثال ۲۴.۵ الف) عمل دوتایی $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ را با $f(a,b) = a + b - ۳ab$ تعریف می‌کنیم. چون جمع و ضرب اعداد صحیح، عملهای دوتایی تعویضپذیرند نتیجه می‌شود که

$$f(a,b) = a + b - ۳ab = b + a - ۳ba = f(b,a)$$

لذا f تعویضپذیراست.

برای تعیین اینکه آیا f شرکتپذیر است یا نه، $a, b, c \in \mathbf{Z}$ را در نظر می‌گیریم. پس

$$f(a, b) = a + b - ۳ab$$

و

$$\begin{aligned} f(f(a, b), c) &= f(a, b) + c - ۳f(a, b)c \\ &= (a + b - ۳ab) + c - ۳(a + b - ۳ab)c \\ &= a + b + c - ۳ab - ۳ac - ۳bc + ۹abc \end{aligned}$$

در حالی‌که

$$f(b, c) = b + ۳ - ۳bc$$

و

$$\begin{aligned} f(a, f(b, c)) &= a + f(b, c) - ۳af(b, c) \\ &= a + (b + c - ۳bc) - ۳a(b + c - ۳bc) \\ &= a + b + c - ۳ab - ۲ac - ۳bc + ۹abc \end{aligned}$$

چون به‌ازای هر $a, b, c \in \mathbf{Z}$، $f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c))$، عمل دوتایی همچنان‌که تعویضپذیر است شرکتپذیر هم هست.

ب) عمل دوتایی $h : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ را در نظر می‌گیریم، که در آن $h(a, b) = a|b|$. پس $h(۳, -۲) = ۳|-۲| = ۳(۲) = ۶$، اما $h(-۲, ۳) = -۲|۳| = -۶$. بنابراین h تعویضپذیر نیست. اما در مورد ویژگی شرکتپذیری، اگر $a, b, c \in \mathbf{Z}$، به‌دست می‌آوریم که

$$h(h(a, b), c) = h(a, b)|c| = a|b||c|$$

و

$$h(a, h(b, c)) = a|h(b, c)| = a|b||c| = a|b||c|$$

لذا عمل دوتایی h شرکتپذیر است. □

مثال ۲۵.۵ اگر $A = \{a, b, c, d\}$، آن‌گاه ۱۶ $= |A \times A|$. بنابراین، $۴^{۱۶}$ تابع $f : A \times A \to A$؛ یعنی، $۴^{۱۶}$ عمل دوتایی بر A وجود دارند.

برای تعیین تعداد عملهای دوتایی تعویضپذیر g بر A، قبول می‌کنیم که چهار انتخاب برای هریک از تخصیصهای $g(a,a)$، $g(b,b)$، $g(c,c)$، و $g(d,d)$ وجود دارند. در این صورت $۱۲ = ۴ - ۱۶ = ۴ - ۴^{۲}$ جفت مرتب (در $A \times A$) به‌صورت (x,y)، $x \neq y$ باقی می‌ماند. برای اطمینان از تعویضپذیری باید این ۱۲ جفت مرتب را به‌صورت مجموعه‌های دوتایی در نظر بگیریم. مثلاً $g(a,b) = g(b,a)$ را لازم داریم، و ممکن است هریک از چهار عنصر A را برای $g(a,b)$ انتخاب کنیم. اما در این صورت باید این انتخاب را به $g(b,a)$ نیز تخصیص داد. بنابراین، چون چهار انتخاب برای هر یک از این $۶ = ۱۲/۲$ مجموعه از دو جفت مرتب وجود دارند، نتیجه می‌گیریم که تعداد عملهای دوتایی تعویضپذیر بر A برابر است با $۴^{۱۰} = ۴^{۶} \cdot ۴^{۴}$. □

چند مثالی از تابعها را (در مثالهای ۲۱.۵، ۲۲.۵، و ۲۴.۵) دیده‌اید که در آنها حوزه، حاصلضرب برداری مجموعه‌هاست، اینک تابعهایی را بررسی می‌کنیم که در آنها حوزه، زیرمجموعهٔ حاصلضرب برداری است.

تعریف ۱۳.۵ برای دو مجموعهٔ A، B، اگر $D \subseteq A \times B$، آن‌گاه $\pi_A : D \to A$ که با $\pi_A(a,b) = a$ تعریف شده است، تصویر روی اولین مختص نامیده می‌شود.

تابع π_B را به‌گونه‌ای مشابه تعریف می‌کنند. متذکر می‌شویم که اگر $D = A \times B$، هم π_A و هم π_B هر دو تابع پوشا هستند.

مثال ۲۶.۵ اگر $A = \{w, x, y\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، فرض کنید

$$D = \{(x, ۱), (x, ۲), (x, ۳), (y, ۱), (y, ۴)\}$$

در این صورت تصویر $\pi_A : D \to A$ در $\pi_A(x,۱) = \pi_A(x,۲) = \pi_A(x,۳) = x$ و $\pi_A(y,۱) = \pi_A(y,۴) = y$ صدق می‌کند. چون $\pi_A(D) = \{x, y\} \subset A$، این تابع پوشا نیست.

برای $\pi_B : D \to B$ به‌دست می‌آوریم که $\pi_B(x,۱) = \pi_B(y,۱) = ۱$، $\pi_B(x,۲) = ۲$، $\pi_B(x,۳) = ۳$، و $\pi_B(y,۴) = ۴$، لذا $\pi_B(D) = B$ و این تصویر، تابعی پوشاست. □

مثال ۲۷.۵ فرض کنید $A = B = \mathbf{R}$ و مجموعهٔ $D \subseteq A \times B$ را در نظر بگیرید که برای آن، $D = \{(x,y) | y = x^{۲}\}$. در این صورت D معرف زیرمجموعه‌ای از صفحهٔ اقلیدسی است که شامل نقاط روی سهمی $y = x^{۲}$ است.

بین تعداد نامتناهی نقاط D، نقطهٔ $(۳,۹)$ را در نظر می‌گیریم. در اینجا $\pi_A(۳,۹) = ۳$، که مختص x نقطهٔ $(۳,۹)$ است، در حالی‌که $\pi_B(۳,۹) = ۹$، که مختص y نقطه است.

برای این مثال، $\pi_A(D) = \mathbf{R} = A$، لذا π_A پوشاست. (تصویر $\pi(A)$ نیز یک به یک است.) اما، $\pi_B(D) = [\circ, +\infty) \subset \mathbf{R}$، لذا π_B پوشا نیست. (یک به یک هم نیست، مثلاً، $\pi_B(۲,۴) = ۴ = \pi_B(-۲,۴)$.) □

اینک، مفهوم تصویر را به‌صورت زیر تعمیم می‌دهیم. فرض کنید $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n مجموعه‌هایی باشند، و $\{i_۱, i_۲, \cdots, i_m\} \subseteq \{۱,۲,\cdots,n\}$ با $i_۱ < i_۲ < \cdots < i_m$ و $m \leq n$. برای $D \subseteq A_۱ \times A_۲ \times \cdots \times A_n = \times_{i=۱}^{n} A_i$، تابع

$$\pi : D \to A_{i_۱} \times A_{i_۲} \times \cdots \times A_{i_m}$$

که با $\pi(a_۱, a_۲, \cdots, a_n) = (a_{i_۱}, a_{i_۲}, \cdots, a_{i_m})$ تعریف شده است، تصویر D روی $i_۱$امین، $i_۲$امین، ...، i_mامین مختص است. عنصرهای D را n تایی می‌نامند، در حالی‌که یک عنصر در $\pi(D)$ یک m تایی است.

این تصاویر در بررسی پایه‌های داده‌های رابطه‌ای به طریقی طبیعی پدید می‌آیند. پایه‌های داده‌های رابطه‌ای تکنیکی متعارف برای تنظیم و توصیف کمیتهای بزرگ داده‌ها به‌وسیلهٔ دستگاههای جدید محاسبهٔ بزرگ‌ـمقیاس است. در مواردی نظیر کارت اعتباری معاملات، نه‌تنها باید داده‌های موجود تنظیم شوند بلکه داده‌های جدید، مثل وقتی که کارتهای اعتباری برای افرادی جدید صادر می‌شود، باید درج شوند. وقتی حواله‌ها براساس حسابهای موجود پرداخت می‌شوند، یا وقتی خریدهای جدید براساس این حسابها انجام می‌گیرند باید داده‌ها روزآمد شوند. نمونهٔ دیگر، وقتی رخ می‌دهد که به ملاحظاتی خاص سوابقی جستجو می‌شوند، مثل موقعی که ادارهٔ پذیرشهای یک دانشکده، سوابق آموزشی و آدرس دانشجویانی را جستجو می‌کند که در دورهٔ دبیرستان کارهای ریاضی مهم و سطح بالایی انجام داده‌اند. مثال زیر، استفاده از تصاویر را در روشی برای تنظیم و توصیف داده‌ها در مقیاسی کمی کوچکتر نشان می‌دهد.

مثال ۲۸.۵ در دانشگاهی مجموعه‌های زیر برای ثبت‌نام لازم‌اند:

$A_۱ =$ مجموعهٔ شماره‌های درسی برای درسهایی که در زمینهٔ ریاضیات عرضه می‌شوند

$A_۲ =$ مجموعهٔ عنوانهای دروسی که در زمینهٔ ریاضیات عرضه می‌شوند

$A_۳ =$ مجموعهٔ اسامی استادان ریاضی

$A_۴ =$ مجموعهٔ حروف الفبا

جدول یا رابطهٔ $D \subseteq A_۱ \times A_۲ \times A_۳ \times A_۴$ در جدول ۲.۵ داده شده است.

جدول ۲.۵

شمارهٔ درس	عنوان درس	استاد	حرف بخش
MA 111	Calculus I	G. Sherman	A
MA 111	Calculus I	V. Larney	B
MA 112	Calculus II	J. Kinney	A
MA 112	Calculus II	A. Schmidt	B
MA 112	Calculus II	R. Mines	C
MA 113	Calculus III	J. Kinney	A
MA 113	Calculus III	A. Schmidt	B

جدول ۳.۵

شمارهٔ درس	استاد	حرف بخش
MA 111	G. Sherman	A
MA 111	V. Larney	B
MA 112	J. Kinney	A
MA 112	A. Schmidt	B
MA 112	R. Mines	C
MA 113	J. Kinney	A
MA 113	A. Schmidt	B

جدول ۴.۵

شمارهٔ درس	عنوان درس
MA 111	Calculus I
MA 112	Calculus II
MA 113	Calculus III

مجموعه‌های A_1، A_2، A_3، A_4 را حوزه‌های پایهٔ داده‌های رابطه‌ای می‌نامند و می‌گویند جدول D، دارای ۴ درجه است. هر عنصر D را اغلب یک فهرست می‌خوانند.

در جدول ۳.۵، تصویر D روی $A_1 \times A_3 \times A_4$ نشان داده شده است. جدول ۴.۵ نتیجه‌ها را برای تصویر D روی $A_1 \times A_2$ نشان می‌دهد.

جدولهای ۳.۵ و ۴.۵ راه دیگر نمایش همان داده‌ها هستند که در جدول ۲.۵ آمده‌اند. با داشتن جدولهای ۳.۵ و ۴.۵ می‌توان جدول ۲.۵ را بازیافت. □

سر و کار نظریهٔ پایه‌های داده‌های رابطه‌ای، با نمایش داده‌ها به راهها و با عملهای مختلف نظیر تصویرهاست که برای چنین نمایشهایی مورد نیازند. پیاده کردن کامپیوتری چنین تکنیکهایی نیز در نظر گرفته شده‌اند. از این مقوله و مقوله‌های دیگر، در تمرینها و مراجع فصل مطالب بیشتری ذکر شده‌اند.

تمرینهای ۴.۵

۱. هریک از تابعهای $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ زیر، عملی دوتایی بر $\mathbf{Z}$اند. تعیین کنید در هر مورد از موارد زیر، f تعویضپذیر و (یا) شرکتپذیر است.

الف) $f(x, y) = x + y - xy$ ب) $f(x, y) = \max\{x, y\}$

ج) $f(x, y) = x^y$ د) $f(x, y) = x + y - 3$

۲. فرض کنید $|A| = 5$. (الف) مطلوب است $|A \times A|$ (ب) چند تابع $f : A \times A \to A$ وجود دارند؟ (ج) چند عمل دوتایی بر A وجود دارند؟ (د) چندتا از این عملهای دوتایی تعویضپذیرند؟

۳. فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. (الف) چند عمل دوتایی $f : A \times A \to A$ با $f(a_1, a_2) = a_3$ وجود دارند؟ (ب) چند عمل دوتایی از عملهای قسمت (الف) تعویضپذیرند؟

۴. برای مجموعهٔ A و عمل دوتایی $f : A \times A \to A$، عنصر $z \in A$ را عنصر همانی برای f می‌نامند اگر به‌ازای هر $a \in A$، $f(a, z) = a = f(z, a)$. کدام‌یک از عملهای دوتایی در تمرین ۱ دارای عنصر همانی است؟

۵. اگر $f : A \times A \to A$ دارای عنصر همانی باشد، این عنصر یکتاست. زیرا فرض کنید که $z_1, z_2 \in A$ هر دو عنصر همانی باشند. آن‌گاه

$$z_1 = f(z_1, z_2) = z_2$$

(زیرا z_2 یک عنصرهمانی برای f است)   چرا؟

۶. فرض کنید $A = \{z, a, b, c, d\}$. (الف) چند عمل دوتایی $f : A \times A \to A$ دارای عنصر همانی z هستند؟ (ب) چندتا از این عملهای دوتایی تعویضپذیرند؟

۷. فرض کنید $A = B = \mathbf{R}$. برای هریک از مجموعه‌های $D \subseteq A \times B$ی زیر، $\pi_A(D)$ و $\pi_B(D)$ را تعیین کنید.

الف) $D = \{(x, y) | x = y^2\}$

ب) $D = \{(x, y) | y = \sin x\}$

ج) $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$

۸. الف) فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، $B = \{w, x, y, z\}$ و $D \subseteq A \times B$. اگر π_A و π_B هر دو تابعهایی پوشا باشند، مقدار مینیمال ممکن برای $|D|$ چقدر است؟

ب) برای A و B قسمت (الف) از π_A و π_Bهایی که پوشا هستند چند مجموعهٔ مینیمال Dی مختلف نتیجه می‌شود؟

جدول ۵.۵

مقدار مصرفی روزانهٔ پروتئین در هر اونس که توصیه می‌شود	درصد مقدار مصرفی روزانهٔ ویتامین C در هر اونس که توصیه می‌شود	درصد مقدار مصرفی روزانهٔ ویتامین A* در هر اونس که توصیه می‌شود	میزان مصرف روزانهٔ گرمهای قند در هر اونس که توصیه می‌شود	نام اختصاری غلات
۶	۲۵	۲۵	۱	U
۴	۲	۲۵	۷	V
۴	۲	۲۵	۱۲	W
۲۰	۴۰	۶۰	۰	X
۱۰	۴۰	۲۵	۳	Y
۱۰	۴۰	۲۵	۲	Z

* (مصرف مجاز روزانه که توصیه می‌شود =RDA)

ج) نتایج قسمتهای (الف) و (ب) را تعمیم دهید.

۹. فرض کنید A_i، $۱ \leq i \leq ۵$، حوزه‌های مربوط به یک جدول $D \subseteq \times_{i=۱}^{۵} A_i$ باشند که در آن $A_۱ = \{U, V, W, X, Y, Z\}$ (که به‌عنوان نامهای اختصاری غلات مختلف در یک آزمون به‌کار رفته‌اند)؛ و $A_۲ = A_۳ = A_۴ = A_۵ = \mathbf{Z}^+$. جدول D به‌صورت جدول ۵.۵ داده شده است:

الف) درجهٔ جدول چیست؟

ب) تصویر D را بر $A_۳ \times A_۴ \times A_۵$ بیابید.

ج) حوزه‌ای از جدول را کلید اصلی جدول می‌نامند اگر مقدارش هر فهرست از D را به‌صورتی یکتا مشخص کند. کلید(های) اصلی این جدول را تعیین کنید.

۱۰. فرض کنید A_i، $۱ \leq i \leq ۵$ حوزه‌هایی برای جدول $D \subseteq \times_{i=۱}^{۵} A_i$ باشند، که در آن $A_۱ = \{۱, ۲\}$ ($A_۱$ برای مشخص کردن کپسول ویتامینی است که به‌وسیلهٔ دو شرکت دارویی تولید شده است)؛ $A_۲ = \{A, D, E\}$؛ $A_۳ = A_۴ = A_۵ = \mathbf{Z}^+$. جدول D به‌صورت جدول ۶.۵ داده شده است:

الف) مطلوب است درجهٔ جدول.

ب) مطلوب است تصویر D بر $A_۱ \times A_۲$ و بر $A_۳ \times A_۴ \times A_۵$.

ج) در این جدول کلید اصلی وجود ندارد. (تمرین ۹ را ببینید.) اما می‌توانیم یک کلید اصلی مرکب را به‌عنوان حاصلضرب خارجی تعداد مینیمال حوزه‌های جدول تعریف کنیم که مؤلفه‌هایش اگر به‌صورت جمعی اختیار شوند به‌گونه‌ای یکتا هر فهرست D را مشخص می‌کنند. برای این جدول چندتا از کلیدهای اصلی مرکب را تعیین کنید.

جدول ۶.۵

تعداد کپسولها در هر شیشه	مقدار مصرفی کپسول در روز	مقدار ویتامین کپسول برحسب IU*	ویتامین موجود در کپسول	کپسول ویتامین
۱۰۰	۱	۱۰۰۰۰	A	۱
۱۰۰	۱	۴۰۰	D	۱
۱۰۰	۱	۳۰	E	۱
۲۵۰	۱	۴۰۰۰	A	۲
۲۵۰	۱	۴۰۰	D	۲
۲۵۰	۱	۱۵	E	۲

* واحد بین‌المللی = IU

۵.۵ اصل لانهٔ کبوتر (اصل حجره‌ها)

حال وقت آن است که به‌عنوان تنوع، اصل توزیع جالبی را معرفی کنیم. ممکن است به‌نظر برسد که این اصل وجه مشترکی با آنچه تاکنون انجام داده‌ایم ندارد، ولی ثابت خواهد شد که با وجود این، اصلی مفید است.

در ریاضیات گاهی به مفهوم تقریباً واضحی برمی‌خوریم که وقتی آن‌را به طریقی نسبتاً دقیق به‌کار بریم، کلید مورد نیاز برای حل مسأله‌ای مشکل است. در زمرهٔ این چنین مفاهیم واضح، بی‌شک بسیاری قاعدهٔ زیر را که به اصل لانهٔ کبوتر معروف است قرار می‌دهند.

اصل لانهٔ کبوتر: اگر m کبوتر، n لانه را اشغال کنند، و $m > n$، حداقل یک لانه وجود دارد که دو یا چند کبوتر در آن آشیان می‌کنند.

اینک ببینیم، آشیان کردن کبوترها در لانه‌ها با ریاضیات گسسته، ترکیبیاتی یا غیر آن چه ارتباطی دارد؟ نتیجه آنکه، در مسائلی مختلف که سعی داریم ثابت کنیم موردی واقعاً رخ می‌دهد یا نه این اصل را می‌توان به‌کار برد. این مطلب را در مثالهای زیر روشن می‌کنیم. استفاده از این اصل را در بخش ۶.۵ و جاهای دیگر متن کتاب مفید خواهیم یافت.

مثال ۲۹.۵ در اداره‌ای ۱۳ بایگان وجود دارند، به‌طوری که حداقل دوتا از آنها روز تولدشان در یک ماه است. (در اینجا ۱۳ کبوتر (بایگان) و ۱۲ لانهٔ کبوتر (ماههای سال) داریم.) □

در زیر کاربرد نسبتاً مستقیم دیگری از اصل لانهٔ کبوتر را ملاحظه می‌کنید.

مثال ۳۰.۵ بهرام از لباسشویی با ۱۲ جفت جوراب (هر جفت از یک رنگ) که در کیسه‌ای ریخته است به خانه برمی‌گردد. لنگه جورابها را به تصادف از کیسه بیرون می‌آورد. او مجبور است حداکثر ۱۳ لنگه را بیرون بیاورد تا یک جفت جوراب داشته باشد. □

از اینجا به بعد با کاربرد ظریفتر اصل لانهٔ کبوتر مواجه خواهید شد.

مثال ۳۱.۵ دانشجویی از کامپیوتری با نوارگردان مغناطیسی بهره‌برداری می‌کند. یک‌روز به او نواری داده می‌شود که شامل ۵۰۰۰۰۰ «واژه» از چهار حرف یا کمتر، از حروف کوچک است. (واژه‌های متوالی روی نوار با نویسهٔ متمایز ازهم جدا شده‌اند.) آیا همهٔ ۵۰۰۰۰۰ واژه می‌توانند ازهم متمایز باشند؟

بنابر اصلهای جمع و ضرب، تعداد کل واژه‌های ممکن مختلف، با استفاده از چهار حرف یا کمتر، برابر است با

$$۲۶^۴ + ۲۶^۳ + ۲۶^۲ + ۲۶ = ۴۷۵۲۵۴$$

با این ۴۷۵۲۵۴ واژه به‌عنوان لانه، و ۵۰۰۰۰۰ واژه روی نوار به‌عنوان کبوتر، نتیجه می‌شود که حداقل یک واژه روی نوار وجود دارد که تکراری است. □

مثال ۳۲.۵ فرض کنید $S \subset \mathbf{Z}^+$، و $|S| = ۳۷$. در این صورت S شامل دو عنصر است که وقتی بر ۳۶ تقسیم شوند دارای یک باقیمانده‌اند.

در اینجا کبوترها ۳۷ عدد صحیح مثبت از S هستند. در الگوریتم تقسیم (قضیهٔ ۵.۴) دیده‌ایم که وقتی یک عدد صحیح مثبت n بر ۳۶ تقسیم شود، خارج‌قسمت یکتای q و باقیماندهٔ یکتای r خواهد داشت، که برای آنها

$$n = ۳۶q + r, \qquad ۰ \leq r < ۳۶$$

۳۶ مقدار ممکن، r لانهٔ کبوتر را تشکیل می‌دهند، و اینک نتیجه به‌وسیلهٔ اصل لانهٔ کبوتر ثابت می‌شود.□

مثال ۳۳.۵ ثابت کنید که اگر ۱۰۱ عدد صحیح از مجموعهٔ $S = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۲۰۰\}$ انتخاب شوند، آن‌گاه بین آنها دو عدد صحیح وجود دارند که یکی از آنها دیگری را می‌شمارد.

برای هر $x \in S$، می‌توان نوشت $x = ۲^k y$، $k \geq ۰$، و $(۲, y) = ۱$. (این مطلب، از قضیهٔ اصلی حساب نتیجه می‌شود.) در این صورت $y \in T = \{۱, ۳, ۵, \cdots, ۱۹۹\}$، که در آن $|T| = ۱۰۰$. چون ۱۰۱ عدد صحیح از S انتخاب شده‌اند، بنابر اصل لانهٔ کبوتر دو عدد صحیح به‌صورت $a = ۲^m y$، $b = ۲^n y$ وجود دارند. اگر $m \leq n$، آن‌گاه $a|b$؛ در غیر این‌صورت $b|a$. □

مثال ۳۴.۵ هر زیرمجموعهٔ به اندازهٔ شش از مجموعهٔ $S = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۹\}$ باید شامل دو عنصر باشد که مجموعشان ۱۰ است.

در اینجا، اعداد ۱، ۲، ۳، ...، ۹ کبوترها هستند، در حالی‌که لانه‌های کبوتر زیرمجموعه‌های $\{۱, ۹\}$، $\{۲, ۸\}$، $\{۳, ۷\}$، $\{۴, ۶\}$، $\{۵\}$ هستند. وقتی ۶ کبوتر به لانهٔ خود می‌روند باید حداقل یکی از زیرمجموعه‌های دوعنصری را که مجموع دو عنصرشان ۱۰ است پر کنند. □

مثال ۳۵.۵ مثلث ACE با $AC = ۱$ متساوی‌الاضلاع است. اگر پنج نقطه در درون این مثلث انتخاب شوند، حداقل دو نقطه وجود دارند که فاصلهٔ آنها ازهم کوچکتر از $\frac{۱}{۲}$ است.

برای مثلث شکل ۶.۵، چهار مثلث کوچکتر، مثلثهایی متساوی‌الاضلاع و قابل انطباق باهم‌اند و $AB = ۱/۲$. ما ناحیهٔ درونی مثلث ACE را به چهار ناحیه که دوبه‌دو مجزا هستند تفکیک می‌کنیم.

$R_۱$: درون مثلث BCD همراه با نقاط پاره‌خط BD، به‌غیر از نقاط B و D

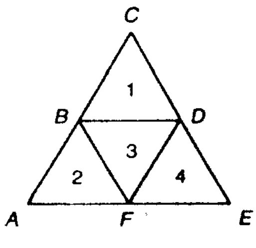
$R_۲$: درون مثلث ABF

$R_۳$: درون مثلث BDF همراه با نقاط پاره‌خطهای BF و DF به غیر از نقاط B، D، F

$R_۴$: درون مثلث FDE

اینک اصل لانهٔ کبوتر را به‌کار می‌بریم. پنج نقطه در درون مثلث ACE باید باشند چنان‌که حداقل دوتای آنها در یکی از چهار ناحیهٔ R_i، $۱ \leq i \leq ۴$، بیفتند که هر دو نقطه با فاصله‌ای کمتر از ۱/۲ ازهم جدا شده‌اند. □

مثال ۳۶.۵ فرض کنید S مجموعه‌ای از شش عدد صحیح مثبت باشد که بزرگترین آنها حداکثر ۱۴ است. نشان دهید که مجموعهای عناصر در همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی S نمی‌توانند همگی متمایز ازهم باشند.



شکل ۶.۵

برای هر زیرمجموعهٔ ناتهی A از S، مجموع عناصر A را با s_A نشان می‌دهیم که در رابطهٔ $۶۹ = ۱۴ + \cdots + ۱۰ + ۹ \geq s_A \geq ۱$ صدق می‌کند، و $۶۳ = ۱ - ۲^۶$ زیرمجموعهٔ ناتهی برای S وجود دارند. مایلیم این نتیجه را از اصل لانهٔ کبوتر استخراج کنیم بدین طریق که مجموعهای ممکن از ۱ تا ۶۹ را لانه‌های کبوتر و ۶۳ زیرمجموعهٔ ناتهی S را کبوترها فرض کنیم، اما در این صورت تعداد کبوترها خیلی کم می‌شود.

بنابراین، به‌جای در نظر گرفتن همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی S، به آن زیرمجموعه‌های ناتهی A توجه می‌کنیم که برای آنها $|A| \leq ۵$. پس، $۱ \leq s_A \leq ۱۰ + ۱۱ + \cdots + ۱۴ = ۶۰$ چون ۶۲ زیرمجموعهٔ ناتهی از S با ویژگی $|A| \leq ۵$ وجود دارند، عناصر حداقل دو تا از این زیرمجموعه‌ها باید یک مجموع را نتیجه دهند. □

مثال ۳۷.۵ اکبر در طول تعطیل چهارهفته‌ای خود هر روز حداقل یک دور تنیس بازی می‌کند، ولی در طی این مدت جمعاً بیش از ۴۰ دور بازی نخواهد کرد. ثابت کنید که توزیع دفعات دورهای بازی او در طی چهار هفته هرچه باشد، تعدادی از روزهای متوالی وجود دارد که طی آنها دقیقاً ۱۵ دور بازی می‌کند.

برای $۱ \leq i \leq ۲۸$، فرض کنید x_i تعداد کل دورهایی باشد که اکبر از آغاز تعطیلات تا پایان روز iام بازی کرده است. پس

$$۱ \leq x_۱ < x_۲ < \cdots < x_{۲۸} \leq ۴۰ \quad \text{و} \quad x_۱ + ۱۵ < \cdots < x_{۲۸} + ۱۵ \leq ۵۵$$

اینک ۲۸ عدد متمایز $x_۱$، $x_۲$، ...، $x_{۲۸}$ و ۲۸ عدد متمایز $x_۱ + ۱۵$، $x_۲ + ۱۵$، ...، $x_{۲۸} + ۱۵$ داریم. این ۵۶ عدد می‌توانند تنها ۵۵ مقدار مختلف اختیار کنند، بنابراین حداقل دوتا از آنها باید مساوی بوده و نتیجه می‌گیریم که رابطهٔ $۱ \leq j \leq i \leq ۲۸$ با شرط $x_i = x_j + ۱۵$ وجود دارد. لذا از شروع روز $(j + ۱)$ام تا آخر روز iام اکبر دقیقاً ۱۵ دور بازی خواهد کرد. □

تمرینهای ۵.۵

۱. در مثال ۳۰.۵ نقشهای کبوترها و لانه‌ها در استفاده از اصل لانهٔ کبوتر چه هستند؟

۲. نشان دهیدکه اگر دراطاقی هشت نفر باشند، حداقل روز تولد دوتای آنها، دریک روز هفته خواهد بود.

۳. چندبار باید تاسی را بیندازیم تا یک شماره (الف) حداقل دوبار (ب) حداقل سه‌بار (ج) حداقل nبار، $n \geq ۴$، به‌دست آید؟

۴. ۸ کتاب مربوط به زبان پاسکال، ۱۷ کتاب **فورترن**، ۶ کتاب **APL**، ۱۲ کتاب **کوبول** و ۲۰ کتاب **بیسیک** داده شده‌اند. چندتا از این کتابها را باید انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم که ۱۰ کتاب از یک نوع زبان داریم؟

۵. تالاری ظرفیت نشستن ۸۰۰ نفر را دارد. چند صندلی باید اشغال شود تا مطمئن شویم که حداقل دو نفر از افرادی که در تالار نشسته‌اند اولین و آخرین حرف نام آنها یکی است؟

۶. **الف)** فرض کنید $S \subset \mathbf{Z}^+$. کوچکترین مقدار $|S|$ چقدر باید باشد تا وجود دو عنصر $x, y \in S$ را تضمین کند که باقیمانده‌های تقسیم آنها بر ۱۰۰۰ یکی باشند؟

ب) اگر $S \subset \mathbf{Z}^+$، کوچکترین مقدار $|S|$ را تعیین کنید که سه عنصر $x, y, z \in S$ به‌قسمی وجود داشته باشند که باقیمانده‌های تقسیم هر سه بر ۱۰۰۰ یکی باشند؟

ج) گزاره‌ای بنویسید که تعمیم نتایج قسمتهای (الف) و (ب) و مثال ۳۲.۵ باشد.

۷. **الف)** ثابت کنید که اگر از مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \cdots, 300\}$، ۱۵۱ عدد صحیح انتخاب شود، این انتخاب باید شامل دو عدد صحیح x و y باشد چنانکه یا $x|y$ یا $y|x$.

ب) گزاره‌ای بنویسید که تعمیم نتایج قسمت (الف) و مثال ۳۳.۵ باشد.

۸. ثابت کنید که اگر از مجموعهٔ $S = \{1, 2, 3, \cdots, 200\}$، ۱۰۱ عدد صحیح انتخاب کنیم m و nی در انتخاب وجود دارند که برای آنها $(m, n) = 1$.

۹. **الف)** نشان دهید که اگر ۱۴ عدد صحیح دلخواه از مجموعهٔ $S = \{1, 2, 3, \cdots, 25\}$ انتخاب شود حداقل دو عدد وجود دارند که مجموع آنها ۲۶ است.

ب) گزاره‌ای بنویسید که تعمیم نتایج قسمت (الف) و مثال ۳۴.۵ باشد.

۱۰. فرض کنید $S = \{3, 7, 11, 15, 19, \cdots, 95, 99, 103\}$. از S چند عنصر باید انتخاب کنیم تا مطمئن شویم که حداقل دو عنصر وجود دارند که مجموعشان ۱۱۰ است؟

۱۱. **الف)** اگر از $\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$، ۱۱ عدد صحیح انتخاب شوند، ثابت کنید حداقل دو عدد، مثلاً x و y، وجود دارند که $0 < |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < 1$.

ب) گزاره‌ای بنویسید که تعمیم نتیجهٔ قسمت (الف) باشد.

۱۲. فرض کنید مثلث ABC با $AB = 1$ متساوی‌الاضلاع باشد. نشان دهید که اگر ۱۰ نقطه در درون این مثلث انتخاب کنیم حداقل، فاصلهٔ دوتای آنها ازهم کمتر از $1/3$ است.

۱۳. فرض کنید $ABCD$ مربعی با $AB = 1$ باشد. نشان دهید اگر پنج نقطه در درون این مربع انتخاب کنیم حداقل، فاصلهٔ دوتای آنها ازهم کمتر از $1/\sqrt{2}$ است.

۱۴. فرض کنید S مجموعهٔ پنج عدد صحیح مثبت باشد که بزرگترین آنها حداکثر ۹ است. ثابت کنید که مجموعهای عناصر در همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی S نمی‌توانند همگی ازهم متمایز باشند.

۱۵. در دبیرستانی ۴۵ دانش‌آموز را برای هشت نوع مسابقه ورزشی آموزش می‌دهند. اگر هر دانش‌آموز فقط برای یک مسابقه آموزش ببیند و برای هر مسابقه بیشتر از ۱۰ دانش‌آموز آموزش نبینند، ثابت کنید که حداقل در سه مسابقه پنج دانش‌آموز یا بیشتر برای دیدن آموزش وجود دارند.

۱۶. بهرام در طول شش هفتهٔ اول سال آخر دانشکده، خلاصهٔ سابقهٔ تحصیلاتش را برای شرکتهای مختلف فرستاده است. اگر هر روز و به هر شرکت حداقل یک خلاصه سابقه بفرستد و کلاً بیشتر از ۶۰ خلاصه سابقه نفرستد نشان دهید که دوره‌ای از روزهای متوالی وجود دارد که در طی آن، دقیقاً ۲۳ خلاصه سابقه می‌فرستد.

۱۷. **الف)** اگر $S \subseteq \mathbf{Z}^+$ و $|S| \geq ۳$، ثابت کنید که xی و yی در S وجود دارند که $x+y$ زوج است.

ب) فرض کنید $S \subseteq \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$. مطلوب است مقدار مینیمال $|S|$ که وجود زوجهای مرتب $(x_۱, x_۲), (y_۱, y_۲) \in S$ را به‌قسمی تضمین کند که $x_۱ + y_۱$ و $x_۲ + y_۲$ هر دو زوج باشند.

ج) با تعمیم ایده‌های قسمتهای (الف) و (ب)، $S \subseteq \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$ را در نظر بگیرید. اندازهٔ $|S|$ چقدر باید باشد تا وجود سه‌تاییهای مرتب $(x_۱, x_۲, x_۳), (y_۱, y_۲, y_۳) \in S$ را تضمین کند که برای آنها $x_۱ + y_۱$، $x_۲ + y_۲$ و $x_۳ + y_۳$ همگی زوج باشند؟

د) نتایج قسمتهای (الف)، (ب)، و (ج) را تعمیم دهید.

ه) نقطهٔ $P(x, y)$ در صفحهٔ دکارتی را نقطهٔ مشبکه‌ای می‌نامند اگر $x, y \in \mathbf{Z}$. اگر نقاط مشبکه‌ای $P_۱(x_۱, y_۱)$، $P_۲(x_۲, y_۲)$، ...، $P_n(x_n, y_n)$ مفروض باشند، کوچکترین مقدار n را تعیین کنید که وجود $P_i(x_i, y_i)$، $P_j(x_j, y_j)$، $۱ \leq i \leq j \leq n$ را به‌قسمی تضمین کند که نقطهٔ وسط پاره‌خط واصل $P_i(x_i, y_i)$ و $P_j(x_j, y_j)$، نیز نقطه‌ای مشبکه‌ای باشد.

۶.۵ ترکیب تابعی و تابعهای وارون

هنگام محاسبه با عنصرهای $\mathbf{Z}$، متوجه می‌شویم که عمل (دوتایی) جمع، روشی است برای ترکیب دو عدد صحیح، مثلاً a و b، و تبدیل آنها به عدد صحیح سومی، یعنی $a + b$. به‌علاوه، برای هر عدد صحیح c عدد صحیح دیگر d وجود دارد که برای آن $c + d = d + c = ۰$، و d را وارون جمعی c می‌نامیم. (همچنین درست است که c وارون جمعی d است.)

با در نظر گرفتن عنصرهای $\mathbf{R}$ و عمل (دوتایی) ضرب، روشی برای ترکیب هر دو عدد $r, s \in \mathbf{R}$ و تبدیل آنها به حاصلضربشان، rs، داریم. و در اینجا، برای هر $t \in \mathbf{R}$، اگر $t \neq ۰$، آن‌گاه عدد حقیقی u وجود دارد به‌قسمی که $ut = tu = ۱$. عدد حقیقی u را وارون ضربی t می‌نامند. (عدد حقیقی t نیز وارون ضربی u است.)

در این بخش ابتدا روشی را برای ترکیب دو تابع و تبدیل آنها به یک تابع مطالعه می‌کنیم. آن‌گاه مفهوم وارون (یک تابع) را برای تابعهای با ویژگیهای معین بسط می‌دهیم. برای انجام این اهداف، به مفهومهای مقدماتی زیر نیاز داریم.

اینک پس از اینکه تابعهایی را که یک به یک‌اند و تابعهایی را که پوشا هستند بررسی کردیم به تابعهایی که هر دو ویژگی را دارند برمی‌گردیم.

تعریف ۱۴.۵ اگر $f : A \to B$، آن‌گاه f را تابع دوسویی، یا یک تناظر یک به یک گویند، اگر f هم یک به یک و هم پوشا باشد.

مثال ۳۸.۵ اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، $B = \{w, x, y, z\}$، آن‌گاه

$$f = \{(۱, w), (۲, x), (۳, y), (۴, z)\}$$

تناظری یک به یک از A به (بر روی) B است، و $g = \{(w, ۱), (x, ۲), (y, ۳), (z, ۴)\}$ تناظری یک‌به‌یک از B به (برروی) A است. □

همان‌طور که در زیر دیده می‌شود، برای هر مجموعهٔ A، همیشه یک تناظر یک به یک خیلی ساده ولی مهم وجود دارد.

تعریف ۱۵.۵ تابع $۱_A : A \to A$ را که به‌وسیلهٔ $۱_A(a) = a$ به‌ازای هر $a \in A$ تعریف شده است تابع همانی برای A می‌نامند.

باید اشاره کنیم که هر وقت در فصل ۱ اصطلاح «تناظر» به‌کار می‌رفت، صفت «یک به یک» در آن مستتر بود بدون اینکه ذکری از آن به میان آید.

تعریف ۱۶.۵ اگر $f, g : A \to B$، می‌گوییم f و g برابرند و می‌نویسیم $g = f$، اگر به‌ازای هر $a \in A$، $f(a) = g(a)$.

خطری معمولی در بحث برابریهای تابعها وقتی ظاهر می‌شود که f و g تابعهایی با حوزهٔ مشترک A هستند و به‌ازای هر $a \in A$، $f(a) = g(a)$. ممکن است این حالتی نباشد که $f = g$. خطر، ناشی از عدم توجهی است که به «حوزه‌های تمام» تابعها شده است.

مثال ۳۹.۵ فرض‌کنید $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$، $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$، که در آنها به‌ازای هر $a \in \mathbf{Z}$، $f(x) = x = g(x)$. در این صورت f و g در حوزهٔ مشترک $\mathbf{Z}$ شریک‌اند و یک برد $\mathbf{Z}$ دارند و بر هر عنصر $\mathbf{Z}$ یکسان عمل می‌کنند. باز $f \neq g$! زیرا f تناظری یک به یک است، در حالی‌که g یک به یک است ولی پوشا نیست، بنابراین، «حوزه‌های تمام» آنها این تفاوت را موجب می‌شوند. □

اینک که از مقدمات ضروری بی‌نیاز شده‌ایم، وقت آن است که عملی را برای ترکیب دو تابع مناسب معرفی کنیم.

عملهایی را دیدیم که در ترکیب اعداد صحیح به‌کار می‌روند و همچنین برخی از آنها بر مجموعه‌ها عمل می‌کنند. اینک عملی را برای ترکیب دو تابع مناسب معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱۷.۵ اگر $f : A \to B$، $g : B \to C$، تابع مرکّبی را که به‌صورت $g \circ f : A \to C$ نشان داده می‌شود به‌وسیلهٔ $(g \circ f)(a) = g(f(a))$، به‌ازای هر $a \in A$، تعریف می‌کنیم.

مثال ۴۰.۵ فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، $B = \{a, b, c\}$، $C = \{w, x, y, z\}$ با $f : A \to B$، $g : B \to C$، که به‌وسیلهٔ

$$f = \{(۱, a), (۲, a), (۳, b), (۴, c)\}$$

و

$$g = \{(a, x), (b, y), (c, z)\}$$

داده شده اند. برای هر عنصر A پیدا می‌کنیم:

$$(g \circ f)(۱) = g(f(۱)) = g(a) = x \quad (g \circ f)(۳) = g(f(۳)) = g(b) = y$$
$$(g \circ f)(۲) = g(f(۲)) = g(a) = x \quad (g \circ f)(۴) = g(f(۴)) = g(c) = z$$

بنابراین

$$g \circ f = \{(۱, x), (۲, x), (۳, y), (۴, z)\}$$

□

مثال ۴۱.۵ فرض کنید $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$، $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ به‌وسیلهٔ $f(x) = x^۲$، $g(x) = x + ۵$ تعریف شوند. در این صورت

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^۲) = x^۲ + ۵$$

در حالی‌که

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + ۵) = (x + ۵)^۲ = x^۲ + ۱۰x + ۲۵$$

در اینجا $g \circ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ و $f \circ g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$، اما

$$(g \circ f)(۱) = ۶ \neq ۳۶ = (f \circ g)(۱)$$

لذا، حتی اگر هر دو تابع مرکب $f \circ g$ و $g \circ f$ را بتوان تشکیل داد برابری $f \circ g = g \circ f$ را نداریم. نتیجه آنکه، ترکیب تابعها، در حالت کلی، عملی تعویضپذیر نیست. □

در تعریف و مثالهای توابع مرکب لازم بود که حوزهٔ تمام f برابر حوزهٔ g باشد. برقراری حوزهٔg $\subseteq$ برد f، عملاً برای به‌دست آوردن تابع مرکب $g \circ f : A \to C$ کافی است. همین‌طور برای هر $f : A \to B$ ملاحظه می‌کنیم که $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$.

مطلب مهمی که مکرر در ریاضیات مطرح می‌شود بررسی این نکته است که آیا نتیجهٔ ترکیب دو موجود ریاضی که ویژگی مشترکی دارند دارای همان ویژگی هست یا نیست. مثلاً اگر A و B مجموعه‌هایی متناهی باشند، آن‌گاه $A \cap B$ و $A \cup B$ نیز متناهی‌اند. اما برای مجموعه‌های نامتناهی A و B، مجموعهٔ $A \cup B$ نامتناهی است ولی $A \cap B$ می‌تواند متناهی باشد. (مثالی بزنید.)

برای ترکیب تابعها قضایای زیر را داریم:

قضیه ۴.۵ فرض کنید $f : A \to B$، $g : B \to C$.

الف) اگر f و g یک به یک باشند، آن‌گاه $g \circ f$ یک به یک است.

ب) اگر f و g پوشا باشند، آن‌گاه $g \circ f$ پوشاست.

برهان الف) برای اثبات اینکه $g \circ f : A \to C$ یک به یک است، فرض کنید $a_1, a_2 \in A$ با $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$. پس

$$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \Rightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \Rightarrow f(a_1) = f(a_2)$$

زیرا g یک به یک است. همچنین $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$، زیرا f یک به یک است. در نتیجه $g \circ f$ یک به یک است.

ب) برای $g \circ f : A \to C$، فرض کنید $z \in C$. چون g پوشاست، yی متعلق به B وجود دارد که برای آن $g(y) = z$. با f پوشا، xی متعلق به A وجود دارد که برای آن $f(x) = y$. بنابراین، $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$، بنابراین

$$\text{حوزهٔ تمام}(g \circ f) = C = \text{برد}(g \circ f)$$

و $g \circ f$ پوشاست. ■

گرچه ترکیب تابعی تعویضپذیر نیست، اگر $f : A \to B$، $g : B \to C$، $h : C \to D$، دربارهٔ تابعهای $(h \circ g) \circ f$ و $h \circ (g \circ f)$ چه می‌توانیم بگوییم؟ یعنی آیا ترکیب تابعی شرکتپذیر است؟

قبل از بررسی قضیهٔ کلی، ابتدا مثالی خاص را بررسی می‌کنیم.

مثال ۴۲.۵ فرض کنید $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$، $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ و $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$، که در آن $f(x) = x^2$، $g(x) = x + 5$ و $h(x) = \sqrt{x^2 + 2}$.

در این صورت

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(x^۲) = h(g(x^۲)) = h(x^۲ + ۵)$$
$$= \sqrt{(x^۲ + ۵)^۲ + ۲} = \sqrt{x^۴ + ۱۰x^۲ + ۲۷}$$

از سوی دیگر، می‌بینیم که

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = h(g(x^۲)) = h(x^۲ + ۵)$$
$$= \sqrt{(x^۲ + ۵)^۲ + ۲} = \sqrt{x^۴ + ۱۰x^۲ + ۲۷}$$

که مانند عدد بالاست.

لذا در این مثال خاص، $(h \circ g) \circ f$ و $h \circ (g \circ f)$ دو تابع با یک حوزه و حوزهٔ تمام هستند و به‌ازای همهٔ مقادیر $x \in \mathbf{R}$، $(h \circ (g \circ f))(x) = \sqrt{x^۴ + ۱۰x^۲ + ۲۷} = ((h \circ g) \circ f)(x)$، در نتیجه $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. □

در بررسی قضیهٔ بعدی، خواهیم دید که نتیجهٔ مثال ۴۲.۵ به‌طور کلی درست است.

قضیه ۵.۵ اگر داشته باشیم $f : A \to B$، $g : B \to C$، $h : C \to D$، آن‌گاه $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

برهان چون هر دو تابع دارای یک حوزهٔ A و یک حوزهٔ تمام D هستند، قضیه با نشان دادن این مطلب نتیجه می‌شود که برای هر $x \in A$، $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$. (نموداری را که در شکل ۷.۵ نشان داده‌ایم ببینید).

با استفاده از تعریف تابع مرکب ملاحظه می‌کنیم که

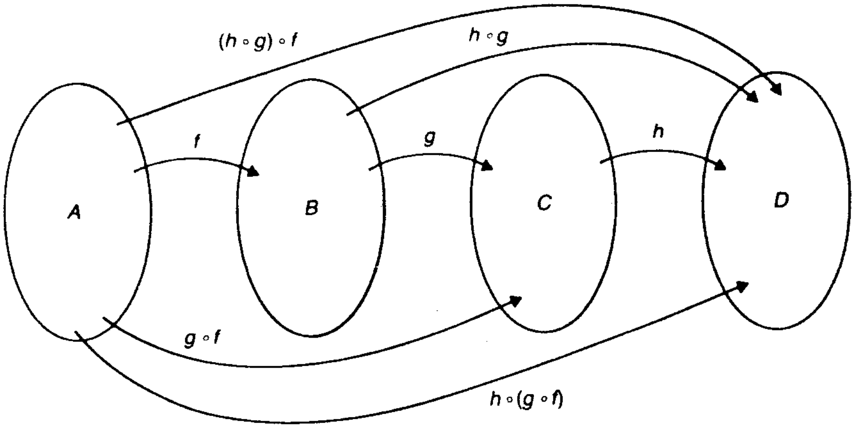
$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))$$

از سوی دیگر

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

در نتیجه، ترکیب تابعها عملی شرکتپذیر است. ■

با توجه به ویژگی شرکتپذیری برای ترکیب تابعی، بدون هیچ ابهامی می‌توانیم بنویسیم $h \circ g \circ f$ یا $(h \circ g) \circ f$ یا $h \circ (g \circ f)$. به‌علاوه این ویژگی به ما اجازه می‌دهد که توانهای تابعها را، هر جا که مقتضی باشد، تعریف کنیم.



شکل۷.۵

تعریف ۱۸.۵ اگر $f : A \to A$، تعریف می‌کنیم $f^{1} = f$ و برای $n \in \mathbf{Z}^{+}$، $f^{(n+1)} = f \circ (f^{n})$.

این تعریف، مثال دیگری است که نتیجه‌اش به‌صورت بازگشتی تعریف شده است. با داشتن برابری $f^{n+1} = f \circ (f^{n})$، بستگی f^{n+1} را به توان قبلی، یعنی f^{n} می‌بینیم.

مثال ۴۳.۵ با $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $f : A \to A$ که به‌وسیلهٔ

$$f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 1), (4, 3)\}$$

تعریف شده است، داریم

$$f^{2} = f \circ f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 1)\}$$

و

$$f^{3} = f \circ f^{2} = f \circ f \circ f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\}$$

(f^{4} و f^{5} چه هستند؟) □

اینک به آخرین مطلب جدید این فصل: وجود تابع وارونپذیر و برخی از ویژگیهای آن، می‌پردازیم.

تعریف ۱۹.۵ برای مجموعه‌های $A, B \subseteq \mathscr{U}$، اگر $\mathscr{R}$ رابطه‌ای از A به B باشد، عکس $\mathscr{R}$ که با $\mathscr{R}^c$ نشان داده می‌شود، رابطه‌ای از B به A است که به‌وسیلهٔ

$$\mathscr{R}^c = \{(b, a) | (a, b) \in \mathscr{R}\}$$

تعریف می‌شود.

برای به‌دست آوردن $\mathscr{R}^c$ از روی $\mathscr{R}$ فقط جای مؤلفه‌های زوج مرتب را در $\mathscr{R}$ **عوض می‌کنیم**. بنابراین اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، $B = \{w, x, y\}$ و $\mathscr{R} = \{(۱, w), (۲, w), (۳, x)\}$، آن‌گاه $\mathscr{R}^c = \{(w, ۱), (w, ۲), (x, ۳)\}$ که رابطه‌ای است از B به A.

برای همان مجموعه‌های A و Bی بالا، فرض کنید $f : A \to B$، که

$$f = \{(۱, w), (۲, x), (۳, y), (۴, x)\}$$

در این صورت، $f^c = \{(w, ۱), (x, ۲), (y, ۳), (x, ۴)\}$ یک رابطه است، اما یک تابع از B به A نیست. می‌خواهیم شرطی (شرایطی) را که تحت آن (آنها) عکس یک تابع باز یک تابع است بررسی کنیم، اما قبل از اینکه به‌صورت خیلی مجرد به مطلب بپردازیم، مثال زیر را در نظر می‌گیریم.

مثال ۴۴.۵ برای $A = \{۱, ۲, ۳\}$، $B = \{w, x, y\}$، فرض کنید $f : A \to B$ با $f = \{(۱, w), (۲, x), (۳, y)\}$ داده شده باشد. در این صورت داریم

$$f^c = \{(w, ۱), (x, ۲), (y, ۳)\}$$

که تابعی از B به A است. ملاحظه می‌کنیم که $f^c \circ f = ۱_A$ و $f \circ f^c = ۱_B$. □

آنچه از این مثال معین نتیجه شده است ما را به تعریف زیر هدایت می‌کند.

تعریف ۲۰.۵ اگر $f : A \to B$، f را وارونپذیر می‌گویند اگر تابع $g : B \to A$ وجود داشته باشد که برای آن $g \circ f = ۱_A$ و $f \circ g = ۱_B$.

توجه کنید که تابع g در تعریف ۲۰.۵ نیز وارونپذیر است.

مثال ۴۵.۵ فرض‌کنید $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ به‌وسیلهٔ $f(x) = ۲x + ۵$ و $g(x) = (۱/۲)(x - ۵)$

تعریف شده باشند. در این‌صورت

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(۲x + ۵) = (۱/۲)[(۲x + ۵) - ۵] = x$$

و

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f((۱/۲)(x - ۵)) = ۲[(\frac{۱}{۲})(x - ۵)] + ۵ = x$$

بنابراین، $f \circ g = ۱_R$ و $g \circ f = ۱_R$. در نتیجه f و g تابعهایی وارونپذیرند. □

با ملاحظهٔ چند مثال از تابعهای وارونپذیر، اینک می‌خواهیم نشان دهیم که تابع g در تعریف ۲۰.۵ یکتاست. سپس معیارهایی را خواهیم یافت که تابعی وارونپذیر را مشخص می‌کنند.

قضیه ۶.۵ اگر تابع $f : A \to B$ وارونپذیر باشد، و تابع $g : B \to A$ در $g \circ f = ۱_A$ صدق کند و $f \circ g = ۱_B$، آن‌گاه این تابع g یکتاست.

برهان اگر g یکتا نباشد آن‌گاه تابع دیگر $h : B \to A$ با ویژگیهای $h \circ f = ۱_A$، $f \circ h = ۱_B$ وجود دارد. در نتیجه $h = h \circ ۱_B = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = ۱_A \circ g = g$. ■

به‌عنوان نتیجهٔ این قضیه تابع g را وارون f می‌خوانیم و نمادگذاری $g = f^{-۱}$ را قبول می‌کنیم. قضیهٔ ۶.۵ نیز ایجاب می‌کند که $f^{-۱} = f^c$.

همین طور می‌بینیم که هر وقت f تابع وارونپذیر است، تابع $f^{-۱}$ نیز وارونپذیر است، و دوباره بنابر یکتایی در قضیهٔ ۶.۵، $f = (f^{-۱})^{-۱}$. اما هنوز نمی‌دانیم که چه شرایطی برای f ما را از وارونپذیری f مطمئن می‌کند.

قبل از پرداختن به قضیهٔ بعد، تذکر می‌دهیم که تابعهای وارونپذیر مثال ۴۴.۵ و ۴۵.۵ هر دو دوسویی هستند. بنابراین، این مثالها گواهی بر درستی قضیهٔ زیرند.

قضیه ۷.۵ تابع $f : A \to B$ وارونپذیر است اگر و تنها اگر یک به یک و پوشا باشد.

برهان با فرض اینکه $f : A \to B$ وارونپذیر است، تابع یکتای $g : B \to A$ را با $g \circ f = ۱_A$، $f \circ g = ۱_B$ داریم. اگر $a_۱, a_۲ \in A$ و $f(a_۱) = f(a_۲)$، آن‌گاه $g(f(a_۱)) = g(f(a_۲))$، یا $(g \circ f)(a_۱) = (g \circ f)(a_۲)$. از $g \circ f = ۱_A$ نتیجه می‌شود که $a_۱ = a_۲$، بنابراین f یک به یک است. برای ویژگی پوشایی، فرض کنید $b \in B$. پس $g(b) \in A$، بنابراین می‌توانیم دربارهٔ $f(g(b))$ صحبت کنیم. چون $f \circ g = ۱_B$، داریم $b = ۱_B(b) = (f \circ g)(b) = f(g(b))$. بنابراین، f پوشاست.

برعکس، فرض کنید $f : A \to B$ دوسویی باشد. چون f پوشاست، برای هر $b \in B$، aیی متعلق به A وجود دارد که $f(a) = b$. در نتیجه تابع $g : B \to A$ را به‌وسیلهٔ $g(b) = a$ تعریف

می‌کنیم که برای آن، $f(a) = b$. این تعریف، تابعی یکتا به‌دست می‌دهد. تنها مسأله‌ای که می‌تواند پیش آید این است که به دلیل $f(a_1) = b = f(a_2)$، ممکن است $g(b) = a_1 \neq a_2 = g(b)$. اما این وضعیت نمی‌تواند رخ دهد زیرا f یک به یک است. چون تعریف ما از g به‌قسمی است که $g \circ f = 1_A$، $f \circ g = 1_B$، ملاحظه می‌کنیم که f با $g = f^{-1}$ وارونپذیر است. ■

مثال ۴۶.۵ با توجه به قضیهٔ ۷.۵، تابع $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ که با $f_1(x) = x^2$ تعریف می‌شود وارونپذیر نیست (زیرا نه یک به یک است و نه پوشا)، اما $f_2 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ که با $f_2(x) = x^2$ تعریف می‌شود به‌صورت $f_2^{-1}(x) = \sqrt{x}$ وارونپذیر است. □

در قضیهٔ بعد، پیوند بین مفاهیم ترکیب تابعی و تابعهای وارون آمده است. برهان را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

قضیه ۸.۵ اگر $f : A \to B$، $g : B \to C$ تابعهایی وارونپذیر باشند، آنگاه $g \circ f : A \to C$ وارونپذیر است و $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

مثالهایی از تابعها و وارون آنها را دیدیم، ممکن است بخواهیم بدانیم که آیا روشی جبری برای تعیین وارون یک تابع وارونپذیر وجود دارد یا نه. اگر تابع متناهی باشد صرفاً جای مؤلفه‌های جفتهای مرتب داده شده را با هم عوض می‌کنیم. اما اگر مانند مورد مثال ۴۶.۵، تابع به‌وسیلهٔ فرمول تعریف شده باشد چه باید کرد؟ خوشبختانه، اعمال جبری کمی بیش از تحلیل دقیق «تعویض جای مؤلفه‌های جفتهای مرتب»، به‌کار می‌آیند. در مثالهای زیر این مطلب را نشان می‌دهیم.

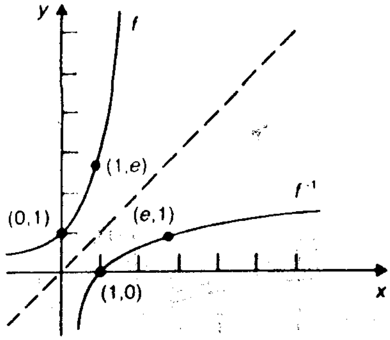
مثال ۴۷.۵ به‌ازای $m, b \in \mathbf{R}$، $m \neq 0$، $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ که با $f = \{(x, y) | y = mx + b\}$ تعریف شده است تابعی وارونپذیر است.

برای به‌دست آوردن f^{-1} می‌نویسیم

$$\begin{aligned} f^{-1} &= \{(x, y) | y = mx + b\}^c = \{(y, x) | y = mx + b\} \\ &= \underbrace{\{(x, y) | x = my + b\}}_{\text{این، مرحله‌ای است که می‌خواهیم جای مؤلفه‌های جفتهای مرتب } f \text{ را باهم عوض کنیم}} = \{(x, y) | y = (1/m)(x - b)\} \end{aligned}$$

بنابراین، $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ با $f(x) = mx + b$ تعریف شده است، در حالی‌که $f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ با $f^{-1}(x) = (1/m)(x - b)$ تعریف می‌شود. □

مثال ۴۸.۵ فرض کنید $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ با $f(x) = e^x$ تعریف شده باشد، که در آن $e = ۲٫۷۱۸۳$ پایهٔ لگاریتم طبیعی است. از نمودار شکل ۸.۵ می‌بینیم که f یک به یک و



شکل۸.۵

پوشاست، بنابراین $f^{-1} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ وجود دارد، و

$$f^{-1} = \{(x,y)|y = e^x\}^c = \{(x,y|x = e^y\} = \{(x,y)|y = \ln x\}$$

بنابراین، $f^{-1}(x) = \ln x$.

باید تذکر دهیم که آنچه در شکل ۸.۵ روی داده است در حالت کلی هم روی می‌دهد. یعنی نمودارهای f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ متقارن‌اند. مثلاً پاره‌خطی که نقاط $(1,e)$ و $(e,1)$ را به‌هم وصل می‌کند به‌وسیلهٔ خط $y = x$ نصف می‌شود. این مطلب برای هر جفت نقطهٔ متناظر $(x, f(x))$ و $(f(x), f^{-1}(f(x)))$ صادق است.

از این مثال فرمولهای زیر هم نتیجه می‌شوند:

$$x = 1_{\mathbf{R}}(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = \ln(e^x), \ x \in \mathbf{R} \text{ به‌ازای هر }$$

$$x = 1_{\mathbf{R}^+}(x) = (f \circ f^{-1})(x) = e^{\ln x}, \ x > 0 \text{ به‌ازای هر }$$

□

نتیجهٔ $x = e^{\ln x}$ به‌ازای $x > 0$ بسیار مفید است. در پیاده کردن استاندارد زبان پاسکال، تابع نمایی وجود ندارد. برای محاسبهٔ 2^3 می‌توان به تکرار عمل ضرب متوسل شد، اما وقتی با محاسبهٔ عددی نظیر $(5/73)^{4/32}$ سر و کار داریم این کار بیهوده است. چون تابعهای exp و ln در زبان پاسکال تعریف شده‌اند، می‌توانیم $(5/73)^{4/32}$ را با دوباره‌نویسی آن به‌صورت $e^{4/32\ln(5/73)}$ حساب کنیم، زیرا از فرمول بالا نتیجه می‌شود $5/73 = e^{\ln(5/73)}$. در پاسکال این عبارت، به‌صورت $\exp(4/32 * \ln(5/73))$ درمی‌آید.

جدول ۷.۵

B	$f^{-1}(B)$
$\{6\}$	$\{-1, 1\}$
$[6, 7]$	$\{-1, 1\}$
$[6, 10]$	$\{-2, -1, 1, 2\}$
$[-4, 5)$	$\emptyset$
$[-4, 5]$	$\{0\}$
$[5, +\infty)$	$\mathbf{Z}$

جدول ۸.۵

B	$g^{-1}(B)$
$\{6\}$	$\{-1, 1\}$
$[6, 7]$	$[-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$
$[6, 10]$	$[-\sqrt{5}, -1] \cup [1, \sqrt{5}]$
$[-4, 5)$	$\emptyset$
$[-4, 5]$	$\{0\}$
$[5, +\infty]$	$\mathbf{R}$

حتی وقتی که تابع $f : A \to B$ وارونپذیر نیست کاربردی برای نماد f^{-1} با مفهوم زیر پیدا می‌کنیم.

تعریف ۲۱.۵ اگر $f : A \to B$ و $B_1 \subseteq B$، آن‌گاه

$$f^{-1}(B_1) = \{x \in A | f(x) \in B_1\}$$

$f^{-1}(B_1)$ را پیشنگارهٔ B_1 تحت f می‌نامند.

توجه! گرچه مفهوم پیشنگاره برای هر تابع دارای معناست ولی هر تابعی تابع وارون ندارد. در نتیجه، نمی‌توانیم وجود وارون برای تابع f را، صرفاً به دلیل به کار بردن نماد f^{-1} بپذیریم. در اینجا کمی احتیاط ضروری است.

مثال ۴۹.۵ الف) فرض کنید $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ به‌وسیلهٔ $f(x) = x^2 + 5$ تعریف شده باشد. در جدول ۷.۵، $f^{-1}(B)$ برای زیرمجموعه‌های مختلف B از حوزهٔ تمام $\mathbf{R}$، ثبت شده است.
ب) اگر $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ به‌وسیلهٔ $g(x) = x^2 + 5$ تعریف شده باشد، نتایج جدول ۸.۵ نشان می‌دهند که چگونه تغییر حوزه (از $\mathbf{Z}$ به $\mathbf{R}$) بر پیشنگاره‌ها (در جدول ۷.۵) اثر می‌گذارد. □

مفهوم پیشنگاره همراه با اعمال مجموعه‌ای اشتراک، اجتماع و متمم‌گیری، در قضیهٔ بعد ظاهر می‌شود. خواننده به تفاوت بین قسمت (الف) این قضیه و قسمت (ب) قضیهٔ ۲.۵ توجه خواهد کرد.

قضیه ۹.۵ اگر $f : A \to B$ و $B_1, B_2 \subseteq B$، آن‌گاه

(الف) $$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

(ب)
$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

و

(ج)
$$f^{-1}\overline{(B_1)} = \overline{f^{-1}(B_1)}$$

برهان قسمت (ب) را ثابت می‌کنیم و اثبات قسمتهای (الف) و (ج) را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. به‌ازای $a \in A$، $a \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \Leftrightarrow f(a) \in B_1 \cup B_2 \Leftrightarrow f(a) \in B_1$ یا $f(a) \in B_2 \Leftrightarrow a \in f^{-1}(B_1)$ یا $a \in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow a \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. ■

با استفاده از مفهوم پیشنگاره، می‌بینیم که تابع $f : A \to B$ یک به یک است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $b \in B$، $|f^{-1}(b)| \le 1$. (توجه کنید: $f^{-1}(b)$ صورتی خلاصه‌تر برای نوشتن $f^{-1}(\{b\})$ است.)

چون ریاضیات گسسته اصولاً با مجموعه‌های متناهی سر و کار دارد، آخرین قضیهٔ این بخش نشان می‌دهد که چگونه ویژگی نامتناهی بودن می‌تواند نتایجی به‌دست دهد که در حالت کلی درست نیستند. علاوه بر مطالب بالا، کاربردی از اصل لانهٔ کبوتر را می‌بینیم.

قضیه ۱۰.۵ فرض کنید $f : A \to B$. A و B مجموعه‌هایی متناهی‌اند که $|A| = |B|$. در این صورت، گزاره‌های زیر هم‌ارزند: (الف) f یک به یک است؛ (ب) f پوشاست؛ و (ج) f وارونپذیر است.

برهان قبلاً در قضیهٔ ۷.۵ نشان دادیم که (ب)و(الف) $\Rightarrow$ (ج)، و (ج) $\Rightarrow$ (ب)و(الف). در نتیجه، اگر نشان دهیم که برای این شرایط مربوط به A و B، (ب) $\Leftrightarrow$ (الف)، قضیه ثابت خواهد شد. با قبول (ب)، اگر f یک به یک نباشد، آنگاه عناصر $a_1, a_2 \in A$ با شرط $a_1 \ne a_2$ وجود دارند، اما $f(a_1) = f(a_2)$. پس بنابر اصل لانهٔ کبوتر، $|A| > |f(A)| = |B|$، که متناقض با $|B| = |A|$ است. برعکس اگر f پوشا نباشد، آنگاه $|f(A)| < |B|$. با $|B| = |A|$ داریم $|f(A)| < |A|$، و از اصل لانهٔ کبوتر نتیجه می‌شود که f یک به یک نیست. ■

اینک با استفاده از این قضیه، اتحاد ترکیبیاتی را که در مسألهٔ ۶ ابتدای این فصل معرفی کردیم تحقیق می‌کنیم. زیرا اگر $n \in \mathbf{Z}^+$ و $|A| = |B| = n$، آنگاه $n!$ تابع یک به یک از A به B، و $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^n$ تابع پوشا از A به B وجود دارند. لذا، برابری $n! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^n$ هم‌ارز عددی قسمتهای (الف) و (ب) از قضیهٔ ۱۰.۵ است. (این نیز دلیلی بر آن است که چرا عنصرهای قطری $S(n, n)$، $1 \le n \le 8$، که در جدول ۱.۵ نشان داده‌ایم همگی برابر ۱ هستند.)

تمرینهای ۶.۵

۱. فرض کنید $f : A \to B$، $g : C \to D$. تابع $h : A \times C \to B \times D$ را با ضابطهٔ

$$h(a, c) = (f(a), g(c))$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که h دوسویی است اگر و تنها اگر f و g دوسویی باشند.

۲. فرض کنید $f, g, h : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ بوسیلهٔ $f(x) = x - ۱$، $g(x) = ۳x$، و

$$h(x) = \begin{cases} ۰ & \text{زوج } x \\ ۱ & \text{فرد } x \end{cases}$$

تعریف شوند. تعیین کنید (الف) $f \circ g$، $g \circ f$، $g \circ h$، $h \circ g$، $f \circ (g \circ h)$، $(f \circ g) \circ h$؛ (ب) $f^۲$، $f^۳$، $g^۲$، $g^۳$، $h^۲$، $h^۳$، $h^{۵۰۰}$.

۳. اگر $\mathscr{U}$ مجموعهٔ عام مفروضی باشد و $S, T \subseteq \mathscr{U}$. $g : \mathscr{P}(\mathscr{U}) \to \mathscr{P}(\mathscr{U})$ را به‌ازای $A \subseteq \mathscr{U}$ به‌صورت

$$g(A) = T \cap (S \cup A)$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که $g^۲ = g$.

۴. فرض کنید $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ با ضابطهٔ $g(n) = ۲n$ تعریف شود. اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $f : A \to \mathbf{N}$ به‌صورت $f = \{(۱, ۲), (۲, ۳), (۳, ۵), (۴, ۷)\}$ داده شود، $g \circ f$ را بیابید.

۵. فرض کنید $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$، که در آن $g(x) = ۱ - x + x^۲$، و $f(x) = ax + b$. اگر $(g \circ f)(x) = ۹x^۲ - ۹x + ۳$، a و b را معین کنید.

۶. فرض کنید $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ با ضابطه‌های $f(x) = ax + b$ و $g(x) = cx + d$، به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$ و a، b، c، d که اعداد حقیقی ثابت‌اند داده شده‌اند. اگر به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$، $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$، چه بستگی(هایی) باید بین a، b، c، d برقرار باشد؟

۷. الف) برای $A = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۷\}$ چند تابع دوسویی $f : A \to A$ در شرط $f(۱) \neq ۱$ صدق می‌کنند؟

ب) به قسمت (الف) برای $A = \{x | x \in \mathbf{Z}^+, ۱ \leq x \leq n\}$ پاسخ دهید.

۸. فرض کنید $f : A \to B$، $g : B \to C$. در این صورت ثابت کنید که

(الف) g پوشایی $\Leftarrow$ پوشایی $(g \circ f : A \to C)$.

(ب) یک به یک بودن f $\Leftarrow$ یک به یک بودن $(g \circ f : A \to C)$.

۹. اگر $A, B \subseteq \mathscr{U}$ و $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2 \subseteq A \times B$، ثابت کنید که (الف) $(\mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2)^c = \mathscr{R}_1^c \cup \mathscr{R}_2^c$؛ (ب) $(\mathscr{R}_1 \cap \mathscr{R}_2)^c = \mathscr{R}_1^c \cap \mathscr{R}_2^c$؛ و (ج) $(\mathscr{R}_1^c)^c = \mathscr{R}_1$.

۱۰. برای هر یک از تابعهای $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ در زیر، تعیین کنید که آیا f وارونپذیر است یا نیست، و اگر هست f^{-1} را به‌دست آورید.

الف) $f = \{(x, y) | 2x + 3y = 7\}$

ب) $f = \{(x, y) | ax + by = c, b \neq 0\}$

ج) $f = \{(x, y) | y = x^3\}$

د) $f = \{(x, y) | y = x^4 - x\}$

۱۱. الف) وارون تابع $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ را که به صورت $f(x) = e^{2x+5}$ تعریف شده است بیابید.

ب) نشان دهید که $f \circ f^{-1} = 1_{\mathbf{R}^+}$، و $f^{-1} \circ f = 1_{\mathbf{R}}$.

ج) در یک دستگاه محورها، نمودار f و f^{-1} را رسم کنید.

۱۲. مطلوب است f^{-1} برای (الف) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$، $f(x) = -x$؛ (ب) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$، $f(x, y) = (y, x)$؛ (ج) $f : \mathbf{R}^2 \to (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+)$، $f(x, y) = (5x, e^y)$.

۱۳. قضیهٔ ۸.۵ را ثابت کنید.

۱۴. فرض کنید $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ به‌صورت $f(x) = x^2$ تعریف شده باشد. برای هر یک از زیرمجموعه‌های B از $\mathbf{R}$ که در زیر آمده‌اند $f^{-1}(B)$ را بیابید.

الف) $B = \{0, 1\}$ ب) $B = \{-1, 0, 1\}$ ج) $B = [0, 1]$

د) $B = [0, 1)$ ه) $B = [-1, 1]$ و) $B = [0, 4]$

ز) $B = [0, 1] \cup [4, 9]$ ح) $B = (0, 1] \cup (4, 9)$

سه زیرمجموعهٔ نامتناهی B از $\mathbf{R}$ را تعیین کنید که برای آنها $f^{-1}(B) = \emptyset$.

۱۵. فرض کنید $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ به صورت (بزرگترین عدد صحیح در x است $= f(x)$) تعریف شود. این تابع عموماً با $f(x) = \lfloor x \rfloor$ نشان داده می‌شود. بنابراین، به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$، $\lfloor x \rfloor = x$ اگر $x \in \mathbf{Z}$ و به‌ازای $x \notin \mathbf{Z}$، $\lfloor x \rfloor$ عدد صحیحی است که بلافاصله در سمت چپ x روی خط اعداد حقیقی قرار دارد. برای هریک از زیرمجموعه‌های B از $\mathbf{R}$، $f^{-1}(B)$ را بیابید.

الف) $B = \{0, 1\}$ ب) $B = \{-1, 0, 1\}$ ج) $B = [0, 1)$

د) $B = [0, 2)$ ه) $B = [-1, 2)$ و) $B = [0, 1]$

ز) $B = [-1, 2]$ ح) $B = [-1, 0) \cup (1, 3]$

۱۶. اگر $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ به‌صورت $f(x) = \sin x$ داده شده باشد، مطلوب است $f^{-1}(B)$ برای (الف) $B = \{0\}$؛ (ب) $B = \{0, 1\}$؛ و (ج) $B = [0, \frac{1}{2}]$.

۱۷. قسمتهای (الف) و (ج) قضیهٔ ۹.۵ را ثابت کنید.

۱۸. ثابت کنید که $f : A \to B$ یک به یک است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $b \in B$، $|f^{-1}(b)| \leq 1$.

۱۹. **الف)** مثالی برای تابع $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ بیاورید که در آن f، (i) یک به یک باشد ولی پوشا نباشد؛ (ii) پوشا باشد ولی یک به یک نباشد.

ب) آیا مثالهای قسمت (الف) با قضیهٔ ۵.۱۰ تناقض دارند؟

۲۰. اگر $|A| = |B| = 5$، چند تابع $f : A \to B$ وارونپذیرند؟

۷.۵ پیچیدگی محاسباتی*

در بخش ۳.۴ مفهوم یک الگوریتم را به دنبال مجموعه مثالهایی دربارهٔ الگوریتم تقسیم (بخش ۲.۴) و الگوریتم اقلیدسی (بخش ۳.۴) عرضه کردیم. در آن زمان، به بعضی از ویژگیهای الگوریتم کلی علاقه داشتیم:

- دقت تک تک دستورهای گام به گام
- ورودی آماده برای الگوریتم، و خروجیی که بعداً الگوریتم به‌دست می‌دهد.
- توانایی الگوریتم برای حل نوع معینی از مسائل و نه‌تنها حلتهای خاص آن مسائل.
- یکتایی نتایج واسط و نهایی، بر اساس ورودی.
- ماهیت متناهی بودن الگوریتم بدین معنا که پس از اجرای تعدادی متناهی از دستورها، ختم شود.

وقتی الگوریتمی نوع معیّنی مسأله را به‌طور صحیح حل و در این پنج شرط صدق کند، ممکن است لازم بدانیم که آن را به راههای زیر بیشتر بررسی کنیم.

۱. آیا می‌توانیم به طریقی اندازه بگیریم که چقدر طول می‌کشد تا الگوریتم، مسأله‌ای با اندازهٔ معین را حل کند؟ این مدت ممکن است به میزان زیاد به، مثلاً، همگردانیی که به‌کار می‌رود، بستگی داشته باشد، لذا می‌خواهیم اندازه‌ای را پیدا کنیم که به عواملی، نظیر همگردانها، سرعتهای اجرا، یا مشخصه‌های دیگر کامپیوتر داده شده بستگی نداشته باشد.

اگر بخواهیم مثلاً $n!$ را به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$ حساب کنیم، با چه سرعتی می‌توانیم این محاسبه را انجام دهیم؟ اگر بخواهیم a^n را برای $a \in \mathbf{R}$ و $n \in \mathbf{Z}^+$ حساب کنیم، آیا «تابعی از n» وجود دارد که بتواند بگوید که الگوریتم داده شده برای دستیابی به حاصل a^n چه سرعتی باید داشته باشد؟

۲. فرض کنید می‌توانیم به پرسشهایی نظیر مجموعه پرسشهای قسمت ۱ پاسخ دهیم. در این صورت اگر دو (یا چند) الگوریتم برای حل مسأله‌ای مفروض داشته باشیم، آیا ممکن است راهی وجود داشته باشد که تعیین کند کدام الگوریتم از دیگری «بهتر» است؟

* مطالب بخشهای ۷.۵ و ۸.۵ را می‌توان در اینجا **نادیده** گرفت. این مطالب تا فصل ۱۰ خیلی به‌کار نمی‌روند. **تنها جایی که این مطالب، قبل از فصل ۱۰، ظاهر می‌شوند در مثال ۱۲.۷ است، اما آن مثال را هم می‌توان بدون آنکه خللی در پیوستگی مطلب پدید آید نادیده گرفت.**

به‌خصوص، فرض کنید مسألهٔ تعیین اینکه عدد حقیقی r در فهرست n عدد حقیقی a_1، a_2، ...، a_n وجود دارد یا نه مورد نظر باشد. در اینجا مسأله‌ای با اندازهٔ n داریم.

اگر الگوریتمی وجود داشته باشد که این مسأله را حل کند، چه مدت انجام این کار به‌طول می‌انجامد؟ برای اندازه‌گیری این مدت، تابع $f(n)$ را که به تابع پیچیدگی زمان الگوریتم موسوم است جستجو می‌کنیم.* انتظار داریم که (هم در اینجا و هم به‌طور کلی) مقدار $f(n)$ وقتی n زیاد می‌شود افزایش یابد. همچنین نگرانی عمده در کار با هر الگوریتم چگونگی عملکرد آن برای مقادیر بزرگ n است.

برای مطالعهٔ آنچه اینک شرح دادیم، با روشی تاحدی کلی، به معرفی مفهوم اساسی زیر نیاز داریم.

تعریف ۲۲.۵ فرض کنید $f, g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$. می‌گوییم g بر f غالب (یا f مغلوب g) است اگر ثابتهای $m \in \mathbf{R}^+$ و $k \in \mathbf{Z}^+$ وجود داشته باشند به‌قسمی که به‌ازای هر مقدار $n \in \mathbf{Z}^+$ و $n \geq k$ نابرابری $|f(n)| \leq m|g(n)|$ برقرار باشد.

توجه کنید که وقتی مقادیر $f(1)$، $g(1)$، $f(2)$، $g(2)$، ... را در نظر می‌گیریم، نقطه‌ای (یعنی k) وجود دارد که بعد از آن، اندازهٔ $f(n)$ به‌وسیلهٔ مضرب مثبتی (m) از اندازهٔ $g(n)$، از بالا کراندار می‌شود. همچنین وقتی g بر f غالب است، رابطهٔ $|f(n)/g(n)| \leq m$ (یعنی، اندازهٔ خارج‌قسمت $f(n)/g(n)$ به‌وسیلهٔ m کراندار شده‌است)، به‌ازای آن nهایی که به $\mathbf{Z}^+$ تعلق دارند و برای آنها $n \geq k$ و $g(n) \neq 0$، برقرار است.

وقتی f مغلوب g است، برای نشان دادن آن از نماد موسوم به (اُی بزرگ) استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم $f \in O(g)$ که $O(g)$ «مرتبهٔ g» یا «اُی بزرگ g» خوانده می‌شود. همان‌گونه که از نماد «$f \in O(g)$» برمی‌آید، $O(g)$ معرف مجموعهٔ همهٔ توابع با حوزهٔ $\mathbf{Z}^+$ و حوزهٔ تمام $\mathbf{R}$ است که مغلوب g هستند. این مفهومها در مثالهای زیر نشان داده شده‌اند.

مثال ۵۰.۵ فرض کنید $f, g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ به وسیلهٔ $f(n) = 5n$، $g(n) = n^2$ به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$ داده شده باشند. اگر به‌ازای $1 \leq n \leq 4$، $f(n)$ و $g(n)$ را حساب کنیم، به‌دست می‌آوریم که $f(1) = 5$، $g(1) = 1$؛ $f(2) = 10$، $g(2) = 4$؛ $f(3) = 15$، $g(3) = 9$؛ و $f(4) = 20$، $g(4) = 16$. اما $n \geq 5 \Rightarrow n^2 \geq 5n$ و داریم $|f(n)| = 5n \leq n^2 = |g(n)|$. لذا برای $m = 1$ و $k = 5$ به‌دست می‌آوریم که به‌ازای $n \geq k$، $|f(n)| \leq m|g(n)|$. بنابراین، g بر f غلبه دارد و $f \in O(g)$. (توجه کنید که چگونه به‌ازای همهٔ مقادیر $n \geq 5$، $|f(n)/g(n)|$ به‌وسیلهٔ ۱ کراندار شده است.)

* می‌توانستیم تابع پیچیدگی فضای الگوریتم را هم، که در اندازه‌گیری میزان حافظهٔ لازم برای اجرای الگوریتم یک مسألهٔ با اندازهٔ n مورد نیاز است، بررسی کنیم. اما در این کتاب، ما مطالعهٔ خود را به تابع پیچیدگی زمان محدود می‌کنیم.

همچنین مسلم است که به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $|f(n)| = ۵n \leq ۵n^۲ = ۵|g(n)|$. پس در اینجا غلبهٔ g بر f با $k = ۱$ و $m = ۵$ نشان داده شده است. این مطلب، برای نشان دادن اینکه ثابتهای k و m در تعریف ۲۲.۵ لازم نیست یکتا باشند کافی است.

به‌علاوه، اگر تابعهای $f_۱, g_۱ : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ را در نظر بگیریم که به‌وسیلهٔ $f_۱(n) = an$، $g_۱(n) = bn^۲$ تعریف شده‌اند و در آنها a و b اعداد حقیقی غیرصفرند، می‌توانیم نتیجهٔ بالا را تعمیم دهیم. زیرا اگر $m \in \mathbf{R}^+$، با $m|b| \geq |a|$، آن‌گاه به‌ازای هر مقدار $n \geq ۱(= k)$، $|f_۱(n)| = |an| = |a|n \leq m|b|n \leq m|b|n^۲ = m|bn^۲| = m|g_۱(n)|$ و لذا $f_۱ \in O(g_۱)$. □

در مثال ۵۰.۵ مشاهده کردیم که $f \in O(g)$. با نگاه دیگری به تابعهای f و g، اینک می‌خواهیم نشان دهیم که $g \notin O(f)$.

مثال ۵۱.۵ باز فرض می‌کنیم $f, g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ به‌وسیلهٔ $f(n) = ۵n$، $g(n) = n^۲$ به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$ تعریف شده باشند.

اگر $g \in O(f)$، آن‌گاه برحسب سورها داریم

$$\exists m \in \mathbf{R}^+ \exists k \in \mathbf{Z}^+ \forall n \in \mathbf{Z}^+ [n \geq k) \Rightarrow |g(n)| \leq m|f(n)|]$$

بنابراین، برای اینکه نشان دهیم $g \notin O(f)$، لازم است که تحقیق کنیم

$$\forall m \in \mathbf{R}^+ \forall k \in \mathbf{Z}^+ \exists n \in \mathbf{Z}^+ [(n \geq k) \wedge (|g(n)| > m|f(n)|)]$$

برای انجام این تحقیق، ابتدا باید در نظر بگیریم که m و k دلخواه‌اند، لذا کنترلی روی مقادیر آنها نداریم. تنها عددی که روی آن کنترل داریم عدد صحیح مثبت n است که انتخاب می‌کنیم. اما مقادیر m و k هرچه باشند، می‌توانیم $n \in \mathbf{Z}^+$ را به‌قسمی انتخاب کنیم که $n > \max\{۵m, k\}$. در این صورت $n \geq k$ (عملاً $n > k$) و $n > ۵m \Rightarrow n^۲ > ۵mn$، لذا $|g(n)| = n^۲ > ۵mn = m|۵n| = m|f(n)|$ و $g \notin O(f)$. □

مثال ۵۲.۵ الف) فرض کنید $f, g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ با $f(n) = ۵n^۲ + ۳n + ۱$ و $g(n) = n^۲$. در این صورت

$$|f(n)| = |۵n^۲ + ۳n + ۱| = ۵n^۲ + ۳n + ۱ \leq ۵n^۲ + ۳n^۲ + n^۲ = ۹n^۲ = ۹|g(n)|$$

بنابراین، به‌ازای همهٔ مقادیر $n \geq ۱(= k)$، برای هر مقدار $m \geq ۹$، $|f(n)| \leq m|g(n)|$، و $f \in O(g)$. در این حالت همچنین می‌توانیم بنویسیم $f \in O(n^۲)$.

به‌علاوه به‌ازای هر $n \geq 1$، $|g(n)| = n^2 \leq 5n^2 \leq 5n^2 + 3n + 1 = |f(n)|$. لذا برای هر $m \geq 1$ و همهٔ مقادیر $n \geq k \geq 1$، $|g(n)| \leq m|f(n)|$. در نتیجه $g \in O(f)$. (در واقع $O(g) = O(f)$؛ یعنی هر تابع از $\mathbf{Z}^+$ به $\mathbf{R}$ که مغلوب یکی از توابع f و g باشد مغلوب دیگری هم هست. این نتیجه را برای حالت کلی در بخش تمرینها بررسی خواهیم کرد.)

ب) اینک $f, g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ را با $f(n) = 3n^3 + 7n^2 - 4n + 2$ و $g(n) = n^3$ در نظر می‌گیریم. در اینجا داریم، به‌ازای هر مقدار $n \geq 1$،

$$|f(n)| = |3n^3 + 7n^2 - 4n + 2| \leq |3n^3| + |7n^2| + |-4n| + |2| \leq 3n^3 + 7n^3 + 4n^3 + 2n^3 = 16n^3 = 16|g(n)|$$

لذا با $m = 16$ و $k = 1$ متوجه می‌شویم که f مغلوب g است و $f \in O(g)$، یا $f \in O(n^3)$.

چون به‌ازای همهٔ مقادیر $n \geq 1$، $7n - 4 > 0$، می‌توانیم بنویسیم، هر وقت که $n \geq 1$، $n^3 \leq 3n^3 \leq 3n^3 + (7n - 4)n + 2$. پس به‌ازای همهٔ مقادیر $n \geq 1$، $|g(n)| \leq |f(n)|$ و $g \in O(f)$. (مثل قسمت (الف)، همچنین در این حالت داریم $O(f) = O(g) = O(n^3)$.)

□

نتایج مثال ۵.۲۵ را به‌صورت زیر تعمیم می‌دهیم. فرض کنید $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ که در آن به‌ازای $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{t-1}, a_t \in \mathbf{R}$، $a_t \neq 0$، $t \in \mathbf{N}$،

$$f(n) = a_t n^t + a_{t-1} n^{t-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$$

در این صورت

$$\begin{aligned}
|f(n)| &= |a_t n^t + a_{t-1} n^{t-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0| \\
&\leq |a_t n^t| + |a_{t-1} n^{t-1}| + \cdots + |a_2 n^2| + |a_1 n| + |a_0| \\
&= |a_t| n^t + |a_{t-1}| n^{t-1} + \cdots + |a_2| n^2 + |a_1| n + |a_0| \\
&\leq |a_t| n^t + |a_{t-1}| n^t + \cdots + |a_2| n^t + |a_1| n^t + |a_0| n^t \\
&= (|a_t| + |a_{t-1}| + \cdots + |a_2| + |a_1| + |a_0|) n^t
\end{aligned}$$

در تعریف ۵.۲۲، فرض می‌کنیم $m = |a_t| + |a_{t-1}| + \cdots + |a_2| + |a_1| + |a_0|$ و $k = 1$، و فرض می‌کنیم $g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ با ضابطهٔ $g(n) = n^t$ داده شده باشد. در این صورت به‌ازای همهٔ مقادیر $n \geq k$، $|f(n)| \leq m|g(n)|$. لذا f مغلوب g است یا $f \in O(n^t)$.

همچنین درست است که $g \in O(f)$ و $O(f) = O(g) = O(n^t)$.

این تعمیم نتایج خاص زیر را دربارهٔ مجموعیابیها در اختیار ما قرار می‌دهد.

مثال ۵۳.۵ **الف)** فرض کنید $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ به‌وسیلهٔ $f(n) = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n$ داده شده باشد. در این صورت (بنابر مثالهای ۳۵.۱ و ۱.۴) داریم

$$f(n) = (\frac{۱}{۲})(n)(n + ۱) = (\frac{۱}{۲})n^۲ + \frac{۱}{۲}(n)$$

لذا $f(n) = \sum_{i=۱}^{n} i \in O(n^۲)$.

ب) اگر $g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ با $g(n) = ۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲ = (\frac{۱}{۶})(n)(n+۱)(۲n+۱)$ (از مثال ۳.۴) مفروض باشد، آنگاه $g(n) = (\frac{۱}{۳})n^۳ + (\frac{۱}{۲})n^۲ + (\frac{۱}{۶})n \in O(n^۳)$.

ج) اگر $t \in \mathbf{Z}^+$، و $h : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ به‌وسیلهٔ $h(n) = \sum_{i=۱}^{n} i^t$ تعریف شود، آنگاه
$h(n) = ۱^t + ۲^t + ۳^t + \cdots + n^t \le n^t + n^t + n^t + \cdots + n^t = n(n^t) = n^{t+۱}$
لذا $h(n) \in O(n^{t+۱})$. □

اینک که چند مثال از غلبهٔ تابعی را بررسی کردیم، با دو مشاهدهٔ نهایی به این بخش خاتمه می‌دهیم. در بخش آینده، این مفهوم غلبهٔ تابعی را در تحلیل الگوریتمها به‌کار خواهیم برد.

۱. وقتی با مفهوم غلبهٔ تابعی سر و کار داریم، بهترین (یا تنگترین) نوار را به مفهوم زیر جستجو می‌کنیم. فرض کنید که $f, g, h : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$، که در آن، $f \in O(g)$ و $g \in O(h)$. در این صورت داریم $f \in O(h)$. (برهانی برای این مطلب در بخش تمرینها خواسته شده است.) اما، اگر $h \notin O(g)$، گزارهٔ $f \in O(g)$، نواری «بهتر» از گزارهٔ $f \in O(h)$ برای $|f(n)|$ فراهم می‌کند. مثلاً، اگر $f(n) = ۵$، $g(n) = ۵n$، و $h(n) = n^۲$، به‌ازای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{Z}^+$، آنگاه $f \in O(g)$، $g \in O(h)$، و $f \in O(h)$، اما $h \notin O(g)$. بنابراین، بیشتر با گزارهٔ $f \in O(g)$ سر و کار داریم تا با گزارهٔ $f \in O(h)$.

۲. بعضی از مرتبه‌ها، نظیر $O(n)$ و $O(n^۲)$، اغلب وقتی پیدا می‌شوند که با غلبهٔ تابعی سر و کار داریم. لذا، این مرتبه‌ها با نامهایی خاص مشخص می‌شوند. بعضی از مهمترین این مرتبه‌ها در جدول ۹.۵ ثبت شده‌اند.

تمرینهای ۷.۵

۱. نتایج جدول ۹.۵ را برای تعیین بهترین صورت «اُی بزرگ»، در مورد هر یک از تابعهای زیر: $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ به‌کار برید.

جدول ۹.۵

نام	صورت اُی بزرگ
ثابت	$O(1)$
لگاریتمی	$O(\log_2 n)$
خطی	$O(n)$
$n \log_2 n$	$O(n \log_2 n)$
درجهٔ دوم	$O(n^2)$
درجهٔ سوم	$O(n^3)$
چندجمله‌ای	$O(n^m), m = 0, 1, 2, 3, \cdots$
نمایی	$O(c^n), c > 1$
فاکتوریل	$O(n!)$

الف) $f(n) = 3n + 7$

ب) $f(n) = 3 + \sin(1/n)$

ج) $f(n) = n^3 - 5n^2 + 25n - 165$

د) $f(n) = 5n^2 + 3n \log_2 n$

ه) $f(n) = n^2 + (n-1)^3$

و) $f(n) = (n)(n+1)(n+2)/(n+3)$

ز) $f(n) = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$

۲. فرض کنید $f, g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$، و $f(n) = n$ و $g(n) = n + (1/n)$ به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$. از تعریف ۲۲.۵ برای اینکه نشان دهید $f \in O(g)$ و $g \in O(f)$، استفاده کنید.

۳. در هریک از موارد زیر، $f, g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$. از تعریف ۲۲.۵ برای نشان دادن غلبهٔ g بر f استفاده کنید.

الف) $f(n) = 100 \log_2 n$، $g(n) = (\frac{1}{2})n$

ب) $f(n) = 2^n$، $g(n) = 2^{2n} - 1000$

ج) $f(n) = 3n^2$، $g(n) = 2^n + 2n$

۴. فرض کنید $f, g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ به وسیلهٔ $f(n) = n + 100$، $g(n) = n^2$ تعریف شده‌باشند. تعریف ۲۲.۵ را برای نشان دادن اینکه $f \in O(g)$ ولی $g \notin O(f)$ به‌کار برید.

۵. فرض کنید $f, g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$، و $f(n) = n^2 + n$ و $g(n) = (\frac{1}{2})n^3$ برای $n \in \mathbf{Z}^+$. تعریف ۲۲.۵ را برای نشان دادن اینکه $f \in O(g)$ ولی $g \notin O(f)$، به‌کار برید.

۶. فرض کنید $f, g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشند:

$$f(n) = \begin{cases} n & n \text{ فرد} \\ ۱ & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$$g(n) = \begin{cases} ۱ & n \text{ فرد} \\ n & n \text{ زوج} \end{cases}$$

تحقیق کنید که $f \notin O(g)$ و $g \notin O(f)$.

۷. فرض کنید $f, g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$، و $f(n) = n$ و $g(n) = \log_۲ n$ برای $n \in \mathbf{Z}^+$. نشان دهید که $g \in O(f)$ ولی $f \notin O(g)$. (راهنمایی: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log_۲ n} = +\infty$. برای این کار از حساب دیفرانسیل و انتگرال استفاده کنید.)

۸. فرض کنید $f, g, h : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$، و $f \in O(g)$ و $g \in O(h)$. ثابت کنید که $f \in O(h)$.

۹. اگر $g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ و $c \in \mathbf{R}$، تابع $cg : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ را به‌وسیلهٔ $(cg)(n) = c(g(n))$، برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که اگر $f, g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ با $f \in O(g)$، آن‌گاه $f \in O(cg)$ به‌ازای $c \in \mathbf{R}^+$، $c \neq ۰$.

۱۰. الف) ثابت کنید که گزارهٔ $f \in O(f)$ به‌ازای هر $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ برقرار است.

ب) فرض کنید $f, g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$. اگر $f \in O(g)$ و $g \in O(f)$، ثابت کنید که $O(f) = O(g)$. یعنی ثابت کنید برای هر $h : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$، اگر h مغلوب f باشد، آن‌گاه h مغلوب g است و برعکس.

ج) اگر $f, g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$، ثابت کنید که اگر $O(f) = O(g)$، آن‌گاه $f \in O(g)$ و $g \in O(f)$.

۸.۵ تحلیل الگوریتمها

اینک که با مفهوم غلبهٔ تابع آشنا شده‌ایم وقت آن است که ببینیم چگونه این مفهوم در مطالعهٔ الگوریتمها به‌کار می‌رود. در این بخش الگوریتمها را به‌صورت قطعه برنامه‌های پاسکال عرضه می‌کنیم. (الگوریتمها را به‌صورت لیستهای دستورها نیز ارائه می‌دهیم. خواننده این نوع ارائه را در فصلهای بعد خواهد یافت.)

با برنامه‌ای شروع می‌کنیم که $n!$ را به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$ حساب می‌کند.

مثال ۵۴.۵ در شکل ۹.۵ از یک قطعه برنامهٔ پاسکال نسخه‌برداری کردیم که الگوریتمی را برای محاسبهٔ $n!$ وقتی $n \in \mathbf{Z}^+$، اجرا می‌کرد. در اینجا استفاده‌کننده مقدار ورودی n به برنامه را مشخص می‌کند. متغیرهای i و Factorial (که قبلاً در برنامه اعلام شده‌اند) متغیرهای صحیح‌اند.

```
Begin
    i := 1;              {Initializes the Counter}
    Factorial := 1;      {Initializes the value of Factorial}

    While i <= n do
       Begin
         Factorial := i*Factorial;
         i := i + 1
       End;

    Writeln ('The value of ', n, ' factorial is ',
              Factorial, ' .')
End;
```

شکل ۹.۵

هدف، محاسبهٔ (اندازه‌گیری) تعداد کل عملها (نظیر تخصیصها، جمعها، ضربها، و مقایسه‌ها)ی متضمن در محاسبهٔ $n!$ به‌وسیلهٔ این برنامه است. فرض می‌کنیم که $f(n)$ معرف تعداد کل این عملهاست. (در این صورت $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$).

در آغاز برنامه دو حکم تخصیص وجود دارند، که در آنها مقادیر متغیرهای صحیح i و Factorial ارزش آغازی دریافت کرده‌اند. سپس به While loop می‌رسیم که nبار اجرا می‌شود. هریک از این اجراها متضمن پنج عمل زیر است:

۱. مقایسهٔ مقدار فعلی شمارشگر i با n.

۲. افزودن مقدار فعلی Factorial به $i*$ Factorial؛ این کار مستلزم یک عمل ضرب و یک تخصیص است.

۳. نموّ مقدار شمارشگر به اندازهٔ ۱ واحد؛ این کار مستلزم یک عمل جمع و یک تخصیص است.

سرانجام، مقایسه‌ای دیگر وجود دارد، و این وقتی است که $i = n + ۱$، لذا While loop خاتمه می‌یابد و چهار عمل دیگر (درگامهای ۲ و ۳) اجرا نمی‌شوند.

بنابراین، $f(n) = ۲ + ۵n + ۱ = ۵n + ۳$، لذا $f \in O(n)$. در نتیجه، می‌گوییم که این برنامه یک الگوریتم $O(n)$ را اجرا می‌کند یا که این الگوریتم دارای پیچیدگی زمانی خطی است. با قبول اینکه همهٔ عملهای مختلف مربوطه مدت زمان همانندی برای اجرا وقت بگیرند، می‌توانیم ببینیم که چگونه تابع f مدت زمان اجرا را «اندازه می‌گیرد». اما اگر آنچه می‌دانستیم این بود که $f \in O(n)$، آن‌گاه می‌دانستیم که (۱) جملهٔ غالب در f، n بود و (۲) مدت زمان اجرا تقریباً cn بود، که در آن c ثابتی است که به ملاحظاتی نظیر مشخصه‌های معین دستگاه کامپیوتر بستگی دارد.

مسألهٔ مورد توجه اصلی این است که جملهٔ غالب در f، n است و در نتیجه $f \in O(n)$. زیرا وقتی n بزرگتر می‌شود «مرتبهٔ بزرگی» $۵n + ۳$ قبل از هر چیز به مقدار n، یعنی به تعداد

دفعاتی که While loop اجرا می‌شود بستگی دارد. بنابراین، صرفاً به‌وسیلهٔ شمارش تعداد دفعاتی که While loop اجرا شده بود می‌توانستیم $f \in O(n)$ را به‌دست آوریم. در محاسبات مربوط به بقیهٔ مثالها از این راه میان‌بر استفاده خواهد شد. □

مثال بعدی، وضعیتی را معرفی می‌کند که در آن سه نوع پیچیدگی معین شده‌اند. این اندازه‌ها را پیچیدگی بهترین حالت، پیچیدگی بدترین حالت، و پیچیدگی حالت متوسط می‌نامند.

مثال ۵۵.۵ در این مثال، فرایند جستجوی نوعی را بررسی می‌کنیم. در اینجا آرایه‌ای از n (≥ 1) عدد صحیح $A[1]$، $A[2]$، $\cdots$، $A[n]$ را برای یافتن عددی صحیح به‌نام Key جستجو می‌کنیم. اگر این عدد صحیح پیدا شود، آن‌را در اولین مکان آرایه چاپ خواهیم کرد؛ اگر پیدا نشود، پیامی مناسب داده خواهد شد.

نمی‌توانیم فرض کنیم که درایه‌های آرایه به ترتیبی خاص هستند. (اگر به ترتیبی خاص بودند، مسألهٔ آسانتر بود و الگوریتم کاراتری را می‌شد تهیه کرد.) ورودی این الگوریتم عبارت از این آرایه (که استفاده‌کننده، احتمالاً به‌عنوان پرونده‌ای از یک منبع خارجی، خوانده یا تهیه می‌کند) همراه با تعداد n عنصر آرایه و مقدار عدد صحیح Key است.

این الگوریتم در قطعهٔ برنامهٔ پاسکال شکل ۱۰.۵ اجرا شده است. در اینجا متغیر صحیح i به‌عنوان شمارشگر به‌کار می‌رود، و از متغیر بولی Found برای ثبت وجود Key (با مقدار true) در آرایه استفاده می‌شود.

```
Begin

   i := 1;                    {Initializes the counter}
   Found := false;            {Changes to true if Key is found}

   While (i <= n) and (not Found) do
       If Key  =  A[i] then
         Found := true
       Else i  =  i + 1;      {The counter is incremented}
                              {only if Key is not found}

   If Found = true then
     Writeln ('The value ', Key, ' is located in
              position ', i, ' .')
   Else
     Writeln ('The value ', Key, ' does not occur in
               the array.')

End;
```

شکل ۱۰.۵

تابع پیچیدگی $f(n)$ را برای این الگوریتم، تعداد عناصری از آرایه تعریف می‌کنیم که تا یافتن Key بررسی شده و یا به اتمام آرایه (یعنی تعداد دفعاتی که While loop اجرا می‌شود) منجر شده‌اند.

بهترین چیزی که در جستجوی Key ممکن است رخ دهد چیست؟ اگر $\text{Key} = A[1]$، درمی‌یابیم که Key اولین درایهٔ آرایه است و مجبوریم Key را تنها با یک عنصر آرایه مقایسه کنیم. در این حالت داریم $f(n) = 1$، و می‌گوییم که برای الگوریتم ما پیچیدگی بهترین حالت همان $O(1)$ است (یعنی، ثابت و مستقل از اندازهٔ آرایه است). متأسفانه نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم که چنین وضعیتی خیلی زیاد رخ دهد.

اینک از بهترین وضعیت به بدترین وضعیت برمی‌گردیم. می‌بینیم که باید تمام n درایهٔ آرایه را بررسی کنیم به‌شرط آنکه (۱) اولین رخداد Key، $A[n]$ باشد یا (۲) k در آرایه وجود نداشته باشد. در هر دو حالت داریم $f(n) = n$، و در اینجا $O(n)$ پیچیدگی بدترین حالت است. (در سرتاسر کتاب نوعاً پیچیدگی بدترین حالت را در نظر می‌گیریم.)

سرانجام، می‌خواهیم برآورد تعداد متوسط درایه‌های بررسی شدهٔ آرایه را به‌دست آوریم. فرض خواهیم کرد که n درایهٔ آرایه متمایزند و همه با احتمال مساوی (با احتمال p) با مقدار Key برابرند، و احتمال نبودن Key در آرایه برابر q است. بنابراین، داریم $np + q = 1$ و $p = (1 - q)/n$.

برای هر $1 \leq i \leq n$، اگر Key برابر با $A[i]$ باشد، آنگاه i عنصر آرایه بررسی شده است. اگر Key در آرایه نباشد، آنگاه همهٔ n عنصر آرایه بررسی شده‌اند. بنابراین، پیچیدگی حالت متوسط از روی متوسط تعداد عناصر بررسی شدهٔ آرایه تعیین می‌شود که عبارت است از

$$\begin{aligned} f(n) &= (1.p + 2.p + 3.p + \cdots + n.p) + n.q = p(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + nq \\ &= pn(n+1)/2 + nq \end{aligned}$$

اگر $q = 0$، آنگاه Key در آرایه است، $p = 1/n$ و $f(n) = (n+1)/2 \in O(n)$. برای $q = 1/2$، شانسی یکنواخت، برای بودن Key در آرایه وجود دارد، و

$$f(n) = (1/2n)[n(n+1)/2] + (n/2) = (n+1)/4 + (n/2) \in O(n)$$

[به‌طور کلی برای هر $0 \leq q \leq 1$، داریم $f(n) \in O(n)$.] □

در اوایل بحث بخش پیش، تذکر دادیم که چگونه ممکن است بخواهیم دو الگوریتمی را مقایسه کنیم که هر دو مساله‌ای از نوع مفروض را به‌طور صحیح حل می‌کنند. چنین مقایسه‌ای را می‌توان با استفاده از تابعهای پیچیدگی زمان برای الگوریتمها انجام داد. در نتایج دو مثال بعدی این را نشان می‌دهیم.

مثال ۵۶.۵ در بعضی زبانهای کامپیوتری، نظیر پاسکال استاندارد و پاسکال C، تابع توکار برای به **توان رساندن وجود ندارد**. قطعه برنامهٔ پاسکال که در شکل ۱۱.۵ اجرا شده، خروجی $n^{?}$ را دارد

```
Begin

   x := 1.0;

   For i := 1 to n do
        x := x*a;

   Writeln ('The value of ', a, ' raised to the power ',
              n, ' is ', x, ' .')

End;
```

شکل۱۱.۵

که در آن a عددی حقیقی و n عدد صحیح مثبت است. در اینجا مقادیر a و n قبل از اجرای قطعه برنامه معین شده‌اند. متغیر حقیقی x ارزش آغازی ۱٫۰ را گرفته و سپس برای ذخیره کردن مقادیر a، a^2، a^3، $\ldots$ ، a^n در طول اجرای حلقهٔ For به‌کار رفته است. در اینجا، $f(n)$، یعنی پیچیدگی زمان برای الگوریتم به‌وسیلهٔ تعداد عملهای ضربی تعیین می‌شود که در حلقهٔ For رخ می‌دهند. بنابراین، $f(n) = n \in O(n)$. □

مثال ۵۷.۵ در شکل ۱۲.۵ دومین قطعه برنامهٔ پاسکال برای محاسبهٔ a^n به‌ازای $a \in \mathbf{R}$،

```
Begin

   x := 1.0;
   i := n;

   While i > 0 do
        Begin
           If i <> 2*(i Div 2) then                    {i is odd}
              x := x*a;
           i := i Div 2;
           If i > 0 then
              a := a*a
        End;

Writeln ('The value of ', a, ' raised to the power ',
            n, ' is ', x, ' .')

End;
```

شکل۱۲.۵

<pre>n = 7
x := 1.0
i := 7
 	
1 { x := x*a   {x = a}
    i := 3
    a := a*a
 	
2 { x := x*a   {x = a^3}
    i := 1
    a := a*a
 	
3 { x := x*a   {x = a^7}
    i := 0
 	
[x = a^7 = a · a^2 · a^4]</pre>
	<pre>n = 8
	x := 1.0
	i := 8
	
	1 { i := 4
	    a := a*a
	
	2 { i := 2
	    a := a*a
	
	3 { i := 1
	    a := a*a
	
	4 { x := x*a {x = a^8}
	    i := 0
	
	[x = (((a)^2)^2)^2]</pre>

شکل۱۳.۵

$n \in \mathbf{Z}^+$ اجرا شده است. در اینجا از عمل تقسیم بر عدد صحیح غیرصفر Div (که قبلاً تعریف شده) استفاده کرده‌ایم. مقدار (c Div d) صرفاً قسمت صحیح c/d (خارج‌قسمت) است، وقتی $c, d \in \mathbf{Z}$، و $d \neq ۰$. مثلاً ۷Div۳ برابر ۲، و ۳Div۴برابر ۰ است.

خروجی این قطعه برنامه، a^n است، که در آن متغیر حقیقی a و متغیر صحیح (مثبت) n مقادیری هستند که قبلاً در برنامه معین شده‌اند. متغیر حقیقی x ارزش آغازی ۱٫۰را گرفته و سپس به ذخیره کردن توانهای مناسب a می‌پردازد تا وقتی شامل مقدار a^n شود. نتایجی را که در شکل ۱۳.۵ آورده‌ایم نشان می‌دهند که برای x (و a) در حالتهایی که n برابر ۷ و ۸ است، چه رخ داده است. اعداد ۱، ۲، ۳، و ۴ معرف اولین، دومین، سومین، و چهارمین باری است که گزاره‌ها در حلقهٔ While (به‌خصوص، گزارهٔ i:=i Div۲)اجرا شده‌اند.اگر $n = ۷$، آن‌گاه به دلیل اینکه $۲^۲ < ۷ < ۲^۳$، داریم $۲ < \log_۲ ۷ < ۳$. در اینجا حلقهٔ While سه‌بار اجرا شده است و

$$۳ = \lfloor \log_۲ ۷ \rfloor + ۱ < \log_۲ ۷ + ۱$$

که در آن $\lfloor \log_۲ ۷ \rfloor$ معرف بزرگترین عدد صحیح در $\log_۲ ۷$ است که برابر ۲ است. همچنین، وقتی $n = ۸$، تعداد دفعاتی که حلقهٔ While اجرا شده است برابر است با

$$۴ = \lfloor \log_۲ ۸ \rfloor + ۱ = \log_۲ ۸ + ۱$$

زیرا $\log_۲ ۸ = ۳$.

تابع پیچیدگی زمان، $g(n)$، را برای (اجرای) الگوریتم به توان رساندن، به صورت تعداد دفعاتی که حلقهٔ While اجرا شده است تعریف خواهیم کرد. این، تعداد دفعاتی است که گزارهٔ i:= i Div ۲ اجرا شده است. (در اینجا می‌پذیریم که هر عمل Div در طی یک فاصلهٔ زمانی ثابت انجام شده است. یعنی، فاصلهٔ زمانی برای هر فراخوان Div مستقل از بزرگی i است.) براساس دو مشاهدهٔ قبل، می‌خواهیم ثابت کنیم که به‌ازای تمام مقادیر $n \geq ۱$، $g(n) \leq \log_۲ n + ۱ \in O(\log_۲ n)$. این را به‌وسیلهٔ استقرای ریاضی (صورت دیگر قضیهٔ ۲.۴) برای مقدار ثابت n انجام خواهیم داد.

وقتی $n = ۱$، می‌بینیم که در شکل ۱۲.۵ که i فرد است، به x مقدار $a = a^۱$ تخصیص یافته است و $a^۱$ بعد از تنها $۱ = \log_۲ ۱ + ۱$ اجرای حلقهٔ While تعیین شده است. لذا $g(۱) = ۱ \leq \log_۲ ۱ + ۱$.

اینک فرض می‌کنیم به‌ازای همهٔ مقادیر $۱ \leq n \leq k$، $g(n) \leq \log_۲ n + ۱$. پس برای $n = k + ۱$، در طی اولین عبور از حلقهٔ While، مقدار i به $\lfloor \frac{k+۱}{۲} \rfloor$ بدل می‌شود. چون $k \geq \lfloor \frac{k+۱}{۲} \rfloor \geq ۱$، بنابر فرض استقرا حلقهٔ While، $g\left(\lfloor \frac{k+۱}{۲} \rfloor\right)$ دفعه بیشتر اجرا خواهد شد، که در آن $g\left(\lfloor \frac{k+۱}{۲} \rfloor\right) \leq \log_۲ \lfloor \frac{k+۱}{۲} \rfloor + ۱$.

بنابراین،

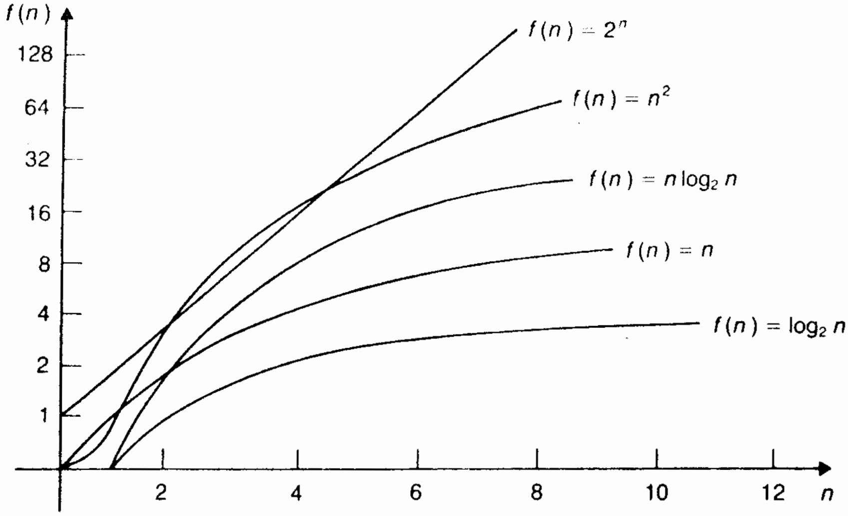
$$g(k+۱) \leq ۱ + \left[\log_۲ \lfloor \frac{k+۱}{۲} \rfloor + ۱\right] \leq ۱ + \left[\log_۲ \left(\frac{k+۱}{۲}\right) + ۱\right]$$
$$= ۱ + [\log_۲ (k+۱) - \log_۲ ۲ + ۱] = \log_۲ (k+۱) + ۱$$

برای تابع پیچیدگی زمان در مثال ۵۶.۵، متوجه می‌شویم که $f(n) \in O(n)$. در اینجا داریم $g(n) \in O(\log_۲ n)$. می‌توان تحقیق کرد که g مغلوب f است اما f مغلوب g نیست. بنابراین، برای مقدار بزرگ n، این الگوریتم دوم کاراتر از الگوریتم اول (مثال ۵۶.۵) در نظر گرفته شده است. (اما، توجه کنید که کدبندی برنامه، در شکل ۱۱.۵ خیلی آسانتر از برنامه در شکل ۱۲.۵ است.) □

در خاتمهٔ این بخش، آنچه را که فراگرفته‌ایم در مشاهدات زیر خلاصه می‌کنیم.

۱. نتایجی که از مثالهای ۵۴.۵ تا ۵۷.۵ استخراج کردیم، وقتی با مقادیر بزرگ و متوسط n سر و کار داریم مفیدند. برای مقادیر کوچک n، چنین ملاحظاتی دربارهٔ تابعهای پیچیدگی زمان نتیجهٔ چندانی ندارند.

۲. فرض کنید الگوریتمهای $A_۱$ و $A_۲$ به‌ترتیب دارای تابع پیچیدگی زمان $f(n)$ و $g(n)$ باشند، که برای آنها $f(n) \in O(n)$ و $g(n) \in O(n^۲)$. در اینجا باید خیلی مواظب باشیم. ممکن است انتظار داشته باشیم که یک الگوریتم با پیچیدگی خطی «شاید کاراتر» از الگوریتمی با پیچیدگی درجهٔ دوم باشد. ولی واقعاً اطلاعاتی بیشتر لازم است. اگر $f(n) = ۱۰۰۰n$، و $g(n) = n^۲$، آن‌گاه الگوریتم $A_۲$، مادامی که n، یعنی اندازهٔ مسأله، از ۱۰۰۰ تجاوز نکند، خوب است. اگر اندازهٔ مسأله به‌قسمی باشد که هرگز از ۱۰۰۰ تجاوز نکند، آن‌گاه الگوریتم $A_۲$ انتخاب



شکل۱۴.۵

بهتری است. اما، همان‌طور که در مشاهدهٔ ۱ ذکر کردیم، وقتی n بزرگتر شود، الگوریتم پیچیدگی خطی، گزینه‌ای بهتر می‌شود.

۳. در شکل ۱۴.۵ نمودار لگ خطی را برای تابعهای وابسته به بعضی از مرتبه‌هایی که در جدول ۹.۵ داده شده‌اند، رسم کرده‌ایم. (در اینجا به‌جای متغیر صحیح (گسستهٔ) n، متغیر حقیقی (پیوستهٔ) n را قرار داده‌ایم.) این مطلب، در به‌وجود آوردن احساسی برای نرخهای رشد نسبی آنها (به‌خصوص برای مقدارهای بزرگ n) به‌ما کمک می‌کند.

داده‌های جدول ۱۰.۵، برآورد زمانهای اجرای الگوریتمها را برای بعضی از مرتبه‌های پیچیدگی در اختیار ما می‌گذارد. در اینجا، مسائلی با اندازه‌های $n = ۲, ۱۶, ۶۴$ داریم، و می‌پذیریم که کامپیوتر می‌تواند هر $۱۰^{-۶}$ ثانیه، یعنی ۱ میکروثانیه (به‌طور متوسط) یک عمل را انجام دهد. در این صورت، درایه‌های جدول، زمانهای اجرا را برحسب میکروثانیه برآورد می‌کنند. مثلاً، وقتی اندازهٔ مسأله ۱۶ و

جدول ۱۰.۵

	مرتبهٔ پیچیدگی					
n، اندازهٔ مسأله	$\log_۲ n$	n	$n \log_۲ n$	$n^۲$	۲^n	$n!$
۲	۱	۲	۲	۴	۴	۲
۱۶	۴	۱۶	۶۴	۲۵۶	۶.۵×۱۰^۴	۲.۱×۱۰^{۱۳}
۶۴	۶	۶۴	۳۸۴	۴۰۹۶	۱.۸۴×۱۰^{۱۹}	$> ۱۰^{۸۹}$

مرتبهٔ پیچیدگی $n \log_2 n$ است، زمان پیچیدگی زمانی خیلی کوتاه، $64 = 16{,}4 = 16 \log_2 16$ میکروثانیه است؛ برای مرتبهٔ پیچیدگی 2^n، زمان اجرا $6{,}5 \times 10^4$ میکروثانیه برابر ۰٫۰۶۵ ثانیه است. چون این فاصله‌های زمانی هر دو خیلی کوتاه‌اند برای افراد، مشاهدهٔ تفاوت زیاد بین این زمانهای اجرا مشکل است. در هر دو حالت حصول نتایج به نظر آنی می‌رسد.

اما، چنین برآوردهایی می‌توانند نسبتاً سریع رشد کنند. مثلاً، فرض کنید برنامه‌ای را اجرا می‌کنیم که ورودی آن، آرایهٔ A از n عدد صحیح متفاوت است. نتایج این برنامه در دو بخش تولید می‌شوند:

۱. ابتدا برنامه، الگوریتمی را اجرا می‌کند که زیرمجموعه‌های A به‌اندازهٔ ۱ را تعیین می‌نماید. n زیرمجموعه از این گونه وجود دارند.

۲. سپس الگوریتم دوم برای تعیین همهٔ زیرمجموعه‌های A اجرا می‌شود. 2^n زیرمجموعه از این‌گونه وجود دارند.

فرض می‌کنیم ابر کامپیوتری داریم که می‌تواند هر زیرمجموعهٔ A را در یک میکروثانیه تعیین کند. برای حالتی که در آن $|A| = 64$، اولین قسمت خروجی تقریباً به‌صورت آنی ـــ در حدود ۶۴ میکروثانیه ـــ اجرا می‌شود. اما برای قسمت دوم، جدول ۵.۱۰ نشان می‌دهد که میزان زمان لازم برای تعیین همهٔ زیرمجموعه‌های A، حدود $1{,}84 \times 10^{19}$ میکروثانیه خواهد بود. اما نمی‌توانیم به این نتایج دلخوش باشیم، زیرا

$$1{,}84 \times 10^{19} \text{ میکروثانیه} \doteq 2{,}14 \times 10^{8} \text{ روز} \doteq 5845 \text{ قرن}$$

تمرینهای ۸.۵

۱. در هر یک از قطعه برنامه‌های پاسکال زیر، متغیرهای صحیح i، j، n، و sum قبلاً در برنامه اعلام شده‌اند. مقدار n (یک عدد صحیح مثبت) به‌وسیلهٔ استفاده‌کننده قبل از اجرای قطعه تهیه شده است. در هر مورد، $f(n)$، تابع پیچیدگی زمان را به‌صورت تعداد دفعات اجرای حکم sum := sum + 1 تعریف می‌کنیم. بهترین صورت «اُی بزرگ» را برای f تعیین کنید.

الف)
```
Begin
  sum := 0;
  For i := 1 to n do
     For j := 1 to n do
        sum := sum + 1
End;
```

ب)
```
Begin
  sum := 0;
  For i := 1 to n do
```

```
      For j := 1 to n*n do
          sum := sum + 1
End;
```

ج)

```
Begin
  sum := 0;
  For i := 1 to n do
     For j := i to n do
         sum := sum + 1
End;
```

د)

```
Begin
  sum := 0;
  i := n;
  While i > 0 do
     Begin
         sum := sum + 1;
         i := i Div 2
     End
End;
```

ه)

```
Begin
  sum := 0;
  For i := 1 to n do
     Begin
         j := n;
         While j > 0 do
            Begin
               sum := sum + 1;
               i := i Div 2
            End
     End
End;
```

۲. قطعه برنامهٔ پاسکال زیر، الگوریتمی را برای تعیین مقدار ماکسیمم در آرایهٔ اعداد صحیح $A[۱]$، $A[۲]$، $A[۳]$، . . . ، $A[n]$ اجرا می‌کند. آرایه و مقدار n (≥ ۲) قبلاً در برنامه مشخص شده‌اند؛ متغیرهای صحیح i و Max در آغاز برنامه اعلام شده‌اند.

```
Begin
   Max := A[1];
   For i := 2 to n do
      If A[i] > Max then
         Max := A[i]
End;
```

الف) اگر $f(n)$، تابع پیچیدگی بدترین حالت برای این قطعه به‌وسیلهٔ تعداد دفعات اجرای

مقایسهٔ $A[i] > \mathrm{Max}$ تعیین شود، «اُی بزرگ» مناسب را برای f بیابید.

ب) دربارهٔ پیچیدگیهای بهترین حالت و حالت متوسط اجرا چه می‌توانید بگویید؟

۳. فرض کنید $A_۱$ و $A_۲$ الگوریتمهایی به‌ترتیب با تابعهای پیچیدگی $f_۱(n)$ و $f_۲(n)$ باشند. الگوریتم $A_۳$ که ورودیش به‌وسیلهٔ $A_۱$ پردازش شده، و خروجی حاصل، پردازش یافته به‌وسیله $A_۲$ است اجرا می‌شود. برای $f_۳(n)$، تابع پیچیدگی بدترین حالت $A_۳$، صورت «اُی بزرگ» مناسب را بیابید، وقتی

الف) $f_۱ \in O(n), f_۲ \in O(n^۲)$

ب) $f_۱ \in O(۱), f_۲ \in O(\log_۲ n)$

ج) $f_۱ \in O(n^۲), f_۲ \in O(n \log_۲ n)$

د) $f_۱ \in O(n^۲), f_۲ \in O(n^۲)$

ه) $f_۱ \in O(n^۲), f_۲ \in O(۲^n)$

۴. قطعه برنامهٔ پاسکال مثال ۵۵.۵ را دوباره در نظر بگیرید به‌قسمی که اگر Key در آرایهٔ $A[۱]$، $A[۲]$، $A[۳]$، ...، $A[n]$ ظاهر شود، آن‌گاه تمام موضعهایش در آرایه چاپ شوند.

۹.۵ خلاصه و مرور تاریخی

در این فصل مفهوم تابع را که در زمینهٔ ریاضیات از اهمیتی زیاد برخوردار است بسط دادیم. گرچه در اصل به تابعهای متناهی، یا گسسته پرداختیم، تعریف تابع به همان صورت برای مجموعه‌های نامتناهی و ازجمله تابعهای مثلثاتی و تابعهای حساب دیفرانسیل و انتگرال نیز به‌کار می‌رود. اما ما بر نقش تابع گسسته به‌عنوان تابعی که مجموعه‌ای متناهی را به مجموعه‌ای متناهی تبدیل می‌کند تأکید نهادیم. در این زمینه، خروجی کامپیوتر را می‌توان به‌صورت تابعی از ورودی کامپیوتر در نظر گرفت، و همگردان را می‌توان تابعی در نظر گرفت که برنامه (منبع) را به مجموعهٔ دستورالعملهای زبان ماشین (برنامهٔ مقصود) تبدیل می‌کند.

صورت لاتین واژهٔ فعلی «تابع» را گوتفریت ویلهلم لایبنیتس (۱۶۴۶ـ۱۷۱۶)، در ۱۶۹۴ برای نشان دادن کمیتی مربوط به خم (نظیر شیب خم، یا مختصات نقطه‌ای از خم) به‌کار برده است. یوهان برنولی (۱۶۶۷ـ۱۷۴۸) در ۱۷۱۸، تابع را به‌عنوان عبارتی جبری که از مقادیر ثابت و یک متغیر تشکیل شده در نظر گرفته است. بعداً لئونهارت اویلر (۱۷۰۷ـ۱۷۸۳) معادله‌ها و فرمولهایی را که شامل مقادیر ثابت و متغیر بودند ارائه داده است. ایدهٔ او عموماً تعریف تابع مبتنی بر ریاضیات دبیرستانی است. در کارهای اویلر و آلکسی کلرو (۱۷۱۳ـ۱۷۶۵) مربوط به حدود ۱۷۳۴، نماد $f(x)$ را می‌بینیم که امروزه هنوز به‌کار می‌رود.

ایدهٔ اویلر تا زمان ژوزف فوریه (۱۷۶۸ـ۱۸۳۰)، که نیاز به نوع کلیتر تابع را در بررسیهایش از سریهای مثلثاتی دریافت، دست نخورده‌ماند. در ۱۸۳۷ پترگوستاف لوژون دیریکله (۱۸۰۵ـ۱۸۵۹)

فرمولبندی دقیقتری را از مفاهیم متغیر، تابع، و تناظر بین متغیر مستقل x و متغیر وابستهٔ y، وقتی $y = f(x)$، پی‌ریزی کرد. کار دیریکله بر بستگی بین دو مجموعه از اعداد تأکید داشت و مربوط به وجود فرمول یا عبارتی که دو مجموعه را به‌هم مربوط کند نبود. با پیشرفتهایی که در نظریهٔ مجموعه‌ها در طی قرنهای نوزده و بیست صورت گرفت تعمیم تابع به‌صورت نوعی خاص از رابطه درآمد.

دیریکله علاوه بر کار اساسی‌اش دربارهٔ تعریف تابع، در ریاضیات کاربردی و در نظریهٔ اعداد نیز کاملاً فعال بود. در همین جا بود که نیاز به اصل لانهٔ کبوتر را، که اغلب به آن اصل کشوی دیریکله هم می‌گویند، دریافت.

قرنهای نوزده و بیست شاهد استفاده از تابع خاص، و تناظر یک به یک، در مطالعهٔ بینهایت بود. حدود سال ۱۸۸۸، ریشارد ددکیند (۱۸۳۱ـ۱۹۱۶) یک مجموعهٔ نامتناهی را به‌صورت مجموعه‌ای تعریف کرد که می‌توان آن‌را در تناظر یک به یک با زیرمجموعه‌ای سره از خودش قرار داد. (گالیله (۱۵۶۴ـ۱۶۴۲) این مطلب را برای مجموعهٔ $\mathbf{Z}^+$ دریافته بود.) دو مجموعهٔ نامتناهی را که می‌شد آنها را در تناظر یک به یک با یکدیگر قرار داد می‌گفتند دارای عدد اصلی ترامتناهی یکسان‌اند. گئورگ کانتور (۱۸۴۵ـ۱۹۱۸) در سلسله‌ای از مقالات، مفهوم سطوح بینهایت را بسط و نشان داد که $|\mathbf{Q}| = |\mathbf{Z}|$ اما $|\mathbf{Z}| < |\mathbf{R}|$. مجموعهٔ A با $|A| = |\mathbf{Z}|$ را شمارا یا شمارش‌پذیر می‌نامند و همان‌طور که کانتور با استفاده از الف‌ـصفر، یعنی از حرف الف عبری با زیرنویس ۰، نشان داده است می‌نویسیم $|\mathbf{Z}| = \aleph_0$ تا اولین سطح بینهایت را نشان دهیم. برای اینکه نشان داده شود $|\mathbf{Z}| < |\mathbf{R}|$، یا اینکه اعداد حقیقی ناشمارا هستند، کانتور تکنیکی را که اینک به آن روش قطری کانتور اطلاق می‌شود ابداع کرده است.

اعداد استرلینگ بخش ۳.۵ به افتخار جیمز استرلینگ (۱۶۹۲ـ۱۷۷۰)، که در بسط تابعهای مولّد پیشگام بوده است، به این نام خوانده شده‌اند و موضوعی است که بعدها در این کتاب بررسی خواهد شد. او همکار سر آیزک نیوتن (۱۶۴۲ـ۱۷۲۷) بود و ۲۵ سال قبل از کولین مکلورن (۱۶۹۸ـ۱۷۴۶) از سری او در کارهایش استفاده کرده بود. اما، گرچه نامش به این سری نامتناهی منسوب نشده است، ولی این سری در تقریب معروف به فرمول استرلینگ: $n! \doteq (2\pi n)^{1/2} e^{-n} n^n$ آمده است، و اگر منصفانه بگوییم این بسط عملاً به‌وسیلهٔ آبراهام دموآور (۱۶۶۷ـ۱۷۵۴) صورت گرفته است.

با استفاده از اصلهای شمارش، که در فصل ۳.۵ به تفصیل مطرح شدند، نتایج مندرج در جدول ۱۱.۵ بسط مفاهیمی هستند که در جدول ۶.۱ خلاصه شده‌اند. در اینجا تعداد راههای ممکن توزیع m شیٔ در n ظرف را، در شرایطی که در سه ستون اول جدول از قبل مشخص شده بود، حساب کردیم. (حالتهایی را که در آنها نه اشیاء متمایزند و نه ظرفها، در فصل ۹ خواهیم آورد.)

سرانجام نماد «اُی بزرگ» بخش ۷.۵ را پاؤل گوستاف هاینریش باخمن[1] (۱۸۳۷ـ۱۹۲۰) در کتابش به‌نام نظریهٔ تحلیلی شمارش در ۱۸۹۲ وارد کرد. این نماد در کار تقریب، در زمینه‌هایی

1. Paul Gustav Heinrich Bachmann

جدول ۱۱.۵

تعداد توزیعها	بعضی از ظرفها ممکن است تهی باشند	ظرفها متمایزند	اشیا متمایزند
n^m	بله	بله	بله
$n!S(m,n)$	نه	بله	بله
$S(m,1)+S(m,2)+\cdots+S(m,n)$	بله	نه	بله
$S(m,n)$	نه	نه	بله
$\binom{n+m-1}{m}$	بله	بله	نه
$\binom{n+(m-n)-1}{(m-n)}=\binom{m-1}{m-n}=\binom{m-1}{n-1}$	نه	بله	نه

مثل آنالیز عددی و تحلیل الگوریتمها شهرت یافت. به‌طورکلی، نماد $f\in O(g)$ نشان می‌دهد که تابع f را صراحتاً نمی‌شناسیم، اما کران مرتبهٔ بزرگی آن را در دست داریم.

برای آگاهی بیشتر از مجموعه‌های نامتناهی و کارهای کانتور، به فصل ۸ اثر ایوز[1] و نیوسم[2] [۴]، یا فصل ۴ وایلدر[3] [۶] رجوع کنید. تعمیم اصل لانهٔ کبوتر زمینهٔ وسیعی از پژوهش در طی این سده بوده است و در موضوع نظریهٔ رمزی که از نام فرانک پلمتن رمزی[4] (۱۹۰۳ـ۱۹۳۰) گرفته شده است به اوج خود رسیده است. معرفی جالبی از نظریهٔ رمزی به‌عمل آمده که می‌توان آن‌را در فصل ۵ اثر کوهن [۲] مطالعه کرد. برای مطالبی بیشتر در این باب کتاب درسی اثر گراهام رُتشیلْت،[5] و اسپنسر [۵] اطلاعات ارزنده‌ای به‌ما می‌دهد. مجموعه‌ای جامع از مبحث پایه‌های داده‌های نسبی را می‌توان در اثر دیت[6] [۳] یافت. بالاخره کتاب درسی تألیف بازه [۱] برای ادامهٔ مطالعهٔ تحلیل الگوریتمها، مرجعی عالی است.

مراجع

1. Baase, Sara. *Computer Algorithms: Introduction to Design and Analysis*, 2nd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1988.

2. Cohen, Daniel I. A. *Basic Techniques of Combinatorial Theory*. New York: Wiley, 1978.

1. H. Eves 2. C.V. Newsom 3. R.L. Wilder 4. Ramsey
5. Graham B.L. Rothschild 6. C.J. Date

3. Date, C. J. *An Introduction to Database Systems*, 3rd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1982.
4. Eves, Howard, and Newsom, Carroll V. *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, rev. ed. New York: Holt, 1965.
5. Graham, Ronald L., Rothschild, Bruce L., and Spencer, Joel H. *Ramsey Theory*. New York: Wiley, 1980.
6. Wilder, Raymond L. *Introduction to the Foundations of Mathematics*, 2nd ed. New York: Wiley, 1965.

تمرینهای گوناگون

۱. **الف)** برای مجموعه‌های A، B، C، D ثابت کنید

$$(A \subseteq C \wedge B \subseteq D) \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$$

ب) آیا $A \times B \subseteq C \times D$ الزاماً ایجاب می‌کند که $A \subseteq C$ و $B \subseteq D$؟

۲. تعیین کنید هر یک از حکمهای زیر درست است یا غلط. برای هر حکم غلط مثالی نقض بزنید.

الف) اگر $f : A \to B$ تابع باشد و $(a, b), (a, c) \in f$، آن‌گاه $b = c$.

ب) اگر $f : A \to B$ تناظری یک به یک باشد و A، B متناهی باشند، آن‌گاه $A = B$.

ج) اگر $f : A \to B$ یک به یک باشد، آن‌گاه f وارونپذیر است.

د) اگر $f : A \to B$ وارونپذیر باشد، آن‌گاه f یک به یک است.

ه) اگر $f : A \to B$ یک به یک باشد و $g, h : B \to C$ با $g \circ f = h \circ f$، آن‌گاه $g = h$.

و) اگر $f : A \to B$ و $A_۱, A_۲ \subseteq A$، آن‌گاه $f(A_۱ \cap A_۲) = f(A_۱) \cap f(A_۲)$؛

ز) اگر $f : A \to B$ و $B_۱, B_۲ \subseteq B$، آن‌گاه $f^{-۱}(B_۱ \cap B_۲) = f^{-۱}(B_۱) \cap f^{-۱}(B_۲)$.

۳. با $\mathscr{U} = \mathbf{Z}$، فرض کنید $A, B \subseteq \mathscr{U}$ با $A = \{۲, ۳, ۵\}$، $B = \{۱, ۲, ۵, ۶\}$.

الف) نمودار $A \times B$ را به‌صورت زیرمجموعه‌ای از صفحهٔ اقلیدسی رسم کنید.

ب) اگر $\mathscr{R}$ رابطه‌ای از A به B باشد که به‌صورت $\{(a, b) | a + b \text{ فرد است}\}$ تعریف شده است، نمودار $\mathscr{R}$ را به‌صورت زیرمجموعه‌ای از صفحهٔ اقلیدسی رسم کنید.

ج) چند تا از رابطه‌های از A به B تابعهایی از A به B نیستند.

۴. فرض کنید $\mathscr{U} = N$ و $A, B \subseteq \mathscr{U}$ با $۱ < |A| < |B|$. اگر ۲۶۲۱۴۴ رابطه از A به B وجود داشته باشد، تمام امکانهای $|A|$ و $|B|$ را تعیین کنید.

۵. اگر $\mathscr{U}_۱$ و $\mathscr{U}_۲$ مجموعه‌های عام با $A, B \subseteq \mathscr{U}_۱$، $C, D \subseteq \mathscr{U}_۲$ باشند، ثابت کنید

الف) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$؛

ب) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D) \cup (A \times D) \cup (B \times C)$؛

(لذا در حالت کلی $(A \cup B) \times (C \cup D) \supseteq (A \times C) \cup (B \times D)$).

۶. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$، $B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$. چند تابع یک به یک $f : A \to B$ در (الف) $f(۱) = ۳$ (ب) $f(۱) = ۳$، $f(۲) = ۶$ صدق می‌کنند؟

۷. تابع آکرمن،[1] $A(m, n)$ به‌ازای اعداد صحیح $m, n > ۰$، به‌طور بازگشتی (یعنی به‌ازای $m > ۰$، مقدار $A(m, n)$، برای یک یا چند عدد صحیح نامنفی کوچکتر از m یا n به مقدار (مقدارهای) A بستگی دارد) به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$A(۰, n) = n + ۱,\ n \geq ۰; \qquad A(m, ۰) = A(m - ۱, ۱),\ m > ۰;$$
$$A(m, n) = A(m - ۱, A(m, n - ۱)),\ m > ۰,\ n > ۰$$

$A(۲, ۳)$ را حساب کنید.

۸. مجموعه‌های $A_۱$، A و B، با $A_۱ \subset A$ $= \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$، $B = \{s, t, u, v, w, x\}$، و $f : A_۱ \to B$ مفروض‌اند. اگر f را بتوان به ۲۱۶ راه به A توسیع داد، $|A|$ چقدر است؟

۹. فرض‌کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$، $B = \{t, u, v, w, x, y, z\}$. (الف) اگر تابع $f : A \to B$ به‌صورت تصادفی تولید شده باشد، احتمال اینکه یک به یک باشد چقدر است؟ (ب) برای تولید تابعهای $f : A \to B$ برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید، و ببینید در خروجی چند تابع تولید می‌شود تا یکی از آنها یک به یک باشد؟

۱۰. فرض کنید S مجموعه‌ای از هفت عدد صحیح مثبت باشد که بزرگترین آنها حداکثر ۲۴ است. ثابت کنید که مجموعهای عناصر در همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی S نمی‌توانند ازهم متمایز باشند.

۱۱. یک منشی، در طی دوره‌ای ده‌روزه ۸۴ نامه برای مشتریان خود ماشین کرده است. ۱۲ تا از این نامه‌ها را در روز اول، ۷ تای آنها را در روز دوم، ۳ تای آنها را در روز نهم و ۸ تای آخر را در روز دهم ماشین کرده است. ثابت کنید که در عرض ۳ روز متوالی، حداقل ۲۵ نامه ماشین کرده است.

۱۲. اگر $\{x_۱, x_۲, \cdots, x_۷\} \subseteq \mathbf{Z}^+$، نشان دهید که مقادیر i و jای، $i \neq j$ وجود دارند که به‌ازای آنها $x_i + x_j$ یا $x_i - x_j$ بر ۱۰ تقسیم‌پذیر است.

۱۳. فرض کنید $n \in \mathbf{Z}^+$ و n فرد است. اگر $i_۱$، $i_۲$، $\ldots$ ، i_n جایگشتی از اعداد صحیح ۱، ۲، $\ldots$، n باشد، ثابت کنید که $(۱ - i_۱)(۲ - i_۲) \cdots (n - i_n)$ عدد صحیح زوج است. (کدام اصل شمارش در اینجا کارایی دارد؟)

۱۴. محمد، علی، و حسن که با والدینشان کار می‌کنند باید در هر هفته جمعاً انجام ده کار را به عهده بگیرند. (الف) به چند راه می‌توانند کارها را بین خودشان تقسیم کنند به‌قسمی که هر کدام حداقل مسؤول انجام یک کار باشد؟ (ب) به چند راه می‌توانند کارها را تخصیص دهند اگر محمد که بزرگتر از دیگران است، چمنها را کوتاه کند (یکی از ده کار هفتگی) و دیگران مجاز به بیکار بودن نباشند؟

---
1. Ackermann

۱۵. فرض کنید $n \in \mathbf{N}$، $n \geq ۲$. نشان دهید که $S(n, ۲) = ۲^{n-۱} - ۱$.

۱۶. خانمی دارای پنج پسر (محمد، علی، حسن، حسین، تقی) است که خواندن کتابهای ورزشی را دوست دارند. نزدیکیهای عید نوروز، این خانم از کتابفروشیی دیدن می‌کند و در آنجا ۱۲ کتاب مختلف دربارهٔ ورزش می‌یابد.

الف) این خانم به چند راه می‌تواند نه‌تا از این کتابها را انتخاب کند؟

ب) بعد از انجام خرید، به چند راه می‌تواند کتابها را بین پسرانش توزیع کند به‌قسمی که به هر یک از آنها حداقل یک کتاب برسد؟

ج) برای وضعیت حاضر مسأله‌ای طرح کنید که پاسخ آن حاصلضرب پاسخهای قسمتهای (الف) و (ب) باشد.

د) دومجلد از نه کتابی که این خانم خریده است، به بسکتبال مربوط‌اند که ورزش مورد علاقهٔ تقی است. این خانم به چند راه می‌تواند کتابها را بین پسرانش توزیع کند به‌قسمی که حداقل این دو کتاب مربوط به بسکتبال به تقی برسد؟

۱۷. فرض کنید $m, n \in \mathbf{Z}^+$ و $n \geq m$. (الف) به چند راه می‌توان n شیءِ متمایز را بین m جعبهٔ متفاوت توزیع کرد به‌قسمی که هیچ جعبه‌ای خالی نماند؟ (ب) در بسط $(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_m)^n$، مجموع همهٔ ضرایب چندجمله‌ای، $\binom{n}{n_۱, n_۲, \cdots, n_m}$، که در آن، $n_۱ + n_۲ + \cdots + n_m = n$ و $n_i > ۰$، $۱ \leq i \leq m$، چقدر است؟

۱۸. اگر $n \in \mathbf{Z}^+$، $n \geq ۴$، تحقیق کنید که $S(n, n-۲) = \binom{n}{۳} + ۳\binom{n}{۴}$.

۱۹. اگر $f : A \to A$ تابعی دلخواه باشد، ثابت کنید که به‌ازای همهٔ مقادیر $m, n \in \mathbf{Z}^+$، $f^m \circ f^n = f^n \circ f^m$. (ابتدا فرض کنید $m = ۱$ و به استقرا روی n عمل کنید. آن‌گاه به استقرا روی m بپردازید. این تکنیک به استقرای مضاعف موسوم است.)

۲۰. فرض کنید $f : X \to Y$، و برای هر $i \in I$، فرض کنید $A_i \subseteq X$. ثابت کنید که

الف) $f(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i \in I} f(A_i)$؛

ب) $f(\cap_{i\in I} A_i) \subseteq \cap_{i\in I} f(A_i)$؛

ج) برای f یک به یک، $f(\cap_{i\in I} A_i) = \cap_{i\in I} f(A_i)$.

۲۱. اگر $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ با $f(x) = x^n$، برای کدام مقدار $n \in \mathbf{Z}^+$، f وارونپذیر است؟

۲۲. فرض کنید A مجموعه‌ای با $|A| = n$ باشد.

الف) چند عمل دوتایی بر A وجود دارند؟

ب) عملی سه‌تایی بر A تابعی است به صورت $f : A \times A \times A \to A$. چند عمل سه‌تایی بر A وجود دارند؟

ج) یک عمل kـتایی بر A تابعی است به‌صورت $f : A_۱ \times A_۲ \times \cdots \times A_k \to A$، که در آن، به‌ازای همهٔ مقادیر $۱ \leq i \leq k$، $A_i = A$. چند عمل kـتایی بر A وجود دارند؟

د) یک عمل kـتایی را بر A تعویضپذیر می‌نامند اگر

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_k) = f(\pi(a_1), \pi(a_2), \cdots, \pi(a_k))$$

که در آن $a_1, a_2, \cdots, a_k \in A$ (تکرار مجاز است)، و $\pi(a_1)$، $\pi(a_2)$، . . . ، $\pi(a_k)$ آرایشی مجدّد از a_1، a_2، . . . ، a_k است. چندتا از این اعمال kـتایی بر A تعویضپذیرند؟

۲۳. تابع $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را صعودی می‌نامند اگر به‌ازای اعداد حقیقی x، y؛ $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. ثابت کنید که اگر $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ تابعهایی صعودی باشند، آن‌گاه $g \circ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ صعودی است.

۲۴. اگر $\mathscr{U}$ مجموعهٔ عام باشد و $A \subseteq \mathscr{U}$، تابع مشخصهٔ A را به‌صورت $\chi_A : \mathscr{U} \to \{0, 1\}$ تعریف می‌کنیم، که در آن

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

برای مجموعه‌های $A, B \subseteq \mathscr{U}$ هر یک از روابط زیر را ثابت کنید:

الف) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$، که در آن، $(\chi_A \cdot \chi_B)(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$؛

ب) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$؛ و

ج) $\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$، که در آن، $(1 - \chi_A)(x) = 1(x) - \chi_A(x) = 1 - \chi_A(x)$.

(برای وقتی که $\mathscr{U}$ متناهی باشد، از قرار دادن عناصر $\mathscr{U}$ به یک ترتیب معین یک تناظر یک به یک بین زیرمجموعه‌های A از $\mathscr{U}$ و آرایه‌های متشکل از ۰ها و ۱های حاصل از نگاره‌های $\mathscr{U}$ تحت χ_A نتیجه می‌شود. لذا این آرایه‌ها را می‌توان برای ذخیره‌سازی در کامپیوتر و عملیات برخی زیرمجموعه‌های $\mathscr{U}$ به‌کار برد.)

۲۵. با $A = \{x, y, z\}$، فرض کنید $f, g : A \to A$ به‌صورت

$$f = \{(x, y), (y, z), (z, x)\} \qquad g = \{(x, y), (y, x), (z, z)\}$$

داده شده باشند، تعیین کنید: $f \circ g$، $g \circ f$، f^{-1}، g^{-1}، $(g \circ f)^{-1}$، $f^{-1} \circ g^{-1}$، و $g^{-1} \circ f^{-1}$

۲۶. فرض کنید $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ به صورت $f(x) = (2 + \sin(x+1))^3$، $x \in \mathbf{R}$، تعریف شده باشد. مطلوب است چهار تابع $f_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$، $1 \le i \le 4$، به‌قسمی که $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

۲۷. برای $A = \{1, 2, 3\}$ تعداد تابعهای $f : A \to A$ را بیابید به‌طوری که (الف) $f^2 = 1_A$؛ (ب) $f^2 = f$.

۲۸. الف) اگر $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = 5x + 3$ تعریف شود $f^{-1}(8)$ را بیابید.

ب) اگر $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$، که در آن $g(x)=|x^۲+۳x+۱|$، مطلوب است $g^{-۱}(۱)$.

ج) برای $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ که به‌صورت

$$h(x)=\left|\frac{x}{x+۲}\right|$$

داده شده است $h^{-۱}(۴)$ را بیابید.

۲۹. اگر $f:X\to Y$، نشان دهید که (الف) برای $A\subseteq X$، $A\subseteq f^{-۱}(f(A))$؛ و (ب) برای $B\subseteq Y$، $f(f^{-۱}(B))\subseteq B$. شرط (شرایط) لازمی را پیدا کنید که f باید در آن (آنها) صدق کند تا در قسمت (الف) و در قسمت (ب) برابری برقرار شود.

۳۰. فرض کنید $f:X\to Y$ و I یک مجموعهٔ اندیسگذار باشد که در آن به‌ازای هر $i\in I$، $B_i\subseteq Y$. ثابت کنید که

الف) $f^{-۱}(\cup_{i\in I}B_i)=\cup_{i\in I}f^{-۱}(B_i)$

ب) $f^{-۱}(\cap_{i\in I}B_i)=\cap_{i\in I}f^{-۱}(B_i)$

۳۱. در زبان برنامه‌ریزی پاسکال تابعهای pred و succ (به‌ترتیب برای ماقبل و مابعد) تابعهایی از $\mathbf{Z}$ به $\mathbf{Z}$ هستند که برای آنها $\mathrm{pred}(x)=\pi(x)=x-۱$ و $\mathrm{succ}(x)=\sigma(x)=x+۱$.

الف) تعیین کنید $(\pi\circ\sigma)(x)$، $(\sigma\circ\pi)(x)$ را.

ب) تعیین کنید $\pi^۲$، $\pi^۳$، $\pi^n(n\geq ۲)$، $\sigma^۲$، $\sigma^۳$، $\sigma^n(n\geq ۲)$ را.

ج) تعیین کنید $\pi^{-۲}$، $\pi^{-۳}$، $\pi^{-n}(n\geq ۲)$، $\sigma^{-۲}$، $\sigma^{-۳}$، $\sigma^{-n}(n\geq ۲)$ را، که مثلاً $\sigma^{-۲}=\sigma^{-۱}\circ\sigma^{-۱}=(\sigma\circ\sigma)^{-۱}=(\sigma^۲)^{-۱}$. (تمرین ۳۲ را ببینید).

۳۲. فرض می‌کنیم $f:A\to A$ تابعی وارونپذیر باشد. برای $n\in\mathbf{Z}^+$ ثابت کنید $(f^n)^{-۱}=(f^{-۱})^n$. (این نتیجه را می‌توان برای تعریف f^{-n} به‌صورت $(f^n)^{-۱}$ یا $(f^{-۱})^n$ به‌کار برد.)

۳۳. برای $n\in\mathbf{Z}^+$، $\tau:\mathbf{Z}^+\to\mathbf{Z}^+$ را با: (تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح مثبت $\tau(n)=n$) تعریف می‌کنیم.

الف) فرض کنید $n=p_۱^{e_۱}p_۲^{e_۲}p_۳^{e_۳}\cdots p_k^{e_k}$، که در آن $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$، ... ، p_k اعداد اول متمایزند و e_i عدد صحیح مثبت به‌ازای هر $۱\leq i\leq k$ است. $\tau(n)$ چقدر است؟

ب) سه کوچکترین مقدار $n\in\mathbf{Z}^+$ را تعیین کنید که به‌ازای آنها $\tau(n)=k$، که $k=۲,۳,۴,۵,۶$.

ج) برای هر $k\in\mathbf{Z}^+$، $k>۱$، ثابت کنید که $\tau^{-۱}(k)$ نامتناهی است.

۳۴. فرض کنید $a,b,c\in\mathbf{R}$ با $a^۲+bc\neq ۰$. اگر $f(x)=(ax+b)/(cx-a)$، تحقیق کنید که به‌ازای همهٔ مقادیر $x\in\mathbf{R}$، $x\neq a/c$ داریم: $(f\circ f)(x)=x$.

۳۵. **الف)** چندتا از زیرمجموعه‌های $A=\{a,b,c,d\}\subseteq\mathbf{Z}^+$، $a,b,c,d>۱$، در ویژگی $a.b.c.d=۲\cdot۳\cdot۵\cdot۷\cdot۱۱\cdot۱۳\cdot۱۷\cdot۱۹$ صدق می‌کنند؟

ب) چندتا از زیرمجموعه‌های $A = \{a_۱, a_۲, \cdots, a_m\} \subseteq \mathbf{Z}^+$، $a_i > ۱$، $۱ \leq i \leq m$، در ویژگی $\Pi_{i=۱}^{m} a_i = \Pi_{j=۱}^{n} p_j$ صدق می‌کنند که در آنها p_j، $۱ \leq j \leq n$، اعداد اول متمایزند و $n \geq m$؟

۳۶. مثالی از تابع $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ ارائه دهید که در آن $f \in O(۱)$ و f یک به یک باشد. (بنابراین، f ثابت نباشد.)

۳۷. فرض کنید $f, g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ که

$$f(n) = \begin{cases} ۲ & \text{زوج } n \\ ۱ & \text{فرد } n \end{cases} \qquad g(n) = \begin{cases} ۳ & \text{زوج } n \\ ۴ & \text{فرد } n \end{cases}$$

هریک از موردهای زیر را رد یا اثبات کنید: (الف) $f \in O(g)$؛ و (ب) $g \in O(f)$.

۳۸. برای $f, g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$، $f + g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ را به‌وسیلهٔ $(f+g)(n) = f(n) + g(n)$ به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$ تعریف می‌کنیم. (توجه کنید که علامت $+$ در $f + g$ برای عمل جمع تابعهای f و g است، درحالی که علامت $+$ در $f(n) + g(n)$ برای عمل جمع اعداد حقیقی $f(n)$ و $g(n)$ است.)

الف) فرض کنید $f_۱, g_۱ : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ با $f \in O(f_۱)$ و $g \in O(g_۱)$. اگر به‌ازای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{Z}^+$، $f_۱(n) \geq ۰$ و $g_۱(n) \geq ۰$، ثابت کنید که $(f + g) \in O(f_۱ + g_۱)$.

ب) اگر شرایط $f_۱(n) \geq ۰$، $g_۱(n) \geq ۰$ به‌ازای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{Z}^+$، مثل قسمت (الف) برقرار نباشند، برای اینکه نشان دهید $f \in O(f_۱), g \in O(g_۱) \not\Rightarrow (f + g) \in O(f_۱ + g_۱)$ مثالی نقض تهیه کنید.

۳۹. فرض کنید $a, b \in \mathbf{R}^+$، با $a, b > ۱$. فرض کنید $f, g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ به‌وسیلهٔ $f(n) = \log_a n$ و $g(n) = \log_b n$ تعریف شوند. ثابت کنید که $f \in O(g)$ و $g \in O(f)$. [بنابراین، $O(\log_a n) = O(\log_b n)$].

۶

زبانها: ماشینهای متناهی‌ـحالت

در این عصر کامپیوتر و ارتباطهای دور، هر روز خود را با وضعیتهای ورودی‌ـخروجی مواجه می‌بینیم. در خرید یک نوشابه از ماشین‌فروش‌خودکار، سکه‌هایی را وارد می‌کنیم و سپس دکمه‌ای را فشار می‌دهیم تا خروجی مورد انتظارمان، یعنی نوشابهٔ مطلوب را به‌دست آوریم. اولین سکه‌ای که وارد ماشین می‌کنیم آن را به‌کار می‌اندازد. گرچه معمولاً به آنچه درون ماشین رخ می‌دهد اعتنایی نمی‌کنیم (مگر وقتی که نوعی از کارافتادگی پیش آید و متضرر شویم)، باید در نظر بگیریم که ماشین به‌طریقی در جریان سکه‌هایی که می‌اندازیم هست تا مبلغ کل لازم را بیندازیم. تنها در این موقع، و نه قبل از آن، است که ماشین‌فروش باید نوشابهٔ مطلوب را تحویل دهد. در نتیجه، برای اینکه فروشنده سود مورد انتظارش را از فروش هر نوشابه دریافت کند، ماشین باید هر سکه‌ای را که داخل می‌شود به صورت درونی به‌خاطر بسپارد که چه مجموعی از سکه‌ها وارد ماشین شده است.

کامپیوتر نمونه‌ای دیگر از ابزار ورودی‌ـخروجی است. در اینجا، ورودی معمولاً نوعی از اطلاعات و خروجی نتیجهٔ حاصل پس از پردازش این اطلاعات است. چگونگی پردازش ورودی به طرز کارکردن داخلی کامپیوتر بستگی دارد که باید توان به یادآوری اطلاعات گذشته را، در حین کار بر روی اطلاعاتی که در حال پردازش آن است، داشته باشد.

با استفاده از مفاهیمی که دربارهٔ مجموعه‌ها و تابعها عرضه کردیم، در این فصل مدلی انتزاعی را بررسی می‌کنیم که آن را ماشین متناهی‌ـحالت یا مدار ترتیبی می‌نامند. این گونه مدارها یکی از دو نوع پایه‌ای مدارهای کنترل‌اند که در کامپیوترهای رقمی یافت می‌شوند. (نوع دیگر، مدار

ترکیبیاتی یا شبکهٔ دریچه‌بندی است که در فصل ۱۵ بررسی می‌شوند.) اینها در دستگاههای دیگر نظیرِ ماشین‌فروش فوق‌الذکر، همچنین در کنترلهای مربوط به آسانسورها، و دستگاههای چراغهای راهنمایی نیز وجود دارند.

یک ماشین متناهی-حالت، همان‌طور که از نامش پیداست، دارای تعدادی متناهی از حالتهای درونی است که اطلاعات معینی را، وقتی در حالت خاصی است، به‌یاد می‌آورد. اما قبل از طرح این مفهوم، برای گفتگو دربارهٔ آنچه ورودی معتبری را برای چنین ماشینی تشکیل می‌دهد، به بعضی مطالب نظری مجموعه‌ها نیاز داریم.

۱.۶ زبان: نظریهٔ مجموعه‌ای رشته‌ها

دنباله‌های نمادها، یا نویسه‌ها، نقشی کلیدی در پردازش اطلاعات به‌وسیلهٔ کامپیوتر دارند. چون برنامه‌های کامپیوتری برحسب دنباله‌های متناهی نویسه‌ها قابل بیان‌اند، برای گرداندن چنین دنباله‌های متناهی، یا رشته‌ها به راهی جبری نیاز است.

در سراسر این بخش Σ را برای نشان دادن مجموعهٔ متناهی ناتهی نمادها به‌کار می‌بریم که جمعاً یک الفبا خوانده می‌شوند. مثلاً، ممکن است داشته باشیم $\Sigma = \{۰, ۱\}$ یا $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$.

در هر الفبای Σ، عنصرهایی را که می‌توانند از پهلوی هم قرار گرفتن عنصرهای دیگر Σ تشکیل شوند ثبت نمی‌کنیم (یعنی اگر $a, b \in \Sigma$، آن‌گاه رشتهٔ ab از پهلوی هم‌نهادن نمادهای a و b به‌دست می‌آید). به‌عنوان نتیجهٔ این قرارداد، الفباهایی نظیر $\Sigma = \{۰, ۱, ۲, ۱۱, ۱۲\}$ و $\Sigma = \{a, b, c, ba, aa\}$ در نظر گرفته نمی‌شوند. (به‌علاوه، این قرارداد بعدها، در تعریف ۵.۶، وقتی دربارهٔ درازای رشته صحبت می‌کنیم به ما کمک می‌کند.)

با استفاده از یک الفبای Σ به‌عنوان آغاز کار، می‌توانیم با بهره‌گیری از اصطلاحات زیر و با روشی نظام‌مند رشته‌هایی از نمادهای Σ بسازیم.

تعریف ۱.۶ اگر Σ یک الفبا باشد و $n \in \mathbf{Z}^+$، توانهای Σ را به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱. $\Sigma^۱ = \Sigma$، و

۲. $\Sigma^{n+۱} = \{xy | x \in \Sigma, y \in \Sigma^n\}$، که در آن xy پهلوی هم نهی x و y است. —

مثال ۱.۶ فرض کنید Σ الفبایی باشد.

اگر $n = ۲$، آن‌گاه $\Sigma^۲ = \{xy | x, y \in \Sigma\}$. مثلاً اگر $\Sigma = \{۰, ۱\}$، به‌دست می‌آوریم $\Sigma^۲ = \{۰۰, ۰۱, ۱۰, ۱۱\}$.

وقتی $n = ۳$، عنصرهای $\Sigma^۳$ به‌صورت uv هستند، که $u \in \Sigma$ و $v \in \Sigma^۲$. اما چون صورت عنصرهای $\Sigma^۲$ را می‌شناسیم، ممکن است رشته‌های موجود در $\Sigma^۳$ را به شکل دنباله‌هایی

به‌صورت uxy در نظر بگیریم، که $u, x, y \in \Sigma$. به‌عنوان مثالی برای این حالت، فرض کنید که $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$. آن‌گاه $\Sigma^۳$ شامل $۱۲۵ = ۵^۳$ رشتهٔ سه‌نمادی است ـ از جمله aaa، acb، ace، cdd، و eda.

به‌طور کلی، برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، به‌دست می‌آوریم که $|\Sigma^n| = |\Sigma|^n$ زیرا با آرایشهایی (به اندازهٔ n) سر و کار داریم که در آنها مجاز به تکرار هر یک از اشیای $|\Sigma|$ هستیم. □

اینک که Σ^n را به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$ بررسی کردیم، نگاهی به توانهای بالاتر Σ می‌اندازیم.

تعریف ۲.۶ برای هر الفبای Σ تعریف می‌کنیم $\Sigma^۰ = \{\lambda\}$، که در آن λ معرف رشتهٔ تهی است ـ یعنی رشته‌ای متشکل از نمادهایی که هیچ‌یک از Σ گرفته نشده باشند.

نماد λ هرگز عنصری در الفبای Σی ما نیست، و نباید آن را با (فضای) خالی که در بسیاری از الفباها یافت می‌شود اشتباه گرفت.

اما، گرچه $\lambda \notin \Sigma$، داریم $\emptyset \subseteq \Sigma$، پس لازم است که در اینجا مواظب باشیم. ملاحظه می‌کنیم که

۱. $\{\lambda\} \not\subseteq \Sigma$ زیرا $\lambda \notin \Sigma$، و

۲. $\{\lambda\} \neq \emptyset$ زیرا $|\{\lambda\}| = ۱ \neq ۰ = |\emptyset|$.

برای اینکه یکجا دربارهٔ مجموعه‌های $\Sigma^۰$، $\Sigma^۱$، $\Sigma^۲$، ... صحبت کنیم اجتماعهای زیر را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۳.۶ اگر Σ الفبایی باشد، آن‌گاه

الف) $\Sigma^+ = \bigcup_{n\in\mathbf{Z}^+} \Sigma^n = \bigcup_{n=۱}^{\infty} \Sigma^n$، و

ب) $\Sigma^* = \bigcup_{n=۰}^{\infty} \Sigma^n$

می‌بینیم که تنها تفاوت بین مجموعه‌های Σ^+ و Σ^*، عنصر λ است، زیرا تنها وقتی $\lambda \in \Sigma^n$ که n برابر ۰ باشد. همچنین $\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \Sigma^۰$.

علاوه بر استفاده از اصطلاح «رشته»، عنصرهای Σ^+ یا Σ^* را واژه و گاهی جمله نیز می‌نامیم. برای $\Sigma = \{۰, ۱, ۲\}$ چنین واژه‌هایی را به‌صورت ۰، ۱۰، ۱۰۲، و ۱۱۱۲ هم در Σ^+ و هم در Σ^* به‌دست می‌آوریم.

سرانجام، توجه می‌کنیم که حتی وقتی مجموعه‌های Σ^+ و Σ^* نامتناهی‌اند، عنصرهای این مجموعه‌ها رشته‌هایی متناهی از نمادها هستند.

مثال ۲.۶ برای $\Sigma = \{۰, ۱\}$، مجموعهٔ Σ^* عبارت از تمام رشته‌های متناهی مرکب از ۰ها و ۱ها همراه با رشتهٔ تهی است. برای nی که به‌گونهٔ معقول کوچک باشد واقعاً می‌توانیم تمام رشته‌های

موجود در Σ^n را ثبت کنیم.

اگر $\Sigma = \{\beta, ۰, ۱, ۲, \ldots, ۹, +, -, \times, /, (,)\}$، که در آن β نمایش فاصله (یا فضا) است، توصیف Σ^* دشوارتر است، و به‌ازای $n > ۲$ رشته‌های زیادی وجود دارند که باید در Σ^n ثبت شوند. در اینجا، در Σ^*، ما عبارتهای حسابی آشنا، نظیر $(۷ + ۵)/(۲ \times (۳ - ۱۰))$ و همچنین مهملاتی نظیر $(+)((۷/ \times +۳/)$ را می‌یابیم. □

و اینک به موردی بازگشتی می‌رسیم. نظیر آنچه دربارهٔ گزاره‌ها (فصل ۲)، مجموعه‌ها (فصل ۳)، و تابعها (فصل ۵) دیدیم، بار دیگر نیاز داریم ببینیم که چه موقع می‌توانیم دو شیئ تحت بررسی —در این مورد، رشته‌ها— را برابر در نظر بگیریم. این مطلب را در نتیجهٔ بعد بررسی می‌کنیم.

تعریف ۴.۶ اگر $w_۱, w_۲ \in \Sigma^+$، آن‌گاه می‌توانیم به‌ازای $m, n \in \Sigma^+$، و

$$x_۱, x_۲, \ldots, x_m, y_۱, y_۲, \ldots y_n \in \Sigma$$

بنویسیم $w_۱ = x_۱x_۲\ldots x_m$ و $w_۲ = y_۱y_۲\ldots y_n$. می‌گوییم که رشته‌های $w_۱$ و $w_۲$ برابرند، و می‌نویسیم $w_۱ = w_۲$، اگر $m = n$، و به‌ازای همهٔ مقادیر $۱ \leq i \leq m$، برابری $x_i = y_i$ برقرار باشد.

از این تعریف نتیجه می‌شود که دو رشته در Σ^+ تنها وقتی برابرند که هر دو، از یک تعداد نمادهای Σ تشکیل شده و نمادهای متناظر در دو رشته، به‌صورتی همانند جور باشند.

برای تعریف ویژگی دیگر رشته‌ها، به تعداد نمادها در یک رشته نیاز داریم.

تعریف ۵.۶ اگر $w \in \Sigma^*$، آن‌گاه $w = x_۱x_۲\ldots x_n$، که در آن $x_i \in \Sigma$، به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n$. درازای رشتهٔ w را به‌صورت مقدار n تعریف می‌کنیم و آن را با $||w||$ نشان می‌دهیم. برای مورد λ داریم $||\lambda|| = ۰$.

به‌عنوان نتیجهٔ تعریف ۵.۶، متوجه می‌شویم که برای هر الفبای Σ، اگر $w \in \Sigma^*$ و $||w|| \geq ۱$، آن‌گاه $w \in \Sigma^+$، و برعکس. به‌علاوه، برای $x \in \Sigma$، ملاحظه می‌کنیم که $||x|| = ||x\lambda|| = ۱$، درحالی که $||xx|| = ۲$. همچنین، برای هر $y \in \Sigma^*$، $||y|| = ۱$، اگر و تنها اگر $y \in \Sigma$. اگر Σ شامل نماد β (برای جای خالی) باشد، باز برابری $||\beta|| = ۱$ برقرار است.

اگر الفبایی بخصوص، مثلاً $\Sigma = \{۰, ۱, ۲\}$ را به‌کار بریم، و عنصرهای $x = ۰۱$، $y = ۲۱۲$، و $z = ۰۱۲۱۲$ (در Σ^*) را بررسی کنیم، به‌دست می‌آوریم که

$$||z|| = ||۰۱۲۱۲|| = ۵ = ۲ + ۳ = ||۰۱|| + ||۲۱۲|| = ||x|| + ||y||$$

برای ادامهٔ بررسی ویژگیهای رشته‌ها و الفباها، لازم است که مفهوم پهلوی هم نهی را کمی بیشتر بسط دهیم.

تعریف ۶.۶ اگر $x, y \in \Sigma^*$، آنگاه $x = x_1x_2 \ldots x_m$، $y = y_1y_2 \ldots y_n$، به‌طوری که همهٔ x_iها، $1 \leq i \leq m$، و همهٔ y_jها، $1 \leq j \leq n$ در Σ هستند. الحاق x و y که آن را با xy نشان می‌دهند رشتهٔ $xy = x_1x_2 \ldots x_my_1y_2 \ldots y_n$ است.

ما در اینجا عملی دوتایی بر Σ^* (و Σ^+) داریم. این عمل شرکت‌پذیر است ولی تعویض‌پذیر نیست، و چون به‌ازای هر $x \in \Sigma^*$، $x\lambda = \lambda x = x$، عنصر $\lambda \in \Sigma^*$ عنصر همانی برای عمل الحاق است. (مفهوم همانی در تمرینهای ۴ و ۵ بخش ۴.۵ معرفی شد.) سرانجام، مفاهیمی که در دو تعریف اخیر (درازای رشته و عمل الحاق) وارد شدند به‌صورت نتیجهٔ:

$$\text{به‌ازای } x, y \in \Sigma^*، \quad ||xy|| = ||x|| + ||y||$$

با هم مرتبط می‌شوند.

حال عمل دوتایی الحاق ما را به تعریف بازگشتی دیگری هدایت می‌کند. قبلاً به توانهای یک الفبای Σ پرداخته بودیم. اینک توانهای رشته‌ها را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۷.۶ برای هر $x \in \Sigma^*$ توانهای x را به‌وسیلهٔ $x^0 = \lambda$، $x^1 = x$، $x^2 = xx$، $x^3 = xx^2$، ...، $x^{n+1} = xx^n$، ... تعریف می‌کنیم که در آنها $n \in \mathbf{N}$.

در این تعریف مثال دیگری از چگونگی دادن یک موجود ریاضی به روشی استقرایی یا بازگشتی به ما داده شده است. موجود ریاضی که اینک به دنبالش هستیم از موجودات (همانند) نتیجه شدهٔ قبلی حاصل شده است. به‌علاوه، این تعریف، راهی برای پرداختن به یک الحاق nـتایی (یک توان $(n+1)$ام) یک رشته با خودش پیش پای ما می‌گذارد و حالت خاصی را هم در بر می‌گیرد که رشته شامل تنها یک نماد است.

مثال ۳.۶ اگر $\Sigma = \{0, 1\}$ و $x = 01$، آنگاه $x^0 = \lambda$، $x^1 = 01$، $x^2 = 0101$، و $x^3 = 010101$. به‌ازای هر $n > 0$، x^n عبارت است از رشته‌ای از n تا صفر و n تا ۱ که اولین نماد ۰ است و نمادها متناوب‌اند. در اینجا، $||x^2|| = 4 = 2||x||$، $||x^3|| = 6 = 3||x||$، و برای هر $n \in \mathbf{N}$، $||x^n|| = n||x||$. □

اینک آماده‌ایم که موضوع عمدهٔ این بخش، یعنی مفهوم زبان را مطرح کنیم. اما قبل از انجام این کار سه مفهوم دیگر وجود دارند که لازم است دربارهٔ آنها صحبت کنیم. این مفاهیم متضمن زیربخشهای رشته‌ها هستند.

تعریف ۸.۶ اگر $x, y \in \Sigma^*$ و $w = xy$، آن‌گاه x را پیشوند w می‌نامند، و اگر $x, y \neq \lambda$، x را پیشوند سره می‌گویند. همچنین رشتهٔ y را پسوند w می‌نامند؛ وقتی $x \neq \lambda$، آن را پسوند سره می‌گویند.

مثال ۴.۶ فرض کنید $\Sigma = \{a, b, c\}$. رشتهٔ $w = abbcc$ را در نظر بگیرید. در این صورت هر یک از رشته‌های λ، a، ab، abb، $abbc$، و $abbcc$ یک پیشوند w است. از سوی دیگر، هر یک از رشته‌های λ، c، cc، bcc، $bbcc$ و $abbcc$ یک پسوند w است. □

مثال ۵.۶ اگر $||x|| = ۵$، $||y|| = ۴$ و $w = xy$، آن‌گاه w دارای پیشوند سره x و پسوند سره y است. در کل، w، ۹ پیشوند سره و ۹ پسوند سره دارد، زیرا λ برای هر رشته در Σ^+، هم پیشوند سره و هم پسوند سره است. □

مثال ۶.۶ اگر $w, a, b, c, d \in \Sigma^*$، آن‌گاه

$$(ab = w = cd) \Leftrightarrow (\text{پسوند است } d \text{ ،پسوند است } b)$$
$$\Leftrightarrow (\text{پیشوند است } a \text{ یا ،پیشوند است } c)$$

□

تعریف ۹.۶ اگر $x, y, z \in \Sigma^*$ و $w = xyz$، آن‌گاه y را زیر رشتهٔ w می‌نامند. اگر حداقل یکی از x و z با λ متفاوت باشد، آن‌گاه y را زیر رشتهٔ سره می‌خوانند.

مثال ۷.۶ برای $\Sigma = \{۰, ۱\}$، فرض کنید $w = ۰۰۱۰۱۱۱۰ \in \Sigma^*$. زیر رشته‌های زیر را در w به‌دست می‌آوریم:

۱. ۱۰۱۱: این تنها از یک راه به‌وجود می‌آید ــ وقتی $w = xyz$، با $x = ۰۰$، $y = ۱۰۱۱$، و $z = ۱۰$.

۲. ۱۰: این مثال به دو راه رخ می‌دهد:

الف) $w = xyz$ که در آن $x = ۰۰$، $y = ۱۰$، و $z = ۱۱۱۰$، و

ب) $w = xyz$ به‌ازای $x = ۰۰۱۰۱۱$، $y = ۱۰$، و $z = \lambda$.

در حالت (ب) زیر رشته، پسوند (سره) w نیز هست. □

اینک که با تعریفهای لازم آشنا شدیم، وقت آن است که دربارهٔ مفهوم زبان بیندیشیم. وقتی الفبای استاندارد، از جمله جای خالی، را در نظر می‌گیریم رشته‌های زیادی نظیر $qxio$،

$wxxy\ red\ atzl$، و $aeytl$ وجود دارند که معرف واژه‌ها یا اجزای جمله‌هایی که در زبان انگلیسی ظاهر می‌شوند نیستند، گرچه عناصری از Σ^* هستند. در نتیجه، به‌منظور بررسی تنها آن واژه‌ها و عباراتی که در انگلیسی دارای معنا هستند توجه خود را به زیرمجموعه‌ای از Σ^* متمرکز می‌کنیم. این امر، ما را به تعمیم زیر هدایت می‌کند.

تعریف ۱۰.۶ برای الفبای مفروض Σ، هر زیرمجموعهٔ Σ^* یک زبان در Σ نامیده می‌شود. این تعریف زیرمجموعهٔ $\emptyset$ را که زبان‌تهی می‌نامند نیز در بر می‌گیرد.

مثال ۸.۶ با $\Sigma = \{۰, ۱\}$، مجموعه‌های

$$A = \{۰, ۰۱, ۰۰۱\} \text{ و } B = \{۰, ۰۱, ۰۰۱, ۰۰۰۱, \dots\}$$

زبانهایی روی Σ هستند. □

مثال ۹.۶ اگر Σ، الفبایی از ۲۶ حرف، ۱۰ رقم، و نمادهای خاصی که در پیاده‌سازی مفروضی از زبان پاسکال به‌کار می‌روند باشد، گردایهٔ برنامه‌های قابل اجرا برای آن پیاده‌سازی، تشکیل یک زبان می‌دهند. در همین وضعیت، هر برنامهٔ قابل اجرا را می‌توان یک زبان در نظر گرفت، همچنان‌که می‌توان هر مجموعهٔ متناهی خاص از چنین برنامه‌هایی را یک زبان دانست. □

چون زبانها مجموعه‌اند، می‌توانیم اجتماع، اشتراک، و تفاضل متقارن دو زبان را تشکیل دهیم. اما برای کار در اینجا، یک توسیع عمل دوتایی، که برای رشته‌ها (در تعریف ۶.۶) عرضه شد مفیدتر است.

تعریف ۱۱.۶ برای هر الفبای Σ و زبانهای $A, B \subseteq \Sigma^*$، الحاق A و B که با AB نشان داده می‌شود عبارت است از $\{ab | a \in A, b \in B\}$.

الحاق را می‌توانیم به‌عنوان حاصلضربی برداری تلقی کنیم که در آن، ویرگول و پرانتز را در هر جفت مرتب حذف می‌کنیم، به‌قسمی که (a, b) به‌صورت ab درآید. خواهیم دید که درست مثل $A \times B \neq B \times A$ در حالت کلی، داریم $AB \neq BA$ در حالت کلی. گرچه برای A و Bی متناهی‌داشتیم $|A \times B| = |B \times A|$، اما در اینجا $|AB| \neq |BA|$ برای زبانهای متناهی امکان دارد.

مثال ۱۰.۶ فرض کنید $\Sigma = \{x, y, z\}$ و A و B زبانهای متناهی $A = \{x, xy, z\}$، $B = \{\lambda, y\}$ باشند. دراین صورت $AB = \{x, xy, z, xyy, zy\}$ و $BA = \{x, xy, z, yx, yxy, yz\}$، لذا

۱. $|BA| = ۵ \neq ۶ = |AB|$، و ۲. $|A||B| = ۳.۲ = ۶ \neq ۵ = |AB|$.

تفاوتها به این دلیل رخ می‌دهند که دو راه برای نمایش xy وجود دارند: (۱) xy، $x \in A$، $y \in B$؛ و (۲) $xy\lambda$ که $xy \in A$، $\lambda \in B$. (مفهوم یکتایی نمایش، چیزی است که نمی‌توانیم آن را مسلم فرض کنیم. گرچه در اینجا برقرار نیست، کلید دستیابی به بسیاری از مفاهیم ریاضی است. ما این مفهوم را در قضیهٔ اساسی حساب (قضیهٔ ۱۱.۴) دیدیم و در فصل ۱۵ نیز دوباره به آن برمی‌خوریم.) □

مثال بالا نشان می‌دهد که برای زبانهای متناهی A و B، $|AB| \leq |A||B|$. درستی این مطلب را می‌توان در حالت کلی نشان داد.

قضیهٔ زیر مربوط به بعضی از ویژگیهایی هستند که در الحاق زبانها صدق می‌کنند.

قضیه ۱.۶ برای یک الفبای Σ، فرض کنید $A, B, C \subseteq \Sigma^*$. در این صورت

الف) $A\{\lambda\} = \{\lambda\}A = A$ **ب)** $(AB)C = A(BC)$

ج) $A(B \cup C) = AB \cup AC$ **د)** $(B \cup C)A = BA \cup CA$

ه) $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$ **و)** $(B \cap C)A \subseteq BA \cap CA$

برهان قسمتهای (د) و (و) را ثابت می‌کنیم و اثبات قسمتهای دیگر را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

د) با $x \in \Sigma^*$، $x \in (B \cup C)A \Rightarrow x = yz$، برای $y \in B \cup C$ و

$$z \in A \Rightarrow (x = yz, y \in B, z \in A)$$

یا

$$(x = yz, y \in C, z \in A) \Rightarrow x \in BA \text{ یا } x \in CA$$

لذا $(B \cup C)A \subseteq BA \cup CA$. به‌عکس

$$x \in BA \cup CA \Rightarrow x \in BA \text{ یا } x \in CA \Rightarrow x = ba_۱, b \in B, a_۱ \in A$$

یا

$$x = ca_۲, c \in C, a_۲ \in A$$

فرض کنید

$$x = ba_۱, b \in B, a_۱ \in A$$

چون $B \subseteq B \cup C$، داریم $x = ba_1$ که در آن،

$$b \in B \cup C, a_1 \in A$$

در این صورت

$$x \in (B \cup C)A$$

لذا $BA \cup CA \subseteq (B \cup C)A$. (اگر $x = ca_2$، استدلال مشابه بالاست). با توجه به دو رابطهٔ شمولی که ثابت کردیم، نتیجه می‌گیریم $(B \cup C)A = BA \cup CA$.

و) برای $x \in \Sigma^*$،

$$x \in (B \cap C)A \Rightarrow x = yz, y \in B \cap C$$

و

$$z \in A \Rightarrow (x = yz, y \in B, z \in A)$$

و

$$(x = yz, y \in C, z \in A) \Rightarrow x \in BA \cap CA$$

لذا

$$(B \cap C)A \subseteq BA \cap CA$$

با $\Sigma = \{x, y, z\}$، فرض کنید $B = \{x, xx, y\}$، $C = \{y, xy\}$، و $A = \{y, yy\}$. در این صورت $xyy \in BA \cap CA$ اما $xyy \notin (B \cap C)A$. در نتیجه، $(B \cap C)A \subset BA \cap CA$.
■

در مقایسه با مفاهیم Σ^n، Σ^*، Σ^+، تعریفهای زیر برای یک زبان دلخواه $A \subseteq \Sigma^*$ داده می‌شوند.

تعریف ۱۲.۶ برای هر زبان $A \subseteq \Sigma^*$، می‌توانیم زبانهای دیگری به‌ترتیب زیر بسازیم:

الف) $A^{0} = \{\lambda\}$، $A^{1} = A$، و برای هر $n \in \mathbf{\Sigma}^+$، $A^{n+1} = \{ab|a \in A, b \in A^n\}$؛
ب) $A^+ = \bigcup_{n\in \mathbf{Z}^+} A^n$، که بستار مثبت A است
ج) $A^* = A^+ \bigcup \{\lambda\}$. A^* را، به افتخار استیون کول کلین[1] منطقدان آمریکایی (۱۹۰۹-)، بستار کلین A می‌نامند. ■

مثال ۱۱.۶ اگر $\mathbf{\Sigma} = \{x, y, z\}$ و $A = \{x\}$، آن‌گاه (۱) $A^{0} = \{\lambda\}$؛ (۲) $A^n = \{x^n\}$ به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$؛ (۳) $A^+ = \{x^n|n \geq 1\}$؛ و (۴) $A^* = \{x^n|n \geq 0\}$. □

مثال ۱۲.۶ فرض کنید $\mathbf{\Sigma} = \{x, y\}$

الف) اگر $\mathbf{\Sigma}^2 = \{xx, xy, yx, yy\} = A$، آن‌گاه A^* زبان همهٔ رشته‌های w در $\mathbf{\Sigma}^*$ است که برای آنها درازای w زوج است.

ب) وقتی A مثل قسمت (الف) است و $B = \{x, y\}$، زبان BA^* شامل همهٔ رشته‌هایی در $\mathbf{\Sigma}^*$ است که درازای آنها فرد است، و در این حالت درمی‌یابیم که $BA^* = A^*B$ و $\mathbf{\Sigma}^* = A^* \cup BA^*$.

ج) زبان $\{x\}\{x, y\}^*$ (الحاق زبانهای $\{x\}$ و $\{x, y\}^*$) شامل هر رشته‌ای در $\mathbf{\Sigma}^*$ است که برای آن، x پیشوند است.

زبان شامل همهٔ رشته‌های $\mathbf{\Sigma}^*$ را که برای آن yy پسوند است می‌توان به وسیلهٔ $\{x, y\}^*\{yy\}$ تعریف کرد.

هر رشته در زبان $\{x, y\}^*\{xxy\}\{x, y\}^*$ دارای زیر رشتهٔ xxy است.

د) هر رشته در زبان $\{x\}^*\{y\}^*$ متشکل از تعدادی متناهی (احتمالاً صفر) x و به دنبال آن تعدادی متناهی (همچنین احتمالاً صفر) y است. و گرچه $\{x\}^*\{y\}^* \subseteq \{x, y\}^*$، رشتهٔ $w = xyx$ در $\{x, y\}^*$ است اما در $\{x\}^*\{y\}^*$ نیست. بنابراین $\{x\}^*\{y\}^* \subset \{x, y\}^*$. □

مثال ۱۳.۶ در جبر اعداد حقیقی اگر $a, b \in \mathbf{R}$، $a, b > 0$ آن‌گاه $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$. ولی در مورد زبانها، اگر $\mathbf{\Sigma} = \{x, y\}$ و $A = \{\lambda, x, x^3, x^4, \dots\} = \{x^n|n \geq 0\} - \{x^2\}$ و $B = \{x^n|n \geq 0\}$، آن‌گاه $A^2 = B^2 (= B)$، اما $A \neq B$. (توجه: ما هرگز نداریم $\lambda \in \mathbf{\Sigma}$، اما ممکن است داشته باشیم $\lambda \in A$.) □

این بخش را با لم و قضیهٔ دیگری که از ویژگیهای زبانها بحث می‌کنند خاتمه می‌دهیم. این لم، نمونه‌ای دیگر را در اختیار ما قرار می‌دهد که در آن از استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم.

لم ۱.۶ فرض کنید $\mathbf{\Sigma}$ یک الفبا، با زبانهای $A, B \subseteq \mathbf{\Sigma}^*$ باشد. اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $A^n \subseteq B^n$.

1. Stephen Cole Kleene

برهان در اینجا $S(۱)$* نتیجه می‌شود، زیرا $A^۱ = A \subseteq B = B^۱$. با پذیرفتن $S(k)$، داریم $A^k \subseteq B^k$ به‌ازای $k \in \mathbf{Z}^+$. اینک رشتهٔ $x \in A^{k+۱}$ را در نظر می‌گیریم. بنابر تعریف ۱۲.۶، $x = x_۱ x_k$، که در آن $x_۱ \in A$، $x_k \in A^k$. چون $A \subseteq B$ و $A^k \subseteq B^k$ (بنابر فرض استقرا)، داریم $x_۱ \in B$ و $x_k \in B^k$. در نتیجه، $x = x_۱ x_k \in BB^k = B^{k+۱}$. بنابراین، $S(k+۱)$ درست است، و بنابر اصل استقرای متناهی، نتیجه می‌شود که اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $A^n \subseteq B^n$ به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$. ■

قضیه ۲.۶ برای یک الفبای Σ و زبانهای $A, B \subseteq \Sigma^*$

الف) $A \subseteq AB^*$ ب) $A \subseteq B^*A$

ج) $A \subseteq B \Rightarrow A^+ \subseteq B^+$ د) $A \subseteq B \Rightarrow A^* \subseteq B^*$

ه) $AA^* = A^*A = A^+$ و) $A^*A^* = A^* = (A^*)^* = (A^*)^+ = (A^+)^*$

ز) $(A \cup B)^* = (A^* \cup B^*)^* = (A^*B^*)^*$

برهان برهانهای قسمتهای (ج) و (ز) را عرضه می‌کنیم.

(ج) فرض کنید $A \subseteq B$، و $x \in A^+$. آن‌گاه برای مقداری از n متعلق به $\mathbf{Z}^+$، $x \in A^+ \Rightarrow x \in A^n$. در این‌صورت بنابر لم ۱.۶ نتیجه می‌شود که $x \in B^n \subseteq B^+$، و نشان داده‌ایم که $A^+ \subseteq B^+$.

(ز) $[(A \cup B)^* = (A^* \cup B^*)^*]$. بنابر قسمت (د)

$$A \subseteq A^*, B \subseteq B^* \Rightarrow (A \cup B) \subseteq (A^* \cup B^*) \Rightarrow (A \cup B)^* \subseteq (A^* \cup B^*)^*$$

به‌عکس،

$A, B \subseteq A \cup B \Rightarrow A^*, B^* \subseteq (A \cup B)^*$(بنابر قسمت د) $\Rightarrow (A^* \cup B^*) \subseteq (A \cup B)^*$

$\Rightarrow (A^* \cup B^*)^* \subseteq (A \cup B)^*$(بنابر قسمتهای (د) و (و))

به‌عنوان نتیجه‌ای از دو شمول، داریم $(A \cup B)^* = (A^* \cup B^*)^*$. برای اثبات

$$[(A^* \cup B^*)^* = (A^*B^*)^*]$$

داریم

$A^*, B^* \subseteq A^*B^*$(بنابر قسمتهای الف و ب) $\Rightarrow (A^* \cup B^*) \subseteq A^*B^* \Rightarrow$

$(A^* \cup B^*)^* \subseteq (A^*B^*)^*$(بنابر قسمت د)

---

* در اینجا نمادگذاری بخش ۱.۴ را به‌کار می‌بریم. $S(n)$ گزاره‌ای است بدین صورت: $A \subseteq B \Rightarrow A^n \subseteq B^n$.

برعکس، اگر $xy \in A^*B^*$، $x \in A^*$، $y \in B^*$، آن‌گاه $x, y \in A^* \cup B^*$، لذا $xy \in (A^* \cup B^*)^*$ و $A^*B^* \subseteq (A^* \cup B^*)^*$. با استفادهٔ مجدد از قسمتهای (د) و (و) $(A^*B^*)^* \subseteq (A^* \cup B^*)^*$، و قضیه نتیجه می‌شود. ■

تمرینهای ۱.۶

۱. فرض کنید $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$. (الف) $|\Sigma^۲|$ و $|\Sigma^۳|$ را پیدا کنید؟ (ب) چند رشته در Σ^* دارای درازای حداکثر پنج است؟

۲. برای $\Sigma = \{w, x, y, z\}$ تعداد آن رشته‌هایی از Σ^* به درازای پنج را تعیین کنید که (الف) با w شروع شوند؛ (ب) با دقیقاً دو w شروع شوند؛ (ج) با wها شروع نشوند؛ (د) با تعداد زوجی w شروع شوند.

۳. اگر $x \in \Sigma^*$ و $||x^۳|| = ۳۶$. مطلوب است $||x||$.

۴. فرض کنید $\Sigma = \{\beta, x, y, z\}$ که در آن β معرف یک جای خالی است، به‌قسمی که $x\beta \neq x$، $\beta\beta \neq \beta$، و $x\beta y \neq xy$. اما $x\lambda y = xy$. مطلوب است محاسبهٔ

الف) $||\lambda||$ ب) $||\lambda\lambda||$ ج) $||\beta||$ د) $||\beta\beta||$

ه) $||\beta^۳||$ و) $||x\beta\beta y||$ ز) $||\beta\lambda||$ ح) $||\lambda^{۱۰}||$

۵. فرض کنید $\Sigma = \{v, w, x, y, z\}$ و $A = \bigcup_{n=۱}^{۶} \Sigma^n$. چند رشته در A دارای xy به‌عنوان پیشوند سره هستند؟

۶. فرض کنید Σ یک الفبا باشد. گیریم $x_i \in \Sigma$ به‌ازای $۱ \leq i \leq ۱۰۰$، که در آن، $x_i \neq x_j$ به‌ازای هر $۱ \leq i < j \leq ۱۰۰$. برای رشتهٔ $s = x_۱x_۲ \ldots x_{۱۰۰}$ چند زیررشتهٔ ناتهی وجود دارند؟

۷. زبان ناتهی $A \subseteq \Sigma^*$ داده شده است. ثابت کنید که اگر $A^۲ = A$، آن‌گاه $\lambda \in A$.

۸. فرض‌کنید Σ الفبایی با $a \in \Sigma$ باشد. تابعهای $p_a, s_a, r : \Sigma^* \to \Sigma^*$ و تابع $d : \Sigma^+ \to \Sigma^*$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(i) تابع پیشوند (به‌وسیلهٔ a): $p_a(x) = ax, x \in \Sigma^*$

(ii) تابع پسوند (به‌وسیلهٔ a): $s_a(x) = xa, x \in \Sigma^*$

(iii) تابع بازگشتی: $r(\lambda) = \lambda$؛ برای $x \in \Sigma^+$، اگر $x = x_۱x_۲x_۳ \ldots x_{n-۱}x_n$، که در آن $x_i \in \Sigma$ به‌ازای $۱ \leq i \leq n$، آن‌گاه $r(x) = x_nx_{n-۱} \ldots x_۲x_۱$.

(iv) تابع حذف از جلو: برای $x \in \Sigma^+$، اگر $x = x_۱x_۲x_۳ \ldots x_n$، آن‌گاه

$$d(x) = x_۲x_۳ \ldots x_n$$

الف) از این چهار تابع کدام (کدامها) یک به یک‌اند؟

ب) تعیین کنید از این چهار تابع کدام (کدامها) پوشا هستند؟ اگر تابعی پوشا نیست بردش را تعیین کنید.

ج) آیا بعضی از این چهار تابع وارونپذیرند؟ اگر چنین‌اند تابع وارون آنها را تعیین کنید.

د) فرض کنید که $\Sigma = \{a, e, i, o, u\}$. چند تا واژهٔ x در $\Sigma^۴$ در شرط $r(x) = x$ صدق می‌کنند؟ چند تا در $\Sigma^۵$؟ چند تا در Σ^n، که در آن $n \in \mathbf{N}$؟

ه) برای $x \in \Sigma^*$ مطلوب است $(d \circ p_a)(x)$ و $(r \circ d \circ r \circ s_a)(x)$.

و) تحقیق کنید $r \circ p_a = s_a \circ r$.

ز) اگر $\Sigma = \{a, e, i, o, u\}$ و $B = \{ae, ai, ao, oo, eio, eiouu\} \subseteq \Sigma^*$، آن‌گاه $r^{-۱}(B)$، $p_a^{-۱}(B)$، $s_a^{-۱}(B)$، و $|d^{-۱}(B)|$ را بیابید.

۹. اگر A، B، C، و D زبانهایی در Σ باشند، ثابت کنید که

(الف)
$$(A \subseteq B \wedge C \subseteq D) \Rightarrow AC \subseteq BD$$

و

(ب)
$$A\emptyset = \emptyset A = \emptyset$$

۱۰. برای $\Sigma = \{x, y, z\}$، فرض کنید $A, B \subseteq \Sigma^*$ بوسیلهٔ $A = \{xy\}$، $B = \{\lambda, x\}$ داده شده باشند. تعیین کنید (الف) AB؛ (ب)BA؛ (ج) $B^۳$؛ (د) B^+؛ (ه) A^*.

۱۱. اگر $A(\neq \emptyset)$ زبانی باشد و $A^۲ = A$، ثابت کنید که $A^* = A$.

۱۲. قسمتهای باقیماندهٔ قضایای ۱.۶ و ۲.۶ را اثبات کنید.

۱۳. ثابت کنید که برای زبانهای متناهی دلخواه $A, B \subseteq \Sigma^*$، $|AB| \leq |A||B|$.

۱۴. اگر A و B زبانهایی در Σ باشند، و $A \subseteq B^*$، ثابت کنید که $A^* \subseteq B^*$.

۱۵. برای الفبای مفروض Σ، فرض کنید I معرف یک مجموعهٔ اندیسگذار باشد، که به‌ازای هر $i \in I$، $B_i \subseteq \Sigma^*$. اگر $A \subseteq \Sigma^*$، ثابت کنید که (الف) $A(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} AB_i$؛ و (ب) $(\bigcup_{i \in I} B_i)A = \bigcup_{i \in I} B_i A$. (این قضایا تعمیم قسمتهای (ج) و (د) قضیهٔ ۱.۶ هستند)

۱۶. برای $\Sigma = \{x, y\}$، زبانهای متناهی Σ^*، همراه با اعمال مجموعه‌ای را (نظیر مثال ۱۲.۶) به‌کار برید و آن مجموعه از رشته‌های Σ^* را پیدا کنید که (الف) شامل دقیقاً یک مورد x باشند؛ (ب) شامل دقیقاً دو مورد x باشند؛ (ج) با x شروع شوند؛ (د) به yxy ختم شوند؛ (ه) با x شروع یا به yxy ختم شوند یا هر دو؛ (و) با x شروع شوند یا به yxy ختم شوند ولی نه به هر دو.

۲.۶ ماشینهای متناهی-حالت: اولین رویارویی

اینک به ماشین‌فروش‌خودکار که در آغاز این فصل ذکر کردیم برمی‌گردیم و آن را در موقعیت زیر تحلیل می‌کنیم.

در ادارهٔ مرکزی شرکتی یک ماشین‌فروش‌خودکار دو نوع نوشابه به صورت قوطی عرضه می‌کند: کولا (C) و فانتا (F). قیمت یک قوطی از هر کدام ۲۰ سنت است. ماشین، سکه‌های ۵ سنتی، ۱۰ سنتی، و ۲۵ سنتی قبول می‌کند، و باقی‌ماندهٔ ۲۵ سنت را برمی‌گرداند. یک روز مریم تصمیم به خرید یک قوطی فانتا می‌گیرد. کنار ماشین می‌رود و دو سکه ۵ سنتی و یک سکه ۱۰ سنتی به ترتیب وارد ماشین می‌کند و دکمهٔ سفید را که با W نشان می‌دهیم فشار می‌دهد و قوطی فانتا بیرون می‌افتد. (برای دریافت قوطی کولا باید دکمهٔ سیاه را که با B نشان می‌دهیم فشار داد.)

کاری را که مریم برای خریدش انجام داده است می‌توان به‌صورت جدول ۱.۶ نمایش داد، که در آن، $t_۰$ زمان اولیه، یعنی وقتی است که مریم اولین ۵ سنتی را وارد می‌کند، و $t_۱$، $t_۲$، $t_۳$، $t_۴$ لحظه‌های زمانی بعدی، با $t_۱ < t_۲ < t_۳ < t_۴$ هستند.

ماشین در حالت $s_۰$، در یک حالت آمادگی است. ماشین در انتظار یک مشتری برای شروع به انداختن سکه در آن است که مبلغ کل آن به ۲۰ سنت یا بیشتر برسد و آن‌گاه برای دریافت نوشابه دکمه‌ای فشرده شود. اگر در زمانی کل مبلغ سکهٔ ورودی بیشتر از ۲۰ سنت شود ماشین پول خرد لازم را (قبل از فشار مشتری بر دکمه برای دریافت نوشابه) فراهم می‌کند.

مریم در زمان $t_۰$، ماشین را با انداختن سکهٔ ۵ سنتی آماده می‌کند. او در این لحظه چیزی دریافت نمی‌نماید، اما در لحظهٔ زمانی بعدی $t_۱$، ماشین در حالت $s_۱$ است، که در آن حالت، کل مبلغ ۵ سنت او را در حافظه دارد و منتظر ورود دومین سکهٔ (۵ سنتی در لحظهٔ $t_۱$) اوست. ماشین باز (در لحظهٔ $t_۱$) خروجی را آماده نمی‌کند اما در لحظهٔ زمانی بعد، $t_۲$، در حالت $s_۲$ است مبلغ کل ۱۰ سنت = ۵ سنت (که در زمان $t_۱$ وارد شد) + ۵ سنت (که در حالت $s_۱$ در حافظه داشت) مریم با انداختن سکهٔ ۱۰ سنتی (در زمان $t_۲$) به‌عنوان ورودی بعدی، هنوز نوشابه‌ای دریافت نکرده است، زیرا ماشین نمی‌داند که مریم چه نوشابه‌ای را ترجیح می‌دهد، اما اینک ($t_۳$)

جدول ۱.۶

	$t_۰$	$t_۱$	$t_۲$	$t_۳$	$t_۴$
حالت	(۱)$s_۰$	(۴)$s_۱$(۵ سنت)	(۷)$s_۲$(۱۰ سنت)	(۱۰)$s_۳$(۲۰ سنت)	(۱۳)$s_۰$
ورودی	۵ سنت(۲)	۵ سنت(۵)	۱۰ سنت(۸)	(۱۱)W	
خروجی	هیچ(۳)	هیچ(۶)	هیچ(۹)	(۱۲)F	

در این جدول شماره‌های (۱)، (۲)، ... ، (۱۲)، (۱۳) ترتیب پیشامدها را در خرید فانتا به‌وسیلهٔ مریم نشان می‌دهد.
برای هر ورودی در زمان t_i، $۰ \le i \le ۳$، یک خروجی متناظر در آن زمان و سپس یک تغییر حالت وجود دارد.
حالت جدید در زمان $t_{i+۱}$ بستگی به ورودی و حالت (موجود) در زمان t_i دارد.

جدول ۲.۶

	$t_۰$	$t_۱$	$t_۲$
حالت	(۱) $s_۰$	(۴) $s_۲$ (۲۰ سنت)	(۷) $s_۰$
ورودی	(۲) ۲۵ سنت	(۵) B	
خروجی	(۳) ۵ سنت پول خرد	(۶) C	

می‌داند که مریم مبلغ کل لازم

۲۰ سنت = ۱۰ سنت (که در حالت $s_۲$ در حافظه داشت) + ۱۰ سنت (که در زمان $t_۲$ وارد شد) را وارد ماشین کرده است. بالاخره مریم دکمهٔ سفید را فشار می‌دهد و در زمان $t_۳$ ماشین خروجی (قوطی فانتا) را عرضه می‌کند و سپس در لحظهٔ $t_۴$ به حالت شروع $s_۰$ برمی‌گردد، دقیقاً در همان زمانی که دوست مریم یک سکهٔ ۲۵ سنتی به ماشین می‌دهد و سکه‌ای ۵ سنتی دریافت می‌کند، دکمهٔ سیاه را می‌فشارد و قوطی نوشابهٔ کولا را که می‌خواست به‌دست می‌آورد. در جدول ۲.۶، خرید دوست مریم تحلیل شده است.

آنچه را که در مورد این ماشین فروش اتفاق افتاده است می‌توان به‌طور انتزاعی برای کمک به تحلیل جنبه‌هایی در کامپیوترهای رقمی و سیستمهای ارتباط تلفنی به‌کار برد.

جنبه‌های عمدهٔ چنین ماشینی به شرح زیرند:

۱. ماشین در یک زمان مفروض، می‌تواند تنها یکی از چند حالت متناهی را دارا باشد. این حالتها را حالتهای داخلی ماشین می‌نامند؛ و در زمانی مفروض، کل موجودی حافظهٔ ماشین، آگاهی از حالت داخلی در آن زمان است.

۲. ماشین به‌عنوان ورودی تنها تعدادی متناهی از نمادها را قبول خواهد کرد، و جمعاً اینها را الفبای ورودی $\mathscr{I}$ می‌نامند. در مثال ماشین‌فروش، الفبای ورودی عبارت است از {سکهٔ ۵ سنتی ,سکهٔ ۱۰ سنتی ,سکهٔ ۲۵ سنتی ,W, B} که هر قلم آن به‌وسیلهٔ یک حالت داخلی تشخیص داده می‌شود.

۳. خروجی و حالت بعدی به‌وسیلهٔ ترکیبی از ورودیها و حالتهای داخلی تعیین می‌شود. مجموعهٔ متناهی همهٔ خروجیهای ممکن، الفبای خروجی $\mathscr{O}$ را برای ماشین تشکیل می‌دهد.

۴. می‌پذیریم که پردازشهای پشت سر هم ماشین، به‌وسیلهٔ ضربانهای متمایز و جدا از هم ساعت بهنگام می‌شوند؛ و ماشین به روشی قطعی عمل می‌کند که در آن، خروجی به‌وسیلهٔ کل ورودی فراهم شده و حالت شروع ماشین کاملاً تعیین می‌شود.

این مشاهدات ما را به تعریف زیر هدایت می‌کنند.

تعریف ۱۳.۶ یک ماشین متناهی-حالت یک پنجگانهٔ $M = \{S, \mathscr{I}, \mathscr{O}, \nu, \omega\}$ است

که در آن

$S =$ مجموعهٔ حالتهای داخلی برای M

$\mathscr{I} =$ الفبای ورودی برای M

$\mathscr{O} =$ الفبای خروجی برای M

$\nu : S \times \mathscr{I} \to S,$ تابع حالت بعدی

$\omega : S \times \mathscr{I} \to \mathscr{O},$ تابع خروجی

با استفاده از نمادگذاری این تعریف، اگر ماشین در زمان t_i در حالت s باشد و x را در این زمان به ماشین وارد کنیم، آنگاه خروجی در زمان t_i عبارت است از $\omega(s, x)$. این خروجی بر اثر تغییر حالت ماشین در زمان t_{i+1} به حالت داخلی بعدی که با $\nu(s, x)$ داده می‌شود دنبال شده است.

فرض می‌کنیم وقتی که ماشین متناهی-حالت، اولین ورودی را دریافت می‌کند، ما در زمان $t_0 = 0$ هستیم و ماشین در حالت شروع مشخصی است که با s_0 نشان داده شده است. قبل از هر چیز، دستاورد ما متمرکز بر خروجی و تغییر حالتهایی است که متوالیاً واقع می‌شوند، بدون ارجاع یا با اندکی ارجاع به دنبالهٔ ضربانهای ساعت در زمانهای t_0، t_1، t_2، ....

چون مجموعه‌های S، $\mathscr{I}$ و $\mathscr{O}$ متناهی‌اند، امکان دارد که ν و ω را برای ماشین متناهی-حالت مفروض، به‌وسیلهٔ جدولی نشان داد که $\nu(s, x)$ و $\omega(s, x)$ به‌ازای هر $s \in S$ و $x \in \mathscr{I}$ در آن ثبت شده‌اند. چنین جدولی را جدول‌حالت یا جدول تغییرحالت برای ماشین مفروض می‌نامند. یک نمایش دیگر ماشین به‌وسیلهٔ یک نمودارحالت انجام می‌شود.

در مثالهای زیر، جدول‌حالت و نمودارحالت را نشان می‌دهیم.

مثال ۱۴.۶ ماشین متناهی-حالت $M = \{S, \mathscr{I}, \mathscr{O}, \nu, \omega\}$ را در نظر می‌گیریم که در آن $S = \{s_0, s_1, s_2\}$، $\mathscr{I} = \mathscr{O} = \{0, 1\}$، و ν و ω به‌وسیلهٔ جدول حالت ۳.۶ داده شده‌اند. در اولین ستون جدول، حالتهای (فعلی) ماشین ثبت شده‌اند. درایه‌های دومین سطر، عناصر الفبای

جدول ۳.۶

	ν		ω	
	0	1	0	1
s_0	s_0	s_1	0	0
s_1	s_2	s_1	0	0
s_2	s_0	s_1	0	1

جدول ۴.۶

حالت	s_0	$\nu(s_0, 1) = s_1$	$\nu(s_1, 0) = s_2$	$\nu(s_2, 1) = s_1$	$\nu(s_1, 0) = s_2$
ورودی	۱	۰	۱	۰	۰
خروجی	$\omega(s_0, 1) = 0$	$\omega(s_1, 0) = 0$	$\omega(s_2, 1) = 1$	$\omega(s_1, 0) = 0$	

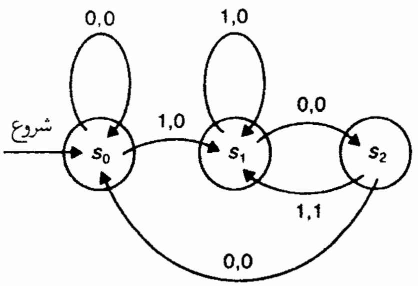
ورودی $\mathscr{I}$ هستند که یک بار در ν و سپس دوباره در ω ثبت شده‌اند. شش عدد دو ستون آخر، عناصر خروجی الفبای $\mathscr{O}$ هستند.

مثلاً، برای محاسبهٔ $\nu(s_1, 1)$، s_1 را در ستون حالتهای فعلی می‌یابیم و به‌طور افقی از s_1 جلو می‌رویم تا به آنچه زیر درایهٔ ۱ در بخش جدول برای ν است برسیم. این درایه، $\nu(s_1, 1) = s_1$ را به‌دست می‌دهد. به همین راه $\omega(s_1, 1) = 0$ را به‌دست می‌آوریم.

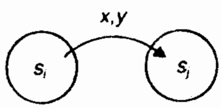
با تعیین s_0 به‌عنوان حالت شروع، اگر ورودی فراهم شده برای M، رشتهٔ ۱۰۱۰ باشد، آن‌گاه همان‌طور که در جدول ۴.۶ نشان داده‌ایم، خروجی، ۰۰۱۰ است. در اینجا، ماشین در حالت s_2 باقی می‌ماند، به‌قسمی که اگر رشتهٔ ورودی دیگری می‌داشتیم می‌باید اولین نویسهٔ آن رشته را، که در اینجا ۰ است، در حالت s_2 فراهم می‌کردیم مگر اینکه ماشین دوباره برای شروع در s_0 نشانده شود. □

چون در وهلهٔ اول این خروجی است که مورد توجه است و نه دنبالهٔ تغییر حالتها، این ماشین را می‌توان به‌وسیلهٔ یک نمودارحالت نمایش داد. در اینجا می‌توان رشتهٔ خروجی را عملاً بدون ثبت تغییرحالت به‌دست آورد. در چنین نموداری، هر حالت داخلی s با دایره‌ای که s درون آن است نمایش داده می‌شود. برای حالتهای s_i، s_j اگر برای $x \in \mathscr{I}$ داشته باشیم $\nu(s_i, x) = s_j$ و برای $y \in \mathscr{O}$ داشته باشیم $\omega(s_i, x) = y$، آن را در نمودارحالت با کشیدن کمانی جهتدار از دایرهٔ s_i به دایرهٔ s_j نمایش می‌دهیم و همان‌طور که در شکل ۱.۶ نشان داده‌ایم، ورودی x و خروجی y را روی این کمان می‌نویسیم.

با این قراردادها، نمودارحالت ماشین M مربوط به جدول ۳.۶ در شکل ۲.۶ نشان داده شده



شکل ۲.۶



شکل ۱.۶

جدول ۵.۶

	ν					ω				
	۵ سنت	۱۰ سنت	۲۵ سنت	B	W	۵ سنت	۱۰ سنت	۲۵ سنت	B	W
$s_۰$	$s_۱$	$s_۲$	$s_۴$	$s_۰$	$s_۰$	n	n	۵ سنت	n	n
$s_۱$	$s_۲$	$s_۳$	$s_۴$	$s_۱$	$s_۱$	n	n	۱۰سنت	n	n
$s_۲$	$s_۳$	$s_۴$	$s_۴$	$s_۲$	$s_۲$	n	n	۱۵سنت	n	n
$s_۳$	$s_۴$	$s_۴$	$s_۴$	$s_۳$	$s_۳$	n	۵ سنت	۲۰سنت	n	n
$s_۴$	$s_۴$	$s_۴$	$s_۴$	$s_۰$	$s_۰$	۵ سنت	۱۰ سنت	۲۵سنت	C	RB

است. گرچه جدول فشرده‌تر است، ولی نمودار به ما امکان می‌دهد که رشتهٔ ورودی را در طی هر تغییر حالتی دنبال کنیم، و هر یک از نمادهای خروجی متناظر را قبل از هر تغییر حالت انتخاب کنیم. در اینجا اگر رشتهٔ ورودی ۱۰۱۱۰۱۰۰ باشد، و از حالت $s_۰$ شروع شود، اولین ورودی ۰ یک خروجی ۰ را به دنبال می‌آورد و ما را به حالت $s_۰$ برمی‌گرداند. ورودی بعدی ۰ همان نتیجه را می‌دهد، اما برای سومین ورودی، ۱، خروجی ۰ است و اینک در حالت $s_۱$ هستیم. با ادامهٔ این طریق، به رشتهٔ خروجی ۱۰۱۰۰۰۰۰ می‌رسیم و در حالت $s_۱$ کار تمام می‌شود. (خاطر نشان می‌کنیم که رشتهٔ ورودی ۱۰۱۱۰۱۰۰ عنصری از $\mathscr{I}^*$ است، که بستار کلین $\mathscr{I}$ است، و رشتهٔ خروجی در $\mathscr{O}^*$ است که بستار کلین $\mathscr{O}$ است.)

با شروع از $s_۰$، برای رشتهٔ ورودی ۱۱۰۰۱۰۱۱۰۱، خروجی چیست؟

مثال ۱۵.۶ برای ماشین‌فروش که قبلاً در این بخش به آن اشاره شد جدول‌حالتی که داریم، جدول ۵.۶ است، با

۱. $S = \{s_۰, s_۱, s_۲, s_۳, s_۴\}$، که در حالت s_k، $۰ \le k \le ۴$، ماشین مبلغ کل $۵k$ سنت را در حافظه نگاه می‌دارد.

۲. $\mathscr{I} = \{$۵ سنت, ۱۰ سنت, ۲۵ سنت$, \mathrm{B}, \mathrm{W}\}$، که در آن، B معرف دکمهٔ سیاه است که برای دریافت یک کولا فشرده می‌شود، و W دکمهٔ سفید برای فانتاست.

۳. $\mathscr{O}=\{n$(هیچ)$, \mathrm{F}$(فانتا)$, \mathrm{C}$(کولا)$,$ ۵ سنت, ۱۰ سنت, ۱۵ سنت, ۲۰ سنت, ۲۵ سنت$\}$.

□

همان‌طورکه در آخر مثال ۱۴.۶ مشاهده شد، برای ماشین متناهی-حالت $M=(S, \mathscr{I}, \mathscr{O}, \nu, \omega)$، ورودی را می‌توان به عنوان یک عنصر $\mathscr{I}^*$، با خروجی از $\mathscr{O}^*$ در نظر گرفت. در نتیجه، به نفع ماست که حوزه‌های ν و ω را از $S \times \mathscr{I}$ به $S \times \mathscr{I}^*$ گسترش دهیم. برای ω، حوزهٔ تمام را به $\mathscr{O}^*$ گسترش می‌دهیم و یادآوری می‌کنیم که ممکن است این نیاز به‌وجود آید که هم $\mathscr{O}^*$ و هم $\mathscr{I}^*$ حاوی یک رشتهٔ تهی، λ، باشند. با این توسیعها، اگر $x_۱x_۲\ldots x_k \in \mathscr{I}^*$، $k \in \mathbf{Z}^+$، آن‌گاه

با شروع از هر حالت $s_1 \in S$، داریم

$$
\begin{aligned}
&{}^{*}\nu(s_1, x_1) = s_2 \\
&\nu(s_1, x_1x_2) = \nu(\nu(s_1, x_1), x_2) = \nu(s_2, x_2) = s_3 \\
&\nu(s_1, x_1x_2x_3) = \nu(\overbrace{\nu(\underbrace{\nu(s_1, x_1)}_{s_2}, x_2)}^{}x_3) = s_4 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \nu(s_2, x_2) = s_3 \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\nu(s_1, x_1x_2 \ldots x_k) = \nu(s_k, x_k) = s_{k+1}
\end{aligned}
$$

و

$$
\begin{aligned}
&\omega(s_1, x_1) = y_1 \\
&\omega(s_1, x_1x_2) = \omega(s_1, x_1)\omega(\nu(s_1, x_1), x_2) = \omega(s_1, x_1)\omega(s_2, x_2) = y_1y_2 \\
&\omega(s_1, x_1x_2x_3) = \omega(s_1, x_1)\omega(s_2, x_2)\omega(s_3, x_3) = y_1y_2y_3 \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\omega(s_1, x_1x_2 \ldots x_k) = \omega(s_1, x_1)\omega(s_2, x_2)\ldots\omega(s_k, x_k) = y_1y_2\ldots y_k \in \mathscr{O}^*
\end{aligned}
$$

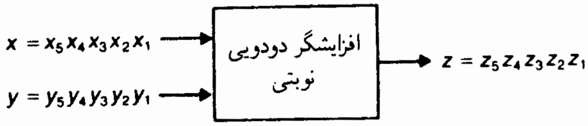
همچنین، به‌ازای هر $s_1 \in S$، $\nu(s_1, \lambda) = s_1$.
(این توسیعها را دوباره در فصل ۷ به‌کار خواهیم برد.)

این بخش را با مثالی که مربوط به علم کامپیوتر است خاتمه می‌دهیم.

مثال ۱۶.۶ فرض کنید $x = x_5x_4x_3x_2x_1 = 00111$، $y = y_5y_4y_3y_2y_1 = 01101$ اعداد دودویی باشند که در آنها، x_1 و y_1 کمترین رقمهای دودویی (بیت) معنا دارند. ۰های مقدم در x و y برای این گذاشته شده‌اند که رشته‌هایی با درازای برابر برای x و y بسازند و جاهای کافی را برای کامل کردن مجموع تضمین می‌کنند. یک افزایشگردودویی‌نوبتی، ماشینی متناهی-حالت است که می‌توانیم آن را برای به‌دست آوردن $x + y$ به‌کار بریم. نمودار شکل ۳.۶ این را نشان می‌دهد، که در آن $z = z_5z_4z_3z_2z_1$ دارای کمترین بیت معنادار z_1 است.

در جمع $z = x + y$ داریم

* حالت s_2 به‌وسیلهٔ s_1 و x_1 معین شده است. در فهرست از پیش تعیین شدهٔ حالتها این فقط حالت دوم نیست.



شکل ۳.۶

$$\begin{array}{rcccccc} x & = & \circ & \circ & ۱ & ۱ & ۱ \\ +y & = & +\circ & ۱ & ۱ & \circ & ۱ \\ \hline z & = & ۱ & \circ & ۱ & \circ & \circ \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \end{array}$$

سومین جمع　　اولین جمع

اشاره می‌کنیم که برای اولین جمع $x_۱ = y_۱ = ۱$ و $z_۱ = \circ$، در حالی‌که برای سومین جمع، به‌دلیل رقم نقلی از جمع $x_۲$ و $y_۲$ (و رقم نقلی از $x_۱ + y_۱$) داریم $x_۳ = y_۳ = ۱$، و $z_۳ = ۱$. در نتیجه، هر خروجی به مجموع دو ورودی و توانایی به‌خاطر سپردن یک رقم نقلی ۰ یا ۱ بستگی دارد که در صورت ۱ بودن قاطع است.

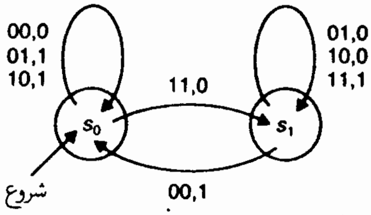
افزایشگر دودویی نوبتی به‌وسیلهٔ ماشین متناهی‌ـحالت $M = (S, \mathscr{I}, \mathscr{O}, \nu, \omega)$ به‌صورت زیر مدلبندی شده است. مجموعهٔ $S = \{s_\circ, s_۱\}$، که در آن s_i معرّف یک رقم نقلی i است؛ $\mathscr{I} = \{\circ\circ, \circ۱, ۱\circ, ۱۱\}$ لذا یک جفت ورودی، بسته به اینکه به‌ترتیب در جستجوی $\circ + \circ$، $\circ + ۱$، $۱ + \circ$، یا $۱ + ۱$ باشیم، وجود دارد؛ و $\mathscr{O} = \{\circ, ۱\}$. تابعهای ν و ω در جدول حالت (جدول ۶.۶) و نمودار حالت (شکل ۴.۶) داده شده‌اند.

در جدول ۶.۶، پیدا می‌کنیم مثلاً که $\nu(s_۱, \circ۱) = s_۱$، و $\omega(s_۱, \circ۱) = \circ$ زیرا $s_۱$ رقم نقلی ۱ از جمع بیتهای قبلی را نشان می‌دهد. ورودی ۰۱ نشان می‌دهد. که ما ۰ و ۱ را با هم جمع کرده‌ایم (و رقم نقلی ۱ را به حساب آورده‌ایم). بنابراین، مجموع ۱۰ است و برای ۰ در ۱۰، $\omega(s_۱, \circ۱) = \circ$. رقم نقلی دوباره در $s_۱ = \nu(s_۱, \circ۱)$ به حافظه نسپرده شده است.

از نمودار حالت (شکل ۴.۶) پیداست که حالت شروع باید $s_\circ$ باشد زیرا رقم نقلی، قبل از

جدول ۶.۶

	ν				ω			
	۰۰	۰۱	۱۰	۱۱	۰۰	۰۱	۱۰	۱۱
$s_\circ$	$s_\circ$	$s_\circ$	$s_\circ$	$s_۱$	۰	۱	۱	۰
$s_۱$	$s_\circ$	$s_۱$	$s_۱$	$s_۱$	۱	۰	۰	۱



شکل ۴.۶

جمع کمترین بیتهای معنادار، وجود ندارد. □

نمودارهای حالت در شکلهای ۲.۶ و ۴.۶ مثالهایی‌از گرافهای جهتدار برچسب‌دار هستند. در سرتاسر متن کتاب صفحات زیادی را به نظریهٔ گراف اختصاص خواهیم داد، زیرا نظریهٔ گراف علاوه برکاربردهایی که در علم کامپیوتر و مهندسی برق دارد در نظریهٔ رمزگذاری (رمزهای پیشوند) و بهینه‌سازی (شبکه‌های ترابری) نیز دارای کاربرد است.

تمرینهای ۲.۶

۱. با استفاده از ماشین متناهی‌ـحالت مثال ۱۴.۶، خروجی هر یک از رشته‌های ورودی $x \in \mathscr{I}^*$ در زیر را بیابید و حالت داخلی نهایی را در فرایند تغییر وضعیت تعیین کنید. (فرض کنید که همیشه از $s_۰$ شروع می‌کنیم.)

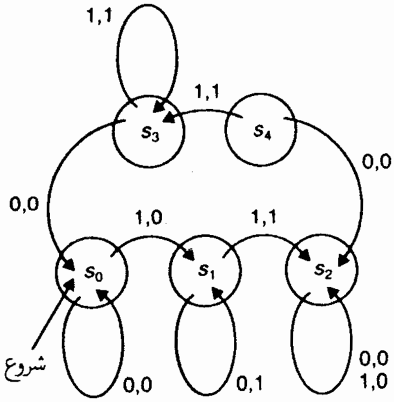
الف) $x = ۱۰۱۰۱۰۱$ ب) $x = ۱۰۰۱۰۰۱$ ج) $x = ۱۰۱۰۰۱۰۰۰$

۲. برای ماشین متناهی‌ـحالت مثال ۱۴.۶ یک رشتهٔ ورودی x، با شروع از حالت $s_۰$، رشتهٔ خروجی ۰۰۱۰۱۰۰ را تولید می‌کند. x را تعیین کنید.

۳. فرض کنید $M = (S, \mathscr{I}, \mathscr{O}, \nu, \omega)$ یک ماشین متناهی‌ـحالت باشد که در آن $S = \{s_۰, s_۱, s_۲, s_۳\}$، $\mathscr{I} = \{a, b, c\}$، $\mathscr{O} = \{۰, ۱\}$، و ν و ω به‌وسیلهٔ جدول ۷.۶ معین شده‌اند.

جدول ۷.۶

	ν			ω		
	a	b	c	a	b	c
$s_۰$	$s_۰$	$s_۳$	$s_۲$	۰	۱	۱
$s_۱$	$s_۱$	$s_۱$	$s_۳$	۰	۰	۱
$s_۲$	$s_۱$	$s_۱$	$s_۳$	۱	۱	۰
$s_۳$	$s_۲$	$s_۳$	$s_۰$	۱	۰	۱



شکل ۵.۶

الف) با شروع از s_0، خروجی برای رشتهٔ ورودی $abbccc$ چیست؟

ب) نمودارحالت را برای این ماشین متناهی-حالت، رسم کنید.

۴. برای ماشین‌فروش مثال ۱۵.۶، اگر قیمت هر قوطی کولا یا فانتا به ۲۵ سنت افزایش یابد، جدول حالت را ارائه دهید.

۵. ماشین متناهی-حالت $M = (S, \mathscr{I}, \mathscr{O}, \nu, \omega)$ که در آن $\mathscr{I} = \mathscr{O} = \{۰, ۱\}$، با نمودار حالت شکل ۵.۶ تعیین شده است.

الف) رشتهٔ خروجی را برای رشتهٔ ورودی ۱۱۰۱۱۱، با شروع از s_0، معین کنید. حالت نهایی ~~تغییر~~ حالت کدام است؟

ب) برای همین رشته ولی با حالت شروع s_1، به قسمت (الف) پاسخ دهید. دربارهٔ s_2 و s_3 به‌عنوان حالت شروع چه می‌توان گفت؟

ج) جدول‌حالت را برای این ماشین بیابید.

د) با چه حالتی باید شروع کنیم تا رشتهٔ ورودی ۱۰۰۱۰ خروجی ۱۰۰۰۰ را تولید کند؟

ه) یک رشتهٔ ورودی $x \in \mathscr{I}^*$ با طول مینیمال تعیین کنید به‌قسمی که $\nu(s_4, x) = s_1$. آیا x یکتاست؟

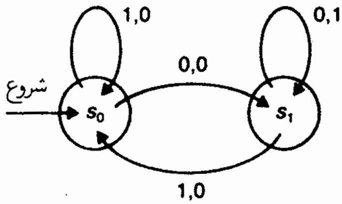
۶. ماشین M دارای $\mathscr{O} = \{۰, ۱\} = \mathscr{I}$ است و با نمودار حالت شکل ۶.۶ معین شده است.

الف) کار این ماشین متناهی حالت را به‌صورت کلامی شرح دهید؟

ب) حالت s_1 چه چیزی را باید به حافظه بسپارد؟

ج) دو زبان $A, B \subseteq \mathscr{I}^*$ بیابید به‌قسمی که به ازای هر $x \in AB$، $\omega(s_0, x)$ دارای پسوند ۱ باشد.

۷. **الف)** اگر S، $\mathscr{I}$، و $\mathscr{O}$ مجموعه‌هایی متناهی باشند و $|S| = ۳$، $|\mathscr{I}| = ۵$، $|\mathscr{O}| = ۲$، تعیین کنید



شکل ۶.۶

(i) $|S \times \mathscr{I}|$ را؛

(ii) تعداد تابعهای $\nu : S \times \mathscr{I} \to S$ را؛ و

(iii) تعداد تابعهای $\omega : S \times \mathscr{I} \to \mathscr{O}$ را.

ب) مجموعه‌های S، $\mathscr{I}$، $\mathscr{O}$ی قسمت (الف)، چند ماشین متناهی-حالت را معین می‌کنند؟

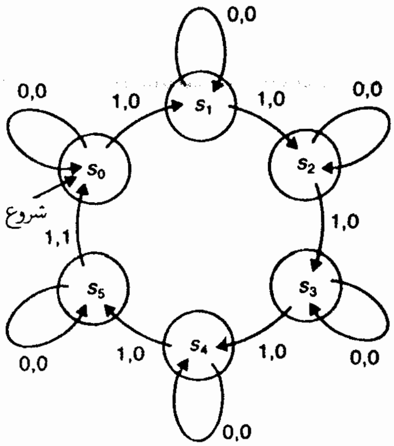
۸. فرض کنید $M = (S, \mathscr{I}, \mathscr{O}, \nu, \omega)$ یک ماشین متناهی-حالتی با $\mathscr{I} = \mathscr{O} = \{۰, ۱\}$ باشد و S، ν و ω به‌وسیلهٔ نمودار حالت شکل ۷.۶ تعیین شوند.

الف) خروجی رشتهٔ ورودی $x = ۰۱۱۰۱۱۱۰۱۱$ را بیابید.

ب) جدول تغییر حالت را برای این ماشین متناهی-حالت تعیین کنید.

ج) با حالت شروع از $s_۰$، اگر خروجی برای رشتهٔ ورودی x به‌صورت ۰۰۰۰۰۰۱ باشد، تمام صورتهای ممکن x را تعیین کنید.

د) کار این ماشین متناهی حالت را به‌صورت کلامی شرح دهید.



شکل ۷.۶

۳.۶ ماشینهای متناهی-حالت: دومین رویارویی

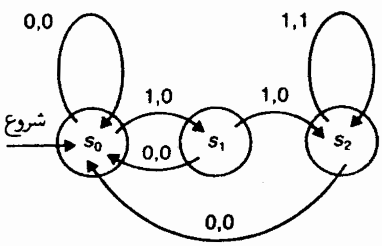
حال که مثالهایی از ماشینهای متناهی-حالت را دیدیم به مطالعهٔ برخی از ماشینهای دیگری که در سخت‌افزار کامپیوتری وجود دارند برمی‌گردیم. یک نوع مهم چنین ماشینی، تشخیص دهندهٔ دنباله‌هاست.

مثال ۱۷.۶ در اینجا، $\mathscr{I} = \mathscr{O} = \{۰, ۱\}$، و می‌خواهیم ماشینی بسازیم که هر رویداد دنبالهٔ ۱۱۱ را به‌هنگام برخورد با آن در هر رشتهٔ ورودی $x \in \mathscr{I}^*$ تشخیص دهد. مثلاً اگر $x =$ ۱۱۱۰۱۰۱۱۱۱، آن‌گاه خروجی متناظر با آن باید ۰۰۱۰۰۰۰۰۱۱ باشد، که در آن یک ۱ در iامین مکان خروجی نشان می‌دهد که در مکانهای i، $i - ۱$، و $i - ۲$ی x می‌توان یک ۱ یافت. در اینجا تداخل دنباله‌های ۱۱۱ می‌تواند رخ دهد، لذا برخی نویسه‌ها در رشتهٔ ورودی را می‌توان به‌صورت نویسه‌هایی در بیش از یک سه‌تایی از ۱ها در نظر گرفت.

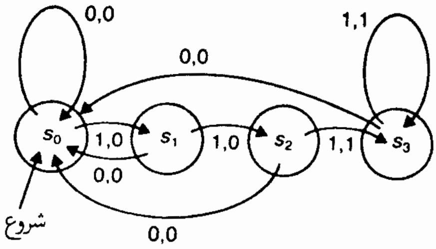
فرض کنید $s_۰$ معرف حالت شروع باشد، در نظر می‌گیریم که باید حالتی برای به حافظه سپردن ۱ (شروع ممکن از ۱۱۱) و حالتی برای به حافظه سپردن ۱۱ داشته باشیم. به‌علاوه، هر وقت که نماد ورودی ما ۰ است به $s_۰$ برگردیم و جستجو برای سه ۱ متوالی را از نو شروع کنیم.

در شکل ۸.۶، $s_۱$ یک ۱ تنها را، و $s_۲$ رشتهٔ ۱۱ را به حافظه می‌سپارند. اگر به $s_۲$ برسیم آن‌گاه یک "۱" سوم، مورد سه‌تایی را در رشتهٔ ورودی نشان می‌دهد، و خروجی ۱، این مورد را تشخیص می‌دهد. اما این «۱» سوم نیز به‌معنای این است که اولین دوتا ۱ از سه‌تایی ممکن دیگری را که در رشته ظاهر می‌شود داریم (نظیر آنچه در ۱ "۱"۱۱۰۱۰۱۱۱ رخ می‌دهد). بنابراین پس از تشخیص مورد ۱۱۱ با خروجی ۱، به حالت $s_۲$ برمی‌گردیم تا دوتا ورودی "۱" ۱ را به حافظه بسپاریم.

اگر مسألهٔ مورد علاقهٔ ما تشخیص همهٔ رشته‌هایی باشد که به ۱۱۱ ختم می‌شوند، آن‌گاه به‌ازای هر $x \in \mathscr{I}^*$، ماشین چنین دنباله‌ای با خروجی نهایی ۱ را تشخیص خواهد داد. لذا، این ماشین یک تشخیص دهندهٔ زبان $A = \{۰, ۱\}^*\{۱۱۱\}$ است. □



شکل ۸.۶



شکل ۹.۶

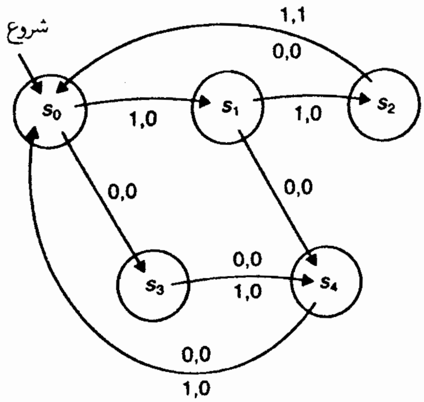
در شکل ۹.۶، یک ماشین متناهی-حالت دیگری که همین سه‌تایی ۱۱۱ را تشخیص می‌دهد نشان داده‌ایم. ماشینهای متناهی-حالتی که به‌وسیلهٔ نمودارهای حالت شکلهای ۸.۶ و ۹.۶ معرفی شده‌اند یک کار واحدی را انجام می‌دهند و آنها را هم‌ارز می‌گویند. نمودار حالت شکل ۹.۶، یک حالت بیشتر از نمودار حالت شکل ۸.۶ دارد، اما در این مرحله ما خیلی نگران دستیابی به یک ماشین متناهی-حالت که تعداد حالتهایش مینیمم باشد نیستیم. در فصل ۷ تکنیکی را برای اختیار یک ماشین مفروض متناهی-حالت M عرضه خواهیم کرد و ماشینی را خواهیم یافت که هم‌ارز با آن است و دارای کمترین تعداد حالتهای داخلی مورد نیاز است.

مثال بعدی، مثالی است که کمی بیشتر جنبهٔ انتخابی دارد.

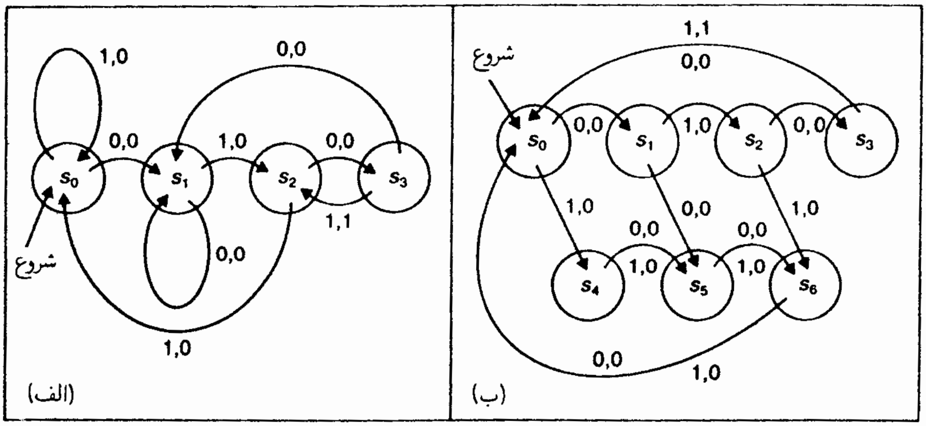
مثال ۱۸.۶ اینک می‌خواهیم نه تنها مورد ۱۱۱ را تشخیص دهیم، بلکه می‌خواهیم تنها آن موردهایی را تشخیص دهیم که در مکانی ختم می‌شوند که مضربی از سه است. در نتیجه، با $\mathscr{I} = \mathscr{O} = \{۰, ۱\}$، اگر $x \in \mathscr{I}^*$، $x =$ ۱۱۱۰۱۱۱، آن‌گاه می‌خواهیم $\omega(s_0, x)$ برابر با ۰۰۱۰۰۰۰ باشد و نه برابر با ۰۰۱۰۰۰۱. به‌علاوه برای $x \in \mathscr{I}^*$، $x =$ ۱۱۱۱۰۰۱۱۱، خروجی $\omega(s_0, x)$ عبارت باشد از ۰۰۱۰۰۰۰۰۱، و نه ۰۰۱۱۰۰۰۰۱، برای این مورد، به‌دلیل ملاحظات مربوط به درازا تداخل دنباله‌های ۱۱۱ مجاز نیست.

دوباره از s_0 شروع می‌کنیم (شکل ۱۰.۶)، اما اینک s_1 باید اولین ۱ را تنها اگر در x در مکان ۱، ۴، ۷، ... ، ظاهر می‌شود به حافظه بسپارد. اگر ورودی در s_0، ۰ باشد، ما نمی‌توانیم، مثل آنچه در شکل ۱۷.۶ است، اصلاً به s_0 برگردیم. باید به‌خاطر بیاوریم که این ۰، اولین نماد از سه نمادی است که مورد توجه نیستند. بنابراین، از s_0 به s_3 و سپس به s_4 می‌رویم که پردازش هر سه‌تایی به‌صورت $0yz$ را انجام می‌دهد که در آن ۰ در x در مکان $۳k + ۱$، $k \geq ۰$، ظاهر می‌شود. اگر ورودی ۰ باشد، همین نوع حالت در s_1 ظاهر می‌شود. سرانجام، در s_2، دنبالهٔ ۱۱۱ با خروجی ۱، اگر ظاهر شود تشخیص داده می‌شود. لذا، ماشین برای وارد کردن نماد بعدی رشتهٔ ورودی به s_0 برمی‌گردد. □

مثال ۱۹.۶ شکل ۱۱.۶، نمودارهای حالت ماشینهای متناهی-حالت را نشان می‌دهد که مورد



شکل۱۰.۶



شکل۱۱.۶

دنبالهٔ ۰۱۰۱ در رشتهٔ ورودی $x \in \mathscr{I}^*$ با $\mathscr{I} = \mathscr{O} = \{۰,۱\}$ را تشخیص خواهند داد. ماشین در شکل ۱۱.۶(الف) با خروجی ۱، هر مورد ۰۱۰۱ را در رشتهٔ ورودی، صرف‌نظر از اینکه کجا رخ می‌دهد، تشخیص می‌دهد. در شکل ۱۱.۶(ب)، ماشین با خروجی ۱، تنها آن پیشوندهای x را که درازای آنها مضربی از چهار است و به ۰۱۰۱ ختم می‌شوند تشخیص می‌دهد. (از این رو در اینجا تداخل مجاز نیست.) در نتیجه به‌ازای $x = ۰۱۰۱۰۱۰۰۱۰۱$، برای (الف) $\omega(s_۰, x) = ۰۰۰۱۰۱۰۰۰۰۱$، درحالی که برای (ب) $\omega(s_۰, x) = ۰۰۰۱۰۰۰۰۰۰۰$. □

اینک که بعضی ماشینهای متناهی-حالت را، که به‌صورت تشخیص دهنده‌های دنباله‌ای به‌کار می‌روند بررسی کردیم، بجاست مجموعه‌ای از دنباله‌ها را در نظر بگیریم که نمی‌توان آنها را به‌وسیلهٔ

جدول ۸.۶

حالت	$s_۰$	$s_۱$	$s_۲$	$\dots$	$s_{n-۱}$	s_n	$s_{n+۱}$	$\dots$	$s_{۲n+۱}$
ورودی	۰	۰	۰	$\dots$	۰	۰	۱	$\dots$	۱
خروجی	۰	۰	۰	$\dots$	۰	۰	۰	$\dots$	۱

ماشین متناهی‌ـحالت تشخیص داد. این مثال فرصت دیگری برای به‌کار بردن اصل لانهٔ کبوتر را به ما می‌دهد.

مثال ۲۰.۶ فرض کنید $\mathscr{I} = \mathscr{O} = \{۰, ۱\}$. آیا می‌توانیم ماشین متناهی‌ـحالتی بسازیم که آن دنباله‌ها را به‌درستی در زبان $A = \{۰۱, ۰۰۱۱, ۰۰۰۱۱۱, \dots\} = \{۰^i ۱^i | i \in \mathbf{Z}^+\}$ تشخیص دهد؟ اگر بتوانیم، می‌خواهیم $\omega(۰۱) = ۰۱$، $\omega(۰۰۱۱) = ۰۰۰۱$، و، به‌طور کلی به‌ازای هر $i \in \mathbf{Z}^+$، $\omega(۰^i ۱^i) = ۰^{۲i-۱}۱$ را به‌دست آوریم.

فرض کنید که ماشین متناهی‌ـحالت $M = (S, \mathscr{I}, \mathscr{O}, \nu, \omega)$ وجود دارد که می‌تواند این دنباله‌ها را در A تشخیص دهد. گیریم $|S| = n \geq ۱$، که در آن $s_۰ \in S$، و $s_۰$ حالت آغازی است. اینک رشتهٔ $۰^{n+۱}۱^{n+۱}$ را در A در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم $\omega(s_۰, ۰^{n+۱}۱^{n+۱}) = ۰^{۲n+۱}۱$ را به‌دست آوریم. بنابراین، در جدول ۸.۶ می‌بینیم که چگونه ماشین‌متناهی‌ـحالت، $n+۱$ تا ۰ را، با شروع از حالت $s_۰$ و سپس با ادامه به حالتهای $s_۱ = \nu(s_۰, ۰)$، $s_۲ = \nu(s_۱, ۰)$، $\dots$، $s_n = \nu(s_{n-۱}, ۰)$ پردازش خواهد کرد. چون $|S| = n$، با به‌کار بردن اصل لانهٔ کبوتر در مورد $n+۱$ حالت $s_۰$، $s_۱$، $\dots$، $s_{n-۱}$، s_n، تعیین می‌کنیم که دو حالت s_i و s_j وجود دارند که $i < j$ اما $s_i = s_j$.

اینک از جدول ۹.۶ می‌بینیم که حذف $j - i$ ستون برای حالتهای $s_{i+۱}$، $\dots$، s_j در جدول ۱۰.۶ چه نتیجه‌ای داده است. این جدول نشان می‌دهد که چگونه ماشین متناهی‌ـحالت M، دنبالهٔ $x = ۰^{(n+۱)-(j-i)}۱^{n+۱}$ راتشخیص می‌دهد، که در آن $(n+۱) - (j-i) < n+۱$. متأسفانه، $x \notin A$، لذا M دنباله‌ای را تشخیص می‌دهد که قرار نبوده است تشخیص دهد. این، نشان می‌دهد که نمی‌توانیم ماشینی متناهی‌ـحالت بسازیم که آن دنباله‌هایی را دقیقاً تشخیص

جدول ۹.۶

حالت	$s_۰$	$s_۱$	$s_۲$	$\dots$	s_i	$s_{i+۱}$	$\dots$	s_j	$s_{j+۱}$	$\dots$	s_n	$s_{n+۱}$	$\dots$	$s_{۲n+۱}$
ورودی	۰	۰	۰	$\dots$	۰	۰	$\dots$	۰	۰	$\dots$	۰	۱	$\dots$	۱
خروجی	۰	۰	۰	$\dots$	۰	۰	$\dots$	۰	۰	$\dots$	۰	۰	$\dots$	۱

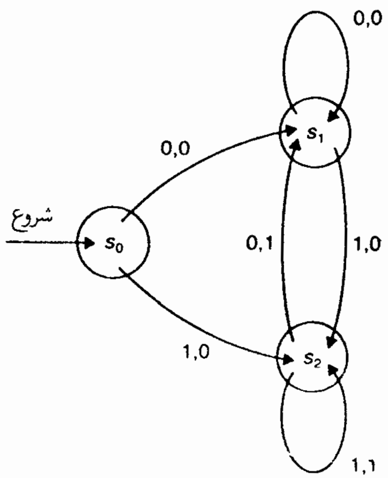
جدول ۱۰.۶

حالت	$s_۰$	$s_۱$	$s_۲$	$\cdots$	s_j	$s_{j+۱}$	$\cdots$	s_n	$s_{n+۱}$	$\cdots$	$s_{۲n+۱}$
ورودی	۰	۰	۰	$\cdots$	۰	۰	$\cdots$	۰	۱	$\cdots$	۱
خروجی	۰	۰	۰	$\cdots$	۰	۰	$\cdots$	۰	۰	$\cdots$	۱

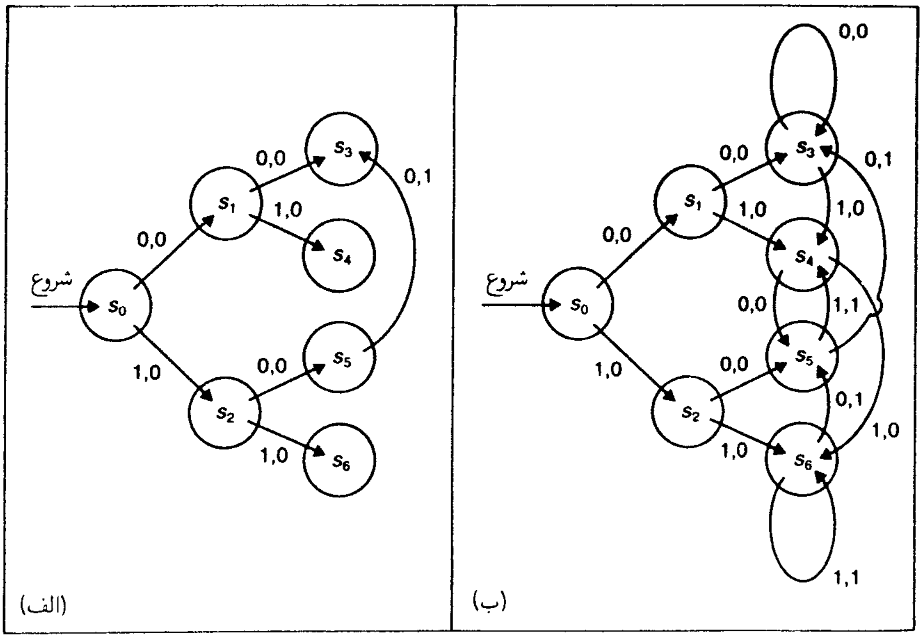
دهد که در زبان $\{۰^i ۱^i | i \in \mathbf{Z}^+\}$ هستند. □

رده‌ای از ماشینهای متناهی-حالت که در طرح ابزار رقمی اهمیت دارند، ماشینهای با k واحد تاخیر است که در آنها $k \in \mathbf{Z}^+$. به‌ازای $k = ۱$، می‌خواهیم ماشین M را چنان بسازیم که اگر $x = x_۱x_۲ \ldots x_{m-۱}x_m$، آن‌گاه برای حالت شروع $s_۰$، $\omega(s_۰, x) = ۰x_۱x_۲ \ldots x_{m-۱}$، لذا خروجی عبارت است از ورودی با یک واحد زمان (ضربهٔ ساعت) تأخیر. (استفاده از ۰ به‌عنوان اولین نماد، در $\omega(s_۰, x)$، قراردادی است.)

مثال ۲۱.۶ فرض کنید $\mathscr{I} = \mathscr{O} = \{۰, ۱\}$. با شروع از حالت $s_۰$، به‌ازای $x = ۰$ یا $x = ۱$، داریم $\omega(s_۰, x) = ۰$، زیرا اولین خروجی ۰ است؛ حالتهای $s_۱$ و $s_۲$ به‌ترتیب یک ورودی قبلی ۰ و ۱ را در حافظه دارند. در شکل ۱۲.۶، مثلاً کمان از $s_۱$ به $s_۲$ را با کمان ۰، ۱ برچسب می‌زنیم، زیرا با یک ورودی ۱ لازم است که به $s_۲$ برویم که در آن، ورودیهای ۱ در زمان t_i به حافظه سپرده شده‌اند به‌قسمتی که می‌توانند خروجیهای ۱ در زمان $t_{i+۱}$ بشوند. در این برچسب



شکل ۱۲.۶

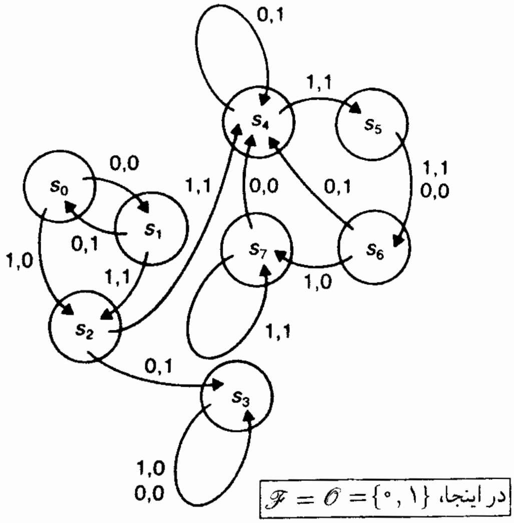


شکل ۱۳.۶

۰، ۱ در واقع ۰، خروجی است، زیرا شروع از s_1 نشان می‌دهد که ورودی قبلی ۰ بوده است که خروجی فعلی شده است. برچسبهای کمانهای دیگر با همین نوع استدلال به‌دست آمده‌اند. □

مثال ۲۲.۶ با مشاهدهٔ ساختار یک واحد تأخیر، ایده‌های خود را به دو واحد تأخیر که در شکل ۱۳.۶ نشان داده‌ایم تعمیم می‌دهیم. اگر $x \in \mathscr{I}^*$، فرض می‌کنیم $x = x_1x_2\dots x_m$، $m > 2$؛ اگر s_0 حالت شروع باشد، آنگاه $\omega(s_0, x) = 00x_1\dots x_{m-2}$. برای حالتهای s_0، s_1، s_2، خروجی برای همهٔ ورودیهای ممکن ۰ است. حالتهای s_3، s_4، s_5 و s_6 باید دو ورودی قبلی ۰۰، ۰۱، ۱۰، ۱۱ را به ترتیب به حافظه بسپارند. برای به‌دست آوردن کمانهای جهتدار دیگر نمودار، یکی از این کمانها را در نظر خواهیم گرفت و سپس برای کمانهای دیگر همین استدلال را به‌کار می‌بریم. برای کمان از s_5 به s_3 در شکل ۱۳.۶(الف)، فرض کنید ورودی ۰ باشد. چون ورودی قبلی از s_2 به s_5، ۰ است، باید به حالتی برویم که دو ورودی قبلی ۰۰ را به حافظه سپرده است. این حالت، حالت s_3 است. با برگشتن به دو حالت از s_5 به s_2 به s_0، می‌بینیم که ورودی ۱ است (از s_0 به s_2). پس، این، خروجی (با دو مکان تأخیر) برای کمان از s_5 به s_3 می‌شود. (در قسمت (ب) شکل ۱۳.۶، ماشین کامل نشان داده شده است.) □

اینک به مطالعهٔ برخی ویژگیهای دیگری که در ماشینهای متناهی-حالت پدید می‌آیند برمی‌گردیم.



شکل ۱۴.۶

ماشین شکل ۱۴.۶ را برای مثالهایی دربارهٔ اصطلاحاتی که تعریف می‌کنیم به‌کار می‌بریم.

تعریف ۱۴.۶ فرض کنید $M = (S, \mathscr{I}, \mathscr{O}, \nu, \omega)$ ماشینی متناهی-حالت باشد.

الف) برای $s_i, s_j \in S$، s_j را قابل حصول از s_i می‌گویند اگر $s_i = s_j$ یا اگر رشتهٔ ورودی $x \in \mathscr{I}^+$ی وجود داشته باشد به‌قسمی که $\nu(s_i, x) = s_j$. (در شکل ۱۴.۶، حالت s_3 قابل حصول از s_0، s_1، s_2، و s_3 است، اما قابل حصول از s_4، s_5، s_6 یا s_7 نیست. هیچ حالت قابل حصولی از s_3، جز خود s_3 وجود ندارد.)

ب) حالت $s \in S$ را گذرا می‌گویند اگر برای $x \in \mathscr{I}^*$، $\nu(s, x) = s$ مستلزم $x = \lambda$ باشد؛ یعنی $x \in \mathscr{I}^+$ی وجود نداشته باشد که $\nu(s, x) = s$. (برای ماشین شکل ۱۴.۶، s_2 تنها حالت گذراست.)

ج) حالت $s \in S$ را چاه یا حالت‌چاهی می‌نامند، اگر برای هر $x \in \mathscr{I}^*$، $\nu(s, x) = s$. (s_3 تنها چاه در شکل ۱۴.۶ است.)

د) فرض کنید $S_1 \subseteq S$، $\mathscr{I}_1 \subseteq \mathscr{I}$. اگر $\nu_1 = \nu|_{S_1 \times \mathscr{I}_1} : S_1 \times \mathscr{I}_1 \to S_1$ (یعنی محدودیت ν به $S_1 \times \mathscr{I}_1 \subseteq S \times \mathscr{I}$) بردش، در درون S_1 باشد، آن‌گاه با شرط $\omega_1 = \omega|_{S_1 \times \mathscr{I}_1}$، $M_1 = (S_1, \mathscr{I}_1, \mathscr{O}, \nu_1, \omega_1)$ را زیر ماشین M می‌نامند. (با $S_1 = \{s_4, s_5, s_6, s_7\}$، و $\mathscr{I} = \{0, 1\}$، زیر ماشین M_1 از ماشین M در شکل ۱۴.۶ به‌دست می‌آید.)

ه) ماشین را قویاً همبند می‌نامند اگر برای حالتهای دلخواه $s_i, s_j \in S$، s_j از s_i قابل

جدول ۱۱.۶

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_0	s_6	s_1	۰	۱
s_1	s_5	s_0	۰	۱
s_2	s_1	s_2	۰	۱
s_3	s_4	s_0	۰	۱
s_4	s_2	s_1	۰	۱
s_5	s_3	s_5	۱	۱
s_6	s_3	s_6	۱	۱

حصول باشد. (ماشین شکل ۱۴.۶ قویاً همبند نیست، اما زیر ماشین M_1 در (د) این ویژگی را دارد.)

این بخش را با نتیجه‌ای که از نمودار درختی استفاده می‌کند خاتمه می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۶ برای ماشین متناهی‌ـحالت M، فرض می‌کنیم s_i، s_j دو حالت متمایز در S باشند. کوتاهترین رشتهٔ ورودی $x \in \mathscr{I}^+$ را دنبالهٔ تغییر حالت(انتقال) از s_i به s_j می‌نامند اگر

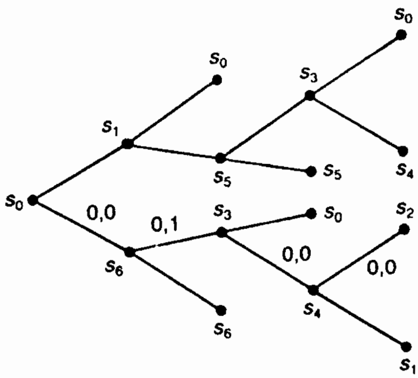
الف) $\nu(s_i, x) = s_j$، و

ب) $y \in \mathscr{I}^+$ با $\nu(s_i, y) = s_j \Rightarrow ||y|| \geq ||x||$.

برای دو حالت s_i، s_j می‌تواند بیش از یک چنین دنباله‌ای وجود داشته باشد.

مثال ۲۳.۶ برای ماشین متناهی‌ـحالت M که به‌وسیلهٔ جدول‌حالت ۱۱.۶ داده شده است، و در این جدول $\mathscr{I} = \mathscr{O} = \{0, 1\}$، یک دنبالهٔ تغییرحالت از حالت s_0 به s_2 بیابید.

در ساختن نمودار درختی شکل ۱۵.۶، با حالت s_0 شروع و آن حالتهایی را می‌یابیم که می‌توانیم از s_0، با استفاده از رشته‌های به درازای یک، به آنها برسیم. در اینجا s_1 و s_6 را به‌دست می‌آوریم. سپس همین کار را با s_1 و s_6 انجام می‌دهیم و به‌عنوان نتیجه، آن حالتهای قابل حصول از s_0 را می‌یابیم که با رشته‌های ورودی به درازای دو هستند. با ادامهٔ بسط درخت از چپ به راست، به رأس برچسب‌دار با حالت مطلوب یعنی s_2 می‌رسیم. هر وقت به رأس برچسب‌داری می‌رسیم که حالت آن قبلاً مورد استفاده واقع شده است، به بسط درخت در آن قسمت خاتمه می‌دهیم زیرا نمی‌توانیم به هیچ حالت جدیدی برسیم. پس از اینکه به حالتی رسیدیم که می‌خواستیم، از s_0 به‌عقب برمی‌گردیم و از جدول حالتها برای برچسب زدن شاخه‌ها،



شکل ۱۵.۶

به‌صورتی که در شکل ۱۵.۶ نشان داده‌ایم استفاده می‌کنیم. بنابراین، برای $x = 0000$، داریم $\nu(s_0, x) = s_2$، با $\omega(s_0, x) = 0100$ (در اینجا x یکتاست.) □

تمرینهای ۳.۶

۱. فرض کنید $\mathscr{I} = \mathscr{O} = \{0, 1\}$. (الف) نمودار حالت ماشین متناهی-حالتی را بسازید که هر مورد ۰۰۰۰ را در رشتهٔ $x \in \mathscr{I}^*$ تشخیص دهد. (در اینجا تداخل مجاز است) (ب) نمودار حالتها را برای ماشین متناهی-حالتی بسازید که هر رشتهٔ $x \in \mathscr{I}^*$ را که به ۰۰۰۰ ختم می‌شود و درازای آن $4k$، $k \in \mathbf{Z}^+$، است تشخیص دهد. (در اینجا تداخل مجاز نیست.)

۲. به تمرین ۱ برای دنباله‌های ۰۱۱۰ و ۱۰۱۰ پاسخ دهید.

۳. برای $k \in \mathbf{Z}^+$، kی ثابت، نمودار حالتها را برای ماشین متناهی-حالتی که رشته‌ای از k تا ۰ متوالی راتشخیص دهد رسم کنید. (در اینجا تداخل مجاز است.)

۴. در جدول ۱۲.۶، تعاریف ν و ω برای ماشین متناهی-حالت M، که در آن $\mathscr{I} = \mathscr{O} = \{0, 1\}$، آمده است.

الف) نمودار حالتها را برای M رسم کنید.

جدول ۱۲.۶

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_0	s_0	s_1	۰	۰
s_1	s_0	s_1	۱	۱

جدول ۱۳.۶

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_0	s_4	s_1	۰	۰
s_1	s_4	s_2	۰	۱
s_2	s_3	s_5	۰	۰
s_3	s_2	s_5	۱	۰
s_4	s_4	s_4	۱	۱
s_5	s_2	s_3	۰	۱

(الف)

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_0	s_0	s_1	۱	۰
s_1	s_0	s_1	۰	۱
s_2	s_1	s_3	۰	۰
s_3	s_0	s_4	۰	۰
s_4	s_4	s_4	۱	۱

(ب)

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_0	s_1	s_2	۰	۱
s_1	s_0	s_2	۱	۱
s_2	s_2	s_3	۱	۱
s_3	s_6	s_4	۰	۰
s_4	s_5	s_5	۱	۰
s_5	s_3	s_4	۱	۰
s_6	s_6	s_6	۰	۰

(ج)

ب) برای دنباله‌های ورودی زیر، با شروع از s_0 در هر حالت، خروجی را تعیین کنید:
(i) $x = 111$؛ (ii) $x = 1010$؛ (iii) $x = 00011$.

ج) به‌صورت کلامی کاری را که ماشین M انجام می‌دهد توصیف کنید.

د) چگونه این ماشین به ماشینی که در شکل ۱۲.۶ نشان داده‌ایم وابسته است؟

۵. درستی برچسبهای همهٔ کمانها را در نمودارحالتها برای ماشین با دو واحد تأخیری که در شکل ۱۳.۶(ب) نشان داده‌ایم تحقیق کنید.

۶. نشان دهید که نمی‌توان ماشین متناهی‌ـحالتی ساخت که دنباله‌های زبان

$$A = \{0^i 1^j | i, j \in \mathbf{Z}^+, i > j\}$$

را دقیقاً تشخیص دهد (در اینجا الفبا برای A عبارت است از $\mathbf{\Sigma} = \{0, 1\}$.)

۷. برای هر یک از ماشینهای جدول ۱۳.۶، حالتهای گذرا، حالتهای چاه، زیر ماشینها، و زیر ماشینهای قویاً همبند را تعیین کنید.

۸. دنبالهٔ تغییر حالتی را از حالت s_2 به حالت s_5 در ماشین متناهی‌ـحالت (ج) تمرین ۷ تعیین کنید. آیا این دنباله یکتاست؟

۴.۶ خلاصه و مرور تاریخی

در این فصل، با نظریهٔ زبانها و ساختار گسسته‌ای به نام ماشین متناهی‌ـحالت آشنا شدیم. با استفاده از بسط قبلی نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها و تابعهای متناهی، توانستیم بعضی مفاهیم مجرد را ترکیب و ابزار رقمی نظیر تشخیص دهنده‌های دنباله‌ای و تأخیرها را مدلبندی کنیم. مطالبی مشابه

در فصل ۱ از کتاب دورنهوف[1] و هون[2] [۲] و در فصل ۲ از کتاب ستنت[3] و مک آلیستر[4] [۱۱] آمده‌اند.

ماشین متناهی-حالتی را که بسط دادیم مبتنی بر مدلی است که میلی[5] در ۱۹۵۵ در [۸] مطرح کرده است و در نتیجه به «ماشین میلی» معروف شده است. این مدل بر اساس مفاهیم قبلی موجود در آثار هافمن[۶] و مور[۹] مدلبندی شده‌است. برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ اثر پیشگامی که به جنبه‌ها وکاربردهای مختلف ماشین متناهی-حالت مربوط می‌شود به مطالب تألیفی مور [۱۰] رجوع کنید. اطلاعات بیشتر دربارهٔ ساختن چنین ماشینها و ملاحظات سخت‌افزاری وابسته به آنها، همراه با مطالبی جامع از ایده‌های مربوط را می‌توان در فصول ۹ تا ۱۵ اثر کوهاوی[6] [۷] یافت.

برای اطلاعات بیشتر دربارهٔ زبانها و رابطهٔ آنها با ماشینهای متناهی-حالت به مدول UMAP، اثر ویلیام بارنیه[7] [۱]، فصلهای ۷ تا ۱۰ اثر گرستینگ[8] [۳]، و فصلهای ۷ و ۸ اثر گیل[9] [۴] نگاهی بیفکنید. مطالبی جامع از این عناوین (و وابسته‌های آنها) درکتابی درسی، اثر هاپکرافت و اولمن[۵] داده شده است.

مراجع

1. Barnier, William J. "Finite-State Machines as Recognizers" (UMAP Module 671). *The UMAP Journal* 7, no. 3, (1986): pp. 209–232.
2. Dornhoff, Larry L., and Hohn, Franz E. *Applied Modern Algebra*. New York: Macmillan, 1978.
3. Gersting, Judith L. *Mathematical Structures for Computer Science*. San Francisco: W. H. Freeman, 1982.
4. Gill, Arthur. *Applied Algebra for the Computer Sciences*, Prentice-Hall Series in Automatic Computation. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1976.
5. Hopcroft, John E., and Ullman, Jeffrey D. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1979.
6. Huffman, D. A. "The Synthesis of Sequential Switching Circuits." *Journal of the Franklin Institute* 257, (March 1954): pp. 161–190, (April 1954): pp. 275–303. Reprinted in Moore [10].
7. Kohavi, Zvi. *Switching and Finite Automata Theory*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1978.
8. Mealy, G. H. "A Method for Synthesizing Sequential Circuits." *Bell System Technical Journal* 34, (September 1955): pp. 1045–1079.
9. Moore, E. F. "Gedanken-experiments on Sequential Machines." *Automata Studies, Annals of Mathematical Studies*, no. 34: pp. 129–153. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1956.
10. Moore, E. F., ed. *Sequential Machines: Selected Papers*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1964.
11. Stanat, Donald F., and McAllister, David F. *Discrete Mathematics in Computer Science*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1977.

---

1. L. Dornhoff 2. F. Hohn 3. D. Stanat 4. D. McAllister 5. G. H. Mealy
6. Z. Kohavi 7. William J. Barnier 8. J. Gersting 9. A. Gill

تمرینهای گوناگون

۱. فرض کنید $\Sigma_۱ = \{w, x, y\}$ و $\Sigma_۲ = \{x, y, z\}$ دو الفبا باشند. اگر

$$A_۱ = \{x^i y^j | i, j \in \mathbf{Z}^+, j > i \geq ۱\}$$

و

$$A_۲ = \{w^i y^j | i, j \in \mathbf{Z}^+, i > j \geq ۱\}$$

و

$$A_۳ = \{w^i x^j y^i z^j | i, j \in \mathbf{Z}^+, j > i \geq ۱\}$$

و

$$A_۴ = \{z^j (wz)^i w^j | i, j \in \mathbf{Z}^+, i \geq ۱, j \geq ۲\}$$

تعیین کنید که هر یک از گزاره‌های زیر درست است یا غلط.

الف) $A_۱$ زبانی در $\Sigma_۱$ است.
ب) $A_۱$ زبانی در $\Sigma_۲$ است.
ج) $A_۲$ زبانی در $\Sigma_۱$ است.
د) $A_۲$ زبانی در $\Sigma_۲$ است.
ه) $A_۳$ زبانی در $\Sigma_۱ \cup \Sigma_۲$ است.
و) $A_۱$ زبانی در $\Sigma_۱ \cap \Sigma_۲$ است.
ز) $A_۴$ زبانی در $\Sigma_۱ \triangle \Sigma_۲$ است.
ح) $A_۱ \cup A_۲$ زبانی در $\Sigma_۱$ است.
ط) $A_۱ \cup A_۴$ زبانی در $\Sigma_۱$ است.
ی) $A_۲ \cap A_۳$ زبانی در $\Sigma_۲$ است.

۲. برای زبانهای $A, B \subseteq \Sigma^*$، آیا $A^* \subseteq B^* \Rightarrow A \subseteq B$؟

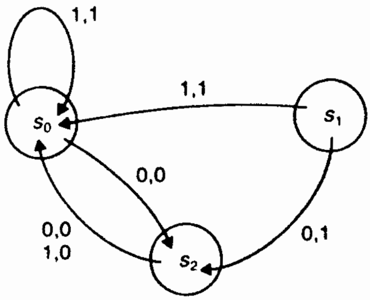
۳. مثالی برای زبان A در الفبای Σ بزنید که در آن $(A^۲)^* \neq (A^*)^۲$.

۴. برای الفبای مفروض Σ و مجموعهٔ اندیسگذار I، فرض کنید $B_i \subseteq \Sigma^*$، به‌ازای هر $i \in I$. اگر $A \subseteq \Sigma^*$، ثابت کنید که

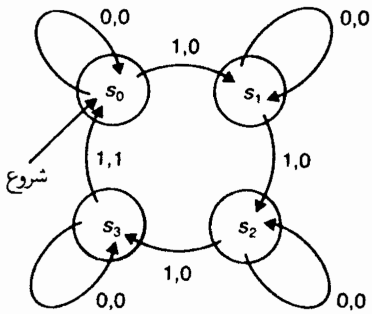
(الف) $$A(\bigcap_{i \in I} B_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} AB_i$$

و

(ب) $$(\bigcap_{i \in I} B_i)A \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i A$$



شکل ۱۶.۶



شکل ۱۷.۶

[در اینجا، مثلاً $A(\bigcap_{i\in I} B_i)$، معرف الحاق زبانهای A و $\bigcap_{i\in I} B_i$ است.]

۵. فرض‌کنیم M، ماشین متناهی-حالت شکل ۱۶.۶ است. برای حالتهای s_i و s_j، $۰ \le i, j \le ۲$، فرض کنید $\mathscr{O}_{ij}$ معرف مجموعهٔ همهٔ رشته‌های خروجی ناتهیی باشد که M می‌تواند، وقتی از حالت s_i به‌حالت s_j می‌رود تولید کند. اگر مثلاً $i = ۲$، $j = ۰$، آن‌گاه $\mathscr{O}_{۲۰} = \{۰\}\{۱, ۰۰\}^*$. $\mathscr{O}_{۰۲}$، $\mathscr{O}_{۲۲}$، $\mathscr{O}_{۱۱}$، $\mathscr{O}_{۰۰}$، و $\mathscr{O}_{۱۰}$ را بیابید.

۶. فرض کنید M ماشین متناهی-حالت شکل ۱۷.۶ باشد.

الف) جدول حالتها را برای این ماشین به‌دست آورید.

ب) چگونگی کار این ماشین را توضیح دهید.

ج) چند رشتهٔ ورودی متمایز x وجود دارند به‌قسمی که $||x|| = ۸$ و $\nu(s_۰, x) = s_۰$؟ چند رشته با $||x|| = ۱۲$ وجود دارند؟

۷. ماشین متناهی-حالت را کاملاً-مینیمال می‌گویند، اگر در جدول حالتهایش، هیچ دو سطر

جدول ۱۴.۶

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_1	s_4	s_3	۰	۰
s_2	s_2	s_4	۰	۱
s_3	s_1	s_2	۱	۰
s_4	s_1	s_4	۱	۱

خروجی مثل هم نباشند. برای $|S| = n$، $|\mathscr{I}| = m$، و $|\mathscr{O}| = p$، نشان دهید که

$$(n^{nm})[(p^m)(p^m - 1)(p^m - 2)\dots(p^m - (n-1))] = \frac{(n^{nm})(p^m)!}{(p^m - n)!}$$

ماشین کاملاً‌ـمینیمال ممکن وجود دارند.

۸. فرض کنید $M = (S, \mathscr{I}, \mathscr{O}, \nu, \omega)$ ماشینی است متناهی‌ـحالت با $|S| = n$ و $0 \in \mathscr{I}$.

الف) نشان دهید که برای رشتهٔ ورودی ... ۰۰۰۰، رشتهٔ خروجی سرانجام دوره‌ای است.

ب) قبل از اینکه خروجی دوره‌ای شروع شود، تعداد ماکسیمم ۰هایی که می‌توانیم وارد کنیم چند تاست؟

ج) درازای دورهٔ ماکسیمی که می‌تواند رخ دهد چقدر است؟

۹. برای ماشین متناهی‌ـحالت، در قسمت (ج) جدول ۱۳.۶، یک دنبالهٔ تغییر حالت، از حالت s_0 به حالت s_5 تعیین کنید. آیا این دنباله یکتاست؟

۱۰. برای ماشین متناهی‌ـحالت $M = (S, \mathscr{I}, \mathscr{O}, \nu, \omega)$، که در آن $\mathscr{I} = \mathscr{O} = \{0, 1\}$، نمودار حالتها را رسم کنید اگر برای هر $x \in \mathscr{I}^+$، M اولین ۱ را وقتی خارج کند که زیر رشتهٔ ۱۱۱۱ را تشخیص دهد و سپس دومین ۱ را وقتی خارج کند که زیر رشتهٔ ۰۰۰۰ را تشخیص دهد و پس از آن خروجیش پیوسته ۰ باشد.

۱۱. فرض کنید $\mathscr{I} = \mathscr{O} = \{0, 1\}$. برای ماشین با حالت متناهیی که نمادهای ظاهر شده در چهارمین، هشتمین، دوازدهمین ... موضع از یک رشتهٔ ورودی $x \in \mathscr{I}^+$ را (از ۰ به ۱ یا از ۱ به ۰) تبدیل می‌کند نمودار حالتها را بسازید. مثلاً، $\omega(0000) = 0001$، $\omega(000111) = 000011$، و $\omega(000000111) = 000100101$.

۱۲. برای $\mathscr{I} = \mathscr{O} = \{0, 1\}$، فرض کنید M ماشین متناهی‌ـحالتی باشد که در جدول ۱۴.۶ داده شده است.

اگر حالت آغازی برای M، حالت s_1 نباشد، رشتهٔ ورودی x (با کوچکترین درازا) را بیابید

جدول ۱۵.۶

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
$s_۰$	$s_۱$	$s_۲$	۱	۰
$s_۱$	$s_۲$	$s_۱$	۰	۱
$s_۲$	$s_۲$	$s_۳$	۰	۱
$s_۳$	$s_۱$	$s_۰$	۱	۰

جدول ۱۶.۶

	$\nu_۱$		$\omega_۱$	
	۰	۱	۰	۱
$s_۰$	$s_۰$	$s_۱$	۱	۰
$s_۱$	$s_۱$	$s_۲$	۰	۰
$s_۲$	$s_۲$	$s_۰$	۰	۱

جدول ۱۷.۶

	$\nu_۲$		$\omega_۲$	
	۰	۱	۰	۱
$s_۳$	$s_۳$	$s_۴$	۱	۱
$s_۴$	$s_۴$	$s_۳$	۱	۰

به‌قسمی که برای $i = ۲, ۳, ۴$، $\nu(s_i, x) = s_۱$. (بنابراین، x ماشین M را بدون توجه به حالت آغازی به حالت $s_۱$ می‌برد.)

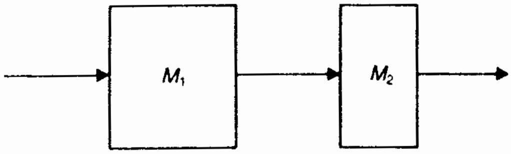
۱۳. نشان دهید که نمی‌توانیم ماشینی متناهی-حالت بسازیم که دقیقاً آن دنباله‌های زبان راکه به‌صورت $A = \{۰^i ۱^j | i, j \in \mathbf{Z}^+, i < j\}$ هستند تشخیص دهد. (الفبا برای A، $\Sigma = \{۰, ۱\}$ است.)

۱۴. با $\mathscr{I} = \mathscr{O} = \{۰, ۱\}$، فرض کنید M ماشین متناهی-حالتی باشد که در جدول ۱۵.۶ داده شده است. در اینجا $s_۰$ حالت شروع است.

فرض کنید $A \subseteq \mathscr{I}^+$ که در آن $x \in A$ اگر و تنها اگر آخرین نماد در $\omega(s_۰, x)$، ۱ باشد. (ممکن است بیش از یک ۱ در رشتهٔ خروجی $\omega(s_۰, x)$ وجود داشته باشد.) ماشینی متناهی-حالت بسازید که در آن، آخرین نماد رشتهٔ خروجی، برای همهٔ $y \in \mathscr{I}^+ - A$ها، ۱ باشد.

۱۵. فرض کنید برای دو ماشین متناهی-حالت $M_۱$ و $M_۲$ که به‌ترتیب در جدولهای ۱۶.۶ و ۱۷.۶ داده شده‌اند، $\mathscr{I} = \mathscr{O} = \{۰, ۱\}$. حالت شروع برای $M_۱$، $s_۰$ است در صورتی که $s_۳$ حالت شروع برای $M_۲$ است.

این ماشینها را به‌صورتی که در شکل ۱۸.۶ نشان داده‌ایم به هم متصل می‌کنیم. در اینجا هر نماد خروجی از $M_۱$، نماد ورودی برای $M_۲$ می‌شود. مثلاً اگر در $M_۱$، ۰ را وارد کنیم، آن‌گاه $\omega_۱(s_۰, ۰) = ۱$ و $\nu_۱(s_۰, ۰) = s_۰$. در نتیجه، $(۱(= \omega_۱(s_۰, ۰))$ را در $M_۲$ وارد می‌کنیم تا $\omega_۲(s_۳, ۱)$ و $\nu_۲(s_۳, ۱) = s_۴$ به‌دست آید.



شکل ۱۸.۶

ماشین $M = (S, \mathscr{I}, \mathscr{O}, \nu, \omega)$ را که معرف این اتصال M_1 و M_2 است به‌صورت زیر می‌سازیم:

$\mathscr{I} = \mathscr{O} = \{0, 1\}$.

$S = S_1 \times S_2$، که در آن S_i مجموعهٔ حالتهای درونی برای M_i، $i = 1, 2$ است.

$\nu : S \times \mathscr{I} \to S$، که در آن، برای $s \in S_1$، $t \in S_2$ و $x \in \mathscr{I}$، داریم

$$\nu((s,t),x) = (\nu_1(s,x), \nu_2(t, \omega_1(s,x)))$$

$\omega : S \times \mathscr{I} \to \mathscr{O}$، که در آن، برای $s \in S_1$، $t \in S_2$، و $x \in \mathscr{I}$، داریم

$$\omega((s,t),x) = \omega_2(t, \omega_1(s,x))$$

الف) برای ماشین M، جدول حالتها را به‌دست آورید.

ب) برای رشتهٔ ورودی ۱۱۰۱، رشتهٔ خروجی را تعیین کنید. هر یک از ماشینهای M_1 و M_2، بعد از پردازش این رشته، در چه حالتی است؟

۱۶. گرچه وقتی با ماشین متناهی‌ـحالت $M = (S, \mathscr{I}, \mathscr{O}, \nu, \omega)$ سروکار داریم نمودار حالتها راحت‌تر از جدول حالتها به‌نظر می‌رسد، ولی وقتی رشته‌های ورودی درازتر می‌شوند و اندازه‌های S، $\mathscr{I}$، $\mathscr{O}$ زیاد می‌شوند، ثابت می‌شود که جدول حالتها، هنگام شبیه‌سازی ماشین به‌وسیلهٔ کامپیوتر، مفید است. صورت بلوکی‌جدول، استفاده از ماتریس یا آرایهٔ دوبعدی را برای ذخیره‌سازی ν و ω القا می‌کند. این مشاهده را برای نوشتن یک برنامه (یا تهیهٔ یک الگوریتم) که ماشین جدول ۱۸.۶ را شبیه‌سازی کند به‌کار برید.

جدول ۱۸.۶

	ν		ω	
	0	1	0	1
s_1	s_2	s_1		0
s_2	s_3	s_1	0	0
s_3	s_3	s_1	1	1

۷

بار دیگر دربارهٔ رابطه‌ها

در فصل ۵ مفهوم رابطه را معرفی و سپس توجه خود را بر انواع خاص رابطه‌هایی به‌نام تابع متمرکز کردیم. با برگشت به رابطه‌ها در این فصل، بر رابطه‌های موجود روی مجموعهٔ A ـــ یعنی بر زیرمجموعه‌های $A \times A$ تأکید خواهیم کرد. در نظریهٔ زبانها و ماشینهای متناهی‌ـحالت فصل ۶، مثالهای زیادی از رابطه‌ها در روی یک مجموعهٔ A به‌دست دادیم که در آنها A معرف مجموعهٔ رشته‌هایی از الفبای مفروض، یا مجموعهٔ حالتهای درونی یک ماشین متناهی‌ـحالت بود. ویژگیهای مختلف رابطه‌ها، همراه با راههای معرفی رابطه‌های متناهی برای کار با کامپیوتر مطرح شده بودند. گرافهای سودار برای معرفی چنین رابطه‌هایی به‌عنوان دومین راه مجدداً ظاهر می‌شوند. سرانجام، بین بسیاری از رابطه‌های ممکن موجود بر مجموعهٔ A، دو نوع از اهمیت خاص برخوردارند: رابطه‌های هم‌ارزی و ترتیبهای جزئی. رابطه‌های هم‌ارزی در بسیاری از زمینه‌های ریاضی ظاهر می‌شوند. در حال حاضر، یک رابطهٔ هم‌ارزی را روی مجموعهٔ حالتهای درونی یک ماشین متناهی‌ـحالت M برای یافتن یک ماشین M_1 به‌کار می‌بریم که حالتهای درونی آن تا حد امکان اندک‌اند، و می‌تواند هر چه را که M انجام می‌دهد، اجرا کند. این شیوه به فرایند مینیمم‌سازی معروف است.

۱.۷ مروری بر رابطه‌ها: ویژگیهای رابطه‌ها

مطلب را با یادآوری برخی مفاهیم که قبلاً بررسی کرده‌ایم شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۷ اگر A و B دو مجموعه باشند، یک رابطه از A به B زیر مجموعه‌ای از $A \times B$ است. زیرمجموعه‌های $A \times A$ را رابطه‌هایی روی A می‌نامند.

مثال ۱.۷ الف) رابطهٔ $\mathscr{R}$ را روی مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ به‌وسیلهٔ $a\mathscr{R}b$، یا $(a,b) \in \mathscr{R}$ تعریف می‌کنیم اگر $a \leq b$. این همان رابطهٔ معمولی «کوچکتر است از یا برابر است با» روی مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ است و می‌توان آن را روی $\mathbf{Q}$ یا $\mathbf{R}$ هم داد، ولی نه روی $\mathbf{C}$.

ب) فرض می‌کنیم $n \in \mathbf{Z}^+$. برای $x, y \in \mathbf{Z}$، رابطهٔ $\mathscr{R}$ به پیمانهٔ n به‌وسیلهٔ $x\mathscr{R}y$ تعریف می‌شود اگر $x - y$ مضربی از n باشد. با $n = ۷$، به‌دست می‌آوریم $۹\mathscr{R}۲$ و $-۳\mathscr{R}۱۱$ و $(۱۴, ۰) \in \mathscr{R}$ امّا $۳ \not\mathscr{R} ۷$. □

مثال ۲.۷ فرض می‌کنیم که Σ الفبایی، با زبان $A \subseteq \Sigma^*$ باشد. برای $x, y \in A$، x پیشوند y است را با $x\mathscr{R}y$ تعریف می‌کنیم. رابطه‌های دیگر را می‌توان با قرار دادن «پسوند» یا «زیر رشته» به‌جای پیشوند روی A تعریف کرد. □

مثال ۳.۷ ماشین متناهی-حالت $M = (S, \mathscr{I}, \mathscr{O}, \nu, \omega)$ را در نظر می‌گیریم.

الف) برای $s_۱, s_۲, \in \mathbf{S}$، اگر برابری $\nu(s_۱, x) = s_۲$ برای xی متعلق به $\mathscr{I}$ برقرار باشد آن را به‌وسیلهٔ $s_۱\mathscr{R}s_۲$ تعریف می‌کنیم. رابطهٔ $\mathscr{R}$ اولین سطح قابلیت حصول را ایجاد می‌کند.

ب) رابطه برای دومین سطح قابلیت حصول را نیز می‌توان برای S ارائه داد. در اینجا $s_۱\mathscr{R}s_۲$ اگر برای $x_۱x_۲$یی متعلق به $\mathscr{I}^۲$، $\nu(s_۱, x_۱x_۲) = s_۲$. در صورت نیاز می‌توان این را برای سطوح بالاتر تعمیم داد. برای رابطهٔ قابلیت حصول کلی، به‌ازای $y \in \mathscr{I}^*$، داریم $\nu(s_۱, y) = s_۲$.

ج) با فرض $s_۱, s_۲ \in S$ رابطهٔ هم‌ارزی در سطح ۱ که آن را با $s_۱\mathrm{E}_۱s_۲$ نشان می‌دهند و «$s_۱$، در سطح ۱ هم‌ارز با $s_۲$ است» می‌خوانند وقتی تعریف می‌شود که برای هر $x \in \mathscr{I}$، $\omega(s_۱, x) = \omega(s_۲, x)$. در نتیجه $s_۱\mathrm{E}_۱s_۲$ نشان می‌دهد که اگر ماشین M با یکی از دو حالت $s_۱$ یا $s_۲$ شروع کند، خروجی برای هر عنصر $\mathscr{I}$ یکی است. این مفهوم را می‌توان به‌حالتهایی که در سطح k هم‌ارزند تعمیم داد، که برای آن می‌نویسیم $s_۱\mathrm{E}_ks_۲$ اگر برای هر $y \in \mathscr{I}^k$، $\omega(s_۱, y) = \omega(s_۲, y)$. در اینجا برای هر رشته در $\mathscr{I}^k$، اگر با $s_۱$ یا $s_۲$ شروع کنیم، یک خروجی به‌دست می‌آید.

اگر برای هر $k \in \mathbf{Z}^+$، دو حالت در سطح k هم‌ارز باشند، آن‌گاه آنها را هم‌ارز می‌نامند. بعدها، در این فصل، این مفهوم را بیشتر بررسی می‌کنیم. □

اینک به بررسی برخی ویژگیهایی که یک رابطه می‌تواند در آنها صدق کند می‌پردازیم.

تعریف ۲.۷ رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی مجموعهٔ A را بازتابی می‌نامند اگر برای هر $x \in A$، $(x,x) \in \mathscr{R}$.

برای بازتابی بودن $\mathscr{R}$، می‌گوییم باید هر عنصر x از مجموعهٔ A با خودش در رابطهٔ $\mathscr{R}$ باشد. همهٔ رابطه‌ها در مثالهای ۱.۷ و ۲.۷ بازتابی‌اند. رابطهٔ قابلیت حصول کلی در مثال ۳.۷ (ب) و همهٔ رابطه‌هایی که در قسمت (ج) آن مثال ذکر شدند نیز بازتابی‌اند. (دربارهٔ رابطه‌های اولین و دومین سطح قابلیت حصول قسمتهای (الف) و (ب)ی مثال ۳.۷ چه چیزی درست نیست؟)

مثال ۴.۷ برای $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، رابطهٔ $\mathscr{R} \subseteq A \times A$ بازتابی خواهد بود اگر

$$\mathscr{R} \supseteq \{(۱,۱), (۲,۲), (۳,۳), (۴,۴)\}$$

بنابراین، $\mathscr{R}_۱ = \{(۱,۱), (۲,۲), (۳,۳)\}$ رابطهٔ بازتابی روی A نیست، در حالی‌که $\mathscr{R}_۲ = \{(x,y) | x, y \in A, x \leq y\}$ روی A بازتابی است. □

مثال ۵.۷ مجموعهٔ متناهی A با $|A| = n$ داده شده‌است. داریم $|A \times A| = n^۲$، پس $۲^{n^۲}$ رابطه روی A وجود دارند. چند تا از اینها بازتابی‌اند؟

اگر $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$، رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی A بازتابی است اگر

$$\{(a_i, a_i) | ۱ \leq i \leq n\} \subseteq \mathscr{R}$$

با در نظرگرفتن $n^۲ - n$ جفت مرتب در $A \times A$ (آنهایی که به‌صورت (a_i, a_j) هستند که $i \neq j$ برای $۱ \leq i, j \leq n$) وقتی یک رابطهٔ بازتابی $\mathscr{R}$ را روی A می‌سازیم، چه هر یک از این جفتهای مرتب را در آن بگنجانیم یا نگنجانیم، در هر حال بنابر اصل ضرب $۲^{(n^۲-n)}$ رابطهٔ بازتابی روی A خواهیم داشت. □

تعریف ۳.۷ رابطهٔ $\mathscr{R}$ را روی مجموعهٔ A متقارن می‌نامند اگر برای هر $x, y \in A$

$$(x,y) \in \mathscr{R} \Rightarrow (y,x) \in \mathscr{R}$$

مثال ۶.۷ با $A = \{۱, ۲, ۳\}$، داریم

الف) $\mathscr{R}_۱ = \{(۱,۲), (۲,۱), (۱,۳), (۳,۱)\}$ رابطه‌ای متقارن روی A است ولی بازتابی نیست.

ب) $\mathscr{R}_۲ = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۲,۳)\}$ رابطه‌ای بازتابی روی A است ولی متقارن نیست.

ج) $\mathscr{R}_۳ = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$ و $\mathscr{R}_۴ = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۲,۳),(۳,۲)\}$ رابطه‌هایی بازتابی و متقارن روی A هستند.

د) $\mathscr{R}_۵ = \{(۱,۱),(۲,۳),(۳,۳)\}$، رابطه‌ای روی A است که نه بازتابی است و نه متقارن.

□

برای شمارش رابطه‌های متقارن روی $A=\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$، $A\times A$ را به‌صورت $A_۱\cup A_۲$ می‌نویسیم که در آن $A_۱=\{(a_i, a_i)|۱ \leq i \leq n\}$ و $A_۲=\{(a_i, a_j)|۱ \leq i, j \leq n, i \neq j\}$ به‌قسمی که هر جفت مرتب در $A \times A$ دقیقاً در یکی از دو مجموعهٔ $A_۱$ و $A_۲$ باشد. برای $A_۲$، $|A_۲| = |A \times A| - |A_۱| = n^۲ - n = n(n-۱)$ عددی زوج است. مجموعهٔ $A_۲$، شامل $(۱/۲)(n^۲ - n)$ زیرمجموعهٔ S_{ij} به‌صورت $\{(a_i, a_j), (a_j, a_i)\}$ است که $۱ \leq i < j \leq n$. در ساختن رابطهٔ متقارن $\mathscr{R}$ روی A، برای هر جفت مرتب در $A_۱$، دارای انتخاب معمولی گنجاندن یا نگنجاندن هستیم. برای هر یک از $(۱/۲)(n^۲ - n)$ زیرمجموعهٔ S_{ij} $(۱ \leq i < j \leq n)$ در $A_۲$، همین دو انتخاب را داریم. پس بنابر اصل ضرب، دارای $۲^n \cdot ۲^{(۱/۲)(n^۲-n)} = ۲^{(۱/۲)(n^۲+n)}$ رابطهٔ متقارن روی A هستیم.

در شمارش آن رابطه‌هایی روی A که هم بازتابی و هم متقارن‌اند، تنها یک انتخاب برای هر جفت مرتب در $A_۱$ داریم. لذا $۲^{(۱/۲)(n^۲-n)}$ رابطه روی A داریم که هم متقارن و هم بازتابی‌اند.

تعریف ۴.۷ برای مجموعهٔ A، رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی A را ترایا می‌نامند اگر،

$$(x,y),(y,z) \in \mathscr{R} \Rightarrow (x,z) \in \mathscr{R}$$

(پس اگر x «در رابطه است با» y، و y «در رابطه است با» z، می‌خواهیم x «در رابطه با» z باشد که y نقش «واسطه» را دارد.)

مثال ۷.۷ همهٔ رابطه‌های مثالهای ۱.۷ و ۲.۷، همچنین رابطه‌های مثال ۳.۷ (ج) ترایا هستند. □

مثال ۸.۷ رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی مجموعهٔ $\mathbf{Z}^+$ را به‌وسیلهٔ $a\mathscr{R}b$ تعریف می‌کنیم اگر عدد a عدد b را بشمارد، یعنی به‌ازای cیی متعلق به $\mathbf{Z}^+$، $b = ca$. اینک اگر $x\mathscr{R}y$ و $y\mathscr{R}z$، آیا $x\mathscr{R}z$ است؟ برای sی متعلق به $\mathbf{Z}^+$، $x\mathscr{R}y \Rightarrow y = sx$؛ و برای tیی متعلق به $\mathbf{Z}^+$، $y\mathscr{R}z \Rightarrow z = ty$. در نتیجه، برای $ts \in \mathbf{Z}^+$، $z = ty = t(sx) = (ts)x$، لذا $x\mathscr{R}z$ و $\mathscr{R}$ ترایاست. به‌علاوه، $\mathscr{R}$ بازتابی است ولی متقارن نیست، زیرا مثلاً $۲\mathscr{R}۶$ ولی $۶ \not\mathscr{R} ۲$. □

مثال ۹.۷ اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، آن‌گاه $\mathscr{R}_۱ = \{(۱, ۱), (۲, ۳), (۳, ۴), (۲, ۴)\}$ رابطه‌ای ترایا روی A است، در حالی‌که $\mathscr{R}_۲ = \{(۱, ۳), (۳, ۲)\}$ ترایا نیست، زیرا $(۱, ۳), (۳, ۲) \in \mathscr{R}_۲$، امّا $(۱, ۲) \notin \mathscr{R}_۲$. □

در این مرحله احتمالاً خواننده آمادهٔ شمارش تعداد رابطه‌های ترایا روی یک مجموعهٔ متناهی است. این کار دشوارتر از استدلالهای شمارشی قبلی است، امّا بعداً در جای دیگر این فصل، نکته‌های ضروری برای شمارش تعداد رابطه‌های $\mathscr{R}$ روی یک مجموعهٔ متناهی را خواهیم داد، که در آنها $\mathscr{R}$ بازتابی، متقارن، و ترایا باشد.

آخرین ویژگی رابطه‌ها را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۵.۷ با فرض داشتن رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی مجموعهٔ A، $\mathscr{R}$ را پاد متقارن می‌نامند اگر $(a\mathscr{R}b \text{ و } b\mathscr{R}a) \Rightarrow a = b$. (در اینجا تنها راهی که می‌توانیم a را «در رابطه با» b و b را «در رابطه با» a بگیریم این است که a و b یک عنصر واحد از A باشند.)

مثال ۱۰.۷ برای مجموعهٔ عام مفروض $\mathscr{U}$، رابطهٔ $\mathscr{R}$ بر $\mathscr{P}(\mathscr{U})$ را به‌وسیلهٔ $(A, B) \in \mathscr{R}$ تعریف می‌کنند اگر برای $A, B \subseteq \mathscr{U}$، $A \subseteq B$. پس $\mathscr{R}$ رابطهٔ زیرمجموعه‌ای فصل ۳ است و اگر $A\mathscr{R}B$ و $B\mathscr{R}A$، آن‌گاه داریم $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ که نتیجه می‌دهد $A = B$. در نتیجه، این رابطه‌ای است پادمتقارن و همچنین بازتابی و ترایا، اما متقارن نیست. □

قبل از این اندیشهٔ انحرافی که «بی‌تقارنی» مترادف با «پادمتقارن» تلقّی شود مطلب زیر را در نظر می‌گیریم.

مثال ۱۱.۷ برای $A = \{۱, ۲, ۳\}$، رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی A که به‌وسیلهٔ $\mathscr{R} = \{(۱, ۲), (۲, ۱), (۲, ۳)\}$ داده شده است متقارن نیست زیرا $(۳, ۲) \notin \mathscr{R}$، و پادمتقارن نیز نیست، زیرا $(۱, ۲), (۲, ۱) \in \mathscr{R}$، امّا $۲ \neq ۱$. رابطهٔ $\mathscr{R}_۱ = \{(۱, ۱), (۲, ۲)\}$ هم‌متقارن است و هم پادمتقارن.

چند رابطهٔ پادمتقارن روی A وجود دارند؟ با نوشتن

$$A \times A = \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳)\} \cup \{(۱, ۲), (۲, ۱), (۱, ۳), (۳, ۱), (۲, ۳), (۳, ۲)\}$$

وقتی سعی در ساختن یک رابطهٔ پادمتقارن $\mathscr{R}$ روی A داریم دو مشاهده انجام می‌دهیم.

۱. هر عنصر $(x, x) \in A \times A$ را می‌توانیم بی آنکه نگران پادمتقارن بودن یا نبودن $\mathscr{R}$ باشیم در آن بگنجانیم یا نگنجانیم.

۲. برای هر عنصر به‌صورت (x, y)، $x \neq y$، باید هم (x, y) و هم (y, x) را در نظر بگیریم و تذکر می‌دهیم که برای اینکه $\mathscr{R}$ پادمتقارن باقی بماند سه راه داریم:

(الف) (x,y) را در $\mathscr{R}$ قرار دهیم؛ (ب) (y,x) را در $\mathscr{R}$ قرار دهیم؛ یا (ج) نه (x,y) را در $\mathscr{R}$ قرار دهیم و نه (y,x) را. (اگر هم (x,y) و هم (y,x)، را در $\mathscr{R}$ قرار دهیم چه اتفاقی می‌افتد؟)

پس بنابر اصل ضرب، تعداد رابطه‌های پادمتقارن روی A برابر است با

$$(۲^۳)(۳^۳)=(۲^۳)(۳^{(۳^۲-۳)/۲})$$

اگر $|A| = n > ۰$، تعداد $(۲^n)(۳^{(n^۲-n)/۲})$ رابطهٔ پادمتقارن روی A وجود دارند. □

برای مثال بعدی به مفهوم غلبهٔ تابعی، که ابتدا در بخش ۷.۵ تعریف شد، برمی‌گردیم.

مثال ۱۲.۷ فرض می‌کنیم $\mathscr{F}$ معرف مجموعهٔ همهٔ تابعهای با حوزهٔ $\mathbf{Z}^+$ و حوزهٔ تمام $\mathbf{R}$ باشد؛ یعنی $\mathscr{F} = \{f | f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}\}$. برای $f, g \in \mathscr{F}$، رابطهٔ $\mathscr{R}$ را روی $\mathscr{F}$ به‌وسیلهٔ $f\mathscr{R}g$ تعریف می‌کنیم اگر f مغلوب g (یا $f \in O(g)$) باشد. در این صورت $\mathscr{R}$ بازتابی و ترایاست.
اگر $f, g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ به‌وسیلهٔ $f(n) = n$ و $g(n) = n + ۵$ تعریف شود، آن‌گاه $f\mathscr{R}g$ و $g\mathscr{R}f$، ولی، $f \neq g$ پس $\mathscr{R}$ پادمتقارن نیست. به‌علاوه، اگر $h : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ به‌وسیلهٔ $h(n) = n^۲$ داده شود، آن‌گاه $(f,h), (g,h) \in \mathscr{R}$، ولی نه (h,f) در $\mathscr{R}$ است و نه (h,g). در نتیجه، رابطهٔ $\mathscr{R}$ متقارن هم نیست. □

تا اینجا، چهار ویژگی عمده‌ای را دیدیم که در مطالعهٔ رابطه‌ها پیش می‌آیند. قبل از خاتمه دادن به این بخش، دو مفهوم دیگر را تعریف می‌کنیم که هر یک متضمن سه تا از این چهار ویژگی است.

تعریف ۶.۷ رابطهٔ $\mathscr{R}$ را بر مجموعهٔ A، ترتیب جزئی یا جزئی مرتب می‌نامند اگر $\mathscr{R}$ بازتابی، پادمتقارن و ترایا باشد.

مثال ۱۳.۷ رابطهٔ مثال ۱.۷ (الف)، ترتیب جزئی است، امّا رابطهٔ قسمت (ب) ترتیب جزئی نیست. زیرا پادمتقارن نیست. همهٔ رابطه‌های مثال ۲.۷، همچنین رابطهٔ زیرمجموعه‌ای مثال ۱۰.۷، ترتیب جزئی‌اند. □

تعریف ۷.۷ هر رابطهٔ هم‌ارزی $\mathscr{R}$ روی مجموعهٔ A، رابطه‌ای است بازتابی، متقارن و ترایا.

مثال ۱۴.۷ رابطهٔ مثال ۱.۷ (ب) و همهٔ رابطه‌های مثال ۳.۷ (ج) رابطه‌های هم‌ارزی‌اند.

برای هر مجموعهٔ A، $A \times A$ رابطهٔ هم‌ارزی روی A است، و اگر $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$، آن‌گاه $\mathscr{R} = \{(a_i, a_i) | ۱ \leq i \leq n\}$ کوچکترین رابطهٔ هم‌ارزی روی A است.

اگر $\mathscr{R}$ رابطه‌ای روی مجموعهٔ A باشد، آن‌گاه $\mathscr{R}$ هم رابطهٔ هم‌ارزی و هم ترتیب جزئی روی A است اگر و تنها اگر $\mathscr{R}$ رابطهٔ برابری روی A باشد. $\square$

تمرینهای ۱.۷

۱. اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، مثالی از رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی A ارائه دهید که

الف) بازتابی و متقارن باشد، ولی ترایا نباشد.

ب) بازتابی و ترایا باشد، ولی متقارن نباشد.

ج) متقارن و ترایا باشد ولی بازتابی نباشد.

۲. برای رابطهٔ (ب) در مثال ۱.۷، پنج مقدار x بیابید که برای آنها $(x, ۵) \in \mathscr{R}$.

۳. برای رابطهٔ $\mathscr{R}$ در مثال ۱۲.۷، فرض کنید $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ که برای آن $f(n) = n$.

الف) سه عنصر $f_۱, f_۲, f_۳ \in \mathscr{F}$ بیابید به‌قسمی‌که $f_i \mathscr{R} f$ و $f \mathscr{R} f_i$ به‌ازای هر $۱ \leq i \leq ۳$.

ب) سه عنصر $g_۱, g_۲, g_۳ \in \mathscr{F}$ بیابید به‌قسمی که برای همهٔ مقادیر $۱ \leq i \leq ۳$، $g_i \mathscr{R} f$ ولی $f \not\mathscr{R} g_i$.

۴. **الف)** تعریفهای ویژگیهای بازتابی، تقارن، ترایایی و پادتقارنی رابطهٔ $\mathscr{R}$ (روی مجموعهٔ A) را با استفاده از سورها بیان کنید.

ب) با استفاده از نتایج قسمت (الف) مشخص کنید که چه وقت $\mathscr{R}$ (روی مجموعهٔ A) (i) بازتابی نیست؛ (ii) متقارن نیست؛ (iii) ترایا نیست؛ (iv) پادمتقارن نیست.

۵. برای هر یک از رابطه‌های زیر، تعیین کنید که این رابطه بازتابی، متقارن، پادمتقارن، یا ترایا هست یا نیست.

الف) $\mathscr{R} \subseteq \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$ که در آن $a\mathscr{R}b$، اگر $a|b$ (بخوانید a می‌شمارد b را، همان‌گونه که در فصل ۴ تعریف شده‌است).

ب) $\mathscr{R}$ این رابطه روی $\mathbf{Z}$ است که $a\mathscr{R}b$ اگر $a|b$.

ج) برای مجموعهٔ عام مفروض $\mathscr{U}$ و $C \subseteq \mathscr{U}$، $\mathscr{R}$ را روی $\mathscr{P}(\mathscr{U})$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: برای $A, B \subseteq \mathscr{U}$ داریم $A\mathscr{R}B$ اگر $A \cap C = B \cap C$.

د) روی مجموعهٔ A متشکل از همهٔ خطوط $\mathbf{R}^۲$، رابطهٔ $\mathscr{R}$ را برای دو خط $\ell_۱$، $\ell_۲$ به‌وسیلهٔ $\ell_۱ \mathscr{R} \ell_۲$ تعریف می‌کنیم اگر $\ell_۱$ بر $\ell_۲$ عمود باشد.

ه) $\mathscr{R}$ رابطه‌ای روی $\mathbf{Z}$ است که برای آن $x\mathscr{R}y$ اگر $x + y$ زوج (فرد) باشد.

و) $\mathscr{R}$ رابطه‌ای روی $\mathbf{Z}$ است که درآن $x\mathscr{R}y$ اگر $x - y$ زوج (فرد) باشد.

ز) $\mathscr{R}$ رابطه‌ای روی $\mathbf{Z}^+$ است که در آن $a\mathscr{R}b$ اگر $(a, b) = ۱$، یعنی اگر a و b نسبت به هم اول باشند.

ح) فرض کنید T مجموعهٔ همهٔ مثلثهای $\mathbf{R}^2$ باشد. $\mathscr{R}$ را روی T به‌وسیلهٔ $t_1\mathscr{R}t_2$ تعریف می‌کنیم اگر t_1 و t_2 یک زاویهٔ مساوی داشته باشند.

ط) $\mathscr{R}$ رابطه‌ای روی $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ است که در آن $(a,b)\mathscr{R}(c,d)$ اگر $a\le c$. (توجه: $\mathscr{R}\subseteq(\mathbf{Z}\times\mathbf{Z})\times(\mathbf{Z}\times\mathbf{Z})$).

۶. در تمرین ۵ کدام رابطه‌ها ترتیب جزئی‌اند؟ کدامها رابطهٔ هم‌ارزی‌اند؟

۷. **الف)** فرض کنید $\mathscr{R}_1$ و $\mathscr{R}_2$ رابطه‌هایی روی مجموعهٔ A باشند. درستی استلزام زیر را ثابت یا رد کنید

$$\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2 \text{بازتابی} \Rightarrow \mathscr{R}_1\cap\mathscr{R}_2 \text{بازتابی}$$

ب) وقتی به‌جای هر مورد «بازتابی»، قرار دهیم (i) متقارن؛ (ii) پادمتقارن؛ (iii) ترایا، به قسمت (الف) پاسخ دهید.

۸. با قراردادن $\cup$ به‌جای هر مورد $\cap$، به تمرین ۷ پاسخ دهید.

۹. برای هر یک از گزاره‌های زیر دربارهٔ رابطه‌های روی مجموعهٔ A، که برای آنها $|A|=n$، تعیین کنید که آیا آن گزاره راست است یا دروغ. اگر دروغ است، نقیضی ارائه دهید.

الف) اگر $\mathscr{R}$ رابطهٔ بازتابی روی A باشد، آن‌گاه $|\mathscr{R}|\ge n$.

ب) اگر $\mathscr{R}$ رابطه‌ای روی A باشد و $|\mathscr{R}|\ge n$، آن‌گاه $\mathscr{R}$ بازتابی است.

ج) اگر $\mathscr{R}_1$ و $\mathscr{R}_2$ رابطه‌هایی روی A باشند و $\mathscr{R}_2\supseteq\mathscr{R}_1$، آن‌گاه

$$\mathscr{R}_1 \text{بازتابی (متقارن، پادمتقارن، ترایا)} \Rightarrow \mathscr{R}_2 \text{بازتابی (متقارن، پادمتقارن، ترایا)}$$

د) اگر $\mathscr{R}_1$ و $\mathscr{R}_2$ رابطه‌هایی روی A باشند و $\mathscr{R}_2\supseteq\mathscr{R}_1$، آن‌گاه

$$\mathscr{R}_2 \text{بازتابی (متقارن، پادمتقارن، ترایا)} \Rightarrow \mathscr{R}_1 \text{بازتابی (متقارن، پادمتقارن، ترایا)}$$

ه) اگر $\mathscr{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A باشد، آن‌گاه $n\le|\mathscr{R}|\le n^2$.

۱۰. اگر $A=\{w,x,y,z\}$، مطلوب است تعداد رابطه‌هایی روی A که (الف) بازتابی‌اند؛ (ب) متقارن‌اند؛ (ج) بازتابی و متقارن‌اند؛ (د) بازتابی و شامل (x,y)اند؛ (ه) متقارن و شامل (x,y)اند؛ (و) پادمتقارن‌اند؛ (ز) پادمتقارن و شامل (x,y)اند؛ (ز) متقارن و پادمتقارن‌اند؛ (ح) بازتابی و متقارن، و پادمتقارن‌اند.

۱۱. چه ایرادی در برهان زیر هست؟

فرض کنید A یک مجموعه و $\mathscr{R}$ رابطه‌ای روی A باشد. اگر $\mathscr{R}$ متقارن و ترایا باشد، آن‌گاه $\mathscr{R}$ بازتابی است.

برهان: فرض کنید $(x,y) \in \mathscr{R}$. بنابر ویژگی تقارن $(y,x) \in \mathscr{R}$. در این صورت با

$$(x,y),(y,x) \in \mathscr{R}$$

بنابر ویژگی ترایایی نتیجه می‌شود که $(x,x) \in \mathscr{R}$. در نتیجه، $\mathscr{R}$ بازتابی است.

۱۲. فرض کنید A مجموعه‌ای است با $|A| = n$، و $\mathscr{R}$ رابطه‌ای است پادمتقارن روی A. ماکسیمم مقدار $|\mathscr{R}|$ چقدر است؟ چند رابطهٔ پادمتقارن می‌تواند به این اندازه باشد؟

۱۳. فرض کنید A مجموعه‌ای است با $|A| = n$، و $\mathscr{R}$ رابطه‌ای است هم‌ارزی روی A با $|\mathscr{R}| = r$. چرا $r - n$ همیشه زوج است؟

۱۴. رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی مجموعهٔ A را نابازتابی می‌نامند اگر برای $a \in A$، $(a,a) \notin \mathscr{R}$.

الف) مثالی از رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی $\mathbf{Z}$ بیاورید که در آن $\mathscr{R}$ نابازتابی و ترایا باشد ولی متقارن نباشد.

ب) فرض کنید $\mathscr{R}$ رابطه‌ای است ناتهی روی مجموعهٔ A. ثابت کنید که اگر $\mathscr{R}$ در دو تا از ویژگیهای نابازتابی، تقارنی و ترایایی صدق کند، نمی‌تواند در سومین ویژگی صادق باشد.

ج) اگر $\mathscr{R}_1$ و $\mathscr{R}_2$ هر دو روی مجموعهٔ A نابازتابی باشند دربارهٔ رابطه‌های $\mathscr{R}_1 \cap \mathscr{R}_2$ و $\mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2$ روی A چه می‌توان گفت؟

د) اگر $|A| = n \geq 1$، چند رابطهٔ متفاوت روی A نابازتابی‌اند؟ چند تا از آنها نه بازتابی‌اند و نه نابازتابی؟

۲.۷ شناسایی کامپیوتری: ماتریسهای صفر-یک و گرافهای سودار

چون علاقهٔ ما در رابطه‌ها متمرکز بر رابطه‌ها در مجموعه‌های متناهی‌است، به راههای نمایش این رابطه‌ها علاقه داریم تا بتوانیم ویژگیهای بخش ۱.۷ را شناسایی کنیم. به این دلیل اینک ابزار لازم برای این کار را تهیه می‌کنیم: ترکیب رابطه‌ها، ماتریسهای صفر-یک، و گرافهای سودار.

به‌روشی مشابه ترکیب تابعها، رابطه‌ها را می‌توان در موارد زیر ترکیب کرد.

تعریف ۸.۷ اگر A، B، و C مجموعه‌هایی با روابط $\mathscr{R}_1 \subseteq A \times B$ و $\mathscr{R}_2 \subseteq B \times C$ باشند، آن‌گاه رابطهٔ مرکب $\mathscr{R}_1 \circ \mathscr{R}_2$ رابطه‌ای از A به C است، با فرض $x \in A$ و $z \in C$، که به‌وسیلهٔ

$$\mathscr{R}_1 \circ \mathscr{R}_2 \doteq$$
$$\{(x,z) | x \in A, z \in C, (y,z) \in \mathscr{R}_2 \text{ و } (x,y) \in \mathscr{R}_1 \text{ با } \text{وجود دارد} B \text{ ی متعلق به } y\}$$

تعریف می‌شود.

مراقب باشید! ترتیب نوشتن ترکیب دو رابطه، مخالف ترتیب نوشتن ترکیب دو تابع است. به‌زودی علّت آن را خواهیم دید.

مثال ۱۵.۷ فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، $B=\{w,x,y,z\}$، و $C=\{۵,۶,۷\}$. اگر $\mathscr{R}_۱=\{(۱,x),(۲,x),(۳,y),(۳,z)\}$ رابطه‌ای از A به B و $\mathscr{R}_۲=\{(w,۵),(x,۶)\}$ رابطه‌ای از B به C باشد، آن‌گاه $\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲=\{(۱,۶),(۲,۶)\}$، و این رابطه‌ای از A به C است. اگر $\mathscr{R}_۳=\{(w,۵),(w,۶)\}$ رابطهٔ دیگری از B به C باشد، آن‌گاه $\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۳=\emptyset$. □

مثال ۱۶.۷ فرض کنید A مجموعهٔ کارکنان یک مرکز کامپیوتر، B معرف مجموعهٔ زبانهای برنامه‌ریزی سطح بالا، و C فهرست طرحهای $\{p_۱,p_۲,\ldots,p_۸\}$ باشد که مدیران باید با استفاده از افراد A، کار این طرحها را انجام دهند. رابطهٔ $\mathscr{R}_۱\subseteq A\times B$ را در نظر می‌گیریم که در آن جفت مرتبی به‌صورت (پاسکال و L) نشان می‌دهد که کارمند L، در زبان پاسکال (و احتمالاً زبانهای دیگر برنامه‌ریزی) ورزیدگی دارد. رابطهٔ $\mathscr{R}_۲\subseteq B\times C$ متشکل از جفتهای مرتبی به‌صورت ($p_۲$, پاسکال) است که در آن، زبان پاسکال زبان اصلی لازم برای هر فردی است که روی طرح $p_۲$ کار می‌کند. در رابطهٔ مرکب $\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲$ به‌دست می‌آوریم $(\mathrm{L},p_۲)$. اگر هیچ جفت مرتب دیگری در $\mathscr{R}_۲$ دوّمین مؤلفه‌اش $p_۲$ نباشد، می‌دانیم که اختصاص دادن L به $p_۲$ تنها بر اساس ورزیدگی او در زبان پاسکال است. (در اینجا $\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲$ برای فرایند جورکردن کارکنان و طرحها بر پایهٔ آگاهی آنان در زبانهای برنامه‌ریزی خاص به‌کار رفته است.) □

مشابه با قانون شرکت‌پذیری برای ترکیب تابعها، قضیهٔ زیر را برای رابطه‌ها به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۱.۷ فرض کنید A، B، C، و D مجموعه‌هایی با $\mathscr{R}_۱\subseteq A\times B$، $\mathscr{R}_۲\subseteq B\times C$، و $\mathscr{R}_۳\subseteq C\times D$ باشند. در این‌صورت

$$\mathscr{R}_۱\circ(\mathscr{R}_۲\circ\mathscr{R}_۳)=(\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲)\circ\mathscr{R}_۳$$

برهان چون هم $(\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲)\circ\mathscr{R}_۳$ و هم $\mathscr{R}_۱\circ(\mathscr{R}_۲\circ\mathscr{R}_۳)$ هر دو رابطه‌هایی از A به D هستند، دلیلی برای قبول برابری آنها وجود دارد. اگر $(a,d)\in\mathscr{R}_۱\circ(\mathscr{R}_۲\circ\mathscr{R}_۳)$، آن‌گاه یک عنصر $b\in B$ با $(a,b)\in\mathscr{R}_۱$ و $(b,d)\in(\mathscr{R}_۲\circ\mathscr{R}_۳)$ وجود دارد. همچنین $(b,d)\in(\mathscr{R}_۲\circ\mathscr{R}_۳)\Rightarrow(b,c)\in\mathscr{R}_۲$، و برای مقداری از c متعلق به C، $(c,d)\in\mathscr{R}_۳$. در این‌صورت، $(a,b)\in\mathscr{R}_۱$ و

$$(b,c)\in\mathscr{R}_۲\Rightarrow(a,c)\in(\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲)$$

سرانجام، $(a,c)\in\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲$ و $(c,d)\in\mathscr{R}_۳\Rightarrow(a,d)\in(\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲)\circ\mathscr{R}_۳$، و

$$\mathscr{R}_۱\circ(\mathscr{R}_۲\circ\mathscr{R}_۳)\subseteq(\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲)\circ\mathscr{R}_۳$$

شمول عکس با استدلالی مشابه ثابت می‌شود. ■

به‌عنوان نتیجه‌ای از این قضیه، وقتی برای هر یک از رابطه‌های قضیهٔ ۱.۷ می‌نویسیم $\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲\circ\mathscr{R}_۳$، ابهامی به‌وجود نمی‌آید. به‌علاوه حالا می‌توانیم توانهای رابطهٔ $\mathscr{R}$ را روی یک مجموعه تعریف کنیم.

تعریف ۹.۷ مجموعهٔ A و رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی آن داده شده‌است. توانهای $\mathscr{R}$ را به‌صورت بازگشتی به‌وسیلهٔ (الف) $\mathscr{R}^۱=\mathscr{R}$؛ (ب) برای $n\in\mathbf{Z}^+$، $\mathscr{R}^{n+۱}=\mathscr{R}\circ\mathscr{R}^n$ تعریف می‌کنیم.

توجه کنید که برای $n\in\mathbf{Z}^+$، $\mathscr{R}^n$ رابطه‌ای روی A است.

مثال ۱۷.۷ اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $\mathscr{R}=\{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۴),(۳,۲)\}$، آن‌گاه $\mathscr{R}^۲=\{(۱,۴),(۱,۲),(۳,۴)\}$، $\mathscr{R}^۳=\{(۱,۴)\}$، و برای $n\geq ۴$، $\mathscr{R}^n=\emptyset$. □

وقتی مجموعهٔ A و رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی A بزرگتر می‌شوند، محاسبات، نظیر محاسبات مثال ۱۷.۷ خسته‌کننده خواهند شد. باید راهی برای جلوگیری از این خستگی پیدا کنیم. ابزاری که نیاز داریم کامپیوتر است، و در عین حال باید بتوانیم راهی بیابیم که دربارهٔ مجموعهٔ A و رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی A به ماشین اطلاع لازم را بدهیم.

تعریف ۱۰.۷ ماتریس $m\times n$ صفر-یک $E=(e_{ij})_{m\times n}$ آرایه‌ای مستطیلی از اعدادی است که در m سطر و n ستون آرایش یافته‌اند و در آن هر e_{ij}، $۱\leq i\leq m$، $۱\leq j\leq n$، درایهٔ iامین سطر و jامین ستون E را نشان می‌دهد، و هر درایه‌ای یا ۰ است یا ۱. (همچنین می‌توانیم برای نشان دادن این نوع ماتریس، بنویسیم ماتریس $(۰,۱)$.)

مثال ۱۸.۷ ماتریس $(۰,۱)$

$$E=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

ماتریس $(۰,۱)$ از مرتبهٔ ۳×۴ است که در آن مثلاً $e_{۱۱}=۱$، $e_{۲۳}=۰$، و $e_{۳۱}=۱$. □

در کار با این ماتریسها اعمال متعارف جمع و ضرب ماتریسی را با این قید که $۱+۱=۱$، به‌کار می‌بریم. (بنابراین جمع را جمع بولی می‌نامیم.)

مثال ۱۹.۷ مجموعه‌های A، B، و C و رابطه‌های $\mathscr{R}_۱$ و $\mathscr{R}_۲$ مثال ۱۵.۷ را در نظر می‌گیریم. با تثبیت ترتیبهای A، B، و C به‌صورت همان مثال، ماتریسهای رابطه‌ای را برای $\mathscr{R}_۱$ و $\mathscr{R}_۲$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$M(\mathscr{R}_۱)=\begin{array}{c}\\ (۱)\\ (۲)\\ (۳)\\ (۴)\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}(w)&(x)&(y)&(z)\end{array}\\ \begin{bmatrix}۰&۱&۰&۰\\ ۰&۱&۰&۰\\ ۰&۰&۱&۱\\ ۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}\end{array},\quad M(\mathscr{R}_۲)=\begin{array}{c}\\ (w)\\ (x)\\ (y)\\ (z)\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}(۵)&(۶)&(۷)\end{array}\\ \begin{bmatrix}۱&۰&۰\\ ۰&۱&۰\\ ۰&۰&۰\\ ۰&۰&۰\end{bmatrix}\end{array}$$

در تعیین $M(\mathscr{R}_۱)$، با رابطه‌ای از A به B سر و کار داشتیم، لذا عنصرهای A برای مشخص کردن سطرهای $M(\mathscr{R}_۱)$ به‌کار رفته‌اند و عنصرهای B ستونها را معین می‌کنند. در این‌صورت، برای اینکه مثلاً نشان دهیم $(۲, x) \in \mathscr{R}_۱$، در سطری که با (۲) و ستونی که با (x) مشخص شده‌است عدد ۱ را قرار می‌دهیم. در این ماتریس، هر ۰ معرف یک جفت مرتب در $A \times B$ است که از $\mathscr{R}_۱$ حذف شده‌است. مثلاً، چون $(۳, w) \notin \mathscr{R}_۱$، برای درایهٔ سطر (۳) و ستون (w)ی ماتریس $M(\mathscr{R}_۱)$ یک ۰ آمده است. همین فرایند برای به‌دست آوردن $M(\mathscr{R}_۲)$ به‌کار می‌رود.

از ضرب این ماتریسها به‌دست می‌آوریم که

$$M(\mathscr{R}_۱).M(\mathscr{R}_۲)=\begin{bmatrix}۰&۱&۰&۰\\ ۰&۱&۰&۰\\ ۰&۰&۱&۱\\ ۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\ ۰&۱&۰\\ ۰&۰&۰\\ ۰&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۱&۰\\ ۰&۱&۰\\ ۰&۰&۰\\ ۰&۰&۰\end{bmatrix}=M(\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲)$$

و به‌طور کلی داریم: اگر $\mathscr{R}_۱$ رابطه‌ای از A به B و $\mathscr{R}_۲$ رابطه‌ای از B به C باشد، آن‌گاه $M(\mathscr{R}_۱).M(\mathscr{R}_۲) = M(\mathscr{R}_۱ \circ \mathscr{R}_۲)$. یعنی حاصلضرب ماتریسهای رابطه‌ای برای $\mathscr{R}_۱$ و $\mathscr{R}_۲$، به‌همان ترتیب، برابر ماتریس رابطه‌ای رابطهٔ مرکب $\mathscr{R}_۱ \circ \mathscr{R}_۲$ است. (به این دلیل است که ترکیب دو رابطه، در تعریف ۸.۷ به‌ترتیبی خاص نوشته شده‌است.) □

از خواننده می‌خواهیم که نتیجهٔ کلی مثال ۱۹.۷، همراه با نتایجی از مثالی بعدی ما را در تمرینهای ۹ و ۱۰ انتهای این بخش ثابت کند.

ویژگیهای دیگر ماتریسهای رابطه‌ای در مثال زیر آمده‌اند.

مثال ۲۰.۷ فرض کنید نظیر مثال ۱۷.۷، $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و

$$\mathscr{R} = \{(۱, ۲), (۱, ۳), (۲, ۴), (۳, ۲)\}$$

با ثابت نگهداشتن ترتیب عنصرهای A، ماتریس رابطه‌ای برای $\mathscr{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: $M(\mathscr{R})$ ماتریس $(\circ, ۱)$ از مرتبهٔ ۴×۴ است که درایه‌هایش، m_{ij}، $۱ \leq i, j \leq ۴$، به‌صورت زیرند:

$$m_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } (i,j) \in \mathscr{R} \\ \circ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

در این حالت، به‌دست می‌آوریم که

$$M(\mathscr{R}) = \begin{bmatrix} \circ & ۱ & ۱ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & ۱ \\ \circ & ۱ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

امّا چگونه می‌توان این را به‌کار برد؟ اگر با استفاده از قرارداد $۱ = ۱ + ۱$، $(M(\mathscr{R}))^۲$ را حساب کنیم، به‌دست می‌آوریم که

$$(M(\mathscr{R}))^۲ = \begin{bmatrix} \circ & ۱ & \circ & ۱ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & ۱ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

که اتفاقاً ماتریس رابطه‌ای برای $\mathscr{R} \circ \mathscr{R} = \mathscr{R}^۲$ است (مثال ۱۷.۷ را ببینید). به‌علاوه

$$(M(\mathscr{R}))^۴ = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

ماتریس رابطه‌ای برای $\mathscr{R}^۴$ برابر $\emptyset$ است. □

آنچه که در اینجا پیدا شده به‌وضعیت کلی منتقل می‌شود. اینک به‌ذکر نتایجی دربارهٔ ماتریسهای

رابطه‌ای و استفاده از آنها در مطالعهٔ رابطه‌ها می‌پردازیم.

فرض کنید A مجموعه‌ای با $|A| = n$ و $\mathscr{R}$ رابطه‌ای روی A باشد. اگر $M(\mathscr{R})$ ماتریس رابطه‌ای برای $\mathscr{R}$ باشد، آن‌گاه

الف) $M(\mathscr{R}) = \circ$ (ماتریس با عناصر ۰) اگر و تنها اگر $\mathscr{R} = \emptyset$.

ب) $M(\mathscr{R}) = ۱$ (ماتریس با عناصر ۱) اگر و تنها اگر $\mathscr{R} = A \times A$.

ج) برای $m \in \mathbf{Z}^+$، $M(\mathscr{R}^m) = [M(\mathscr{R})]^m$.

با استفاده از ماتریس (۰، ۱) برای یک رابطه، به‌شناسایی ویژگیهای بازتابی، تقارنی، پادتقارنی و ترایایی برمی‌گردیم. برای انجام این‌کار به‌معرفی مفاهیمی که در سه تعریف زیر آمده‌اند نیاز داریم.

تعریف ۱۱.۷ فرض کنید $E = (e_{ij})_{m\times n}$، $F = (f_{ij})_{m\times n}$ دو ماتریس (۰، ۱) باشند. می‌گوییم که E مقدم بر F یا کوچکتر از F است و می‌نویسیم $E \leq F$، اگر برای همهٔ مقادیر $۱ \leq i \leq m$، $۱ \leq j \leq n$ و $e_{ij} \leq f_{ij}$.

مثال ۲۱.۷ با $E = \begin{bmatrix} ۱ & \circ & ۱ \\ \circ & \circ & ۱ \end{bmatrix}$ و $F = \begin{bmatrix} ۱ & \circ & ۱ \\ \circ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، داریم $E \leq F$. در واقع، هشت ماتریس G به‌صورت (۰، ۱) وجود دارند که $E \leq G$. □

تعریف ۱۲.۷ برای $n \in \mathbf{Z}^+$، $I_n = (\delta_{ij})_{n\times n}$ ماتریس (۰، ۱) از مرتبهٔ $n \times n$ است، که

$$\delta_{ij} = \begin{cases} ۱ & i = j \\ \circ & i \neq j \end{cases}$$

تعریف ۱۳.۷ فرض کنید $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ماتریس (۰، ۱) باشد. ترانهادهٔ A که به‌صورت A^{tr} نوشته می‌شود، ماتریس $(a^*_{ij})_{n\times m}$ است که در آن برای همهٔ مقادیر $۱ \leq j \leq n$ و $۱ \leq i \leq m$، $a^*_{ji} = a_{ij}$.

مثال ۲۲.۷ برای $A = \begin{bmatrix} \circ & ۱ \\ \circ & \circ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، $A^{\text{tr}} = \begin{bmatrix} \circ & \circ & ۱ \\ ۱ & \circ & ۱ \end{bmatrix}$.

همان‌طور که این مثال نشان می‌دهد، iامین سطر (ستون) A با iامین ستون (سطر) $A^{\rm tr}$ برابر است. این نکته راهی برای به‌دست آوردن ماتریس $A^{\rm tr}$ از ماتریس A به‌دست می‌دهد. □

قضیه ۲.۷ مجموعهٔ A با $|A| = n$ و رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی A داده شده‌است. فرض کنید M ماتریس رابطه‌ای برای $\mathscr{R}$ را نشان دهد. در این‌صورت

الف) $\mathscr{R}$ بازتابی است اگر و تنها اگر $I_n \leq M$.

ب) $\mathscr{R}$ متقارن است اگر و تنها اگر $M = M^{\rm tr}$.

ج) $\mathscr{R}$ تراياست اگر و تنها اگر $M.M = M^۲ \leq M$.

د) $\mathscr{R}$ پادمتقارن است اگر و تنها اگر $M \cap M^{\rm tr} \leq I_n$. (ماتریس $M \cap M^{\rm tr}$ با عمل کردن روی درایه‌های متناظر M و $M^{\rm tr}$ برطبق قاعده‌های $۰ = ۰ \cap ۱ = ۱ \cap ۰ = ۰ \cap ۰$ و $۱ = ۱ \cap ۱$ تشکیل می‌شود.)

برهان نتیجه‌ها از تعریفهای این ویژگیهای رابطه‌ای و ماتریس $(۰, ۱)$ حاصل می‌شوند. ما این مطلب را برای قسمت (ج) با استفاده از عناصر A در تعیین سطرها و ستونهای M، نظیر مثالهای ۱۹.۷ و ۲۰.۷، اثبات می‌کنیم.

فرض کنید $M^۲ \leq M$. اگر $(x,y),(y,z) \in \mathscr{R}$، آن‌گاه ۱ها در سطر (x)، ستون (y) و در سطر (y)، ستون (z) ماتریس M، قرار دارند. در نتیجه در سطر (x)، ستون (z) ماتریس $M^۲$ یک ۱ خواهیم داشت. این ۱ باید در سطر (x)، ستون (z) ماتریس M نیز ظاهر شود زیرا $M^۲ \leq M$. بنابراین، $(x,y) \in \mathscr{R}$ و $\mathscr{R}$ تراياست.

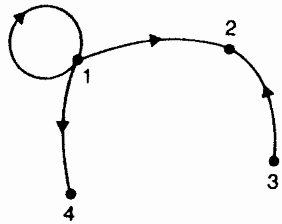
برعکس، اگر $\mathscr{R}$ ترايا و M ماتریس رابطه‌ای برای $\mathscr{R}$ باشد، فرض کنید s_{xz} درایهٔ سطر (x) و ستون (z) ماتریس $M^۲$، با $s_{xz} = ۱$ باشد. برای اینکه s_{xz} در $M^۲$ برابر ۱ باشد باید حداقل یک $y \in A$ وجود داشته باشد که در M، $m_{xy} = m_{yz} = ۱$. این تنها وقتی رخ می‌دهد که $x\mathscr{R}y$ و $y\mathscr{R}z$. با ترايا بودن $\mathscr{R}$، نتیجه می‌شود که $x\mathscr{R}z$. پس $m_{xz} = ۱$ و $M^۲ \leq M$.

اثبات قسمتهای دیگر را به‌خواننده واگذار می‌کنیم. ■

ماتریس رابطه‌ای برای شناسایی کامپیوتری بعضی از ویژگیهای رابطه‌ها ابزاری مفید است. با ذخیره کردن اطلاعات به‌صورتی که در اینجا شرح داده شد، این ماتریس مثالی از ساختار داده‌هاست. چگونگی استفاده از ماتریس رابطه‌ای در مطالعهٔ نظریهٔ گرافها* و چگونگی به کار بردن نظریهٔ گراف در شناسایی بعضی از ویژگیهای رابطه‌ها نیز مورد توجه‌اند.

تعریف ۱۴.۷ فرض کنید V مجموعهٔ ناتهی متناهی است. یک گراف سودار G روی V از عناصر V به‌نام رأسها یا گرههای G، و از زیرمجموعهٔ Eی $V \times V$ به‌نام یالهای(سودار) یا کمانهای G

* چون اصطلاح‌شناسی نظریهٔ گراف استاندارد نشده‌است، ممکن است خواننده تفاوتهایی بین تعریفهایی که در اینجا داده شده‌است با تعریفهای سایر کتابها ملاحظه کند.

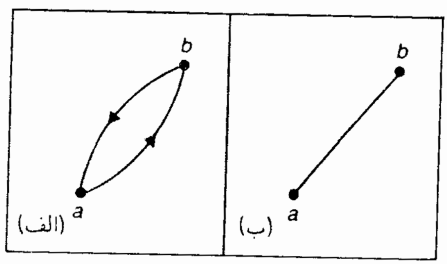


شکل ۱.۷

ساخته می‌شود. اگر $(a,b) \in V$ و $(a,b) \in E$، آنگاه یالی از a به b وجود دارد*. رأس a را مبدأ یا منشأ یال و b را پایانه یا رأس پایانی می‌نامند و می‌گوییم که b مجاور a شده و a مجاور به b است. به‌علاوه اگر $a \neq b$، آنگاه $(a,b) \neq (b,a)$. یالی به‌صورت (a,a) را طوقه (در a) می‌خوانند.

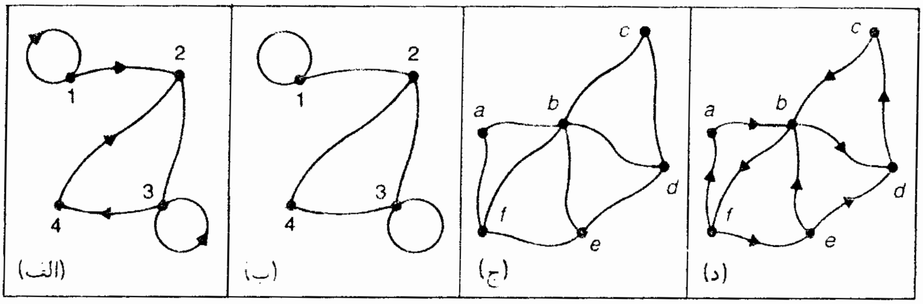
مثال ۲۳.۷ برای $V = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$، نمودار شکل ۱.۷، یک گراف سودار G روی V با مجموعه یالهای $\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۴),(۳,۲)\}$ است. رأس ۵، بخشی از این گراف است گرچه مبدأ یا پایانهٔ یال نیست. این رأس، به‌رأس تنها موسوم است. همان‌طور که در اینجا می‌بینیم لازم نیست که یالها پاره‌خطهای مستقیم باشند، و در اینجا کاری با درازای یال نداریم. □

وقتی روندنمایی را برای مطالعهٔ برنامه‌ای کامپیوتری یا الگوریتمی رسم می‌کنیم، با نوع خاص گراف سودار که در آن شکلهای رأسها در تحلیل الگوریتم اهمیت دارند، سر و کار داریم. نقشه‌های راهها گرافهای سودارند که در آنها شهرهای بزرگ و کوچک به‌وسیله رأسها نمایش داده می‌شوند و بزرگراهها هر دو مکان را به‌وسیلهٔ یالها به هم پیوند می‌دهند. در نقشهٔ راهها یک یال غالباً در دو سو، جهتدار شده‌است. در نتیجه اگر G گرافی سودار و $a,b \in V$ با $a \neq b$، $(a,b),(b,a) \in E$، آنگاه تک یال بی‌سوی $\{a,b\} = \{b,a\}$ در شکل ۲.۷ (ب) برای نمایش دو یال سودار در



شکل ۲.۷

* در این فصل تنها مجاز به رسم یک یال از a به b هستیم. مواردی را که در آنها یالهای چندگانه ظاهر می‌شوند گراف چندگانه می‌نامند. از این گرافها در فصل ۱۱ بحث شده‌است.



شکل ۳.۷

شکل ۲.۷ (الف) به‌کار می‌رود. در این حالت، a و b را رأسهای مجاور می‌نامند. (برای طوقه‌ها ممکن است سو را هم نادیده گرفت.)

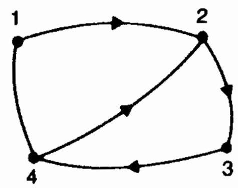
در مطالعهٔ رابطه‌ها چگونه از گرافهای سودار استفاده می‌شود؟ برای یک مجموعهٔ A و رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی A، گراف سودار G را با مجموعهٔ رأسهای A و مجموعهٔ یالهای $E \subseteq A \times A$ می‌سازیم که در آن $(a, b) \in E$، اگر $a, b \in A$ و $a\mathscr{R}b$. این مطلب را در مثال زیر نشان داده‌ایم.

مثال ۲۴.۷ برای $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، فرض کنید

$$\mathscr{R} = \{(۱, ۱), (۱, ۲), (۲, ۳), (۳, ۲), (۳, ۳), (۳, ۴), (۴, ۲)\}$$

رابطه‌ای روی A باشد. گراف سودار مربوط به $\mathscr{R}$ را در شکل ۳.۷ (الف) نشان داده‌ایم. اگر سوها را نادیده بگیریم، گراف بی‌سوی مربوط را در قسمت (ب)ی شکل به‌دست می‌آوریم. در اینجا می‌بینیم که گراف بدین معنا همبند است که برای هر دو رأس x و y، $x \neq y$، مسیری وجود دارد که از x شروع و به y ختم می‌شود. چنین مسیری متشکل از دنبالهٔ متناهی یالهای بی‌سوست، لذا یالهای $\{۱, ۲\}$، $\{۲, ۴\}$ مسیری را از ۱ به ۴، و یالهای $\{۳, ۴\}$، $\{۴, ۲\}$و $\{۲, ۱\}$ مسیری را از ۳ به ۱ به‌دست می‌دهند. دنبالهٔ یالهای $\{۳, ۴\}$، $\{۴, ۲\}$، و $\{۲, ۳\}$ مسیری را از ۳ به ۳ معین می‌کند . چنین مسیر بسته‌ای را دور می‌نامند. این مثالی از دور بی‌سویی به درازای سه است، زیرا سه یال در آن وجود دارد.

وقتی با مسیرها (درگرافهای بی‌سو و سودار) سر و کار داریم هیچ رأسی ممکن نیست تکرار شود. بنابراین، دنبالهٔ یالهای $\{a, b\}$، $\{b, e\}$، $\{e, f\}$، $\{f, b\}$، $\{b, d\}$ در شکل ۳.۷ (ج) را در یک مسیر (از a به d) نمی‌گیرند، زیرا از رأس b بیش از یک بار می‌گذریم. در مورد دورها، مسیر از یک رأس شروع و به‌همان رأس ختم می‌شود و حداقل سه یال دارد. دنبالهٔ یالهای (b, f)، (f, e)، (e, d)، (d, c)، (c, b) یک دور سودار به درازای پنج را در شکل ۳.۷ (د) فراهم می‌کند. شش یال (b, f)، (f, e)، (e, b)، (b, d)، (d, c)، (c, b) دوری سودار را در شکل نتیجه نمی‌دهند زیرا



شکل ۴.۷

رأس b تکرار شده‌است. اگر سوها نادیده گرفته شوند، شش یال متناظر، در قسمت (ج) شکل نیز بیش از یک بار از رأس b می‌گذرند. در نتیجه برای گراف بی‌سوی شکل ۳.۷(ج) این یالها یک دور به‌حساب نمی‌آیند.

اینک چون لازم است که درازای یک دور حداقل سه باشد، طوقه را به‌عنوان دور در نظر نمی‌گیریم. همچنین توجه می‌کنیم که طوقه‌ها بر همبندی گراف تاثیر نمی‌گذارند. □

تعریف ۱۵.۷ اگر G گراف سوداری روی V باشد، آن‌گاه G را قویاً همبند می‌گویند اگر برای هر $x, y \in V$، $x \neq y$، مسیری از یالهای سودار، از x به y، وجود داشته باشد.

هنگامی که در فصل ۶ از ماشینهای قویاً همبند صحبت کردیم، منظور ما همین همبندی بود. گراف شکل ۳.۷ (الف) همبند است ولی قویاً همبند نیست. مثلاً مسیر سوداری از ۳ به ۱ وجود ندارد. در شکل ۴.۷ گراف سودار روی $V = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ قویاً همبند و بی‌طوقه است. این مطلب برای گراف سودار شکل ۳.۷ (د) نیز درست است.

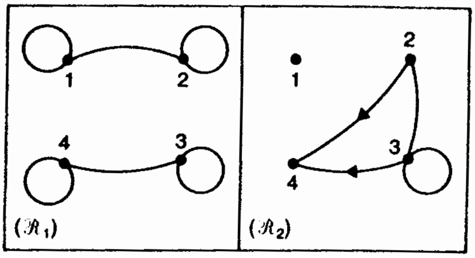
مثال ۲۵.۷ برای $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ رابطه‌های

$$\mathscr{R}_۱ = \{(۱, ۱), (۱, ۲), (۲, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۳, ۴), (۴, ۳), (۴, ۴)\}$$

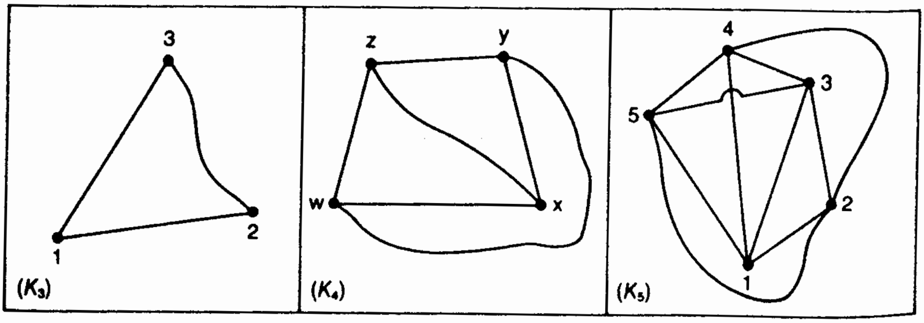
و

$$\mathscr{R}_۲ = \{(۲, ۴), (۲, ۳), (۳, ۲), (۳, ۳), (۳, ۴)\}$$

را در نظر می‌گیریم. همان‌طور که شکل ۵.۷ نشان می‌دهد، گرافهای این رابطه‌ها ناهمبندند. امّا، هر گراف اجتماع دو تکهٔ همبند است که مؤلفه‌های گراف نامیده می‌شوند. برای $\mathscr{R}_۱$، گراف از دو مؤلفهٔ قویاً همبند ساخته شده‌است. برای $\mathscr{R}_۲$، یک مؤلفه متشکل از رأسی تنهاست، و مؤلفهٔ دیگر همبند است ولی قویاً همبند نیست. □



شکل ۵.۷



شکل ۶.۷

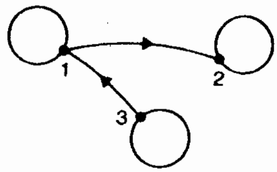
مثال ۲۶.۷ گرافهای شکل ۶.۷ مثالهایی از گرافهای بی‌سو هستند که طوقه ندارند، و هر دو رأس متمایز یک یال دارند. این گرافها را گرافهای کامل n رأسی می‌نامند و با K_n نشان می‌دهند. در شکل ۶.۷، مثالهایی از گرافهای کامل، به‌ترتیب سه رأسی، چهار رأسی، و پنج رأسی داریم. گراف کامل $K_۲$ متشکل از دو نقطهٔ x و y و یک یال است که آنها را به هم وصل می‌کند، در حالی‌که $K_۱$ متشکل از یک نقطه و بدون یال است، زیرا رسم طوقه مجاز نیست.

در $K_۵$ دو تا از یالها، یعنی $\{۳,۵\}$ و $\{۱,۴\}$ یکدیگر را قطع می‌کنند. امّا، نقطهٔ برخوردی که رأسی جدید ایجاد کند وجود ندارد. اگر سعی کنیم که به‌وسیلهٔ رسم گراف به‌گونه‌ای دیگر، از برخورد یالها اجتناب شود، با همان شکل همیشگی دوباره روبه‌رو می‌شویم. این مشکل را در فصل ۱۱، وقتی از هامنی بودن گرافها صحبت می‌کنیم، بررسی خواهیم کرد. □

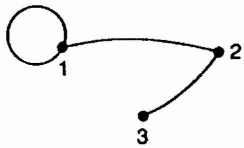
برای یک گراف G روی مجموعهٔ V از رأسها، این گراف یک رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی V به‌وجود می‌آورد که برای آن $x\mathscr{R}y$، اگر (x,y) یالی در G باشد. در نتیجه، ماتریس $(۱,۰)$ برای G وجود دارد، و چون این ماتریس رابطه‌ای، از مجاورتهای دو به‌دوی رئوس ایجاد می‌شود، به آن ماتریس مجاورت برای G همچنین ماتریس رابطه‌ای برای $\mathscr{R}$ می‌گویند.

در اینجا، ویژگیهای رابطه‌ها و ساختار گرافهای سودار را به هم پیوند می‌دهیم.

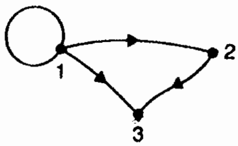
مثال ۲۷.۷ اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $\mathscr{R}=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۲),(۳,۳),(۳,۱)\}$، آن‌گاه



شکل ۷.۷



شکل ۸.۷



شکل ۹.۷

$\mathscr{R}$ رابطه‌ای بازتابی روی A است ولی متقارن، پادمتقارن، یا ترایا نیست. گراف سودار مربوط به $\mathscr{R}$ متشکل از پنج یال است. سه تا از این یالها طوقه هستند که از ویژگی بازتابی $\mathscr{R}$ نتیجه می‌شوند. (شکل ۷.۷ را ببینید.) به‌طور کلی، اگر $\mathscr{R}$ رابطه‌ای روی مجموعهٔ متناهی A باشد، آن‌گاه $\mathscr{R}$ بازتابی است اگر و تنها اگر گراف سودارش شامل طوقه‌ای در هر رأس (عنصر A) باشد.□

مثال ۲۸.۷ رابطهٔ $\mathscr{R} = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲)\}$ روی $A = \{۱,۲,۳\}$ متقارن است امّا بازتابی، پادمتقارن، یا ترایا نیست. گراف سودار برای $\mathscr{R}$ را در شکل ۸.۷ می‌بینید. به‌طور کلی، رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی مجموعهٔ متناهی A متقارن است اگر و تنها اگر گراف سودارش شامل تنها طوقه‌ها و یالهای بی‌سو باشد. □

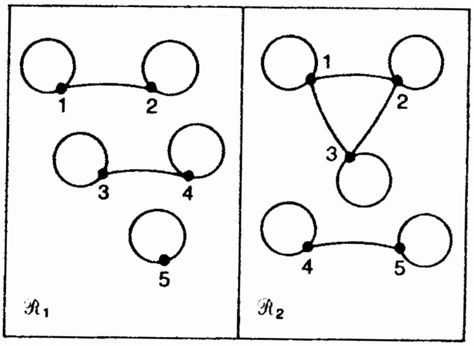
مثال ۲۹.۷ برای $A = \{۱,۲,۳\}$ رابطهٔ $\mathscr{R} = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۱,۳)\}$ را در نظر می‌گیریم. گراف سودار برای $\mathscr{R}$ را در شکل ۹.۷ نشان داده‌ایم. در اینجا $\mathscr{R}$ ترایا و پادمتقارن است ولی بازتابی یا متقارن نیست. این گراف سودار نشان می‌دهد که یک رابطه روی مجموعهٔ A تراياست اگر و تنها اگر گراف سودارش در شرط زیر صدق کند: برای هر $x, y \in A$، اگر یک مسیر (سودار) از x به y در گراف مربوط وجود داشته باشد، آن‌گاه یک یال (x,y) نیز وجود دارد. (در اینجا $(۱,۲)$، $(۲,۳)$ مسیری (سودار) از ۱ به ۳ است و یال $(۱,۳)$ را نیز برای ترایایی داریم.)

این رابطهٔ $\mathscr{R}$ پادمتقارن است زیرا در آن هیچ جفتِ مرتبی به‌صورت (x,y) و (y,x)، با $x \neq y$ در $\mathscr{R}$ وجود ندارد. در استفاده از گراف سودار شکل ۹.۷ برای مشخص کردن پادتقارنی، مشاهده می‌کنیم که برای هر دو رأس x و y با $x \neq y$، گراف شامل حداکثر یکی از یالهای (x,y) یا (y,x) است. بنابراین، یالهای بی‌سو، بجز طوقه‌ها، وجود ندارند. □

مثال نهایی ما به رابطه‌های هم‌ارزی مربوط می‌شود.

مثال ۳۰.۷ برای $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$، رابطه‌های زیر، رابطه‌های هم‌ارزی روی A هستند

$$\mathscr{R}_۱ = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۴),(۵,۵)\}$$
$$\mathscr{R}_۲ = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳)$$
$$(۴,۴),(۴,۵),(۵,۴),(۵,۵)\}$$



شکل ۷.۱۰

گرافهای مربوط به آنها را در شکل ۷.۱۰ نشان داده‌ایم. اگر طوقه‌ها را در هر گراف نادیده بگیریم، می‌بینیم که گراف به‌مؤلفه‌هایی نظیر $K_۱$، $K_۲$، و $K_۳$ تجزیه می‌شود. به‌طور کلی رابطه‌ای روی مجموعهٔ متناهی A، رابطهٔ هم‌ارزی است اگر و تنها اگر، گراف مربوطه‌اش، متشکل از اجتماع مجزای گرافهای کاملی باشد که در هر رأس طوقه‌هایی به آنها اضافه شده‌است. □

تمرینهای ۲.۷

۱. برای $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، فرض کنید $\mathscr{R}$ و $\mathscr{S}$ رابطه‌هایی روی A باشند که به‌وسیلهٔ

$$\mathscr{R} = \{(۱, ۲), (۱, ۳), (۲, ۴), (۴, ۴)\}$$

و $\mathscr{S} = \{(۱, ۱), (۱, ۲), (۱, ۳), (۲, ۳), (۲, ۴)\}$ تعریف شده‌اند. مطلوب است $\mathscr{R} \circ \mathscr{S}$، $\mathscr{S} \circ \mathscr{R}$، $\mathscr{R}^۲$، $\mathscr{R}^۳$، $\mathscr{S}^۲$، و $\mathscr{S}^۳$.

۲. اگر $\mathscr{R}$ رابطه‌ای بازتابی روی یک مجموعهٔ A باشد ثابت کنید که $\mathscr{R}^۲$ نیز روی A بازتابی است.

۳. برهانی برای عکس شمول در قضیهٔ ۱.۷ پیدا کنید.

۴. برای مجموعه‌های A، B، و C رابطه‌های $\mathscr{R}_۱ \subseteq A \times B$، $\mathscr{R}_۲ \subseteq B \times C$، و $\mathscr{R}_۳ \subseteq B \times C$ را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید که (الف) $\mathscr{R}_۱ \circ (\mathscr{R}_۲ \cup \mathscr{R}_۳) = (\mathscr{R}_۱ \circ \mathscr{R}_۲) \cup (\mathscr{R}_۱ \circ \mathscr{R}_۳)$؛ و (ب) $\mathscr{R}_۱ \circ (\mathscr{R}_۲ \cap \mathscr{R}_۳) \subseteq (\mathscr{R}_۱ \circ \mathscr{R}_۲) \cap (\mathscr{R}_۱ \circ \mathscr{R}_۳)$ (مثالی بزنید که نشان دهد در قسمت (ب) یک شمول خاص ممکن است پیدا شود.)

۵. برای یک رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی یک مجموعهٔ A، تعریف می‌کنیم $\mathscr{R}^\circ = \{(a, a) | a \in A\}$. اگر $|A| = n$، ثابت کنید که مقادیری چون $s, t \in N$ با $\circ \leq s < t \leq ۲^{n^۲}$ وجود دارند به‌قسمی که $\mathscr{R}^s = \mathscr{R}^t$.

۶. با $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، فرض‌کنید $\mathscr{R}=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۳,۳),(۳,۴),(۴,۴)\}$ رابطه‌ای روی A باشد. دو رابطهٔ $\mathscr{S}$، $\mathscr{T}$ روی A بیابید که در آن $\mathscr{S}\neq\mathscr{T}$ امّا

$$\mathscr{R}\circ\mathscr{S}=\mathscr{R}\circ\mathscr{T}=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴)\}$$

۷. چند ماتریس Aی $(۱,۰)$ از مرتبهٔ ۶×۶ با $A=A^{tr}$ وجود دارند؟

۸. اگر $E=\begin{bmatrix}۱&۰&۱&۱\\۰&۱&۰&۱\\۱&۰&۰&۰\end{bmatrix}$، چند ماتریس F به‌صورت $(۱,۰)$ وجود دارند که در $E\leq F$ صدق می‌کنند؟

۹. مجموعه‌های $A=\{a_۱,a_۲,\dots,a_m\}$، $B=\{b_۱,b_۲,\dots,b_n\}$، و $C=\{c_۱,c_۲,\dots,c_p\}$ را در نظر می‌گیریم که در آنها ترتیب عنصرهای هر مجموعه که در اینجا داده شده‌است ثابت می‌ماند. فرض کنید $\mathscr{R}_۱$ رابطه‌ای باشد از A به B و $\mathscr{R}_۲$ رابطه‌ای از B به C. $M(\mathscr{R}_i)$، $i=۱,۲$، ماتریس رابطه‌ای برای $\mathscr{R}_i$ است. سطرها و ستونهای این ماتریسها به‌وسیلهٔ عنصرهایی از مجموعه‌های مناسب A، B، و C متناظر با ترتیبهای مشروح در بالا اندیسگذاری شده‌اند. ماتریس برای $\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲$ ماتریس $m\times p$ به‌صورت $M(\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲)$ است که در آن، عنصرهای A (به‌ترتیبِ داده‌شده) اندیسگذار سطرها هستند، در حالی‌که ستونها به‌وسیلهٔ عنصرهای C (به‌ترتیبِ داده‌شده) اندیسگذاری شده‌اند.

نشان دهید که برای همهٔ مقادیر $۱\leq i\leq m$ و $۱\leq j\leq p$، درایه‌های iامین سطر و jامین ستون ماتریسهای $M(\mathscr{R}_۱).M(\mathscr{R}_۲)$ و $M(\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲)$ برابرند. (بنابراین، خواهیم داشت: $M(\mathscr{R}_۱).M(\mathscr{R}_۲)=M(\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲)$.)

۱۰. فرض کنید A مجموعه‌ای با $|A|=n$ باشد. ترتیب ثبت کردن عنصرهایش را ثابت در نظر بگیرید. برای $\mathscr{R}\subseteq A\times A$، فرض کنید $M(\mathscr{R})$ معرف ماتریس رابطه‌ای متناظر باشد.

الف) ثابت کنید که $M(\mathscr{R})=۰$ (ماتریس $n\times n$ که همهٔ عناصرش ۰ هستند)، اگر و تنها اگر $\mathscr{R}=\emptyset$.

ب) ثابت کنید که $M(\mathscr{R})=۱$ (ماتریس $n\times n$ که همهٔ عناصرش ۱ هستند) اگر و تنها اگر $\mathscr{R}=A\times A$.

ج) با استفاده از نتیجهٔ تمرین ۹، همراه با اصل استقرای ریاضی، ثابت کنید که به‌ازای هر $m\in\mathbf{Z}^+$، $M(\mathscr{R}^m)=[M(\mathscr{R})]^m$.

۱۱. برهانهایی برای قضیهٔ ۲.۷ (الف)، (ب)، و (د) عرضه کنید.

۱۲. با استفاده از قضیهٔ ۲.۷، برای شناسایی رابطه‌های هم‌ارزی روی یک مجموعهٔ متناهی، برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید).

۱۳. برای $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، فرض کنید $\mathscr{R} = \{(۱, ۱), (۱, ۲), (۲, ۳), (۳, ۳), (۳, ۴)\}$ رابطه‌ای روی A باشد. گراف سودار G روی A را رسم کنید که مربوط به رابطهٔ $\mathscr{R}$ باشد. همین کار را برای $\mathscr{R}^۲$، $\mathscr{R}^۳$، و $\mathscr{R}^۴$ انجام دهید.

۱۴. برای $|A| = ۵$، چند رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی A وجود دارند؟ چند تا از این رابطه‌ها متقارن‌اند؟

۱۵. فرض کنید $|A| = ۵$. (الف) چند گراف سودار می‌توان روی A ساخت؟ (ب) چند گراف قسمت (الف) واقعاً بی‌سو هستند؟

۱۶. در گرافهای کامل $K_۶$، $K_۷$، و K_n، $n \in \mathbf{Z}^+$، چند یال (بی‌سو) وجود دارند؟

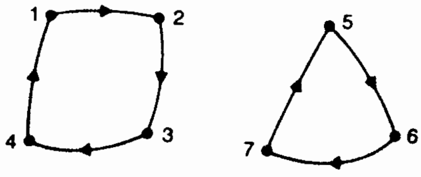
۱۷. **الف)** با حفظ ترتیب عناصر به‌صورت ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ ماتریسهای رابطه‌ای $(۱ , ۰)$ را برای رابطه‌های هم‌ارزی مثال ۳۰.۷ تعیین کنید.

ب) آیا نتایج قسمت (الف) به تعمیمی منجر می‌شوند؟

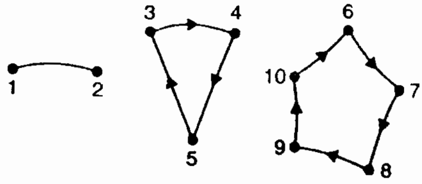
۱۸. **الف)** فرض کنید $\mathscr{R}$ رابطه‌ای روی $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$ باشد، که در آن، گراف سودار مربوط به $\mathscr{R}$ متشکل از مؤلفه‌هایی است که هر کدام یک دور سوداری است که در شکل ۱۱.۷ نشان داده‌ایم. کوچکترین عدد صحیح $n > ۱$ را بیابید به‌قسمی که $\mathscr{R}^n = \mathscr{R}$. کوچکترین مقدار $n > ۱$ که برای آن گراف $\mathscr{R}^n$ شامل طوقه‌هایی است چیست؟ آیا اتفاق می‌افتد که گراف $\mathscr{R}^n$ تنها متشکل از طوقه‌ها باشد؟

ب) به همین سؤالات برای رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی $A = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۹, ۱۰\}$ پاسخ دهید به‌شرطی که گراف سودار مربوط به $\mathscr{R}$ به‌صورتی باشد که در شکل ۱۲.۷ نشان داده شده‌است.

ج) آیا نتایج (الف) و (ب) در حالت کلی چیزی را نشان می‌دهند؟



شکل ۱۱.۷



شکل ۱۲.۷

۳.۷ ترتیبهای جزئی: نمودارهای هاسه

اگر از کودکان بخواهید اعدادی را که می‌دانند از حفظ بگویند، پاسخ همانند «۱، ۲، ۳، ...» را خواهید شنید. آنها بدون توجه به این اعداد آنها را به ترتیب صعودی ذکر می‌کنند. در این بخش می‌خواهیم نگاهی دقیقتر به مفهوم ترتیب بیندازیم، به‌چیزی که ممکن است بدیهی بینگارید. مطلب را با بیان نکته‌ای دربارهٔ مجموعه‌های $\mathbf{N}$، $\mathbf{Z}$، $\mathbf{Q}$، $\mathbf{R}$، و $\mathbf{C}$ شروع می‌کنیم.

مجموعهٔ N تحت عملهای دوتایی (معمولی) جمع و ضرب بسته است، امّا اگر جواب معادلهٔ $x + ۵ = ۲$ را جستجو کنیم، متوجه می‌شویم که هیچ یک از عناصر $\mathbf{N}$ جواب این معادله نیست. لذا $\mathbf{N}$ را به $\mathbf{Z}$ گسترش می‌دهیم که در آن می‌توانیم تفریق، و همچنین جمع و ضرب را انجام دهیم. امّا برای حل معادلهٔ $۲x + ۳ = ۴$ دچار گرفتاری می‌شویم. با گسترش دادن $\mathbf{Z}$ به $\mathbf{Q}$ می‌توانیم تقسیم بر غیر صفر را به‌علاوهٔ سایر اعمال انجام دهیم. این کار هم باز به زودی نشان می‌دهد که کافی نیست. برای حلّ معادلهٔ $x^۲ - ۲ = ۰$ وارد کردن اعداد حقیقی امّا گنگ $\pm\sqrt{۲}$ ضروری است. حتی بعد از توسیع $\mathbf{Q}$ به $\mathbf{R}$، وقتی سعی داریم معادلهٔ $x^۲ + ۱ = ۰$ را حل کنیم گرفتاری بیشتری به‌وجود می‌آید. سرانجام به $\mathbf{C}$، دستگاه اعداد مختلط، می‌رسیم که در آنها هر معادلهٔ چند جمله‌ای به‌صورت $c_n x^n + c_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + c_۲ x^۲ + c_۱ x + c_۰ = ۰$، $c_i \in \mathbf{C}$، $۰ \leq i \leq n$ را می‌توان حل کرد. (این قضیه به قضیهٔ اساسی جبر موسوم است. اثبات آن مستلزم دانستن مطالبی دربارهٔ تابعهای مختلط است، لذا برهان آن در اینجا داده نشده‌است.) وقتی در این ساختنها از $\mathbf{N}$ به $\mathbf{C}$ می‌رویم و به تدریج توانایی بیشتری در حل معادلات چند جمله‌ای به‌دست می‌آوریم، چیزی را وقتی از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{C}$ می‌رویم از دست می‌دهیم. در $\mathbf{R}$ با داشتن $r_۱$ و $r_۲$، $r_۱ \neq r_۲$، می‌توانیم همیشه به‌طور قطع بگوییم که $r_۲ < r_۱$ یا $r_۱ < r_۲$. امّا در $\mathbf{C}$، $(۱ + ۲i) \neq (۲ + i)$، ولی با گزاره‌ای نظیر «$(۱ + ۲i) < (۲ + i)$» چه مفهومی را می‌توان همراه کرد؟ توانایی «مرتب کردن» عناصر دستگاه عددی خود را از دست داده‌ایم!

مثل بخش ۱.۷ فرض می‌کنیم A یک مجموعه و $\mathscr{R}$ رابطه‌ای روی A باشد. جفت $(A, \mathscr{R})$ را مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب (مجموعهٔ ج.م) می‌نامند اگر رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی A ترتیب جزئی، یا رابطهٔ ترتیبی جزئی باشد. اگر A را مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب بنامند می‌فهمیم که یک ترتیب جزئی $\mathscr{R}$ روی A وجود دارد که A را به‌مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب بدل می‌کند. مثالهای ۱.۷ (الف)، ۲.۷، و ۱۰.۷ مجموعه‌های جزئی‌ـمرتب‌اند.

مثال ۳۱.۷ فرض می‌کنیم A مجموعهٔ دروسی باشد که دانشکده‌ای عرضه می‌کند. رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی A را به‌وسیلهٔ $x\mathscr{R}y$ تعریف می‌کنیم اگر x و y یک درس باشند، یا اگر x پیشنیاز y باشد. در این‌صورت $\mathscr{R}$ مجموعهٔ A را به‌مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب بدل می‌کند. □

مثال ۳۲.۷ رابطهٔ $\mathscr{R}$ را روی $A=\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ به‌وسیلهٔ $x\mathscr{R}y$ تعریف می‌کنیم اگر $x|y$ ــ یعنی x، y را بشمارد. در این‌صورت

$$\mathscr{R} = \{(۱,۱), (۲,۲), (۳,۳), (۴,۴), (۱,۲), (۱,۳), (۱,۴), (۲,۴)\}$$

یک ترتیب جزئی است، و $(A, \mathscr{R})$ مجموعهٔ جزئی‌ـ‌مرتب است. □

مثال ۳۳.۷ در ساختن یک خانه، کارهایی نظیر پی کنی وجود دارند که باید قبل از انجام مراحل دیگر ساختمان انجام شوند. اگر A مجموعهٔ کارهایی باشد که باید در ساختن یک خانه انجام شوند می‌توانیم رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی A را به‌وسیلهٔ $x\mathscr{R}y$ تعریف کنیم اگر x و y معرف یک کار واحد باشند یا اگر x کاری باشد که باید قبل از شروع کار y انجام گیرد. بدین طریق ترتیبی روی عناصر A منظور می‌کنیم که آن‌را به‌مجموعهٔ جزئی‌ـ‌مرتب بدل می‌کند که گاهی آن را شبکهٔ **PERT*** (ارزیابی برنامه و تکنیک بررسی) می‌نامند. □

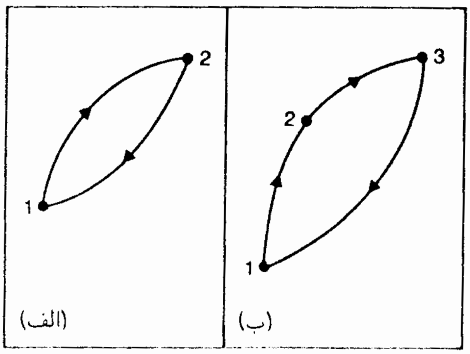
نمودارهایی را که در شکل ۱۳.۷ داده شده‌اند در نظر بگیرید. اگر قسمت (الف) بخشی از گراف سودار مربوط به رابطهٔ $\mathscr{R}$ باشد، آن‌گاه چون $(۱,۲),(۲,۱) \in \mathscr{R}$ با $۲ \neq ۱$، $\mathscr{R}$ نمی‌تواند پادمتقارن باشد. برای قسمت (ب)، اگر این نمودار، بخشی از گراف رابطهٔ ترایای $\mathscr{R}$ باشد، آن‌گاه $(۱,۲),(۲,۳) \in \mathscr{R} \Rightarrow (۱,۳) \in \mathscr{R}$. چون $(۳,۱) \in \mathscr{R}$ و $۳ \neq ۱$، $\mathscr{R}$ پادمتقارن نیست، و لذا نمی‌تواند ترتیب جزئی باشد.

از این مشاهدات، با داشتن رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی یک مجموعهٔ A، فرض می‌کنیم G گراف سودار مربوط به $\mathscr{R}$ باشد.

(i) اگر G شامل یک جفت یال به‌صورت (a,b)، (b,a) به‌ازای $a,b \in A$، $a \neq b$ باشد، یا

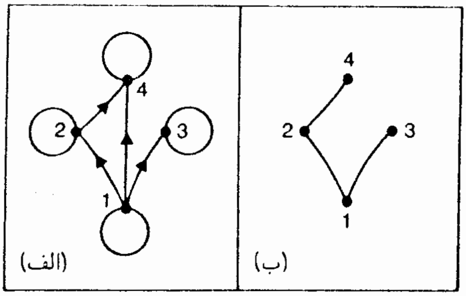
(ii) اگر $\mathscr{R}$ ترایا و G شامل دور سودار (به درازای بزرگتر از سه یا برابر با سه) باشد، آن‌گاه رابطهٔ $\mathscr{R}$ نمی‌تواند پادمتقارن باشد، لذا $(A,\mathscr{R})$ یک ترتیب جزئی نیست.

مثال ۳۴.۷ گراف سودار برای ترتیب جزئی در مثال ۳۲.۷ را در نظر بگیرید. شکل ۱۴.۷ (الف)



شکل ۱۳.۷

* PERT مادی برای Program Evaluation and Review Technique است.ـم.



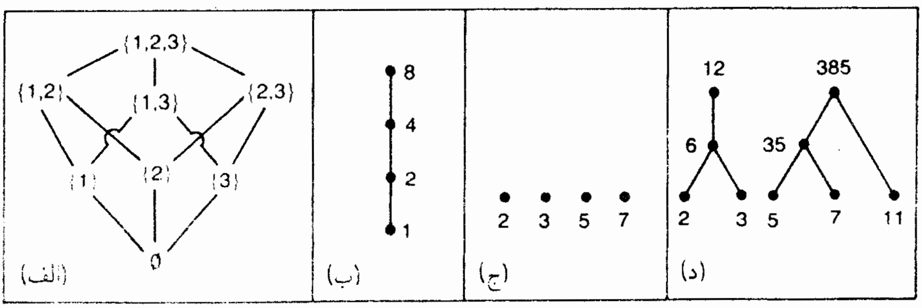
شکل ۱۴.۷

نمایش نموداری $\mathscr{R}$ است. در قسمت (ب)ی شکل، یک نمودار کمی ساده‌تر داریم که به نمودار هاسه برای $\mathscr{R}$ موسوم است.

وقتی که می‌دانیم رابطهٔ $\mathscr{R}$ ترتیبی جزئی روی مجموعهٔ A است، می‌توانیم طوقه‌ها را در رأسهای گراف سودار حذف کنیم. چون $\mathscr{R}$ نیز ترایاست با داشتن یالهای $(۱,۲)$ و $(۲,۴)$، کافی است از وجود یال $(۱,۴)$ مطمئن شویم، لذا لازم نیست که آن یال را اضافه کنیم. بدین طریق می‌توانیم نمودار شکل ۱۴.۷ (ب) را به‌دست آوریم. □

> به‌طور کلی، اگر $\mathscr{R}$ ترتیبی جزئی روی مجموعهٔ A باشد، نمودار هاسه را برای $\mathscr{R}$ روی A با رسم پاره‌خطی از x به y می‌سازیم، اگر $x, y \in A$ با $x\mathscr{R}y$ و، مهمتر از همه، اگر عنصر دیگر $z \in A$ وجود نداشته باشد که $x\mathscr{R}z$ و $z\mathscr{R}y$. (لذا، چیزی «در بین» x و y وجود نداشته باشد.) اگر قرارداد خواندن نمودار را از پایین به بالا بپذیریم، آنگاه لازم نیست که هیچ یالی را سودار کنیم.

مثال ۳۵.۷ در شکل ۱۵.۷، نمودار هاسه را برای چهار مجموعهٔ جزئی‐مرتب زیر داریم.
(الف) با $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳\}$ و $A = \mathscr{P}(\mathscr{U})$، $\mathscr{R}$ رابطهٔ زیرمجموعه‌ای روی A است. (ب) در اینجا



شکل ۱۵.۷

$\mathscr{R}$ رابطهٔ «می‌شمارد» که برای $A = \{۱, ۲, ۴, ۸\}$ به‌کار می‌رود.(ج) و (د) در اینجا همان رابطهٔ قسمت (ب) برای $\{۲, ۳, ۵, ۷\}$ در قسمت (ج) و برای $\{۲, ۳, ۵, ۶, ۷, ۱۱, ۱۲, ۳۵, ۳۸۵\}$ در قسمت (د) به‌کار رفته است. در قسمت (ج) تذکر می‌دهیم که نمودار هاسه می‌تواند همهٔ رأسهای تنها را دارا باشد؛ این نمودار، به‌صورتی که در قسمت (د) نشان داده‌ایم، می‌تواند دو (یا چند) تکهٔ همبند داشته باشد. □

مثال ۳۶.۷ فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$. رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی A، به‌وسیلهٔ $x\mathscr{R}y$ تعریف می‌شود اگر $x \leq y$، که ترتیبی جزئی است. این، A را به‌مجموعهٔ جزئی‐مرتب بدل می‌کند که می‌توانیم آن‌را با $(A, \leq)$ نشان دهیم. اگر $B = \{۱, ۲, ۴\} \subset A$، آن‌گاه مجموعهٔ $(B \times B) \cap \mathscr{R} = \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۴, ۴), (۱, ۲), (۱, ۴), (۲, ۴)\}$ یک ترتیب جزئی روی B است.

به‌طور کلی اگر $\mathscr{R}$ یک ترتیب جزئی روی A باشد، آن‌گاه برای هر زیرمجموعهٔ B از A، $(B \times B) \cap \mathscr{R}$، B را به‌یک مجموعهٔ جزئی‐مرتب بدل می‌کند که در آن، ترتیب جزئی روی B از $\mathscr{R}$ القا شده‌است. □

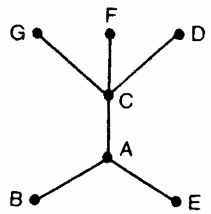
اینک به‌نوعی خاص از ترتیب جزئی می‌پردازیم.

تعریف ۱۶.۷ اگر $(A, \mathscr{R})$ مجموعه‌ای جزئی‐مرتب باشد، A را کلاً مرتب (ک.م) گویند اگر برای هر $x, y \in A$ یا $x\mathscr{R}y$ و یا $y\mathscr{R}x$.

در این حالت $\mathscr{R}$ را ترتیب کلی می‌نامند.

مثال ۳۷.۷ (الف) روی مجموعهٔ $\mathbf{N}$، رابطهٔ $\mathscr{R}$ که به‌وسیلهٔ $x\mathscr{R}y$ تعریف شده است ترتیبی کلی است اگر $x \leq y$. (ب) رابطهٔ زیرمجموعه‌یی که برای $A = \mathscr{P}(\mathscr{U})$ به‌کار می‌رود و در آن $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳\}$، ترتیبی است جزئی ولی نه کلی: $\{۱, ۲\}, \{۱, ۳\} \in A$ امّا نه $\{۱, ۲\} \subseteq \{۱, ۳\}$ را داریم و نه $\{۱, ۳\} \subseteq \{۱, ۲\}$ را. (ج) نمودار هاسه در قسمت (ب)ی شکل ۱۵.۷ ترتیبی کلی را نشان می‌دهد. □

آیا ممکن است این مفاهیم ترتیب جزئی و کلی در مسأله‌ای صنعتی پیش بیاید؟ مثلاً یک سازندهٔ اسباب‌بازی قصد فروختن یک فراوردهٔ جدید را دارد و باید مجموعه‌ای از دستورات را برای مونتاژ آن در جعبهٔ اسباب‌بازی بگذارد. برای مونتاژ این اسباب‌بازی جدید، هفت کار A، B، C، $\ldots$، G، وجود دارند که باید به‌ترتیب جزئی داده شده به‌وسیلهٔ نمودار هاسهٔ شکل ۱۶.۷ انجام گیرند. در اینجا می‌بینیم که مثلاً B، A و E باید قبل از انجام کار C کامل شوند. چون مجموعه دستورات، باید به‌صورت فهرستی از این کارها که به‌آنها شماره‌های ۱، ۲، ۳، $\ldots$، ۷ داده شده‌است درآید،



شکل ۱۶.۷

سازنده چگونه می‌تواند این فهرست را تهیه کند و مطمئن باشد که ترتیب جزئی نمودار هاسه رعایت شده‌است؟

مسألهٔ اسباب‌بازی و مونتاژ آن به‌کنار، آنچه واقعاً در اینجا مورد سؤال است این است که آیا می‌توانیم ترتیب جزئی $\mathscr{R}$ را که به‌وسیلهٔ نمودار هاسه داده شده‌است اختیار کنیم و یک ترتیب کلی $\mathscr{T}$ روی این کارها پیدا کنیم که برای آن $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{T}$؟ پاسخ آری است، و تکنیک آن به جور کردن توپولوژیک معروف است.

الگوریتم جور کردن توپولوژیک

(برای ترتیب جزئی $\mathscr{R}$ روی مجموعهٔ A با $|A| = n$)

گام ۱: قرار دهید $k = ۱$. فرض کنید $H_۱$ نمودار هاسهٔ ترتیب جزئی باشد.

گام ۲: یک رأس مانند v_k در H_k را انتخاب کنید به‌قسمی که هیچ یالی (ضمناً سودار) در H_k از v_k شروع ~~نشود~~.

گام ۳: اگر $k = n$، فرایند کامل شده و ترتیب کلی

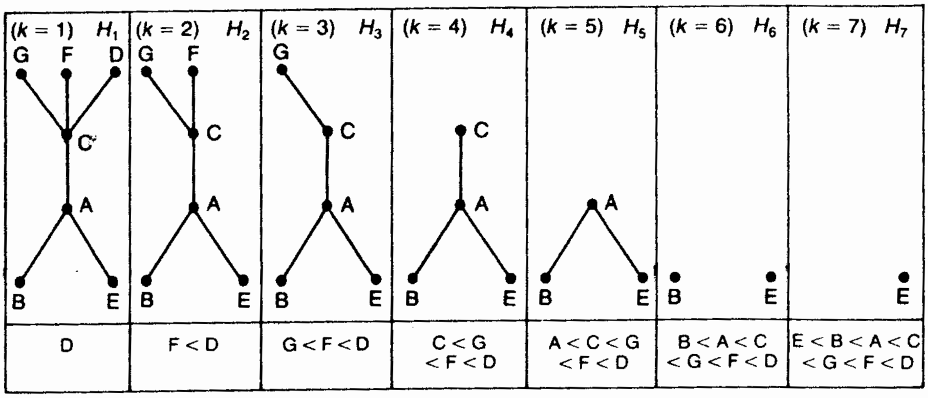
$$\mathscr{T} : v_n < v_{n-۱} < \cdots < v_۲ < v_۱$$

را که شامل $\mathscr{R}$ است داریم.

اگر $k < n$، آن‌گاه رأس v_k و تمام یالهای (ضمناً سودار) H_k را که به v_k ختم می‌شوند از H_k بردارید. این نتیجه را $H_{k+۱}$ بنامید. به k یک واحد اضافه کنید و به گام ۲ برگردید.

در اینجا الگوریتم را به‌صورت فهرستی مشخص از دستورات معرفی کرده‌ایم، بدون اینکه به اجرای آن در زبان کامپیوتری خاصی اشاره کنیم.

قبل از به‌کار بردن این الگوریتم در مورد مسألهٔ موجود، باید به‌واژهٔ «یک» در جلوی واژهٔ «رأس» در گام ۲ توجه کنیم. این نکته می‌رساند که ضرورتی ندارد انتخاب یکتا باشد و می‌توانیم ترتیبهای کلی متفاوت $\mathscr{T}$ را که شامل $\mathscr{R}$ است به‌دست آوریم. همچنین، در گام ۳، برای رأسهای $v_{i-۱}$،



شکل ۱۷.۷

$2 \leq i \leq n$، نماد $v_i < v_{i-1}$ به‌کار رفته است زیرا این نماد بیشتر از نماد $v_i \mathscr{T} v_{i-1}$ القاء می‌کند که «v_i قبل از v_{i-1}» است.

در شکل ۱۷.۷، وقتی الگوریتم را برای ترتیب جزئی شکل ۱۶.۷ به‌کار می‌بریم نمودارهای هاسه را که ظاهر می‌شوند نشان داده‌ایم. زیر هر نمودار، ترتیب کلی، به‌صورتی که ظاهر می‌شود ثبت شده‌است.

اگر سازندهٔ اسباب‌بازی دستورها را در فهرستی به‌صورت E ـ ۱، B ـ ۲، A ـ ۳، C ـ ۴، G ـ ۵، F ـ ۶، D ـ ۷ بنویسد ترتیبی کلی خواهد داشت که ترتیب جزئی لازم برای مونتاژ صحیح را حفظ می‌کند. این ترتیب کلی یکی از ۱۲ پاسخ ممکن است.

همان‌گونه که در ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی رایج است، این الگوریتم شیوه‌ای فراهم می‌کند که اندازهٔ مسأله را با هر کاربرد بعدی، تقلیل می‌دهد.

در الگوریتم جور کردن توپولوژیک، دیدیم که چگونه نمودار هاسه در تعیین ترتیب کلی برای مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب $(A, \mathscr{R})$ به‌کار رفت. اینک، این الگوریتم ما را برای بررسی ویژگیهای دیگر ترتیب جزئی آماده می‌کند. در آغاز، تأکیدی خاص بر رأس v_k در گام ۲ی الگوریتم خواهد شد.

چه اثر متقابلی بین ترتیب جزئی $(A, \mathscr{R})$ و نمودار هاسهٔ آن وجود دارد که می‌تواند رأسی مثل v_k را برحسب $\mathscr{R}$ بیان کند؟ این سؤال ما را به‌قضایای زیر هدایت می‌کند.

تعریف ۱۷.۷ اگر $(A, \mathscr{R})$ یک مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب باشد، آن‌گاه عنصر $x \in A$ را عنصر ماکسیمال A می‌نامند اگر برای هر $a \in A$، $a \neq x \Rightarrow x \not\mathscr{R} a$. عنصر $y \in A$ را عنصر مینیمال A می‌گویند اگر هر وقت $b \in A$ و $b \neq y$، آن‌گاه $b \not\mathscr{R} y$.

اگر عکس نقیض اولین گزاره در تعریف ۱۷.۷ را به‌کار بریم، آن‌گاه می‌توانیم بگوییم که $x(\in A)$ عنصر ماکسیمال است اگر برای هر $a \in A$، $x\mathscr{R}a \Rightarrow x = a$. به‌روشی مشابه، برای $y \in A$، y مینیمال است اگر برای هر $b \in A$، $b\mathscr{R}y \Rightarrow b = y$.

مثال ۳۸.۷ فرض کنید $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳\}$ و $A = \mathscr{P}(\mathscr{U})$.

الف) فرض کنید $\mathscr{R}$ رابطهٔ زیرمجموعه‌ای روی A باشد. در این‌صورت، برای مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب $(A, \subseteq)$، $\mathscr{U}$ ماکسیمال و $\emptyset$ مینیمال است.

ب) برای B، گردایهٔ زیرمجموعه‌های سره $\{۱, ۲, ۳\}$، فرض کنید $\mathscr{R}$ رابطهٔ زیرمجموعه‌ای روی B باشد. در مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب $(B, \subseteq)$، مجموعه‌های $\{۱, ۲\}$، $\{۱, ۳\}$، و $\{۲, ۳\}$ همگی عنصر ماکسیمال‌اند؛ $\emptyset$ باز تنها عنصر مینیمال است. □

مثال ۳۹.۷ اگر $\mathscr{R}$ رابطهٔ «کوچکتر از یا برابر با» روی مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ باشد، $(\mathbf{Z}, \leq)$ مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب است که نه عنصر ماکسیمال دارد و نه عنصر مینیمال. امّا، مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب $(\mathbf{N}, \leq)$ دارای عنصر مینیمال ۰ است ولی عنصر ماکسیمال ندارد. □

مثال ۴۰.۷ وقتی به‌ترتیبهای جزئی در قسمتهای (ب)، (ج)، و (د) مثال ۳۵.۷ نگاهی مجدد بیفکنیم، ملاحظات زیر آشکار می‌شوند.

۱. ترتیب جزئی در قسمت (ب) دارای عنصر ماکسیمال یکتای ۸ و عنصر مینیمال یکتای ۱ است.

۲. هر یک از چهار عنصر ۲، ۳، ۵، و ۷ هم عنصر ماکسیمال و هم عنصر مینیمال برای مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب قسمت (ج) مثال ۳۵.۷ هستند.

۳. در قسمت (د) عنصرهای ۱۲ و ۳۸۵ هر دو ماکسیمال‌اند. هر یک از عنصرهای ۲، ۳، ۵، ۷، و ۱۱ یک عنصر مینیمال برای این ترتیب جزئی‌اند.

□

آیا شرایطی وجود دارند که تحت آنها یک مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب عنصر ماکسیمال یا مینیمال داشته باشد؟

قضیه ۳.۷ اگر $(A, \mathscr{R})$ مجموعه‌ای جزئی‌ـمرتب و A متناهی باشد، آن‌گاه A هم عنصر ماکسیمال دارد و هم عنصر مینیمال.

برهان فرض کنید $a_۱ \in A$. اگر هیچ عنصر $a \in A$ موجود نباشد که $a \neq a_۱$ و $a_۱\mathscr{R}a$، آن‌گاه $a_۱$ ماکسیمال است. در غیر این‌صورت عنصر $a_۲ \in A$ وجود دارد که $a_۲ \neq a_۱$ و $a_۱\mathscr{R}a_۲$. اگر هیچ عنصر $a \in A$، $a \neq a_۲$ نباشد که در $a_۲\mathscr{R}a$ صدق کند، آن‌گاه $a_۲$ ماکسیمال است.

در غیر این‌صورت می‌توانیم $a_3 \in A$ را بیابیم به‌قسمی که $a_3 \neq a_2$ و $a_3 \neq a_1$ (چرا؟) در حالی‌که $a_1 \mathscr{R} a_2$ و $a_2 \mathscr{R} a_3$. با ادامهٔ کار به همین صورت، چون A متناهی است، به‌عنصری مثل $a_n \in A$ می‌رسیم که برای هر $a \in A$، $a_n \neq a$، داریم $a_n \not\mathscr{R} a$، لذا a_n ماکسیمال است.

برهان برای عنصر مینیمال نیز به همین راه دنبال می‌شود. ■

اینک اگر به الگوریتم جورکردن توپولوژیک برگردیم می‌بینیم که در هر تکرار گام ۲ی الگوریتم، از مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب اصلی $(A, \mathscr{R})$، یا از یک مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب به‌صورت $(B, \mathscr{R}')$ که در آن $\emptyset \neq B \subset A$ و $\mathscr{R}' = (B \times B) \cap \mathscr{R}$، یک عنصر ماکسیمال انتخاب کرده‌ایم. به‌موجب قضیهٔ ۳.۷ حداقل یک چنین عنصری (در هر تکرار) وجود دارد. پس، در قسمت دوم گام ۳، اگر x عنصر ماکسیمال منتخب (در گام ۲) باشد، از مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب فعلی، تمام عنصرهای به‌صورت (a, x) را برمی‌داریم. نتیجهٔ این کار، یک مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب کوچکتر است.

اینک به‌مطالعهٔ مفاهیم دیگری دربارهٔ مجموعه‌های جزئی‌ـمرتب می‌پردازیم.

بین عنصرهای ماکسیمال و مینیمال برای یک مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب، عناصر زیر، وقتی وجود داشته باشند، مورد توجه خاص‌اند.

تعریف ۱۸.۷ اگر $(A, \mathscr{R})$ مجموعه‌ای جزئی‌ـمرتب باشد، آن‌گاه عنصر $x \in A$ را کوچکترین عنصر می‌نامند اگر به‌ازای هر $a \in A$، $x \mathscr{R} a$. عنصر $y \in A$ را بزرگترین عنصر می‌گویند اگر به‌ازای هر $a \in A$، $a \mathscr{R} y$.

مثال ۴۱.۷ فرض کنید $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳\}$ و $\mathscr{R}$ رابطهٔ زیرمجموعه‌ای باشد.

الف) با $A = \mathscr{P}(\mathscr{U})$، مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب $(A, \subseteq)$ دارای کوچکترین عنصر $\emptyset$ و بزرگترین عنصر $\mathscr{U}$ است.

ب) برای

$$B = \mathscr{U} \text{ گردایهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی }$$

مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب $(B, \subseteq)$ دارای بزرگترین عنصر $\mathscr{U}$ است. در اینجا کوچکترین عنصر وجود ندارد، امّا سه عنصر مینیمال وجود دارند. □

مثال ۴۲.۷ برای ترتیبهای جزئی در قسمتهای (ب)، (ج)، و (د) مثال ۳۵.۷، به‌دست می‌آوریم که

۱. ترتیب جزئی در قسمت (ب) دارای بزرگترین عنصر ۸ و کوچکترین عنصر ۱ است.

۲. برای مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب قسمت (ج) بزرگترین عنصر یا کوچکترین عنصر وجود ندارد.

۳. برای ترتیب جزئی در قسمت (د) بزرگترین عنصر یا کوچکترین عنصر وجود ندارد. □

برای یک مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب $(A, \mathscr{R})$ دیده‌ایم که ممکن است چندین عنصر ماکسیمال و مینیمال وجود داشته باشند. دربارهٔ بزرگترین عنصر و کوچکترین عنصر چطور؟

قضیه ۴.۷ اگر مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب $(A, \mathscr{R})$دارای بزرگترین عنصر (یا کوچکترین عنصر) باشد، آن‌گاه این عنصر یکتاست.

برهان فرض کنید که $x, y \in A$ و هر دو بزرگترین عنصر باشند. چون x بزرگترین عنصر است، $y\mathscr{R}x$. همین‌طور $x\mathscr{R}y$، زیرا y بزرگترین عنصر است. چون $\mathscr{R}$ پادمتقارن است، $x = y$.

برهان مربوط به کوچکترین عنصر نیز به‌صورتی مشابه است. ■

تعریف ۱۹.۷ فرض کنید $(A, \mathscr{R})$ مجموعه‌ای جزئی‌ـمرتب با $B \subseteq A$ باشد. عنصر $x \in A$ را یک کران پایین B می‌نامند اگر $x\mathscr{R}b$ برای هر $b \in B$. اگر $y \in A$ و برای هر $b \in B$، $b\mathscr{R}y$، y را یک کران بالای B می‌گویند.

عنصر $x' \in A$ را بزرگترین کران پایین* (glb) B می‌نامند، اگر کران پایین B باشد و به‌ازای همهٔ کرانهای پایین x'' از مجموعهٔ B داشته باشیم $x''\mathscr{R}x'$. همچنین، $y' \in A$ را کوچکترین کران بالا(lub)ی B می‌گویند اگر کران بالای B باشد و به‌ازای همهٔ کرانهای بالای دیگرy'' از مجموعهٔ B، $y'\mathscr{R}y''$.

مثال ۴۳.۷ فرض کنید $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ با $A = \mathscr{P}(\mathscr{U})$، و فرض کنید $\mathscr{R}$ رابطهٔ زیرمجموعه‌ای روی A باشد. اگر $B = \{\{۱\}, \{۲\}, \{۱, ۲\}\}$، آن‌گاه $\{۱, ۲\}$، $\{۱, ۲, ۳\}$، $\{۱, ۲, ۴\}$، و $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ همگی کرانهای بالای B (در $(A, \mathscr{R})$) هستند، در حالی‌که $\{۱, ۲\}$ کوچکترین کران بالاست (و در B است.). ضمناً، $\emptyset$ یک بزرگترین کران پایین برای B است که در B نیست. □

مثال ۴۴.۷ فرض کنید $\mathscr{R}$، رابطهٔ «کوچکتر از یا برابر با» برای مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب $(A, \mathscr{R})$ باشد.

الف) اگر $A = \mathbf{R}$ و $B = [۰, ۱]$، آن‌گاه glbی B برابر ۰ و lubی B برابر ۱ است. توجه کنید که $۰, ۱ \in B$. برای $C = (۰, ۱]$، glbی C برابر ۰ و lubی C برابر ۱ است، و $۱ \in C$ امّا $۰ \notin C$.

ب) با حفظ $A = \mathbf{R}$، فرض کنید $B = \{q \in \mathbf{Q} | q^۲ < ۲\}$. در این‌صورت lubی B برابر

---

* glb نمادی برای *greatest lower bound* به‌معنای بزرگترین کران پایین است.ـم.

$\sqrt{۲}$ و glb‌ی B برابر $-\sqrt{۲}$ است و هیچکدام از این اعداد حقیقی در B نیستند.
ج) اینک فرض کنید $A = \mathbf{Q}$، و B را به‌صورت قسمت (ب) بگیرید. در اینجا B نه lub دارد و نه glb. □

این مثالها، ما را به‌قضیهٔ زیر هدایت می‌کنند.

قضیه ۵.۷ اگر $(A, \mathscr{R})$ مجموعه‌ای جزئی-مرتب و $B \subseteq A$، آن‌گاه اگر B دارای lub (glb) باشد، این lub(glb) یکتاست.

برهان اثبات را به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم. ■

این بخش را با آخرین ساختار مرتب به‌پایان می‌بریم.

تعریف ۲۰.۷ مجموعهٔ جزئی-مرتب $(A, \mathscr{R})$ را مشبکه می‌نامند اگر برای هر $x, y \in A$ عنصرهای $\operatorname{lub}\{x, y\}$ و $\operatorname{glb}\{x, y\}$ هر دو موجود باشند.

مثال ۴۵.۷ برای $A = \mathbf{N}$ و $x, y \in \mathbf{N}$، رابطهٔ $x\mathscr{R}y$ را به‌وسیلهٔ $x \leq y$ تعریف می‌کنیم. در این‌صورت $\operatorname{lub}\{x, y\} = \max\{x, y\}$، $\operatorname{glb}\{x, y\} = \min\{x, y\}$، و $(\mathbf{N}, \leq)$ مشبکه است. □

مثال ۴۶.۷ برای مجموعهٔ جزئی-مرتب مثال ۴۱.۷ (الف)، اگر $S, T \subseteq \mathscr{U}$، با

$$\operatorname{lub}\{S, T\} = S \cup T$$

و $\operatorname{glb}\{S, T\} = S \cap T$، آن‌گاه $(\mathscr{P}(\mathscr{U}), \subseteq)$ یک مشبکه است. □

مثال ۴۷.۷ مجموعهٔ جزئی-مرتب مثال ۳۵.۷ (د) را در نظر می‌گیریم. در اینجا، مثلاً به‌دست می‌آوریم که

$$\operatorname{lub}\{۲, ۳\} = ۶,\ \operatorname{lub}\{۳, ۶\} = ۶,\ \operatorname{lub}\{۵, ۷\} = ۳۵,\ \operatorname{lub}\{۷, ۱۱\} = ۳۸۵$$

و $\operatorname{lub}\{۱۱, ۳۵\} = ۳۸۵$

و $\operatorname{glb}\{۳, ۶\} = ۳,\ \operatorname{glb}\{۲, ۱۲\} = ۲,\ \operatorname{glb}\{۳۵, ۳۸۵\} = ۳۵$

امّا، گرچه $\operatorname{lub}\{۲, ۳\}$ وجود دارد، برای عناصر ۲ و ۳، glb وجود ندارد. به‌علاوه $\operatorname{glb}\{۵, ۷\}$ و $\operatorname{glb}\{۱۱, ۳۵\}$ و $\operatorname{glb}\{۳, ۳۵\}$، و $\operatorname{lub}\{۳, ۳۵\}$ (از جمله ملاحظات دیگر) را نداریم. بنابراین، این ترتیب جزئی، مشبّکه نیست. □

تمرینهای ۳.۷

۱. برای مجموعهٔ جزئی‐مرتب $(\mathscr{P}(\mathscr{U}), \subseteq)$، که در آن $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، نمودار هاسه را رسم کنید.

۲. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۶, ۹, ۱۸\}$. $\mathscr{R}$ را روی A به‌وسیلهٔ $x\mathscr{R}y$ به‌معنی $x|y$ بگیرید. برای مجموعهٔ جزئی‐مرتب $(A, \mathscr{R})$ نمودار هاسه را رسم کنید.

۳. فرض کنید $(A, \mathscr{R}_۱)$، $(B, \mathscr{R}_۲)$ دو مجموعهٔ جزئی‐مرتب باشند. رابطهٔ $\mathscr{R}$ را به‌وسیلهٔ $(a, b)\mathscr{R}(x, y)$ روی $A \times B$ به‌معنی $a\mathscr{R}_۱x$ و $b\mathscr{R}_۲y$ می‌گیریم. ثابت کنید که $\mathscr{R}$ یک ترتیب جزئی است.

۴. اگر در تمرین ۳، $\mathscr{R}_۱$ و $\mathscr{R}_۲$ ترتیبهای کلی باشند، آیا $\mathscr{R}$ ترتیبی کلی است؟

۵. نمودار هاسه در قسمت (الف) مثال ۳۵.۷ را به‌صورت توپولوژیک جور کنید.

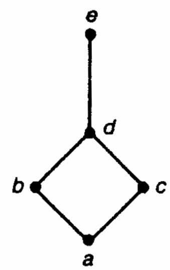
۶. برای $A = \{a, b, c, d, e\}$، نمودار هاسه را برای مجموعهٔ جزئی‐مرتب $(A, \mathscr{R})$ در شکل ۱۸.۷ نشان داده‌ایم.

الف) ماتریس رابطه‌ای برای $\mathscr{R}$ را تعیین کنید.

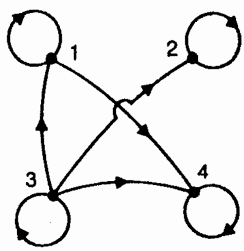
ب) گراف سودار G (روی A) را که مربوط به $\mathscr{R}$ است بسازید.

ج) مجموعهٔ جزئی‐مرتب $(A, \mathscr{R})$ را به‌صورت توپولوژیک جور کنید.

۷. گراف سودار G برای رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی مجموعهٔ $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ را در شکل ۱۹.۷ نشان داده‌ایم.



شکل۱۸.۷



شکل۱۹.۷

الف) تحقیق کنید که $(A, \mathscr{R})$ مجموعه‌ای جزئی-مرتب است و نمودار هاسهٔ آن را بیابید.

ب) $(A, \mathscr{R})$ را به‌صورت توپولوژیک جور کنید.

ج) چند یال سودار دیگر در شکل ۱۹.۷، برای بسط $(A, \mathscr{R})$ به یک مجموعهٔ با ترتیب کلی لازم است؟

۸. فرض کنید $\mathscr{R}$ رابطه‌ای ترایا روی یک مجموعهٔ A باشد. ثابت کنید که $\mathscr{R}$ ترتیب جزئی روی A است اگر و تنها اگر $\mathscr{R} \cap \mathscr{R}^c = \{(a, a) | a \in A\}$.

۹. ثابت کنید که هر مجموعهٔ جزئی-مرتب متناهی $(A, \mathscr{R})$ دارای یک عنصر مینیمال است.

۱۰. ثابت کنید که اگر یک مجموعهٔ جزئی-مرتب $(A, \mathscr{R})$ دارای کوچکترین عنصر باشد، این عنصر یکتاست.

۱۱. قضیهٔ ۵.۷ را ثابت کنید.

۱۲. مثالی از یک مجموعهٔ جزئی-مرتب با چهار عنصر ماکسیمال ولی بدون بزرگترین عنصر، بیاورید.

۱۳. اگر $(A, \mathscr{R})$ یک مجموعهٔ جزئی-مرتب بوده ولی کاملاً مرتب نباشد و $\emptyset \neq B \subset A$، آیا نتیجه می‌شود که $(B \times B) \cap \mathscr{R}$ مجموعهٔ B را به یک مجموعهٔ جزئی-مرتب، ولی نه با یک ترتیب کلی، بدل می‌کند؟

۱۴. اگر $\mathscr{R}$ رابطه‌ای روی A، و G گراف سودار مربوط به آن باشد، چگونه از روی G می‌توان تشخیص داد که $(A, \mathscr{R})$ مجموعه‌ای با ترتیب کلی است؟

۱۵. اگر G گراف سوداری برای رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی A، با $|A| = n$، و $(A, \mathscr{R})$ مجموعه‌ای با ترتیب کلی باشد، چند یال (از جمله طوقه‌ها) در G وجود دارد؟

۱۶. فرض کنید $M(\mathscr{R})$ ماتریس رابطه‌ای برای رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی A، با $|A| = n$ است. اگر $(A, \mathscr{R})$ ترتیبی جزئی باشد، چند ۱ در $M(\mathscr{R})$ ظاهر می‌شود؟

۱۷. **الف)** ساختار نمودار هاسه برای مجموعهٔ جزئی-مرتب کاملاً مرتب $(A, \mathscr{R})$ را شرح دهید، که در آن $|A| = n \geq ۱$.

ب) برای مجموعهٔ A که در آن $|A| = n \geq ۱$، چند رابطه روی A ترتیبهای کلی‌اند؟

۱۸. **الف)** برای $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$، فرض کنید $(A, \mathscr{R})$ مجموعه‌ای جزئی-مرتب باشد. اگر $M(\mathscr{R})$ ماتریس رابطه‌ای متناظر با آن باشد، چگونه می‌توان عنصر مینیمال مجموعهٔ جزئی-مرتب را از روی $M(\mathscr{R})$ تشخیص داد؟

ب) به سؤال مطروحه در قسمت (الف) پاسخ دهید به‌شرطی که به‌جای صفت «مینیمال»، صفت «ماکسیمال» قرار گیرد؟

ج) چگونه می‌توان وجود بزرگترین عنصر یا کوچکترین عنصر را در $(A, \mathscr{R})$، از روی ماتریس رابطه‌ای $M(\mathscr{R})$ تشخیص داد؟

۱۹. فرض کنید $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، با $A = \mathscr{P}(\mathscr{U})$، و $\mathscr{R}$ یک رابطهٔ زیرمجموعه‌ای روی A

باشد. برای هر یک از زیرمجموعه‌های B (A) در زیر، lub و glbی مجموعهٔ B را تعیین کنید.

الف) $B = \{\{۱\}, \{۲\}\}$

ب) $B = \{\{۱\}, \{۲\}, \{۳\}, \{۱, ۲\}\}$

ج) $B = \{\emptyset, \{۱\}, \{۲\}, \{۱, ۲\}\}$

د) $B = \{\{۱\}, \{۲\}, \{۱, ۳\}, \{۱, ۲, ۳\}\}$

ه) $B = \{\{۱\}, \{۲\}, \{۳\}, \{۱, ۲\}, \{۱, ۳\}, \{۲, ۳\}\}$

و) $B = \{\{۱\}, \{۲\}, \{۳\}, \{۱, ۲\}, \{۱, ۳\}, \{۲, ۳\}, \{۱, ۲, ۳\}\}$

۲۰. فرض کنید $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\} = \mathscr{U}$، با $A = \mathscr{P}(\mathscr{U})$، و فرض کنید $\mathscr{R}$ رابطهٔ زیرمجموعه‌ای روی A باشد. برای $B = \{\{۱\}, \{۲\}, \{۲, ۳\}\} \subseteq A$ هر یک از موارد زیر را تعیین کنید،

الف) تعداد کرانهای بالای B را که شامل (i) سه عنصر $\mathscr{U}$؛ (ii) چهار عنصر $\mathscr{U}$؛ (iii) پنج عنصر $\mathscr{U}$، باشد.

ب) تعداد کرانهای بالای موجود برای B را.

ج) lub را برای B.

د) تعداد کرانهای پایین موجود برای B را.

ه) glb برای B را.

۲۱. فرض کنید $(A, \mathscr{R})$ مجموعه‌ای جزئی‌ـ‌مرتب باشد. هر یک از گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) اگر $(A, \mathscr{R})$ مشبکه باشد، آنگاه این ترتیب ترتیبی کلی است.

ب) اگر $(A, \mathscr{R})$ ترتیبی کلی باشد، آنگاه $\mathscr{R}$ مشبکه است.

۲۲. اگر $(A, \mathscr{R})$ مشبکه و A متناهی باشد، ثابت کنید که $(A, \mathscr{R})$ دارای بزرگترین عنصر و کوچکترین عنصر است.

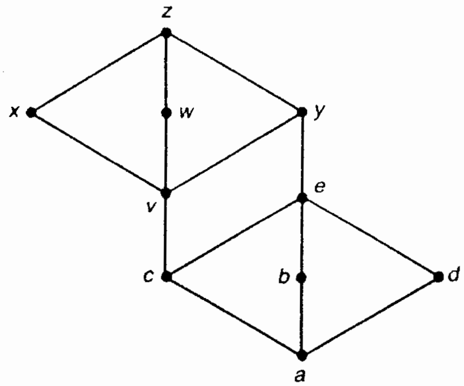
۲۳. برای $A = \{a, b, c, d, e, u, w, x, y, z\}$، مجموعهٔ جزئی‌ـ‌مرتب $(A, \mathscr{R})$ را که نمودار هاسهٔ آن در شکل ۲۰.۷ نشان داده شده‌است در نظر بگیرید. مطلوب است

الف) $\mathrm{glb}\{b, c\}$ ب) $\mathrm{glb}\{b, w\}$ ج) $\mathrm{glb}\{e, x\}$

د) $\mathrm{lub}\{c, b\}$ ه) $\mathrm{lub}\{d, x\}$ و) $\mathrm{lub}\{c, e\}$

ز) $\mathrm{lub}\{a, v\}$

آیا $(A, \mathscr{R})$ مشبکه است؟ آیا عنصر ماکسیمال وجود دارد؟ عنصر مینیمالی دارد؟ بزرگترین عنصر دارد؟ کوچکترین عنصر چطور؟



شکل ۲۰.۷

۲۴. فرض کنید $(A, \mathscr{R})$ مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب کلاً مرتب باشد. اگر برای هر $\emptyset \neq B \subseteq A$، مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب (کلاً مرتب) $(B, (B \times B) \cap \mathscr{R})$ دارای کوچکترین عنصر باشد، آن‌گاه $(A, \mathscr{R})$ را خوشترتیب می‌نامند. (این مفهوم را در بخش ۱.۴ دیدیم که در آن خوشترتیبی $(\mathbf{Z}^+, \leq)$ را برای اثبات اصل استقرای ریاضی به‌کار بردیم.)

برای هر یک از مجموعه‌های جزئی‌ـمرتب (کلاً مرتب) زیر تعیین کنید که مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب خوشترتیب است یا نه.

الف) $(\mathbf{N}, \leq)$ ب) $(\mathbf{Z}, \leq)$ ج) $(\mathbf{Q}, \leq)$

د) $(\mathbf{Q}^+, \leq)$ هـ) $(\mathbf{P}, \leq)$، که در آن P مجموعهٔ همهٔ اعداد اول است.

و) $(A, \leq)$، که در آن A زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\mathbf{Z}^+$ است.

ز) $(A, \leq)$، که در آن $\emptyset \neq A \subset \mathbf{Z}$، و A متناهی است.

۴.۷ رابطه‌های هم‌ارزی و افرازها

همان‌طور که قبلاً ذکر کردیم، رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی مجموعهٔ A، یک رابطهٔ هم‌ارزی است اگر بازتابی، متقارن، و ترایا باشد. برای هر مجموعهٔ $A \neq \emptyset$، رابطهٔ برابری همیشه رابطه‌ای هم‌ارزی روی A است که در آن دو عنصر A با هم رابطه دارند اگر همانند باشند؛ پس برابری، ویژگی «مثل هم بودن» را بین عناصر A برقرار می‌کند.

اگر رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی $\mathbf{Z}$ را که به‌وسیلهٔ $x\mathscr{R}y$ نشان می‌دهیم، به‌معنی $x - y$ مضرب ۲ است بگیریم، آن‌گاه $\mathscr{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathbf{Z}$ است، که در آن همهٔ اعداد زوج با هم در رابطه‌اند، همچنان‌که همهٔ اعداد فرد با هم در رابطه‌اند. در اینجا، مثلاً $8 = 4$ را نداریم، امّا، البته داریم $4\mathscr{R}8$ زیرا دیگر به‌بزرگی عدد توجهی نداریم و تنها به دو ویژگی «زوج بودن» و «فرد بودن» علاقه

داریم. این رابطه، $\mathbf{Z}$ را به دو زیرمجموعهٔ متشکل از اعداد زوج و فرد تفکیک می‌کند: $\mathbf{Z}=\{\cdots,-۳,-۱,۱,۳,\cdots\}\cup\{\cdots,-۴,-۲,۰,۲,۴,\cdots\}$. این تفکیک $\mathbf{Z}$ مثالی از افراز است، مفهومی که با رابطهٔ هم‌ارزی خیلی در رابطه است. در این بخش این بستگی را بررسی می‌کنیم و می‌بینیم که چگونه شمارش تعداد رابطه‌های هم‌ارزی روی مجموعهٔ متناهی به ما کمک می‌کند.

تعریف ۲۱.۷ مجموعهٔ A و مجموعهٔ اندیسگذار I را داریم. فرض کنید برای هر $i \in I$، $\emptyset \neq A_i \subseteq A$. در این‌صورت $\{A_i\}_{i\in I}$ افرازی از A است اگر (الف) $A = \cup_{i\in I} A_i$ و (ب) $A_i \cap A_j = \emptyset$ برای همهٔ مقادیر $i, j \in I$، $i \neq j$.

هر زیرمجموعهٔ A_i را یک خانه یا یک بلوک این افراز می‌نامند.

مثال ۴۸.۷ اگر $A = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰\}$، آن‌گاه هر یک از موارد زیر افرازی از A است.

الف) $A_۱ = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\},\ A_۲ = \{۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰\}$

ب) $A_۱ = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\},\ A_۲ = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰\}$

ج) $A_۱ = \{۱, ۲, ۳\},\ A_۲ = \{۴, ۶, ۷, ۹\},\ A_۳ = \{۵, ۸, ۱۰\}$

د) $A_i = \{i, i + ۵\},\ ۱ \leq i \leq ۵$ □

مثال ۴۹.۷ فرض کنید $A = \mathbf{R}$، و برای هر $i \in \mathbf{Z}$، فرض کنید $A_i = [i, i+۱]$. در این‌صورت $\{A_i\}_{i\in Z}$ افرازی از $\mathbf{R}$ را تشکیل می‌دهد. □

اینک ببینیم چگونه افرازها در رابطه‌های هم‌ارزی به‌کار می‌روند؟

تعریف ۲۲.۷ فرض کنید $\mathscr{R}$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی یک مجموعهٔ A باشد. برای هر $x \in A$، ردهٔ هم‌ارزی x را که با $[x]$ نشان می‌دهیم، به‌وسیلهٔ

$$[x] = \{y \in A | y\mathscr{R}x\}$$

تعریف می‌کنیم.

مثال ۵۰.۷ رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی $\mathbf{Z}$ را که به‌وسیلهٔ $x\mathscr{R}y$ تعریف می‌کنیم به‌معنی $۴|(x-y)$ می‌گیریم. برای این رابطهٔ هم‌ارزی به‌دست می‌آوریم که

$$[۰] = \{\ldots, -۸, -۴, ۰, ۴, ۸, ۱۲, \ldots\} = \{۴k | k \in \mathbf{Z}\}$$

$$[۱] = \{\dots, -۷, -۳, ۱, ۵, ۹, ۱۳, \dots\} = \{۴k + ۱ | k \in \mathbf{Z}\}$$

$$[۲] = \{\dots, -۶, -۲, ۲, ۶, ۱۰, ۱۴, \dots\} = \{۴k + ۲ | k \in \mathbf{Z}\}$$

$$[۳] = \{\dots, -۵, -۱, ۳, ۷, ۱۱, ۱۵, \dots\} = \{۴k + ۳ | k \in \mathbf{Z}\}$$

به‌علاوه، همچنین مثلاً داریم $[-۲] = [۲] = [۶]$، $[۳] = [۵۱]$، و $[۱] = [۱۷]$. مهمتر آنکه $\{[۰], [۱], [۲], [۳]\}$ افرازی از $\mathbf{Z}$ را به‌دست می‌دهد. □

این مثال ما را به حالت کلی زیر هدایت می‌کند.

قضیه ۶.۷ اگر $\mathscr{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ A باشد، و $x, y \in A$، آن‌گاه (الف) $x \in [x]$؛ (ب) $x\mathscr{R}y$ اگر و تنها اگر $[x] = [y]$؛ و (ج) $[x] = [y]$ یا $[x] \cap [y] = \emptyset$.

برهان الف) این قسمت از ویژگی بازتابی $\mathscr{R}$ نتیجه می‌شود.

ب) اگر $x\mathscr{R}y$، فرض کنید $w \in [y]$. در این‌صورت $w\mathscr{R}x$ و به‌دلیل اینکه $\mathscr{R}$ ترایاست، $w\mathscr{R}y$. بنابراین $w \in [y]$ و $[x] \subseteq [y]$. چون $\mathscr{R}$ متقارن است، $x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x$. لذا اگر $t \in [y]$، آن‌گاه $t\mathscr{R}y$ و بنابر ویژگی ترایایی، $t\mathscr{R}x$. بنابراین، $t \in [x]$ و $[y] \subseteq [x]$. در نتیجه، $[x] = [y]$.

برعکس، فرض کنید $[y] = [x]$. چون بنابر قسمت (الف) $x \in [x]$، پس، $x \in [y]$ یا $x\mathscr{R}y$.

ج) این ویژگی می‌گوید که رده‌های هم‌ارزی می‌توانند تنها به دو راه به هم مربوط شوند. یا همانندند و یا مجزا.

فرض می‌کنیم $[y] \neq [x]$ و نشان می‌دهیم که در این‌صورت نتیجه می‌شود که $[x] \cap [y] = \emptyset$. اگر $[x] \cap [y] \neq \emptyset$، آن‌گاه فرض کنید که $v \in A$ با $v \in [x]$ و $v \in [y]$. در این‌صورت $v\mathscr{R}x$ و $v\mathscr{R}y$، و چون $\mathscr{R}$ متقارن است، $x\mathscr{R}v$. امّا بنابر ویژگی ترایایی $(x\mathscr{R}v \text{ و } v\mathscr{R}y) \Rightarrow x\mathscr{R}y$. همچنین بنابر قسمت (ب) $x\mathscr{R}y \Rightarrow [x] = [y]$. این نتیجه‌گیری با پذیرهٔ $[x] \neq [y]$ متناقض است، لذا فرض $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ را کنار می‌گذاریم و قضیه ثابت می‌شود. ■

توجه کنید که اگر $\mathscr{R}$ رابطهٔ هم‌ارزی روی A باشد، آن‌گاه بنابر قسمتهای (الف) و (ج) قضیهٔ ۶.۷، رده‌های هم‌ارزی متمایزی که به‌وسیلهٔ $\mathscr{R}$ تعیین می‌شوند، افرازی از A را تشکیل می‌دهند.

مثال ۵۱.۷ اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و

$$\mathscr{R} = \{(۱,۱), (۲,۲), (۲,۳), (۳,۲), (۳,۳), (۴,۴), (۴,۵), (۵,۴), (۵,۵)\}$$

آن‌گاه $\mathscr{R}$ رابطهٔ هم‌ارزی روی A است. در اینجا $\{۱\} = [۱]$، $[۳] = \{۲,۳\} = [۲]$، $[۵] = \{۴,۵\} = [۴]$، و $A = [۱] \cup [۲] \cup [۴]$. □

مثال ۵۲.۷ در زبان **ANSI FORTRAN** حکم مشخص اجرانشدنی به‌نام حکم EQUIVALENCE وجود دارد که اجازه می‌دهد دو یا چند متغیر در برنامه‌ای مفروض، یک مکان در حافظه داشته باشند.

مثلاً در یک برنامه، حکم

```
EQUIVALENCE (A, C, P), (UP, DOWN)
```

به‌اطلاع همگردان می‌رساند که متغیرهای A، C، و P در یک مکان حافظه شریک‌اند، در حالی‌که UP و DOWN در مکان دیگر حافظه شریک‌اند. در اینجا، مجموعهٔ تمام متغیرهای برنامه به‌وسیلهٔ رابطهٔ هم‌ارزی $\mathscr{R}$ افراز می‌شوند، که در آن $V_۱\mathscr{R}V_۲$ اگر $V_۱$ و $V_۲$ متغیرهایی از برنامه باشند که در یک مکان حافظه شریک‌اند. $\square$

مثال ۵۳.۷ تا اینجا مثالهایی را دیدیم که چگونه یک رابطهٔ هم‌ارزی، افرازی از یک مجموعه را القا می‌کند، اینک به‌عقب برمی‌گردیم. اگر یک رابطهٔ هم‌ارزی $\mathscr{R}$ روی $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ افراز $A = \{۱,۲\} \cup \{۳\} \cup \{۴,۵,۷\} \cup \{۶\}$ را القا کند، $\mathscr{R}$ چیست؟

زیرمجموعهٔ $\{۱,۲\}$ی افراز را در نظر بگیرید. این زیرمجموعه نتیجه می‌دهد که $[۱] = \{۱,۲\} = [۲]$، و لذا $(۱,۱),(۲,۱),(۱,۲),(۲,۲),(۲,۱) \in \mathscr{R}$. (اولین دو جفت مرتب، برای ویژگی بازتابی $\mathscr{R}$ ضروری است؛ جفتهای دیگر تقارن را حفظ می‌کنند.)

به‌روشی مشابه، زیرمجموعهٔ $\{۴,۵,۷\}$ نتیجه می‌دهد که تحت $\mathscr{R}$،

$$[۴] = [۵] = [۷] = \{۴,۵,۷\}$$

و به‌عنوان یک رابطهٔ هم‌ارزی، $\mathscr{R}$ باید شامل $\{۴,۵,۷\} \times \{۴,۵,۷\}$ باشد. در واقع

$$\mathscr{R} = (\{۱,۲\} \times \{۱,۲\}) \cup (\{۳\} \times \{۳\}) \cup (\{۴,۵,۷\} \times \{۴,۵,۷\}) \cup (\{۶\} \times \{۶\})$$

و $|\mathscr{R}| = ۲^۲ + ۱^۲ + ۳^۲ + ۱^۲ = ۱۵$. $\square$

این مثالها ما را به‌قضیهٔ زیر هدایت می‌کنند.

قضیه ۷.۷ اگر A مجموعه‌ای باشد، آن‌گاه

الف) هر رابطهٔ هم‌ارزی روی A افرازی از A را القا می‌کند، و

ب) هر افراز A، یک رابطه هم‌ارزی $\mathscr{R}$ روی A به‌وجود می‌آورد.

برهان قسمت (الف) از روی قسمتهای (الف) و (ج) قضیهٔ ۶.۷ ثابت می‌شود. برای قسمت (ب)، با داشتن افراز $\{A_i\}_{i\in I}$ی A، رابطهٔ $\mathscr{R}$ را روی A که به‌وسیلهٔ $x\mathscr{R}y$ تعریف می‌کنیم به‌معنای x

و y در یک خانهٔ افراز هستند می‌گیریم. جزئیات تحقیق این را که $\mathscr{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است به‌خواننده واگذار می‌کنیم. ■

بر پایهٔ این قضیه و مثالهایی که بررسی کردیم قضیهٔ بعدی را بیان می‌کنیم. برهانی برای این قضیه در تمرین ۱۲ آخر این بخش آورده شده‌است.

قضیه ۸.۷ برای هر مجموعهٔ A، بین رابطه‌های هم‌ارزی روی A و افرازهای A تناظری یک به یک وجود دارد.

ابتدا علاقه‌مندیم که این قضیه را برای مجموعه‌های متناهی به‌کار بریم.

مثال ۵۴.۷ الف) اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$، چند رابطه از رابطه‌های موجود روی A، رابطه‌های هم‌ارزی‌اند؟

این مسأله را با شمارش افرازهای A، با در نظر گرفتن اینکه هر افراز A، یک توزیع عناصر (متمایز) A در ظروف همانند است که هیچ ظرفی تهی نمی‌ماند، حل می‌کنیم. با توجه به بخش ۳.۵ می‌دانیم که مثلاً تعداد $S(۶, ۲)$ افراز A در دو ظرف همانند ناتهی وجود دارد. با استفاده از اعداد نوع دوم استرلینگ، وقتی تعداد ظرفها از ۱ تا ۶ تغییر می‌کند، $\sum_{i=۱}^{۶} S(۶, i) = ۲۰۳$ افراز مختلف از A داریم. بنابراین ۲۰۳ رابطهٔ هم‌ارزی روی A وجود دارد.

ب) چند تا از رابطه‌های هم‌ارزی قسمت (الف) در $۱, ۲ \in [۴]$ صادق‌اند؟

با تعیین ۱، ۲، و ۴ به‌عنوان عنصر «همانند» تحت این رابطه‌های هم‌ارزی، مثل قسمت (الف)، برای مجموعهٔ $B = \{۱, ۳, ۵, ۶\}$ پس از محاسبه به‌دست می‌آوریم که $\sum_{i=۱}^{۴} S(۴, i) = ۱۵$ رابطهٔ هم‌ارزی روی A وجود دارند که برای آنها $[۴] = [۲] = [۱]$. □

با توجه به مطلب زیر به این بخش خاتمه می‌دهیم: اگر A یک مجموعهٔ متناهی با $|A| = n$ باشد، آن‌گاه برای هر $n \leq r \leq n^۲$، یک رابطهٔ هم‌ارزی $\mathscr{R}$ روی A با $|\mathscr{R}| = r$ وجود دارد اگر و تنها اگر اعدادی مانند $n_۱, n_۲, \ldots, n_k \in \mathbf{Z}^+$، وجود داشته باشند که $\sum_{i=۱}^{k} n_i = n$ و $\sum_{i=۱}^{k} n_i^۲ = r$.

تمرینهای ۴.۷

۱. اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $\mathscr{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A باشد که افراز

$$A = \{۱, ۲\} \cup \{۳, ۴\} \cup \{۵\}$$

را القا کند، $\mathscr{R}$ چیست؟

۲. برای $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$،

$$\mathscr{R} = \{(۱, ۱), (۱, ۲), (۲, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۴, ۴), (۴, ۵), (۵, ۴)(۵, ۵), (۶, ۶)\}$$

یک رابطه هم‌ارزی روی A است.

الف) در این رابطهٔ هم‌ارزی، [۱]، [۲]، و [۳] چه هستند؟

ب) چه افرازی از A، $\mathscr{R}$ را القا می‌کند؟

۳. اگر $A = A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳$، که در آن $A_۱ = \{۱, ۲\}$، $A_۲ = \{۲, ۳, ۴\}$، و $A_۳ = \{۵\}$، رابطهٔ $\mathscr{R}$ را روی A به‌وسیلهٔ $x\mathscr{R}y$ به‌معنی x و y هر دو در یک زیرمجموعهٔ A_i، $۱ \le i \le ۳$ هستند می‌گیریم. آیا $\mathscr{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است؟

۴ برای $A = \mathbf{R}^۲$، $\mathscr{R}$ را روی A به‌وسیلهٔ $(x_۱, y_۱)\mathscr{R}(x_۲, y_۲)$ به‌معنی $x_۱ = x_۲$ می‌گیریم.

الف) تحقیق کنید که $\mathscr{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A است.

ب) به‌صورت هندسی، رده‌های هم‌ارزی و افراز A را که به‌وسیلهٔ $\mathscr{R}$ القا شده‌اند شرح دهید.

۵. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} \times \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$، و $\mathscr{R}$ را به‌وسیلهٔ $(x_۱, y_۱)\mathscr{R}(x_۲, y_۲)$، به‌معنای $x_۱ + y_۱ = x_۲ + y_۲$، می‌گیریم.

الف) تحقیق کنید که $\mathscr{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A است.

ب) رده‌های هم‌ارزی $[(۱, ۳)]$، $[(۲, ۴)]$، و $[(۱, ۱)]$ را تعیین کنید.

ج) افراز A را که به‌وسیلهٔ $\mathscr{R}$ القا می‌شود تعیین کنید.

۶. اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$، $\mathscr{R}$ را روی A به‌وسیلهٔ $(x, y) \in \mathscr{R}$، به‌معنای $x - y$ مضرب ۳ است، می‌گیریم.

الف) نشان دهید که $\mathscr{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A است.

ب) رده‌های هم‌ارزی و افراز A را که به‌وسیلهٔ $\mathscr{R}$ القا می‌شود تعیین کنید.

۷. فرض کنید A مجموعه‌ای ناتهی است. مجموعهٔ B را ثابت بگیرید به قسمی که $B \subseteq A$. رابطهٔ $\mathscr{R}$ را روی $\mathscr{P}(A)$ به‌وسیلهٔ $X\mathscr{R}Y$، برای $X, Y \subseteq A$، تعریف می‌کنیم اگر $B \cap X = B \cap Y$.

الف) تحقیق کنید که $\mathscr{R}$ رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathscr{P}(A)$ است.

ب) اگر $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{۱, ۲\}$، افراز $\mathscr{P}(A)$ را که به‌وسیلهٔ $\mathscr{R}$ القا می‌شود بیابید.

ج) اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳\}$، مطلوب است $[X]$ اگر $X = \{۱, ۳, ۵\}$.

د) برای $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳\}$، چند ردهٔ هم‌ارزی در افرازی که به‌وسیلهٔ $\mathscr{R}$ القا می‌شود وجود دارند؟

۸. فرض کنید $A = \{v, w, x, y, z\}$. مطلوب است تعداد رابطه‌هایی روی A که (الف) بازتابی و متقارن باشند؛ (ب) رابطه‌های هم‌ارزی باشند؛ (ج) بازتابی و متقارن باشند ولی ترایا نباشند؛ (د) رابطه‌های هم‌ارزیی باشند که دقیقاً دو ردهٔ هم‌ارزی را تعیین کنند؛ (ه) رابطه‌های هم‌ارزیی باشند که برای آنها $w \in [x]$؛ (و) رابطه‌های هم‌ارزیی باشند که برای آنها $v, w \in [x]$؛ (ز) رابطه‌های هم‌ارزیی باشند که برای آنها $w \in [x]$ و $y \in [z]$؛ و (ح) رابطه‌های هم‌ارزیی باشند که برای آنها $w \in [x]$، $y \in [z]$، و $[x] \neq [z]$.

۹. اگر $|A| = ۳۰$ و رابطهٔ هم‌ارزی $\mathscr{R}$ روی A، مجموعهٔ A را به رده‌های هم‌ارزی $A_۱$، $A_۲$، و $A_۳$ افراز کند و $|A_۱| = |A_۲| = |A_۳|$، در این‌صورت $|\mathscr{R}|$ چقدر است؟

۱۰. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$. برای هر یک از مقادیر r در زیر، یک رابطهٔ هم‌ارزی $\mathscr{R}$ روی A، با $|\mathscr{R}| = r$ تعیین کنید، یا توضیح دهید چرا چنین رابطه‌ای وجود ندارد. (الف) $r = ۶$؛ (ب) $r = ۷$؛ (ج) $r = ۸$؛ (د) $r = ۹$؛ (ه) $r = ۱۱$؛ (و) $r = ۲۲$؛ (ز) $r = ۲۳$؛ (ح) $r = ۳۰$؛ (ط) $r = ۳۱$.

۱۱. جزئیات برهان قسمت (ب)ی قضیهٔ ۷.۷ را ذکر کنید.

۱۲. برای هر مجموعهٔ $A \neq \emptyset$، فرض کنید $P(A)$ معرف مجموعهٔ همهٔ افرازهای A، و $E(A)$ معرف مجموعهٔ همهٔ رابطه‌های هم‌ارزی روی A باشد. تابع $f : E(A) \to P(A)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر $\mathscr{R}$ رابطهٔ هم‌ارزی روی A باشد، آن‌گاه $f(\mathscr{R})$ افراز A است که به‌وسیلهٔ $\mathscr{R}$ القا می‌شود. ثابت کنید که f یک به یک و پوشاست، که در نتیجه قضیهٔ ۸.۷ را ثابت می‌کنید.

۵.۷ ماشینهای متناهی-حالت: فرایند مینیممسازی

در بخش ۳.۶ با دو ماشین متناهی-حالت برخورد کردیم که یک کار را انجام می‌دادند ولی تعداد حالتهای درونی متفاوتی داشتند. (شکلهای ۸.۶ و ۹.۶ را ببینید.) ماشین با تعداد حالتهای درونی بیشتر، شامل حالتهای زائد هستند-حالتهایی که می‌توان آنها را، به‌دلیل اینکه اعمالشان را حالتهای دیگری انجام می‌دهند، حذف کرد. چون مینیممسازی تعدادحالتهای یک ماشین، پیچیدگی و هزینهٔ آن را تقلیل می‌دهد، برای تبدیل ماشینی مفروض به‌ماشینی که حالتهای درونی زائد ندارد، باید فرایندی را جستجو کرد. این فرایند به فرایند مینیممسازی معروف است، و بسط آن متکی بر مفاهیم رابطهٔ هم‌ارزی و افراز است.

با ماشین متناهی-حالت $M = (S, \mathscr{I}, \mathscr{O}, \nu, \omega)$ شروع می‌کنیم. رابطهٔ $\mathrm{E}_۱$ را روی S به‌وسیلهٔ $s_۱ \mathrm{E}_۱ s_۲$ به‌معنای $\omega(s_۱, x) = \omega(s_۲, x)$ به‌ازای هر $x \in \mathscr{I}$ می‌گیریم. این رابطهٔ $\mathrm{E}_۱$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی S است، و S را به زیرمجموعه‌هایی افراز می‌کند به‌قسمی که دو حالت در یک زیرمجموعه‌اند اگر برای هر $x \in \mathscr{I}$ یک خروجی تولید کنند. در اینجا، حالتهای $s_۱$ و $s_۲$ را در سطح ۱ هم‌ارز می‌نامند.

برای هر $k \in \mathbf{Z}^+$، می‌گوییم که حالتهای $s_۱$ و $s_۲$، در سطح k هم‌ارزند اگر برای هر $x \in \mathscr{I}^k$، $\omega(s_۱, x) = \omega(s_۲, x)$. در اینجا ω بسط تابع خروجی مفروض به $S \times \mathscr{I}^*$ است. رابطهٔ در سطح k هم‌ارز، یک رابطهٔ هم‌ارزی روی S نیز هست؛ این رابطه، S را به زیرمجموعه‌هایی از حالتهای هم‌ارز در سطح k افراز می‌کند. برای اینکه نشان دهیم $s_۱$ و $s_۲$، هم‌ارز در سطح k هستند می‌نویسیم $s_۱ \mathrm{E}_k s_۲$.

سرانجام، اگر برای هر $k \geq ۱$، $s_۱, s_۲ \in S$ و $s_۱$، $s_۲$، در سطح k هم‌ارز باشند، آن‌گاه $s_۱$ و $s_۲$ را هم‌ارز می‌نامیم و می‌نویسیم $s_۱ \mathrm{E} s_۲$. وقتی این اتفاق می‌افتد، درمی‌یابیم که اگر $s_۱$ را در ماشینمان نگهداریم، $s_۲$ زائد خواهد بود و می‌توانیم آن را حذف کنیم. بنابراین هدف ما تعیین افرازی از S است که به‌وسیلهٔ E القا شده و انتخاب یک حالت برای هر ردهٔ هم‌ارزی است. در این‌صورت مینیمال بودن ماشین مفروض تحقق خواهد یافت.

برای انجام این کار، با مشاهدات زیر شروع می‌کنیم.

الف) اگر دو حالت در ماشین، در سطح ۲ هم‌ارز نباشند، آیا ممکن است که بتوانند در سطح ۳ هم‌ارز باشند؟ (یا به‌ازای $k \geq 4$، در سطح k هم‌ارز باشند؟)

پاسخ، نه است. اگر $s_1, s_2 \in S$ و $s_1 \not{E}_2 s_2$ (یعنی s_1 و s_2 در سطح ۲ هم‌ارز نباشند)، آن‌گاه حداقل یک رشتهٔ $xy \in \mathscr{I}^2$ وجود دارد به‌قسمی که

$$\omega(s_1, xy) = v_1v_2 \neq w_1w_2 = \omega(s_2, xy)$$

که در آن $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathscr{O}$. لذا با در نظر گرفتن E_3، به‌دست می‌آوریم که $s_1 \not{E}_3 s_2$ زیرا برای هر $z \in \mathscr{I}$، $\omega(s_1, xyz) = v_1v_2v_3 \neq w_1w_2w_3 = \omega(s_2, xyz)$.

به‌طورکلی، برای یافتن حالتهای در سطح $(k+1)$ هم‌ارز، به‌حالتهای در سطح k هم‌ارز می‌نگریم.

ب) اینک فرض می‌کنیم که $s_1, s_2 \in S$ و $s_1 E_2 s_2$. می‌خواهیم تعیین کنیم که آیا $s_1 E_3 s_2$؟ یعنی آیا به‌ازای همهٔ رشته‌های $x_1x_2x_3 \in \mathscr{I}^3$، $\omega(s_1, x_1x_2x_3) = \omega(s_2, x_1x_2x_3)$؟ ببینیم چه اتفاقی می‌افتد. ابتدا به‌دست می‌آوریم $\omega(s_1, x_1) = \omega(s_2, x_2)$، زیرا $s_1E_2s_2 \Rightarrow s_1E_1s_2$. در این‌صورت انتقالی به‌حالتهای $\nu(s_1, x_1)$ و $\nu(s_2, x_1)$ وجود دارد. در نتیجه اگر $\nu(s_1, x_1)E_2\nu(s_2, x_1)$ (یعنی، اگر $\omega(\nu(s_1, x_1), x_2x_3) = \omega(\nu(s_2, x_1), x_2x_3)$)، آن‌گاه $(\omega(s_1, x_1x_2x_3) = \omega(s_2, x_1x_2x_3))$.

به‌طورکلی، برای $s_1, s_2 \in S$ داریم $s_1E_{k+1}s_2$ اگر (الف) $s_1E_ks_2$ و (ب) برای هر $x \in \mathscr{I}$، $\nu(s_1, x)E_k\nu(s_2, x)$.

اینک با این مشاهدات که راهنمای ما هستند، الگوریتمی را برای مینیممسازی ماشین متناهی-حالت M معرفی می‌کنیم.

گام ۱: قرار دهید $k = 1$. با بررسی سطرها در جدول حالتهای M، حالتهایی را که در سطح ۱ هم‌ارزند تعیین می‌کنیم. برای $s_1, s_2 \in S$ نتیجه می‌شود که وقتی s_1 و s_2 دارای سطرهای خروجی یکسان‌اند، $s_1E_1s_2$. فرض کنید P_1، افراز S باشد که به‌وسیلهٔ E_1 القا می‌شود.

گام ۲: بعد از تعیین P_k، با توجه به $s_1E_{k+1}s_2$ اگر $s_1E_ks_2$ را داشته باشیم و به‌ازای هر $x \in \mathscr{I}$، $\nu(s_1, x)E_k\nu(s_2, x)$، P_{k+1} را به‌دست می‌آوریم. اگر s_1 و s_2 در یک زیرمجموعه از افراز P_k باشند، داریم $s_1E_ks_2$. همچنین برای هر $x \in \mathscr{I}$، $\nu(s_1, x)E_k\nu(s_2, x)$، به‌شرطی که $\nu(s_1, x)$ و $\nu(s_2, x)$ در یک خانه از افراز P_k باشند. بدین راه، P_{k+1} از روی P_k به‌دست می‌آید.

گام ۳: اگر $P_{k+1} = P_k$، فرایند کامل است. از هر ردهٔ هم‌ارزی یک حالت انتخاب می‌کنیم و این گامها مینیمال بودن M را محقق می‌سازند.

اگر $P_{k+1} \neq P_k$، به k یک واحد اضافه می‌کنیم و به گام ۲ برمی‌گردیم.

این الگوریتم را در مثال زیر نشان می‌دهیم.

مثال ۵۵.۷ با $\mathscr{I} = \mathscr{O} = \{0, 1\}$، فرض کنید M به‌وسیلهٔ جدول حالت ۱.۷ داده شده باشد. با نگاهی به‌سطرهای خروجی، می‌بینیم که s_3 و s_4، در سطح ۱ هم‌ارزند، همان‌طور که s_2، s_5، و s_6، در سطح ۱ هم‌ارزند. در اینجا، E_1 مجموعهٔ S را به‌صورت زیر افراز می‌کند

$$P_1 : \{s_1\}, \{s_2, s_5, s_6\}, \{s_3, s_4\}$$

برای هر $s \in S$ و هر $k \in \mathbf{Z}^+$، $s\mathrm{E}_k s$، لذا وقتی این فرایند را برای تعیین P_2 ادامه می‌دهیم، با رده‌های هم‌ارزی تنها یک حالت سر و کار نداریم.

چون $s_3\mathrm{E}_1 s_4$، شانسی وجود دارد که بتوانیم داشته باشیم $s_3\mathrm{E}_2 s_4$. در اینجا $\nu(s_3, 0) = s_2$، $\nu(s_4, 0) = s_5$ با $s_2\mathrm{E}_1 s_5$، و $\nu(s_3, 1) = s_4$، $\nu(s_4, 1) = s_3$ با $s_4\mathrm{E}_1 s_3$. بنابراین، برای هر $x \in \mathscr{I}$، $\nu(s_3, x)\mathrm{E}_1\nu(s_4, x)$، و $s_3\mathrm{E}_2 s_4$. همچنین، $\nu(s_2, 0) = s_5$، $\nu(s_5, 0) = s_2$ با $s_5\mathrm{E}_1 s_2$ و $\nu(s_2, 1) = s_2$، $\nu(s_5, 1) = s_5$ با $s_2\mathrm{E}_1 s_5$. پس $s_2\mathrm{E}_2 s_5$. سرانجام، $\nu(s_5, 0) = s_2$ و $\nu(s_6, 0) = s_1$، امّا $s_2 \not\mathrm{E}_1 s_1$، لذا $s_5 \not\mathrm{E}_2 s_6$. (چرا امکان $s_2\mathrm{E}_2 s_6$ را بررسی نمی‌کنیم؟) رابطهٔ هم‌ارزی E_2، مجموعهٔ S را به‌صورت زیر افراز می‌کند

$$P_2 : \{s_1\}, \{s_2, s_5\}, \{s_3, s_4\}, \{s_6\}$$

چون $P_2 \neq P_1$، این فرایند را برای به‌دست آوردن P_3 ادامه می‌دهیم. برای تعیین وجود یا عدم وجود $s_2\mathrm{E}_3 s_5$، می‌بینیم که $\nu(s_2, 0) = s_5$، $\nu(s_5, 0) = s_2$ و $s_5\mathrm{E}_2 s_2$. همچنین $\nu(s_2, 1) = s_2$، $\nu(s_5, 1) = s_5$ و $s_2\mathrm{E}_2 s_5$. با $s_2\mathrm{E}_2 s_5$ و $\nu(s_2, x)\mathrm{E}_2\nu(s_5, x)$ برای هر $x \in \mathscr{I}$، داریم $s_2\mathrm{E}_3 s_5$. برای s_3 و s_4، $(\nu(s_3, 0) = s_2)\mathrm{E}_2(s_5 = \nu(s_4, 0))$ و

جدول ۱.۷

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_1	s_4	s_3	۰	۱
s_2	s_5	s_2	۱	۰
s_3	s_2	s_4	۰	۰
s_4	s_5	s_3	۰	۰
s_5	s_2	s_5	۱	۰
s_6	s_1	s_6	۱	۰

جدول ۲.۷

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_1	s_3	s_3	۰	۱
s_2	s_2	s_2	۱	۰
s_3	s_2	s_3	۰	۰
s_6	s_1	s_6	۱	۰

$(s_3 = \nu(s_4, 1))\mathrm{E}_2(\nu(s_3, 1) = s_4)$، پس $s_3\mathrm{E}_3s_4$ و افراز E_3

$$P_3 : \{s_1\}, \{s_2, s_5\}, \{s_3, s_4\}, \{s_6\}$$

را القا می‌کند.

اینک که $P_2 = P_3$، پس فرایند، همان‌طور که در گام ۳ی الگوریتم نشان داده شد، کامل شده‌است. متوجه می‌شویم که s_5 و s_4 حالتهای زایدند. با حذف آنها از جدول و با قرار دادن s_2 و s_3 به ترتیب به‌جای هر مورد بعدی آنها، به‌جدول ۲.۷ می‌رسیم. این ماشین مینیمالی است که همان کارهایی را انجام می‌دهد که ماشین در جدول ۱.۷ انجام داده است.

اگر نخواهیم حالتهایی را که اندیس آنها را حذف می‌کنیم داشته باشیم، می‌توانیم همیشه در ماشین مینیمال به‌حالتها برچسب مجدد بزنیم. در اینجا خواهیم داشت s_1، s_2، s_3، $s_4(= s_6)$، امّا این s_4 همان s_4ی نیست که در جدول ۱.۷ با آن شروع کردیم. □

ممکن است تعجب کنید که چگونه فهمیدیم که وقتی $P_2 = P_3$، باید فرایند را متوقف کنیم. زیرا آخر نمی‌شود اتفاق بیفتد که احتمالاً $P_4 \neq P_3$ یا $P_4 = P_3$ امّا $P_5 \neq P_4$؟ برای اینکه ثابت کنیم این اتفاق هرگز رخ نمی‌دهد، مفهوم زیر را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۳.۷ اگر P_1 و P_2 دو افراز از مجموعهٔ A باشند، آن‌گاه P_2 را پالایشی از P_1 گوییم و می‌نویسیم $P_2 \leq P_1$ اگر هر خانهٔ P_2 در خانه‌ای از P_1 جای داشته باشد.

در فرایند مینیممسازی مثال ۵۵.۷، داشتیم $P_3 = P_2 \leq P_1$. هر وقت این الگوریتم را به‌کار می‌بریم، وقتی P_{k+1} را از P_k به‌دست می‌آوریم، همواره می‌بینیم که $P_{k+1} \leq P_k$، زیرا در سطح هم‌ارزی، $(k+1)$ هم‌ارزی در سطح k را نتیجه می‌دهد. لذا هر افراز که پس از افراز دیگر می‌آید، افراز قبلی را پالایش می‌کند.

قضیه ۹.۷ در به‌کار بردن فرایند مینیممسازی، اگر $k \geq 1$ و P_k و P_{k+1} افرازهایی با $P_{k+1} = P_k$

باشند، آن‌گاه برای هر $r \geq k + ۱$ خواهیم داشت $P_r = P_{r+۱}$.

برهان اگر چنین نباشد، فرض می‌کنم $r(\geq k+۱)$ کوچکترین اندیسی باشد که برای آن $P_r \neq P_{r+۱}$. در این‌صورت $P_{r+۱} < P_r$، لذا $s_۱, s_۲ \in S$یی وجود دارند که $s_۱ \mathrm{E}_r s_۲$، امّا $s_۱ \not{\mathrm{E}}_{r+۱} s_۲$. ولی برای هر $x \in \mathscr{I}$، $s_۱ \mathrm{E}_r s_۲ \Rightarrow \nu(s_۱, x)\mathrm{E}_{r-۱}\nu(s_۲, x)$ و با $P_r = P_{r-۱}$، به‌دست می‌آوریم که برای هر $x \in \mathscr{I}$، $\nu(s_۱, x)\mathrm{E}_r\nu(s_۲, x)$، لذا $s_۱\mathrm{E}_{r+۱}s_۲$. در نتیجه، $P_r = P_{r+۱}$.■

به این بخش با مفهوم وابستهٔ زیر خاتمه می‌دهیم. فرض کنید M ماشینی متناهی‌ـحالت با $s_۱, s_۲ \in S$ باشد، که $s_۱$ و $s_۲$ هم‌ارز نیستند. در این‌صورت باید کوچکترین عدد صحیح $k \geq ۰$ وجود داشته باشد به قسمی که $s_۱ \mathrm{E}_k s_۲$ ولی $s_۱ \not{\mathrm{E}}_{k+۱} s_۲$. برای $k = ۰$، $s_۱$ و $s_۲$ را داریم که سطرهای خروجی متفاوتی را در جدول حالتهای M تولید می‌کنند. در این حالت به‌آسانی xی متعلق به $\mathscr{I}$ می‌توان یافت به‌قسمی که $\omega(s_۱, x) \neq \omega(s_۲, x)$، و این x این حالتهای ناهم‌ارز را از هم متمایز می‌سازد. برای $k \geq ۱$، $s_۱$ و $s_۲$ سطرهای همانندی را در جدول تولید می‌کنند. امّا اگر بخواهیم این حالتها را از هم تمیز دهیم لازم است که دنبالهٔ $x = x_۱x_۲ \ldots x_k x_{k+۱} \in \mathscr{I}^{k+۱}$ را به‌قسمی بیابیم که $\omega(s_۱, x) \neq \omega(s_۲, x)$، گرچه داریم $\omega(s_۱, x_۱x_۲ \ldots x_k) = \omega(s_۲, x_۱x_۲ \ldots x_k)$. این رشتهٔ x را رشتهٔ تمیزدهندهٔ حالتهای $s_۱$ و $s_۲$ می‌نامند. ممکن است بیش از یک چنین رشته‌ای وجود داشته باشد، امّا هر یک دارای درازای (مینیمال) $k + ۱$ است.

قبل از اینکه بخواهیم الگوریتمی برای پیداکردن یک رشتهٔ تمیزدهنده برای دو حالت ناهم‌ارز $s_۱, s_۲ \in S$ به‌دست آوریم، ایدهٔ خاصّی را که در اینجا نقشی دارد بررسی می‌کنیم. اگر $k \in \mathbf{Z}^+$ و $s_۱\mathrm{E}_k s_۲$، امّا $s_۱ \not{\mathrm{E}}_{k+۱} s_۲$، چه نتیجه‌ای می‌توانیم بگیریم؟ به‌دست می‌آوریم که

$$\begin{aligned} s_۱ \not{\mathrm{E}}_{k+۱} s_۲ &\Rightarrow \exists x_۱ \in \mathscr{I}[\nu(s_۱, x_۱) \not{\mathrm{E}}_k \nu(s_۲, x_۱)] \\ &\Rightarrow \exists x_۲ \in \mathscr{I}[\nu(\nu(s_۱, x_۱), x_۲) \not{\mathrm{E}}_{k-۱} \nu(\nu(s_۲, x_۱), x_۲)] \end{aligned}$$

یا

$$\exists x_۲ \in \mathscr{I}[\nu(s_۱, x_۱x_۲) \not{\mathrm{E}}_{k-۱} \nu(s_۲, x_۱x_۲)]$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists x_۳ \in \mathscr{I}[\nu(s_۱, x_۱x_۲x_۳) \not{\mathrm{E}}_{k-۲} \nu(s_۲, x_۱x_۲x_۳)] \\ &\Rightarrow \ldots \\ &\Rightarrow \exists x_i \in \mathscr{I}[\nu(s_۱, x_۱x_۲ \ldots x_i) \not{\mathrm{E}}_{k+۱-i} \nu(s_۲, x_۱x_۲ \ldots x_i)] \\ &\Rightarrow \ldots \\ &\Rightarrow \exists x_k \in \mathscr{I}[\nu(s_۱, x_۱x_۲ \ldots x_k) \not{\mathrm{E}}_۱ \nu(s_۱, x_۱x_۲ \ldots x_k)] \end{aligned}$$

این گزارهٔ آخر دربارهٔ حالتهای $\nu(s_۱, x_۱x_۲ \ldots x_k)$، $\nu(s_۲, x_۱x_۲ \ldots x_k)$ که در سطح ۱

هم‌ارز نیستند نتیجه می‌دهد که بتوانیم $x_{k+1} \in \mathscr{I}$ی را به‌دست آوریم که در آن

$$\omega(\nu(s_1, x_1x_2 \dots x_k), x_{k+1}) \neq \omega(\nu(s_2, x_1x_2 \dots x_k), x_{k+1}) \qquad (1)$$

یعنی، این نمادهای تک خروجی از $\mathscr{O}$، متفاوت‌اند.

نتیجه‌ای که با برابری (۱) نشان داده‌ایم نتیجه می‌دهد که

$$\omega(s_1, x_1x_2 \dots x_kx_{k+1}) \neq \omega(s_2, x_1x_2 \dots x_kx_{k+1})$$

در این حالت دو رشتهٔ خروجی به‌درازای $k+1$ داریم که تا اولین k نماد هماهنگی دارند و در $(k+1)$امین نماد متفاوت‌اند.

مشاهدات بالا را در پیدا کردن الگوریتم زیر به‌کار خواهیم برد. در این الگوریتم داریم $s_1, s_2 \in S$ با $s_1 \mathrm{E}_k s_2$ ولی $s_1 \not\mathrm{E}_{k+1} s_2$ به‌ازای مقداری (ثابت) از $k \in \mathbf{Z}^+$.

برای یافتن رشتهٔ تمیزدهندهٔ مینیمال، الگوریتم زیر را به‌کار برید، که در آن از افرازهای فرایندهای مینیممسازی P_1، P_2، ...، P_k، P_{k+1} استفاده می‌شود.

گام ۱: چون $s_1 \mathrm{E}_k s_2$ امّا $s_1 \not\mathrm{E}_{k+1} s_2$، $x_1 \in \mathscr{I}$ را به‌قسمی انتخاب کنید که

$$\nu(s_1, x_1) \not\mathrm{E}_k \nu(s_2, x_1)$$

(اگر چنین x_1ی را نتوان یافت، آن‌گاه به‌ازای هر $x \in \mathscr{I}$، $s_1 \mathrm{E}_k s_2$، و $\nu(s_1, x)\mathrm{E}_k\nu(s_2, x)$، لذا $s_1\mathrm{E}_{k+1}s_2$.)

گام ۲: اگر $k = 1$، آن‌گاه

حالتهای $\nu(s_1, x_1)$ و $\nu(s_2, x_1)$ در خانه‌های مختلف P_1 باشند $\Rightarrow \nu(s_1, x_1) \not\mathrm{E}_k \nu(s_2, x_1)$

لذا آنها سطرهای خروجی متفاوتی را تعیین می‌کنند. $x_2 \in \mathscr{I}$ را با شرط

$$\omega(\nu(s_1, x_1), x_2) \neq \omega(\nu(s_2, x_1), x_2)$$

یعنی $\omega(s_1, x_1x_2) \neq \omega(s_2, x_1x_2)$ را بیابید ــ و $x = x_1x_2$ رشتهٔ تمیزدهندهٔ مینیمال برای s_1 و s_2 است.

اگر $k > 1$، آن‌گاه شمارشگر را در $i = k$ قرار دهید و به‌گام ۳ بروید.

گام ۳: وقتی که $i > 1$، کارهای زیر را کلاً $k-1$ بار انجام دهید. این‌کار، نمادهای $x_2, x_3, \cdots, x_k$ (از $\mathscr{I}$) را برای رشتهٔ تمیزدهندهٔ $x_1x_2x_3 \dots x_kx_{k+1}$ (برای حالتهای s_1 و s_2) به‌دست می‌دهد.

الف) چون $\nu(s_2, x_1x_2\ldots x_{k+1-i})\ \not{\mathrm{E}}_i\ \nu(s_1, x_1x_2\ldots x_{k+1-i})$، افراز P_i را برای تعیین x_{k+2-i} به‌کار برید به‌قسمی که

$$\nu(s_1, x_1x_2\ldots x_{k+1-i}x_{k+2-i})\ \not{\mathrm{E}}_{i-1}\ \nu(s_2, x_1x_2\ldots x_{k+1-i}x_{k+2-i})$$

ب) از مقدار شمارشگر i یکی کم کنید.

گام ۴: در این مرحله، مقدار شمارشگر i برابر ۱ است، و برای $k \in \mathbf{Z}^+$، $k \geq 2$ داریم

$$\nu(s_1, x_1x_2\ldots x_k)\ \not{\mathrm{E}}_1\ \nu(s_2, x_1x_2\ldots x_k)$$

اینک P_1 را به‌کار برید و $x_{k+1} \in \mathscr{I}$ را انتخاب کنید به‌قسمی که

$$\omega(\nu(s_1, x_1x_2\ldots x_k), x_{k+1}) \neq \omega(\nu(s_2, x_1x_2\ldots x_k), x_{k+1})$$

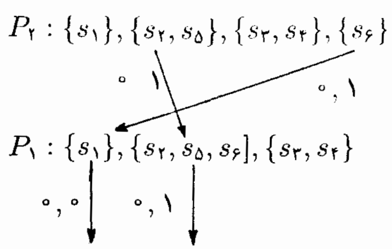
یعنی

$$\omega(s_1, x_1x_2\ldots x_kx_{k+1}) \neq \omega(s_2, x_1x_2\ldots x_kx_{k+1})$$

در این‌صورت $x_1x_2\ldots x_kx_{k+1}$ رشتهٔ تمیزدهندهٔ مینیمال برای حالتهای s_1 و s_2 است.

الگوریتم بالا در مثالهای زیر نشان داده شده‌است.

مثال ۵۶.۷ از مثال ۵۵.۷، افرازهایی را که در زیر نشان داده شده‌اند به‌دست آوردیم. در اینجا $s_2\mathrm{E}_1s_6$ امّا $s_2\ \not{\mathrm{E}}_2 s_6$. بنابراین رشتهٔ ورودی x به‌درازای دو را جستجو می‌کنیم به‌قسمی که $\omega(s_2, x) \neq \omega(s_6, x)$. با به‌کار بردن گام ۱ الگوریتم، با P_2 شروع می‌کنیم، که در آن برای s_2 و s_6 به‌دست می‌آوریم که $\omega(s_2, 0) = 1 = \omega(s_6, 0)$، امّا $\nu(s_2, 0) = s_5$ و $\nu(s_6, 0) = s_1$ در خانه‌های مختلف P_1اند ــ یعنی $\nu(s_2, 0)\ \not{\mathrm{E}}_1\ \nu(s_6, 0)$. (ورودی ۰ و خروجی ۱ برچسبهایی برای پیکانهایی که از خانه‌های P_2 به‌خانه‌های P_1 می‌روند فراهم می‌کنند.) بنابر گام ۲ی الگوریتم $\omega(\nu(s_2, 0), 0) = 1 \neq 0 = \omega(\nu(s_6, 0), 0)$. بنابراین $x = 00$ یک دنبالهٔ تمیزدهندهٔ مینیمال برای s_2 و s_6 است، زیرا $\omega(s_2, 00) = 11 \neq 10 = \omega(s_6, 00)$. □



مثال ۵۷.۷ با کاربرد فرایند مینیممسازی در ماشینی که به‌وسیلهٔ جدول حالتهای قسمت (الف) جدول ۳.۷ داده شده‌است، افرازهای قسمت (ب)ی جدول را به‌دست می‌آوریم. (در اینجا $P_4 = P_3$.) با کاربرد این الگوریتم در حالتهای s_1 و s_4 که در سطح ۲ هم‌ارزند امّا در سطح ۳ هم‌ارز نیستند، نتیجه‌های زیر را به‌دست می‌آوریم:

۱. چون $s_1 \not{E}_3 s_4$، در گام ۱ الگوریتم، برای یافتن $x \in \mathscr{I}$ (یعنی $x_1 = 1$) از افراز P_3 استفاده می‌کنیم، به‌قسمی که $(\nu(s_1, 1) = s_2) \not{E}_2 (s_5 = \nu(s_4, 1))$.

۲. در اینجا $k = 2 > 1$، پس در گام ۲ شمارشگر i را برابر ۲ قرار می‌دهیم و آن‌گاه به‌گام ۳ می‌رویم.

۳. $\nu(s_1, 1) \not{E}_2 \nu(s_4, 1) \Rightarrow \exists x_2 \in \mathscr{I}$ (در اینجا $x_2 = 1$) با

$$(\nu(s_1, 1), 1) \not{E}_1 (\nu(s_4, 1), 1)$$

یا $\nu(s_1, 11) \not{E}_1 \nu(s_4, 11)$. افراز P_2 را برای به‌دست آوردن $x_2 = 1$ به‌کار بردیم.

۴. با تقلیل ۱ واحد از مقدار شمارشگر، اینک به $i = 1$ می‌رسیم. پس به‌گام ۳ خاتمه داده‌ایم و به‌گام ۴ می‌رویم. اینک افراز P_1 را به‌کار می‌بریم که در آن برای $x_3 = 1 \in \mathscr{I}$

$$\omega(\nu(s_1, 11), 1) = 0 \neq 1 = \omega(\nu(s_4, 11), 1)$$

یا

$$\omega(s_1, 111) = 100 \neq 101 = \omega(s_4, 111)$$

جدول ۳.۷

	ν		ω	
	0	1	0	1
s_1	s_4	s_2	0	1
s_2	s_5	s_2	0	0
s_3	s_4	s_2	0	1
s_4	s_3	s_5	0	1
s_5	s_2	s_3	0	0

(الف)

$P_3 : \{s_1, s_3\}, \{s_2\}, \{s_4\}, \{s_5\}$

$1, 1$ $\qquad$ $1, 1$

$P_2 : \{s_1, s_3, s_4\}, \{s_2\}, \{s_5\}$

$1, 0$ $\qquad$ $1, 0$

$P_1 : \{s_1, s_3, s_4\}, \{s_2, s_5\}$

$1, 1$ $\qquad$ $1, 0$

(ب)

جدول ۴.۷

(الف)

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_1	s_4	s_1	۰	۱
s_2	s_3	s_3	۱	۰
s_3	s_1	s_4	۱	۰
s_4	s_1	s_3	۰	۱
s_5	s_3	s_3	۱	۰

(ب)

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_1	s_6	s_3	۰	۰
s_2	s_5	s_4	۰	۱
s_3	s_6	s_2	۱	۱
s_4	s_4	s_3	۱	۰
s_5	s_2	s_4	۰	۱
s_6	s_4	s_6	۰	۰

(ج)

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_1	s_6	s_3	۰	۰
s_2	s_3	s_1	۰	۰
s_3	s_2	s_4	۰	۰
s_4	s_7	s_4	۰	۰
s_5	s_6	s_7	۰	۰
s_6	s_5	s_2	۱	۰
s_7	s_4	s_1	۰	۰

در قسمت (ب)ی جدول ۳.۷ می‌بینیم که چگونه به‌رشتهٔ تمیزدهندهٔ مینیمال $x = ۱۱۱$ برای این حالتها رسیده‌ایم. (توجه کنید که چگونه این قسمت جدول نیز نشان می‌دهد که ۱۱ رشتهٔ تمیزدهندهٔ مینیمال برای حالتهای s_2 و s_5 است که در سطح ۱ هم‌ارزند ولی در سطح ۲ هم‌ارز نیستند.)□

هنوز مطالب زیادی وجود دارند که می‌توان دربارهٔ ماشینهای متناهی‐حالت عرضه کرد. علاوه بر آنچه نیاورده‌ایم، از ارائهٔ هر توضیح دقیق یا ارائهٔ برهان برای علت کارا بودن فرایند مینیمم‌سازی اجتناب کرده‌ایم. خوانندهٔ علاقه‌مند باید برای مطالعهٔ بیشتر این عناوین به‌مراجع این فصل رجوع کند.

تمرینهای ۵.۷

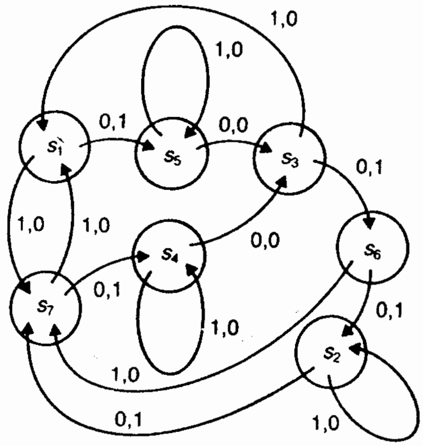
۱. فرایند مینیمم‌سازی را برای هر یک از ماشینهای جدول ۴.۷ به‌کار برید.

۲. برای ماشین تمرین ۱ (ج)، رشتهٔ تمیزدهنده را برای هر دو حالت داده شده در زیر بیابید: (الف) s_1, s_5؛ (ب) s_2, s_3؛ (ج) s_5, s_7.

۳. فرض کنید M ماشین متناهی‐حالتی باشد که در نمودار حالت شکل ۲۱.۷ ارائه داده‌ایم.

الف) ماشین M را به‌صورت مینیمم در آورید.

ب) رشتهٔ‌تمیزدهنده‌ای را برای هر دو حالت داده شدهٔ: (i)s_3, s_6؛ (ii)s_3, s_4؛ (iii)s_1, s_2 بیابید.



شکل ۲۱.۷

۶.۷ خلاصه و مرور تاریخی

بار دیگر با مفهوم رابطه مواجه شدیم. در فصل ۵ این مفهوم را به‌صورت تعمیم تابع معرفی کردیم. در اینجا، در فصل ۷، توجه خود را بر رابطه‌ها و ویژگیهای خاص آنها: بازتابی، تقارنی، پادتقارنی، و ترایایی معطوف کردیم. در نتیجه، خود را با دو نوع خاص رابطه مواجه یافتیم: ترتیبهای جزئی و رابطه‌های هم‌ارزی.

رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی مجموعهٔ A ترتیبی جزئی است و A را به‌مجموعهٔ‌جزئی‌ـ‌مرتب بدل می‌کند،اگر $\mathscr{R}$، بازتابی، پادمتقارن، و ترایا باشد. چنین رابطه‌ای تعمیم رابطهٔ آشنای «کوچکتر است از یا برابر است با» در اعداد طبیعی است. سعی کنید به حسابان، یا حتی به‌جبر مقدماتی بدون (در نظر گرفتن) ترتیب جزئی فکر کنید! یا برنامهٔ کامپیوتری ساده‌ای اختیار کنید و ببینید اگر برنامه را به‌تصادف وارد کامپیوتر کنید و ترتیب احکام را جایگشت دهید، چه اتفاقی می‌افتد. به هر طرف که نگاه کنیم خود را با ترتیب روبه‌رو می‌یابیم. چنان با آن خوگرفته‌ایم که آن‌را در همه حال امری مسلم می‌شماریم. برای یک مجموعهٔ جزئی‌ـ‌مرتب متناهی، نمودار هاسه، که نوعی خاص از گراف سودار است، نمایشی تصویری از ترتیب در مجموعهٔ جزئی‌ـ‌مرتب را به‌ما می‌دهد؛ همچنین ثابت می‌شود که این نمودار وقتی ترتیب کلی به انضمام ترتیب جزئی مفروض مورد نیاز باشد کارساز است. روشی که برای به‌دست آوردن ترتیب کلی به‌کار می‌رود، الگوریتم جورکردن توپولوژیک است که در حل شبکه‌های PERT* به‌کار می‌رود.

گرچه رابطهٔ هم‌ارزی با ترتیب جزئی تنها در یک ویژگی تفاوت دارد، امّا از نظر ساختار و کاربرد کاملاً متفاوت است. ما بر آن نیستیم که منشأ رابطهٔ هم‌ارزی را پیدا کنیم، ولی می‌توانیم

* Program Evaluation and Review Technique

ایده‌هایی را که در پشت سر ویژگیهای بازتابی، تقارنی، و ترایایی نهفته است، در اصول هندسه* (۱۸۸۹) ، اثر ریاضیدان ایتالیایی جوزپه پئانو (۱۸۵۸ـ۱۹۳۲) بیابیم. در اثر کارل فردریک گاوس (۱۷۷۷ـ۱۸۵۵) دربارهٔ همنهشتی، که وی آن‌را در سالهای ۱۹۷۰ مطرح و بسط داد از این ایده‌ها استفاده شده‌است، اگر چه نامی از آنها برده نشده‌است.

اساساً، یک رابطهٔ هم‌ارزی $\mathscr{R}$ روی یک مجموعهٔ A، تعمیم برابری است. این رابطه، مشخصهٔ «همانند بودن» را بین عناصر A القا می‌کند. لذا، این مفهوم «همانند بودن» موجب می‌شود که مجموعهٔ A به زیرمجموعه‌هایی به نام رده‌های هم‌ارزی افراز شود. برعکس، ملاحظه می‌شود که افراز مجموعهٔ A، یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A را به‌وجود می‌آورد. افراز یک مجموعه در بسیاری از مباحث ریاضی و علم کامپیوتر ظاهر می‌شود. در علم کامپیوتر، بسیاری از الگوریتمهای جستجوگر، متکی بر تکنیکی هستند که اندازهٔ مجموعهٔ مفروض A را که مورد بررسی قرار می‌گیرد پیوسته تقلیل می‌دهد. با افراز A به زیرمجموعه‌های کوچکتر و کوچکتر، شیوهٔ جستجوگر را به‌طریقی کاراتر به‌کار می‌بریم. هر افراز جدید افراز قبلی را بهبود می‌بخشد که این خود کلید لازم در فرایند مینیممسازی برای ماشینهای متناهی حالت است.

در سراسر این فصل، از تأثیر متقابل بین رابطه‌ها، گرافهای سودار، و ماتریسهای (۱ , ۰) استفاده کرده‌ایم. این ماتریسها آرایه‌هایی مستطیلی از اطلاع دربارهٔ رابطه، و گراف را فراهم و ثابت می‌کنند که در بعضی از محاسبات کمک کننده‌اند. ذخیرهٔ اطلاعات بدین‌گونه، یعنی به‌صورت آرایه‌های مستطیلی و در مکانهای متوالی حافظه، از اواخر سالهای ۱۹۴۰ و اوایل دههٔ ۱۹۵۰ در علم کامپیوتر به‌صورت عملی در آمده‌است. برای آگاهی بیشتر از زمینهٔ تاریخی چنین ملاحظاتی، به‌صفحه‌های ۴۵۶ـ۴۶۲ اثر کنوت[1] [۳] رجوع کنید. راه دیگر ذخیرهٔ اطلاع دربارهٔ گراف، نمایش فهرست مجاورت است. (تمرین ۱۷ از تمرینهای گوناگون را ببینید.) در مطالعهٔ ساختارهای داده‌ها فهرستهای پیوندی و فهرستهای پیوندی دوگانه در اجرای چنین ذخیره‌سازی اولویت دارند. برای اطلاع بیشتر در این‌باره، به‌کتاب درسی اثر آهو، هاپکرافت و اولمن [۱] رجوع کنید.

دربارهٔ نظریهٔ گراف، با بخشی از ریاضیات روبه‌رو هستیم که تاریخ آن به ۱۷۳۶، یعنی به‌وقتی می‌رسد که ریاضیدان سوئیسی لئونهارت اویلر (۱۷۰۷ـ۱۷۸۳) مسألهٔ هفت پل کونیکسبرگ را حلّ کرد. از آن پس، کارهای زیادی در این بخش، بویژه در رابطه با ساختارهای داده‌ها در علم کامپیوتر، انجام شده‌است.

برای مطالبی مشابه با بعضی از عناوین این فصل، فصل ۳ اثر استانات[2] و مک آلیستر[3] [۶] را ببینید. برای آنهایی که خواهان مطالبی بیشتر دربارهٔ نقش کامپیوتر در رابطه با مفهوم رابطهٔ هم‌ارزی هستند، نمایشی جالب از «مسألهٔ هم‌ارزی» را می‌توانند در صفحه‌های ۳۵۳ـ۳۵۵ کنوت [۳] بیابند.

اولین کار دربارهٔ بسط فرایند مینیممسازی را می‌توان در مقاله‌ای اثر مور [۵] یافت، که بر

---

*I Principii di Geometrica 1. D.Knuth 2. D.F. Stanat 3. D.F. Mc Allister

دیدگاههای پیشین ها فمن [۲] بنا شده‌است. فصل ۱۰ کوهاوی[1] [۴] شامل فرایند مینیممسازی برای انواع مختلف ماشینهای متناهی‌ـحالت است و برخی نکات سخت افزاری در طرحهای آنها را در برمی‌گیرد.

مراجع

1. Aho, Alfred V., Hopcroft, John E., and Ullman, Jeffrey D. *Data Structures and Algorithms*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1983.
2. Huffman, D. A. "The Synthesis of Sequential Switching Circuits." *Journal of Franklin Institute* 257, no. 3: pp. 161–190; no. 4: pp. 275–303, 1954.
3. Knuth, Donald E. *The Art of Computer Programming*, 2nd ed., Volume 1, *Fundamental Algorithms*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1973.
4. Kohavi, Zvi. *Switching and Finite Automata Theory*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1978.
5. Moore, E. F. "Gedanken-experiments on Sequential Machines." *Automata Studies, Annals of Mathematical Studies*, no. 34: pp. 129–153. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1956.
6. Stanat, Donald F., and McAllister, David F. *Discrete Mathematics in Computer Science*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1977.

تمرینهای گوناگون

۱. فرض کنید A یک مجموعه و I یک مجموعهٔ اندیسگذار باشد که برای هر $i \in I$، $\mathscr{R}$ رابطه‌ای روی A است. هر یک از گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) $\cup_{i\in I}\mathscr{R}_i$ روی A بازتابی است اگر و تنها اگر هر $\mathscr{R}_i$ روی A بازتابی باشد.

ب) $\cap_{i=I}\mathscr{R}_i$ روی A بازتابی است اگر و تنها اگر هر $\mathscr{R}_i$ روی A بازتابی باشد.

۲. تمرین ۱ را وقتی به‌جای «بازتابی» (i) تقارنی؛ (ii) پادتقارنی؛ (iii) ترایایی قرارگیرد تکرارکنید.

۳. برای مجموعهٔ A، فرض کنید $\mathscr{R}_1$ و $\mathscr{R}_2$ رابطه‌هایی متقارن روی A باشند. اگر

$$\mathscr{R}_1 \circ \mathscr{R}_2 \subseteq \mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1$$

ثابت کنید که $\mathscr{R}_1 \circ \mathscr{R}_2 = \mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1$.

۴. اگر $\mathscr{R}$ رابطه‌ای روی مجموعهٔ A باشد استلزام

$$\mathscr{R}\text{بازتابی} \Rightarrow \mathscr{R}^2\text{بازتابی}$$

1. Z.Kohavi

را ثابت یا رد کنید.

۵. برای مجموعه‌های A، B، و C با رابطه‌های $\mathscr{R}_۱ \subseteq A \times B$ و $\mathscr{R}_۲ \subseteq B \times C$، برابری زیر را ثابت یا رد کنید

$$(\mathscr{R}_۱ \circ \mathscr{R}_۲)^c = \mathscr{R}_۲^c \circ \mathscr{R}_۱^c$$

۶. برای هر یک از رابطه‌های زیر روی مجموعه‌ای مشخص، تعیین کنید که آیا این رابطه بازتابی، متقارن، یا تراياست. همچنین تعیین کنید که آیا این رابطه، ترتیبی جزئی یا رابطه‌ای هم‌ارزی است، و اگر رابطهٔ هم‌ارزی است افرازی را که این رابطه القا می‌کند مشخص کنید.

الف) $\mathscr{R}$ رابطه‌ای روی $\mathbf{Q}$ است که در آن $a\mathscr{R}b$ به‌معنای $|a-b| < ۱$ گرفته شده‌است.

ب) فرض کنید T مجموعهٔ همهٔ مثلثها در صفحه باشد. برای $t_۱, t_۲ \in T$ رابطهٔ $t_۱\mathscr{R}t_۲$ را به‌معنای یک مساحت دارند، بگیرید.

ج) برای T در قسمت (ب) $t_۱\mathscr{R}t_۲$ را به‌معنای اگر حداقل دو ضلع $t_۱$ روی محیط $t_۲$ واقع باشند، بگیرید.

د) فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$. $\mathscr{R}$ را روی A با $x\mathscr{R}y$ به‌معنای اگر $xy \geq ۱۰$، تعریف کنید.

ه) رابطهٔ $\mathscr{R}$ را روی $\mathbf{Z}$ به‌وسیلهٔ $a\mathscr{R}b$ به‌معنای $۷|(a-b)$ تعریف کنید.

و) برای $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\} \times \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، $\mathscr{R}$ را روی A با $(x_۱, y_۱)\mathscr{R}(x_۲, y_۲)$ به‌معنای $(y_۱ - x_۱) = \pm(y_۲ - x_۲)$ تعریف کنید.

ز) $\mathscr{R}$ را روی $\mathbf{R}$ به‌وسیلهٔ $x\mathscr{R}y$ به‌معنای $\cos x = \cos y$ تعریف کنید.

ح) $\mathscr{R}$ رابطه‌ای روی $\mathbf{Q}$ است که در آن $a\mathscr{R}b$ به‌معنای $a - b \in \mathbf{Z}$ گرفته شده‌است.

۷. مثالی از مجموعه‌ای جزئی‌ـمرتب با ۵ عنصر مینیمال (ماکسیمال) ولی بدون کوچکترین (بزرگترین) عنصر ارائه دهید.

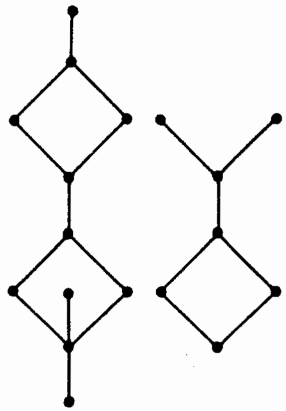
۸. برای مجموعهٔ A، فرض کنید $C = \{P_i | \text{است}A\text{یک افراز}P_i\}$. رابطهٔ $\mathscr{R}$ را روی C با $P_i\mathscr{R}P_j$ به‌معنای $P_i \leq P_j$، یعنی P_i پالایشی از P_j است، تعریف می‌کنیم.

الف) تحقیق کنید که $\mathscr{R}$ یک ترتیب جزئی روی C است.

ب) برای $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$، فرض کنید P_i، $۱ \leq i \leq ۴$، افرازهای زیر باشند: $P_۱ : \{۱, ۲\}, \{۳, ۴, ۵\}$؛ $P_۲ : \{۱, ۲\}, \{۳, ۴\}, \{۵\}$؛ $P_۳ : \{۱\}, \{۲\}, \{۳, ۴, ۵\}$؛ $P_۴ : \{۱, ۲\}, \{۳\}, \{۴\}, \{۵\}$. نمودار هاسه را برای $C = \{P_i | ۱ \leq i \leq ۴\}$ رسم کنید که در آن C به‌وسیلهٔ عمل پالایش به‌صورت جزئی مرتب شده‌است.

۹. اگر گراف کامل K_n دارای ۴۵ یال باشد، n چقدر است؟

۱۰. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} \times \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$. $\mathscr{R}$ را با $(x_۱, y_۱)\mathscr{R}(x_۲, y_۲)$ به‌معنای $x_۱y_۱ = x_۲y_۲$ تعریف می‌کنیم.



شکل ۲۲.۷

الف) تحقیق کنید که $\mathscr{R}$ رابطهٔ هم‌ارزی روی A است.

ب) رده‌های هم‌ارزی $[(۱, ۱)]$، $[(۲, ۲)]$، $[(۳, ۲)]$، و $[(۴, ۳)]$ را تعیین کنید.

۱۱. فرض کنید $\mathscr{F} = \{f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}\}$. یعنی $\mathscr{F}$ مجموعهٔ همه تابعهایی است با حوزهٔ $\mathbf{Z}^+$ و حوزهٔ تمام $\mathbf{R}$.

الف) رابطهٔ $\mathscr{R}$ را روی $\mathscr{F}$ با $g\mathscr{R}h$ برای $g, h \in \mathscr{F}$ به‌معنای g مغلوب h و h مغلوب g است، تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که $\mathscr{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathscr{F}$ است.

ب) برای $f \in \mathscr{F}$، فرض کنید $[f]$ معرف ردهٔ هم‌ارزی f برای رابطهٔ $\mathscr{R}$ قسمت (الف) است. فرض کنید $\mathscr{F}'$ مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزیی باشد که $\mathscr{R}$ القا کرده است. رابطهٔ $\mathscr{S}$ را روی $\mathscr{F}'$ به‌وسیلهٔ $[g]\mathscr{S}[h]$، برای $[g], [h] \in \mathscr{F}'$ به‌معنای g مغلوب h است تعریف می‌کنیم. تحقیق کنید که $\mathscr{S}$ یک ترتیب جزئی است.

ج) برای $\mathscr{R}$ در قسمت (الف)، فرض کنید $f, f_۱, f_۲ \in \mathscr{F}$ و $f_۱, f_۲ \in [f]$. اگر $f_۱ + f_۲ : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ به‌وسیلهٔ $(f_۱ + f_۲)(n) = f_۱(n) + f_۲(n)$ برای $n \in \mathbf{Z}^+$ تعریف شود، ثابت یا رد کنید که $f_۱ + f_۲ \in [f]$.

۱۲. اگر

$$A=\{۲, ۴, ۸, ۲۰, ۲۸, ۵۶, ۱۱۲, ۲۲۴, ۳۳۶, ۶۷۲, ۱۳۴۴, ۳, ۹, ۱۵, ۴۵, ۱۳۵, ۴۰۵, ۶۷۵\}$$

رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی A به‌وسیلهٔ $x\mathscr{R}y$ به‌معنای $x|y$ ترتیبی جزئی است که نمودار هاسهٔ آن ساختاری به‌صورت شکل ۲۲.۷ دارد، تعریف شده‌است. برای نشان دادن ترتیب جزئی، رئوس نمودار را برچسب بزنید. به‌چند راه مختلف می‌توان $\mathscr{R}$ را به‌صورت توپولوژیک جور کرد تا ترتیب کلی $\mathscr{F}$ به‌دست آید که در آن $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{F}$؟ (گاهی اوقات می‌گوییم که $\mathscr{R}$ در $\mathscr{F}$ نشانیده شده‌است.)

۱۳. مشبکهٔ $(A, \mathscr{R})$ را مشبکهٔ کامل می‌گویند اگر برای هر زیرمجموعهٔ ناتهی $S \subseteq A$، lub S و glb S وجود داشته باشند. برای $A = \mathbf{Q}$، فرض کنید $\mathscr{R}$ رابطهٔ «کوچکتر است از یا برابر است با» روی $\mathbf{Q}$ باشد. در این‌صورت $(\mathbf{Q}, \leq)$ یک مشبکه است. آیا این مشبکه کامل است؟

۱۴. فرض کنید M ماتریس مجاورت $(\text{۰}, \text{۱})$ مربوط به گراف سودار G باشد. (همچنین M را به‌صورت ماتریس $(\text{۰}, \text{۱})$ برای رابطهٔ مربوط به G داریم.) در محاسبهٔ $M^{\text{۲}}$، اگر جمع و ضرب معمولی ماتریسی را به‌کار بریم به‌قسمی که $\text{۱} + \text{۱} = \text{۲}$ (نه بولی، که در آن $\text{۱} + \text{۱} = \text{۱}$)، معنای «۲» اگر در $M^{\text{۲}}$ پیدا شود چیست؟ معنای «۳» در $M^{\text{۲}}$ چیست؟

۱۵. برای $\text{۱} \leq i \leq \text{۹}$، تابعهای $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{array}{lll} f_1(n) = 5 & f_4(n) = \log_2 n^3 & f_7(n) = n^2 + 5 \\ f_2(n) = 5n - 7 & f_5(n) = 5n^2 - 3n^3 & f_8(n) = 137 \\ f_3(n) = 2^n & f_6(n) = n^2 \log_2 n^2 & f_9(n) = (2/n^2) - (n^2/2) \end{array}$$

فرض کنید $F = \{f_i | \text{۱} \leq i \leq \text{۹}\}$. رابطهٔ $\mathscr{R}$ را روی F به‌وسیلهٔ $f_i \mathscr{R} f_j$، $\text{۱} \leq i, j \leq \text{۹}$، به‌معنای f_i مغلوب f_j است، تعریف می‌کنیم. ماتریس رابطه‌ای مربوط به رابطهٔ $\mathscr{R}$ را تعیین کنید.

۱۶. ماتریس $(\text{۰}, \text{۱})$ زیر، معرّف یک رابطهٔ $\mathscr{R}$ در مجموعهٔ $A = \{\text{۱}, \text{۲}, \text{۳}, \text{۴}, \text{۵}\}$ است.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

الف) رابطهٔ $\mathscr{R}$ چیست؟ $\mathscr{R}^{\text{۲}}$ چیست؟

ب) گرافهای سودار مربوط به $\mathscr{R}$ و $\mathscr{R}^{\text{۲}}$ را رسم کنید.

ج) $\mathscr{R}$ در چه ویژگیهای رابطه‌ای صدق می‌کند؟

۱۷. دیده‌ایم که ماتریس $(\text{۰}, \text{۱})$ را می‌توان برای نمایش یک گراف به‌وسیلهٔ ماتریس مجاورت به‌کار برد. ثابت می‌شود که وقتی تعداد عنصرهای ماتریس زیاد باشد این راهی نسبتاً ناکارا برای نمایش گراف است. روش بهتری برای ذخیره‌سازی چنین گرافی استفاده از نمایش فهرست مجاورت است، که از یک فهرست مجاورت برای هر رأس u و یک فهرست اندیس ساخته شده‌است. برای گراف شکل ۲۳.۷، این نمایش به‌وسیلهٔ دو فهرست در جدول ۵.۷ داده شده‌است.

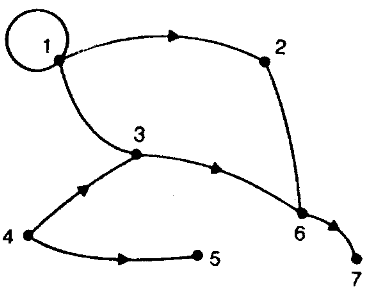
بهتر است که برای هر رأس vی گراف، هر رأس w را که مجاور v است، به ترتیب عددی فهرست کنیم. بنابراین، برای ۱، سه رأس ۱، ۲، ۳ را به‌عنوان اولین سه مجاورت در فهرست مجاورت ثبت

جدول ۵.۷

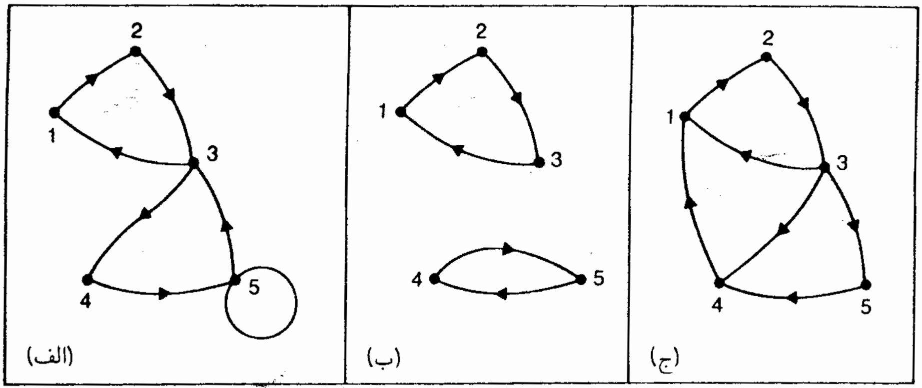
فهرست مجاورت		فهرست اندیس	
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۴
۳	۳	۳	۵
۴	۶	۴	۷
۵	۱	۵	۹
۶	۶	۶	۹
۷	۳	۷	۱۱
۸	۵	۸	۱۱
۹	۲		
۱۰	۷		

می‌کنیم. مقابل ۲ در فهرست اندیس، ۴ را قرار می‌دهیم که به ما می‌گوید در فهرست مجاورت از کجا برای یافتن مجاورتهای ۲ شروع کنیم. چون در سمت راست ۳ در فهرست اندیس عدد ۵ وجود دارد، می‌فهمیم که تنها مجاورت ۲، ۶ است. همچنین، در فهرست اندیس، ۷ در سمت راست ۴، ما را به هفتمین درایهٔ فهرست مجاورت، یعنی ۳ هدایت می‌کند، و ملاحظه می‌کنیم که رأس ۴ مجاور رأسهای ۳ (هفتمین رأس در فهرست مجاورت) است. در رأس ۵ متوقف می‌شویم زیرا در فهرست اندیس، ۹ در سمت راست ۵ است. در فهرست اندیس، ۹های مقابل ۵ و ۶ معرف این هستند که هیچ رأسی مجاور ۵ نیست. به‌گونه‌ای مشابه، در فهرست اندیس، ۱۱های مقابل ۷ و ۸ می‌گویند که رأس ۷ مجاور هیچ رأسی در گراف سودار مفروض نیست.

به‌طور کلی، این روش راهی راحت برای تعیین رأسهای مجاور رأس v به‌دست می‌دهد. اینها



شکل ۲۳.۷



شکل ۲۴.۷

جدول ۶.۷

فهرست اندیس		فهرست مجاورت	
۱	۱	۲	۱
۴	۲	۳	۲
۵	۳	۶	۳
۵	۴	۳	۴
۸	۵	۳	۵
۱۰	۶	۴	۶
۱۰	۷	۵	۷
۱۰	۸	۳	۸
		۶	۹

در مکانهای [اندیس (v)]، ۱+ [اندیس (v)]، . . . ، ۱− [اندیس $(v+$ ۱$)$]، در فهرست اندیس ثبت شده‌اند.

سرانجام، آخرین جفت درایه‌ها در فهرست اندیس، یعنی ۸ و ۱۱ «شبحی» است که نشان می‌دهد اگر رأس هشتمی در گراف می‌بود، فهرست مجاورت را از کجا بگیریم.

هر یک از گرافهای شکل ۲۴.۷ را به این طریق نمایش دهید.

۱۸. نمایش فهرست مجاورت گراف سودار G به‌وسیلهٔ جدول ۶.۷ داده شده‌است. از روی این نمایش، G را بسازید.

۱۹. فرض کنید G گرافی بی‌سو با مجموعهٔ رأسهای V باشد. رابطهٔ $\mathscr{R}$ را روی V با $v\mathscr{R}w$ به‌معنای $v=w$، یا مسیری از v به w (یا از w به v، چون G سودار نیست) وجود دارد تعریف می‌کنیم. (الف) ثابت کنید که $\mathscr{R}$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی V است. (ب) دربارهٔ افراز مربوط چه می‌توان‌گفت؟

جدول ۷.۷

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_1	s_7	s_6	۱	۰
s_2	s_7	s_7	۰	۰
s_3	s_7	s_2	۱	۰
s_4	s_2	s_3	۰	۰
s_5	s_3	s_7	۰	۰
s_6	s_4	s_1	۰	۰
s_7	s_3	s_5	۱	۰
s_8	s_7	s_3	۰	۰

۲۰. الف) برای ماشینهای متناهی‌ـحالت که در جدول ۷.۷ نشان داده شده‌اند، ماشین مینیمالی تعیین کنید که هم‌ارز با آن باشد.

ب) رشتهٔ مینیمالی بیابید که حالتهای s_4 و s_6 را مشخص کند.

۲۱. در مرکز کامپیوتر، آقای M با اجرای ۱۰ برنامهٔ کامپیوتری روبه‌روست، و به‌دلیل اولویتها، این برنامه‌ها به شرایط زیر مقید شده‌اند: (الف) $۱۰ > ۸, ۳$؛ (ب) $۸ > ۷$؛ (ج) $۷ > ۵$؛ (د) $۳ > ۹, ۶$؛ (ه) $۶ > ۴, ۱$؛ (و) $۹ > ۴, ۵$؛ (ز) $۴, ۵, ۱ > ۲$؛ که مثلاً $۱۰ > ۸, ۳$ بدین معناست که ۱۰ باید قبل از برنامه‌های ۸ و ۳ اجرا شود. ترتیبی برای اجرای این برنامه‌ها تعیین کنید به‌قسمی که اولویتها تحقق یابند.

۲۲. الف) نمودار هاسه را برای مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح n که در آن n برابر است با (i) ۲؛ (ii) ۴؛ (iii) ۶؛ (iv) ۸؛ (v) ۱۲؛ (vi) ۱۶؛ (vii) ۲۴؛ (viii) ۳۰؛ (ix) ۳۲، رسم کنید.

ب) برای $۲ \leq n \leq ۳۵$، نشان دهید که نمودار هاسه برای مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت n مثل یکی از نه نمودار قسمت (الف) است. (اعداد را در رأسها نادیده بگیرید و توجه را بر ساختاری که به‌وسیلهٔ رأسها و یالها داده شده‌است متمرکز کنید.) برای $n = ۳۶$ چه اتفاقی می‌افتد؟

ج) برای $n \in \mathbf{Z}^+$، تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح مثبت n را با $\tau(n)$ نشان می‌دهیم. (مسألهٔ ۳۳ را در مسائل گوناگون فصل ۵ ببینید.) فرض کنید $m, n \in \mathbf{Z}^+$، و S و T به‌ترتیب مجموعهٔ همهٔ مقسوم‌علیه‌های صحیح مثبت m و n باشند. نتایج قسمتهای (الف) و (ب) ایجاب می‌کنند که اگر نمودارهای هاسهٔ S و T از نظر ساختار همانند باشند، آن‌گاه $\tau(m) = \tau(n)$. امّا آیا عکس آن درست است؟

د) نشان دهید که هر یک از نمودارهای هاسهٔ قسمت (الف) یک مشبکه است اگر تعریف کنیم $\mathrm{glb}\{x, y\} = (x, y)$، یعنی بزرگترین مقسوم‌علیهٔ مشترک x و y، و $\mathrm{lub}\{x, y\} = [x, y]$،

یعنی کوچکترین مضرب مشترک x و y.

۲۳. برای $\mathscr{I} = \{۰, ۱\}$، فرض کنید $A = \{x_۱x_۲x_۳x_۴x_۵ | x_i \in \mathscr{I}, ۱ \leq i \leq ۵\}$.

الف) $|A|$ چقدر است؟

ب) برای $x \in A$، وزن x را که با $\text{wt}(x)$ نشان می‌دهیم، به‌وسیلهٔ $\text{wt}(x) = \sum_{i=۱}^{۵} x_i$ تعریف می‌کنیم. (بنابراین $\text{wt}(x)$ برابر تعداد ۱ هایی است که در x وجود دارد.) رابطهٔ $\mathscr{R}$ را روی A به‌وسیلهٔ $x\mathscr{R}y$ به‌معنای $\text{wt}(x) = \text{wt}(y)$ تعریف می‌کنیم. تحقیق کنید که $\mathscr{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A است.

ج) در افراز A که به‌وسیلهٔ $\mathscr{R}$ نتیجه می‌شود چند ردهٔ هم‌ارزی وجود دارند؟ در هر ردهٔ هم‌ارزی چند عنصر A وجود دارند؟

د) نتایج قسمتهای (الف)، (ب)، و (ج) را تعمیم دهید.

۲۴. الف) برای $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳\}$، فرض کنید $A = \mathscr{P}(\mathscr{U})$. رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی A را به‌وسیلهٔ $B\mathscr{R}C$ به‌معنای $B \subseteq C$ تعریف می‌کنیم. چند زوج مرتب در رابطهٔ $\mathscr{R}$ وجود دارند؟

ب) برای $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ به‌قسمت (الف) پاسخ دهید.

ج) نتایج قسمتهای (الف) و (ب) را تعمیم دهید.

۲۵. برای $n \in \mathbf{Z}^+$، فرض کنید $\mathscr{U} = \{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$. رابطهٔ $\mathscr{R}$ روی $\mathscr{P}(\mathscr{U})$ را به‌وسیلهٔ $A\mathscr{R}B$ به‌معنای $A \nsubseteq B$ و $B \nsubseteq A$ تعریف می‌کنیم. چند جفت مرتب در این رابطه وجود دارند؟

۲۶. فرض کنید A مجموعهٔ متناهی ناتهی است با $B \subseteq A$ (B ثابت)، و $|A| = n$، $|B| = m$. رابطهٔ $\mathscr{R}$ را روی $\mathscr{P}(A)$ به‌وسیلهٔ $X\mathscr{R}Y$، برای $X, Y \subseteq A$ به‌معنای $X \cap B = Y \cap B$ تعریف کنید. در این‌صورت $\mathscr{R}$ همان‌طورکه در تمرین ۷ بخش ۴.۷ تحقیق شد، یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

الف) در افراز $\mathscr{P}(A)$ که به‌وسیلهٔ $\mathscr{R}$ نتیجه می‌شود چند ردهٔ هم‌ارزی وجود دارد؟

ب) در هر ردهٔ هم‌ارزی افرازی که به‌وسیلهٔ $\mathscr{R}$ نتیجه می‌شودچند زیرمجموعهٔ A وجود دارد؟

۲۷. برای $A \neq \emptyset$، فرض کنید $(A, \mathscr{R})$ یک مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب است و $\emptyset \neq B \subseteq A$، به‌قسمی که $\mathscr{R}' = (B \times B) \cap \mathscr{R}$. اگر $(B, \mathscr{R}')$ کاملاً مرتب باشد، $(B, \mathscr{R}')$ را یک زنجیر در $(A, \mathscr{R})$ می‌نامیم. در حالتی‌که B متناهی است می‌توانیم عناصر B را به‌وسیلهٔ $b_۱\mathscr{R}'b_۲\mathscr{R}'b_۳\mathscr{R}' \ldots \mathscr{R}'b_{n-۱}\mathscr{R}'b_n$ مرتب کنیم و می‌گوییم این زنجیر دارای درازای n است. زنجیر (به درازای n) را ماکسیمال می‌گویند اگر عنصری چون $a \in A$ وجود نداشته باشد که $a\mathscr{R}b_۱$، $b_n\mathscr{R}a$، یا به‌ازای $۱ \leq i \leq n - ۱$، $b_i\mathscr{R}a\mathscr{R}b_{i+۱}$.

الف) برای مجموعهٔ جزئی‌ـمرتبی که به‌وسیلهٔ نمودار هاسهٔ شکل ۱۶.۷ داده شده‌است، دو زنجیر به درازای سه بیابید. برای این مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب زنجیر ماکسیمالی بیابید. چند تا از این زنجیرهای ماکسیمال وجود دارند؟

ب) برای مجموعهٔ جزئی‌ـمرتبی که به‌وسیلهٔ نمودار هاسهٔ شکل ۱۵.۷ (د) داده شده‌است، دو زنجیر ماکسیمال با درازاهای متفاوت بیابید. برای این مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب درازای درازترین

(ماکسیمال) زنجیر چیست؟

ج) فرض کنید $\mathscr{U} = \{۱,۲,۳,۴\}$ و $A = \mathscr{P}(\mathscr{U})$. برای مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب $(A, \subseteq)$، دو زنجیر ماکسیمال بیابید. برای این مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب چند تا از چنین زنجیرهای ماکسیمال وجود دارند؟

د) اگر $\mathscr{U} = \{۱,۲,۳,\ldots,n\}$، در مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب $(\mathscr{P}(\mathscr{U}), \subseteq)$ چند زنجیر ماکسیمال وجود دارند؟

۲۸. برای $\emptyset \neq C \subseteq A$، فرض کنید $(C, \mathscr{R}')$ زنجیر ماکسیمال در مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب $(A, \mathscr{R})$ باشد، که در آن $\mathscr{R}' = (C \times C) \cap \mathscr{R}$. اگر عنصرهای C به‌صورت $c_۱ \mathscr{R}' c_۲ \mathscr{R}' \ldots \mathscr{R}' c_n$ مرتب شوند، ثابت کنید که $c_۱$ یک عنصر مینیمال در $(A, \mathscr{R})$ و c_n عنصر ماکسیمال در $(A, \mathscr{R})$ است.

۲۹. فرض کنید $(A, \mathscr{R})$ مجموعهٔ جزئی‌ـمرتبی است که درازای درازترین زنجیر (ماکسیمال) آن $n \geq ۲$ است. فرض کنید M مجموعهٔ همهٔ عنصرهای ماکسیمال در $(A, \mathscr{R})$ باشد و $B = A - M$. اگر $\mathscr{R}' = (B \times B) \cap \mathscr{R}$، ثابت کنید که درازای درازترین زنجیر در $(B, \mathscr{R}')$ برابر $n - ۱$ است.

۳۰. فرض کنید $(A, \mathscr{R})$ مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب باشد و $\emptyset \neq C \subseteq A$. اگر $(C \times C) \cap \mathscr{R} = \emptyset$، آن‌گاه برای هر $x, y \in C$ داریم $x \not\mathscr{R} y$ و $y \not\mathscr{R} x$. می‌گویند عنصرهای C، پادزنجیری در مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب $(A, \mathscr{R})$ تشکیل می‌دهند.

الف) برای مجموعهٔ جزئی‌ـمرتبی که در نمودار هاسهٔ شکل ۱۵.۷ (د) داده شده‌است، پادزنجیری با سه عنصر بیابید. بزرگ‌ترین پادزنجیری را که شامل عنصر ۶ باشد بیابید. بزرگ‌ترین پادزنجیر این مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب را تعیین کنید.

ب) اگر $\mathscr{U} = \{۱,۲,۳,۴\}$، فرض کنید $A = \mathscr{P}(\mathscr{U})$. برای مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب $(A, \subseteq)$ دو پادزنجیر مختلف بیابید. در بزرگ‌ترین پادزنجیر این مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب چند عنصر ظاهر می‌شود؟

ج) ثابت کنید که در مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب $(A, \mathscr{R})$، مجموعهٔ همهٔ عنصرهای ماکسیمال و مجموعهٔ همهٔ عنصرهای مینیمال، پادزنجیرند.

۳۱. فرض کنید $(A, \mathscr{R})$ مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب باشد که درازای زنجیر آن n است. برای اثبات اینکه عنصرهای A را می‌توان به n پادزنجیر $C_۱$، $C_۲$، ...، C_n با $C_i \cap C_j = \emptyset$، $۱ \leq i < j \leq n$، افراز کرد، از استقرای ریاضی استفاده کنید.

۸

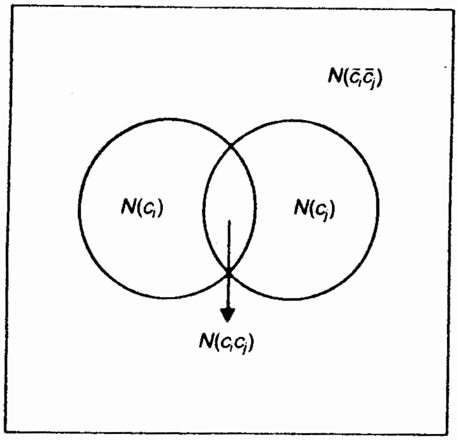
اصل شمول و طرد

اینک که اصل شمول و طرد را بررسی می‌کنیم مجدداً به مبحث شمارش باز می‌گردیم. با بسط مفاهیم مسائل شمارش در نمودارهای ون در فصل ۳، این اصل در اثبات فرمولی که در بخش ۳.۵ برای تعداد تابعهای پوشای $f : A \to B$ به‌صورت $|A| = m \geq n = |B|$ حدس زدیم، به ما یاری خواهد داد. کاربردهای دیگر این اصل، ماهیت فراگیر آن‌را در ترکیبیات و ریاضیات گسسته به‌عنوان روش غیرمستقیم برای برخی موارد در شمارش نشان خواهد داد.

۱.۸ اصل شمول و طرد

در این بخش برای بیان اصل شمارش جدید خود، به ذکر چند نماد می‌پردازیم. سپس این اصل را به‌وسیلهٔ استدلال ترکیبیاتی اثبات می‌کنیم. آن‌گاه، مثالها نشان خواهند داد که این اصل چگونه به‌کار می‌رود.

فرض کنید S مجموعه‌ای با $|S| = N$ باشد و c_1، c_2، ... ، c_t گردایه‌ای از شرطها یا ویژگیها باشد که بعضی از عنصرهای S یا همهٔ آنها در این شرطها صادق‌اند. ممکن است بعضی از عنصرهای S در بیش از یکی از شرطها صدق کنند، در حالی‌که بعضی دیگر ممکن است در هیچ‌یک از آنها صادق نباشند. به ازای $1 \leq i \leq t$، $N(c_i)$ معرف تعداد عنصرهایی از S است که در شرط c_i صدق می‌کنند. (در اینجا عنصرهای S، وقتی شمارش می‌شوند که تنها در شرط c_i،



شکل ۱.۸

همچنین در شرط c_i و شرطهای دیگر c_j، $i \neq j$ صدق کنند.) به‌ازای $i, j \in \{۱, ۲, ۳, \cdots, t\}$، $i \neq j$، مقدار $N(c_ic_j)$ معرف تعداد عنصرهایی از S است که در هر دو شرط c_i و c_j و شاید هم در شرایط دیگر صادق‌اند. ($N(c_ic_j)$ عنصرهایی از S را که تنها در c_i و c_j صادق‌اند شمارش نمی‌کند.) با این نمادگذاری اگر $۱ \leq i, j, k \leq t$ سه عدد صحیح متمایز باشند، آن‌گاه $N(c_ic_jc_k)$ معرّف تعداد عنصرهایی از S است که، در هر یک از شرطهای c_i، c_j، c_k و احتمالاً در شرطهای دیگر صادق‌اند.

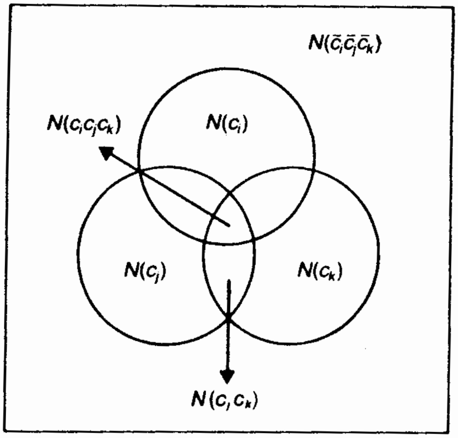
به ازای $۱ \leq i \leq t$، $N(\overline{c}_i) = N - N(c_i)$ معرف تعداد عنصرهایی از S است که در شرط c_i صدق نمی‌کنند. اگر $۱ \leq i, j \leq t$، $i \neq j$، آن‌گاه $N(\overline{c}_i\overline{c}_j)$ برابر تعداد عناصری از S است که در هیچیک از شرطهای c_i یا c_j صدق نمی‌کنند. (این نماد با نماد $N(\overline{c_ic_j})$ یکی نیست).

از نمودار ون در شکل ۱.۸ پیدا ست که اگر $N(c_i)$ معرف تعداد عنصرهای دایرهٔ سمت چپ باشد و $N(c_j)$ معرف تعداد عنصرهای دایرهٔ سمت راست، آن‌گاه $N(c_ic_j)$ تعداد عنصرهای قسمت متداخل دو دایره است، در حالی‌که $N(\overline{c}_i\overline{c}_j)$ معرف شمارهٔ عنصرهای خارج از اجتماع این دایره‌هاست.

در نتیجه، بنابر شکل ۱.۸، $N(\overline{c}_i\overline{c}_j) = N - [N(c_i) + N(c_j)] + N(c_ic_j)$، که در آن، آخرین جمله به این دلیل اضافه شده است که دو بار در $[N(c_i) + N(c_j)]$ حذف شده است.

به روشی مشابه، بنابر شکل ۲.۸ ، به‌دست می‌آوریم که

$$\begin{aligned} N(\overline{c}_i\overline{c}_j\overline{c}_k) =& N - [N(c_i) + N(c_j) + N(c_k)] \\ &+ [N(c_ic_j) + N(c_ic_k) + N(c_jc_k)] - N(c_ic_jc_k) \end{aligned}$$



شکل۲.۸

بنابر الگویی که این دو حالت القا می‌کنند، قضیهٔ زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۸ (اصل شمول و طرد) مجموعهٔ S را، با $|S| = N$ و شرطهای c_i، $1 \leq i \leq t$، که بعضی از عنصرهای S در آنها صادق‌اند، در نظر می‌گیریم. تعداد عنصرهایی از S را که در هیچ یک از شرطهای c_i، $1 \leq i \leq t$، صدق نمی‌کنند با $\overline{N} = N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3 \cdots \overline{c}_t)$ نشان می‌دهیم که در آن

$$\begin{aligned}\overline{N} =& N - [N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) + \cdots + N(c_t)] \\ &+ [N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \cdots + N(c_1c_t) + N(c_2c_3) + \cdots + N(c_{t-1}c_t)] \\ &- [N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_2c_4) + \cdots + N(c_1c_2c_t) + N(c_1c_3c_4) + \cdots \\ &+ N(c_1c_3c_t) + \cdots + N(c_{t-2}c_{t-1}c_t)] + \cdots + (-1)^t N(c_1c_2c_3 \cdots c_t) \qquad (1)\end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned}\overline{N} =& N - \sum_{1\leq i\leq t} N(c_i) + \sum_{1\leq i<j\leq t} N(c_ic_j) - \sum_{1\leq i<j<k\leq t} N(c_ic_jc_k) + \cdots \\ &+ (-1)^t N(c_1c_2c_3 \cdots c_t) \qquad (2)\end{aligned}$$

برهان گرچه این قضیه را می‌توان به‌وسیلهٔ استقرا روی t ثابت کرد، ولی ما در اینجا استدلالی ترکیبیاتی ارائه می‌دهیم.

برای هر $x \in S$ نشان می‌دهیم که x به هر طرف معادلهٔ (۲)، یک شمارهٔ ۰ یا ۱ خواهد داد.

اگر x در هیچ شرطی صدق نکند، آن‌گاه x در $\overline{N}$ یک بار و در N یک بار به حساب می‌آید، ولی در هیچ جملهٔ دیگر معادلهٔ (۲) به حساب نمی‌آید. بنابراین x به هر طرف معادله یک ۱ خواهد داد.

امکان دیگر آن است که x دقیقاً در r، $1 \leq r \leq t$، شرط صدق کند. در این حالت x چیزی به $\overline{N}$ نمی‌دهد، امّا در طرف راست معادلهٔ (۲)، x به حساب می‌آید

۱. یک بار در N.

۲. r بار در $\sum_{1\leq i\leq t} N(c_i)$. (یک بار برای هر یک از r شرط.)

۳. $\binom{r}{2}$ بار در $\sum_{1\leq i<j\leq t} N(c_i c_j)$. (یک بار برای هر زوج شرط منتخب از r شرطی که x در آنها صدق می‌کند.)

۴. $\binom{r}{3}$ بار در $\sum_{1\leq i<j<k\leq t} N(c_i c_j c_k)$. (چرا؟)

....

(r + ۱). $\binom{r}{r} = 1$ بار در $\sum N(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_r})$، که در آن، مجموعیابی روی همهٔ انتخابهای با اندازهٔ r از t شرط انجام می‌گیرد.

در نتیجه، در سمت راست معادلهٔ (۲)، x بنابر قضیهٔ دو جمله‌ای به میزان

$$1 - r + \binom{r}{2} - \binom{r}{3} + \cdots + (-1)^r \binom{r}{r} = [1 + (-1)]^r = 0^r = 0$$

بار به حساب می‌آید. بنابراین، دو طرف معادلهٔ (۲) عنصرهای واحدی از S را به حساب می‌آورند و برابری محقق است. ■

یک فرع بلافصل این اصل به صورت زیر داده می‌شود:

فرع ۱.۸ تحت فرضهای قضیهٔ ۱.۸، تعداد عنصرهایی از S که در حداقل یکی از شرطهای c_i، $1 \leq i \leq t$، صادق‌اند به‌وسیلهٔ $N(c_1 \text{ یا } c_2 \text{ یا } \cdots \text{ یا } c_t) = N - \overline{N}$ داده می‌شود.

قبل از حلّ چند مثال، نمادگذاری دیگری را برای ساده کردن حکم قضیهٔ ۱.۸ بررسی می‌کنیم. می‌نویسیم

$$S_0 = N$$
$$S_1 = [N(c_1) + N(c_2) + \cdots + N(c_t)]$$
$$S_2 = [N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \cdots + N(c_1c_t) + N(c_2c_3) + \cdots + N(c_{t-1}c_t)]$$

و به طور کلی

$$S_k = \sum N(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k}),\ 1 \leq k \leq t$$

که در آن مجموعیابی روی همهٔ انتخابهای به اندازهٔ k از گردایهٔ t شرط انجام می‌شود. بنابراین S_k دارای $\binom{t}{k}$ جمعوند است.

حال چگونگی استفاده از این اصل را در حلّ برخی از مسائل شمارش بررسی می‌کنیم.

مثال ۱.۸ تعداد اعداد صحیح مثبت n، $1 \leq n \leq 100$، را تعیین کنید که n بر ۲، ۳، یا ۵ تقسیمپذیر نباشد.

در اینجا $S = \{1, 2, 3, \cdots, 100\}$ و $N = 100$. برای $n \in S$، n در

الف) شرط c_1 صادق است اگر n بر ۲ تقسیمپذیر باشد،

ب) شرط c_2 صادق است اگر n بر ۳ تقسیمپذیر باشد، و

ج) شرط c_3 صادق است اگر n بر ۵ تقسیمپذیر باشد،

در این صورت پاسخ این مسأله، $N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3)$ است.

برای $r \in \mathbf{R}$، $\lfloor r \rfloor$ معرّف بزرگترین عدد صحیح موجود در r است، که در آن

$$\lfloor r \rfloor = \begin{cases} r & \text{اگر } r \in \mathbf{Z}، \\ \text{بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از } r، & \text{اگر عدد } r \text{ عدد صحیح نباشد} \end{cases}$$

پس، مثلاً $\lfloor 5 \rfloor = 5$، $\lfloor \pi \rfloor = 3$ و $\lfloor -\pi \rfloor = -4$

این تابع در این مسأله به ما کمک می‌کند. زیرا به‌دست می‌آوریم

$$N(c_1) = \lfloor 100/2 \rfloor = 50, \quad N(c_2) = \lfloor 100/3 \rfloor = \lfloor 33\tfrac{1}{3} \rfloor = 33$$
$$N(c_3) = \lfloor 100/5 \rfloor = 20, \quad N(c_1c_2) = \lfloor 100/6 \rfloor = 16$$
$$N(c_1c_3) = \lfloor 100/10 \rfloor = 10, \quad N(c_2c_3) = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$$

و

$$N(c_1c_2c_3) = \lfloor 100/30 \rfloor = 3$$

با استفاده از اصل شمول و طرد، به‌دست می‌آوریم که

$$\begin{aligned} N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3) &= S_0 - S_1 + S_2 - S_3 = N - [N(c_1) + N(c_2) + N(c_3)] \\ &\quad + [N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_2c_3)] - N(c_1c_2c_3) \\ &= 100 - [50 + 33 + 20] + [16 + 10 + 6] - 3 = 26 \end{aligned}$$

(این ۲۶ عدد عبارت‌اند از ۱، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳، ۴۷، ۴۹، ۵۳، ۵۹، ۶۱، ۶۷، ۷۱، ۷۳، ۷۷، ۷۹، ۸۳، ۸۹، ۹۱، و ۹۷.) □

مثال ۲.۸ در فصل ۱، تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ را به‌دست آوردیم. اینک به این مسأله با قید اضافی $x_i \leq 7$، $1 \leq i \leq 4$، پاسخ می‌دهیم.

در اینجا S مجموعهٔ جوابهای $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$، $0 \leq x_i$، $1 \leq i \leq 4$، است. پس $|S| = N = \binom{4+18-1}{18} = \binom{21}{18}$.

می‌گوییم که یک جواب x_1، x_2، x_3، x_4 در شرط c_i، $1 \leq i \leq 4$، صدق می‌کند اگر $x_i > 7$ (یا $x_i \geq 8$). پس پاسخ مسأله عبارت است از $N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\overline{c}_4)$.

در اینجا $N(c_1) = N(c_2) = N(c_3) = N(c_4)$. برای محاسبهٔ $N(c_1)$، تعداد جوابهای صحیح $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ را با هر $x_i \geq 0$، $1 \leq i \leq 4$، می‌خواهیم. در این صورت ۸ را به مقدار x_1 اضافه می‌کنیم و جوابهای $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ را که در شرط c_1 صادق‌اند به‌دست می‌آوریم. بنابراین، به ازای هر $1 \leq i \leq 4$، $N(c_i) = \binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10}$، و $S_1 = \binom{4}{1}\binom{13}{10}$.

همچنین، $N(c_1c_2)$ تعداد جوابهای صحیح $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$، $0 \leq x_i$، $1 \leq i \leq 4$، است. پس $N(c_1c_2) = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2}$، و $S_2 = \binom{4}{2}\binom{5}{2}$.

چون برای هر انتخاب از سه شرط، داریم $N(c_ic_jc_k) = 0$، و $N(c_1c_2c_3c_4) = 0$، لذا

$$\begin{aligned} N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\overline{c}_4) &= N - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 \\ &= \binom{21}{18} - \binom{4}{1}\binom{13}{10} + \binom{4}{2}\binom{5}{2} - 0 + 0 = 246 \end{aligned}$$

بنابراین از ۱۳۳۰ جواب صحیح نامنفی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$، تنها ۲۴۶ تا از آنها در شرط $x_i \leq 7$، $1 \leq i \leq 4$، صدق می‌کنند. □

مثال بعدی اثبات فرمولی را که در بخش ۳.۵ برای شمارش تابعهای پوشا حدس زدیم به ما می‌دهد.

مثال ۳.۸ برای مجموعه‌های متناهی A و B، با $|A| = m \geq n = |B|$، فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$، $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$، و S برابر با مجموعهٔ همهٔ تابعهای $f : A \to B$ باشند. در این‌صورت $N = |S| = n^m$.

برای $1 \leq i \leq n$، فرض کنید c_i معرف شرطی روی S باشد که در آن تابع $f : A \to B$ در c_i صدق کند اگر b_i در برد f نباشد. (به تفاوت بین این c_i و c_iی مثالهای ۱.۸ و ۲.۸ توجه کنید.) در این‌صورت $N(\overline{c}_i)$ تعداد تابعهایی در S است که b_i در برد آنهاست، و $N(\overline{c}_1\overline{c}_2\cdots\overline{c}_n)$

تعداد تابعهای پوشای $f : A \to B$ را به‌دست می‌دهد.

برای هر $۱ \leq i \leq n$، $N(c_i) = (n-۱)^m$، زیرا هر عنصر B، به استثنای b_i را می‌توان به‌عنوان مؤلفهٔ دوم یک زوج مرتب برای تابع $f : A \to B$ به‌کار برد، که برد f شامل b_i نیست. همین‌طور، برای هر $۱ \leq i \leq j \leq n$، تعداد $(n-۲)^m$ تابع $f : A \to B$ وجود دارند که برد آنها نه شامل b_i و نه شامل b_j است. با توجه به این ملاحظات داریم $S_۱ = [N(c_۱) + N(c_۲) + \cdots + N(c_n)] = n(n-۱)^m = \binom{n}{۱}(n-۱)^m$، و

$$S_۲ = [N(c_۱c_۲) + N(c_۱c_۳) + \cdots + N(c_۱c_n) + N(c_۲c_۳) + \cdots + N(c_۲c_n) + \cdots + N(c_{n-۱}c_n)] = \binom{n}{۲}(n-۲)^m$$

به‌طور کلی، برای $۱ \leq k \leq n$،

$$S_k = \sum_{۱ \leq i_۱ < i_۲ < \cdots < i_k \leq n} N(c_{i_۱}c_{i_۲}\cdots c_{i_k}) = \binom{n}{k}(n-k)^m$$

در این‌صورت به‌موجب اصل شمول و طرد نتیجه می‌شود که تعداد تابعهای پوشای از A به B عبارت است از

$$\begin{aligned} N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳\cdots\overline{c}_n) &= N - S_۱ + S_۲ - S_۳ + \cdots + (-۱)^n S_n \\ &= n^m - \binom{n}{۱}(n-۱)^m + \binom{n}{۲}(n-۲)^m - \binom{n}{۳}(n-۳)^m \\ &\quad + \cdots + (-۱)^n(n-n)^m = \sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i\binom{n}{i}(n-i)^m \\ &= \sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i\binom{n}{n-i}(n-i)^m \end{aligned}$$

□

اینک مسأله‌ای را حل می‌کنیم که شبیه مسائلی است که در فصل ۳ با نمودارهای ون حل می‌کردیم.

مثال ۴.۸ به چند راه می‌توان ۲۶ حرف الفبا را جایگشت داد به قسمی که هیچ یک از الگوهای *car*، *dog*، *pun* یا *byte* پیدا نشوند؟

فرض کنید S معرف مجموعهٔ تمام جایگشتهای ۲۶ حرف باشد. در این صورت $|S| = ۲۶!$. برای $۱ \leq i \leq ۴$، جایگشتی را در S صادق در شرط c_i می‌گوییم که به ترتیب شامل *car*، *dog*،

pun، یا $byte$ باشد.

$$N(c_1)=N(c_2)=N(c_3)=24!,\qquad N(c_4)=23!$$
$$N(c_1c_2)=N(c_1c_3)=N(c_2c_3)=22!,\qquad N(c_ic_4)=21!,\qquad i\neq 4$$
$$N(c_1c_2c_3)=20!,\qquad N(c_ic_jc_4)=19!,\qquad 1\le i<j\le 3$$
$$N(c_1c_2c_3c_4)=17!$$

پس تعداد جایگشتهایی در S که شامل هیچ یک از الگوهای داده شده نباشند عبارت است از

$$\begin{aligned}N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\overline{c}_4)=&26!-[3(24!)+23!]+[3(22!)+3(21!)]\\&-[20!+3(19!)]+17!\end{aligned}$$

□

مثال بعدی ما مسألهای از نظریهٔ اعداد است.

مثال ۵.۸ برای $n\in\mathbf{Z}^+$، فرض کنید $\phi(n)$ تعداد اعداد صحیح مثبت m باشد با شرطهای $1\le m<n$ و $(m,n)=1$ ــ یعنی m و n نسبت به هم اوّل‌اند. این تابع به تابع فی اویلر معروف است و در جبر مجرد، در مواردی که مسألهٔ شمارش دخالت می‌کند ظاهر می‌شود. ملاحظه می‌کنیم که $\phi(2)=1$، $\phi(3)=2$، $\phi(4)=2$، $\phi(5)=4$، و $\phi(6)=2$. برای هر عدد اول p، $\phi(p)=p-1$. مایلیم فرمولی برای $\phi(n)$ به‌دست آوریم که وابسته به n باشد به قسمی که مجبور نباشیم هر m، $1\le m<n$، را مورد به مورد نسبت به n مقایسه کنیم.

برای نتیجه‌گیری این فرمول، همان‌گونه که در مثال ۱.۸ عمل کردیم، از اصل شمول و طرد استفاده خواهیم کرد. به‌صورت زیر عمل می‌کنیم: برای $n\ge 2$، می‌نویسیم $n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_t^{e_t}$ که در آن p_1، p_2، ... ، p_t عددهای اوّل متمایزند و $e_i\ge 1$، $1\le i\le t$. حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن $t=4$. این حالت برای نشان دادن منظور کلی ما کافی است.

با $S=\{1,2,3,\cdots,n\}$، $N=|S|=n$، و برای $1\le i\le 4$، می‌گوییم که $k\in S$ در شرط c_i صدق می‌کند اگر k بر p_i تقسیم‌پذیر باشد. برای $1\le k<n$، برابری $(k,n)=1$ برقرار است اگر k به هیچ یک از اعداد اول p_i، $1\le i\le 4$، تقسیم‌پذیر نباشد. بنابراین، $\phi(n)=N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\overline{c}_4)$.

برای $1\le i\le 4$، $N(c_i)=n/p_i$؛ $N(c_ic_j)=n/(p_ip_j)$، $1\le i<j\le 4$. همچنین $N(c_ic_jc_l)=n/(p_ip_jp_l)$، $1\le i<j<l\le 4$، و $N(c_1c_2c_3c_4)=n/(p_1p_2p_3p_4)$.

پس

$$\begin{aligned}
\phi(n) =& S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 \\
=& n - \left[\frac{n}{p_1} + \cdots + \frac{n}{p_4}\right] + \left[\frac{n}{p_1p_2} + \frac{n}{p_1p_3} + \cdots + \frac{n}{p_3p_4}\right] \\
& - \left[\frac{n}{p_1p_2p_3} + \cdots + \frac{n}{p_2p_3p_4}\right] + \frac{n}{p_1p_2p_3p_4} \\
=& n\left[1 - \left(\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_4}\right) + \left(\frac{1}{p_1p_2} + \frac{1}{p_1p_3} + \cdots + \frac{1}{p_3p_4}\right)\right. \\
& \left. - \left(\frac{1}{p_1p_2p_3} + \cdots + \frac{1}{p_2p_3p_4}\right) + \frac{1}{p_1p_2p_3p_4}\right] \\
=& \frac{n}{p_1p_2p_3p_4}[p_1p_2p_3p_4 - (p_2p_3p_4 + p_1p_3p_4 + p_1p_2p_4 + p_1p_2p_3) \\
& + (p_3p_4 + p_2p_4 + p_2p_3 + p_1p_4 + p_1p_3 + p_1p_2) \\
& - (p_4 + p_3 + p_2 + p_1) + 1] \\
=& \frac{n}{p_1p_2p_3p_4}[(p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1)(p_4 - 1)] \\
=& n\left[\frac{p_1 - 1}{p_1} \cdot \frac{p_2 - 1}{p_2} \cdot \frac{p_3 - 1}{p_3} \cdot \frac{p_4 - 1}{p_4}\right] = n\prod_{i=1}^{4}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)
\end{aligned}$$

در حالت کلی، $\phi(n) = n\prod_{p|n}(1 - (1/p))$، که در آن حاصلضرب، روی همهٔ اعداد اول p که n را می‌شمارند انجام می‌شود.

در نتیجه

$$\begin{aligned}
\phi(23100) =& \phi(2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11) \\
=& (23100)(1 - (1/2))(1 - (1/3))(1 - (1/5)) \times \\
& (1 - (1/7))(1 - (1/11)) = 4800
\end{aligned}$$

□

برنامهٔ پاسکال در شکل ۳.۸ ، $\phi(n)$ به‌ازای $n \geq 3$ را محاسبه می‌کند. در اینجا ساختار کنترل Repeat-Until برای تعیین اوّل بودن یا نبودن عدد صحیح i به‌کار می‌رود. شرط

```
j = trunc(sqrt(i))
```

برای خاتمه دادن به اجرای این حلقه، از نتیجهٔ مثال ۱۶.۴ حاصل می‌شود.

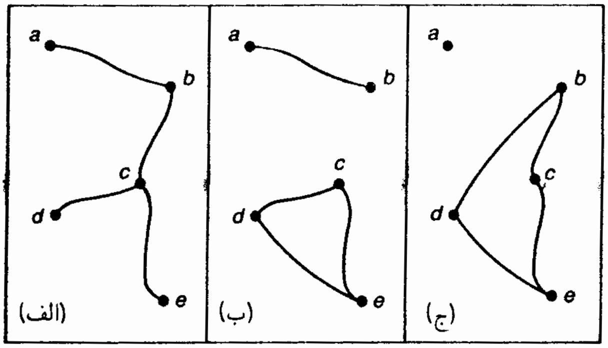

```
Program EulerPhiFunction (input,output);
Var
      i,j,k,n,phi,originalvalue: integer;
Begin
      Write ('The value of n is ');
      Read (n);
      phi := n;
      originalvalue := n;
      If n Mod 2 = 0 then
            Begin
                  phi := phi Div 2;
                  While n Mod 2 = 0 do
                        n := n Div 2
            End;
      If n Mod 3 = 0 then
            Begin
                  phi := (phi * 2) Div 3;
                  While n Mod 3 = 0 do
                        n := n Div 3
            End;
      i := 5;
      While n >= 5 do
            Begin
                  j := 1;
                  Repeat
                        j := j + 1;
                        k := i Mod j
                  Until (k = 0) or (j = trunc(sqrt(i)));
                  If (k <> 0) and (n Mod i = 0) then
                        Begin
                              phi := (phi * (i - 1)) Div i;
                              While n Mod i = 0 do
                                    n := n Div i
                        End;
                  i := i + 2
            End;
      Write ('For n=', originalvalue:0, ' there are ', phi:0);
      Writeln (' numbers smaller than ', originalvalue:0);
      Writeln (' and relatively prime to it.')
End.

The value of n is 131
For n = 131 there are 130 numbers smaller than 131
and relatively prime to it.

The value of n is 31500
For n = 31500 there are 7200 numbers smaller than 31500
and relatively prime to it.

The value of n is 198000
For n = 198000 there are 48000 numbers smaller than 198000
and relatively prime to it.
```

شکل۸.۳



شکل ۴.۸

این برنامه را برای یافتن $\phi(n)$ به ازای $n = ۱۳۱$، $n = ۳۶۲۵۰۰$، و $n = ۱۹۸۰۰۰$ به‌کار می‌بریم.

مثال نهایی ما نیاز به مقداری نظریهٔ گراف از فصل ۷ دارد.

مثال ۶.۸ در ناحیه‌ای از حومهٔ شهر پنج دهکده وجود دارد. مهندسی قرار است طرح جاده‌ای دوطرفه را تهیه کند به قسمتی که پس از تکمیل طرح هیچ دهکده‌ای بی‌ارتباط باقی نماند. به چند راه می‌توان این طرح را تهیه کرد؟

دهکده‌ها را a، b، c، d، و e می‌خوانیم و تعداد گرافهای بی‌سوی بی‌طوقه‌ای را برای این رأسها جستجو می‌کنیم که در آنها هیچ رأسی تنها نماند. بنابراین، می‌خواهیم مواردی را بشماریم که نظیر مواردی باشند که در قسمتهای (الف) و (ب)ی شکل ۴.۸ نشان داده‌ایم، ولی نظیر مواردی که در قسمت (ج) نشان داده‌ایم نباشند.

فرض کنید S مجموعهٔ گرافهای Gی بی‌سوی بی‌طوقهٔ مربوط به $V = \{a, b, c, d, e\}$ باشد. در این صورت $N = |S| = ۲^{۱۰}$، زیرا $\binom{۵}{۲} = ۱۰$ جادهٔ دوطرفهٔ ممکن برای این پنج دهکده وجود دارند، و هر جاده می‌تواند یا قبول شود یا قبول نشود.

برای $۱ \le i \le ۵$، فرض کنید c_i معرف این شرط باشد که یک دستگاه از این جاده‌ها دهکده‌های a، b، c، d، و e را به ترتیب از یکدیگر بی‌ارتباط نگهدارد. در این صورت پاسخ مسأله $N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳\overline{c}_۴\overline{c}_۵)$ است. به‌دست می‌آوریم که $N(c_۱) = ۲^۶$ و $S_۱ = \binom{۵}{۱}۲^۶$؛ $N(c_۱c_۲) = ۲^۳$ و $S_۲ = \binom{۵}{۲}۲^۳$؛ $N(c_۱c_۲c_۳) = ۲^۱$ و $S_۳ = \binom{۵}{۳}۲^۱$؛ $N(c_۱c_۲c_۳c_۴) = ۲^۰$ و $S_۴ = \binom{۵}{۴}۲^۰$؛ و $N(c_۱c_۲c_۳c_۴c_۵) = ۲^۰$ و $S_۵ = \binom{۵}{۵}۲^۰$.

در نتیجه

$$N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳\overline{c}_۴\overline{c}_۵) = ۲^{۱۰} - \binom{۵}{۱}۲^۶ + \binom{۵}{۲}۲^۳ - \binom{۵}{۳}۲^۱ + \binom{۵}{۴}۲^۰ - \binom{۵}{۵}۲^۰ = ۷۶۸$$

□

تمرینهای ۱.۸

۱. تعداد اعداد صحیح مثبت n، $۱ \leq n \leq ۲۰۰۰$، را تعیین کنید که

الف) بر ۲، ۳، یا ۵ تقسیمپذیر نباشند.

ب) بر ۲، ۳، ۵، یا ۷ تقسیمپذیر نباشند.

ج) بر ۲، ۳، یا ۵ تقسیمپذیر نباشند ولی بر ۷ تقسیمپذیر باشند.

۲. تمام اعداد حقیقی x را بیابید به قسمی که

الف) $\lfloor ۷x \rfloor = ۷\lfloor x \rfloor$ ب) $\lfloor ۷x \rfloor = ۷$

ج) $\lfloor x + ۷ \rfloor = x + ۷$ د) $\lfloor x + ۷ \rfloor = \lfloor x \rfloor + ۷$

۳. تعیین کنید که برای معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۹$ چند جواب صحیح وجود دارد، به شرطی که

الف) $۰ \leq x_i$ برای $۱ \leq i \leq ۴$

ب) $۰ \leq x_i < ۸$ برای $۱ \leq i \leq ۴$

ج) $۰ \leq x_۱ \leq ۵$، $۰ \leq x_۲ \leq ۶$، $۳ \leq x_۳ \leq ۷$، $۳ \leq x_۴ \leq ۸$.

۴. تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۹$ را تعیین کنید که برای آنها $-۵ \leq x_i \leq ۱۰$، برای $۱ \leq i \leq ۴$

۵. مطلوب است تعداد اعداد صحیح x به‌طوری که $x \leq ۹۹۹۹۹۹۹$، و مجموع ارقام x برابر ۳۱ باشد.

۶. به چند راه می‌توان از کیسه‌ای شامل ۱۲ مهره: ۳ مهرهٔ قرمز، ۳ مهرهٔ آبی، ۳ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سبز، ۹ مهره انتخاب کرد؟

۷. تعداد جایگشتهای a، b، c، ...، x، y، z را بیابید که در هیچ کدام آنها الگوهای $spin$، $game$، $path$، یا net ظاهر نشوند.

۸. مقدار $\phi(n)$ را به ازای n برابر با (الف) ۵۱؛ (ب) ۴۲۰؛ (ج) ۱۲۳۰۰ حساب کنید.

۹. فرض کنید $n \in \mathbf{Z}^+$. (الف) مقدار $\phi(۲^n)$ را تعیین کنید. (ب) مقدار $\phi(۲^n p)$ را، که در آن p عدد اول فرد است تعیین کنید.

۱۰. برای $n \in \mathbf{Z}^+$، چه موقع $\phi(n)$ فرد است؟

۱۱. چند عدد صحیح مثبت n کوچکتر از ۶۰۰۰ (الف) در برابری $(n, ۶۰۰۰) = ۱$ صدق می‌کنند؟ (ب) در مقسوم علیه مشترک اوّلی با ۶۰۰۰ مشترک‌اند؟

۱۲. به سؤال مثال ۶.۸ برای حالت ۶ دهکده پاسخ دهید.

۱۳. اگر هشت تاس متمایز را بریزند، احتمال آنکه تمام اعداد از ۱ تا ۶ ظاهر شوند چقدر است؟

۱۴. در چند شمارهٔ بیمهٔ اجتماعی (دنباله‌های نه رقمی) هر یک از رقمهای ۱، ۳ و ۷ حداقل یک بار ظاهر می‌شوند؟

۱۵. به چند راه می‌توان سه x، سه y، و سه z را آرایش داد به قسمی که هیچ سه تایی متوالی از یک حرف ظاهر نشود؟

۱۶. خانم M هشت نوه دارد که همهٔ آنها بستنی دوست دارند. در یخچال او شش لیوان بستنی وانیلی، ۳ تا شکلاتی، ۶ تا بستنی توت‌فرنگی، و ۵ تا خامه‌ای وجود دارد. در جشن سالروز تولدش همهٔ نوه‌ها به دیدنش آمده‌اند، و نوهٔ بزرگش به او می‌گوید که چند بستنی از هر نوع از سوی نوه‌ها خواسته شده است. نوهٔ بزرگش به چند راه می‌تواند خواسته‌ها را مطرح کند تا خانم M به دلیل اینکه از هر نوع به اندازه کافی ندارد پریشان خیال نشود؟

۱۷. در درس ۱۲ هفته‌ای ریاضی خانم S هفت نفر از دوستان دبیرستانی‌اش را ملاقات کرده است. در طی این مدت، به هنگام ناهار، او هر کدام را ۳۵ بار، هر دو تای آنها را ۱۶ بار، هر سه تا را ۸ بار، هر چهار تا را ۴ بار، هر پنج تا را ۲ بار و هر شش تا را ۱ بار ملاقات کرده است، ولی هرگز هر هفت نفر را با هم ندیده است. اگر او در طی ۸۴ روز درس هر روز ناهار را در دانشگاه خورده باشد آیا هرگز ناهار را تنها خورده است؟

۱۸. برنامه‌ای را که در شکل ۳.۸ آمده است به قسمی بسط دهید که حالتی که در آن $n = ۲$، اجرا شود و نتیجه را به گونه‌ای چاپ کند که از نظر دستوری صحیح باشد.

۱۹. برای برنامهٔ شکل ۳.۸ سه حلقهٔ While دو سطری برای چه هدفی به‌کار می‌روند؟ چرا i در سطر $i := i + ۲$ به‌جای ۱ به اندازهٔ ۲ نمو کرده است؟ (اگر نمو برابر ۱ بود، آیا نتیجه‌ای متفاوت به‌دست می‌آمد؟)

۲.۸ تعمیمهای اصل شمول و طرد

مجموعهٔ S، $N = |S|$، و شرطهای $c_۱$، $c_۲$، . . . ، c_t را که بعضی از عنصرهای S در آنها صادق‌اند در نظر بگیرید. در بخش ۱.۸ دیدیم که چگونه اصل شمول و طرد راهی برای تعیین $N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\cdots\overline{c}_t)$، یعنی تعداد عنصرهایی از S است که در هیچ یک از t شرط صادق نیستند.

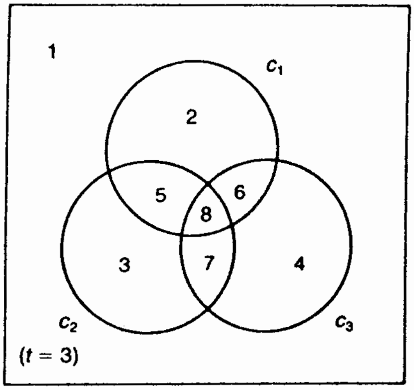
اگر $m \in \mathbf{Z}^+$ و $۱ \leq m \leq t$، اینک می‌خواهیم E_m یعنی تعداد عنصرهایی از S را که دقیقاً در m تا از t شرط صادق‌اند معیّن کنیم. (فعلاً می‌توانیم $E_۰$ را به‌دست آوریم.)

می‌توانیم معادلاتی نظیر

$$E_۱=N(c_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳\cdots\overline{c}_t) + N(\overline{c}_۱c_۲\overline{c}_۳\cdots\overline{c}_t) + \cdots + N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳\cdots\overline{c}_{t-۱}c_t)$$

و

$$E_۲=(c_۱c_۲\overline{c}_۳\cdots\overline{c}_t) + N(c_۱\overline{c}_۲c_۳\cdots\overline{c}_t) + \cdots + N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳\cdots\overline{c}_{t-۲}c_{t-۱}c_t)$$



شکل ۵.۸

بنویسیم و گرچه این نتایج در حدّی که مایلیم به ما کمک نمی‌کنند ولی برای نقطهٔ شروع، وقتی نمودارهای ون را برای حالتهای $t=۳$ و $t=۴$ بررسی می‌کنیم مفیدند.

برای شکل ۵.۸ ، که در آن $t=۳$، شرطهای شماره‌داری را مجاور آن دایره‌هایی که معرّف عنصرهایی از S هستند که در آن شرط خاص صادق‌اند می‌نویسیم. در این صورت $E_۱$ برابر تعداد عنصرهای واقع در ناحیه‌های ۲، ۳، و ۴ است. امّا می‌توانیم هم بنویسیم

$$E_۱=N(c_۱)+N(c_۲)+N(c_۳)-۲[N(c_۱c_۲)+N(c_۱c_۳)+N(c_۲c_۳)]+۳N(c_۱c_۲c_۳)$$

در $N(c_۱)+N(c_۲)+N(c_۳)$ عناصر ناحیه‌های ۵، ۶، و ۷ را دو بار و عنصرهای ناحیهٔ ۸ را سه بار شمرده‌ایم. در جملهٔ بعد، عنصرهای ناحیه‌های ۵، ۶، و ۷ دو بار حذف شده‌اند. عنصرهای ناحیهٔ ۸ شش بار از $۲[N(c_۱c_۲)+N(c_۱c_۳)+N(c_۲c_۳)]$ برداشته شده‌اند، پس، در این صورت جملهٔ $۳N(c_۱c_۲c_۳)$ را اضافه می‌کنیم و عنصرهای ناحیهٔ ۸ را نهایتاً اصلاً نمی‌شمریم. بنابراین داریم $E_۱=S_۱-۲S_۲+۳S_۳=S_۱-\binom{۲}{۱}S_۲+\binom{۳}{۲}S_۳$.

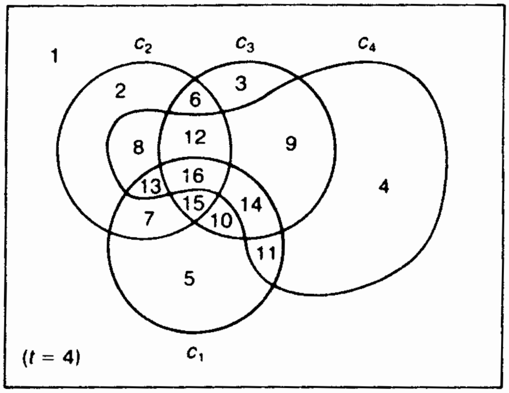
وقتی به $E_۲$ برمی‌گردیم، معادلهٔ قبلی نشان می‌دهد که می‌خواهیم عنصرهایی از S را که در ناحیه‌های ۵، ۶، و ۷ هستند بشماریم. با توجه به نمودار ون

$$E_۲=N(c_۱c_۲)+N(c_۱c_۳)+N(c_۲c_۳)-۳N(c_۱c_۲c_۳)=S_۲-۳S_۳=S_۲-\binom{۳}{۱}S_۳$$

و

$$E_۳=N(c_۱c_۲c_۳)=S_۳$$

در شکل ۶.۸ ، شرطهای $c_۱$، $c_۲$، $c_۳$ مربوط به زیرمجموعه‌های دایره‌ای S هستند، در حالی‌که



شکل ۶.۸

c_4 با ناحیه‌ای که شکلی نامنظم دارد و از ناحیه‌های ۴، ۸، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، و ۱۶ ساخته شده متناظر شده است. برای $1 \le i \le 4$، E_i به‌صورت زیر تعیین شده است: E_1 [ناحیه‌های ۲، ۳، ۴، ۵]:

$$\begin{aligned}E_1 =&[N(c_1)+N(c_2)+N(c_3)+N(c_4)]\\ &-2[N(c_1c_2)+N(c_1c_3)+N(c_1c_4)+N(c_2c_3)+N(c_2c_4)+N(c_3c_4)]\\ &+3[N(c_1c_2c_3)+N(c_1c_2c_4)+N(c_1c_3c_4)+N(c_2c_3c_4)]\\ &-4N(c_1c_2c_3c_4)\\ =&S_1-2S_2+3S_3-4S_4=S_1-\binom{2}{1}S_2+\binom{3}{2}S_3-\binom{4}{3}S_4\end{aligned}$$

(توجه: با اختیار کردن یک عنصر در ناحیهٔ ۳، ملاحظه می‌کنیم که این عنصر یک بار در E_1 و یک بار در S_1 (در $N(c_3)$) شمرده می‌شود. با انتخاب یک عنصر در ناحیهٔ ۶، می‌بینیم که این عنصر در E_1 شمرده نمی‌شود؛ در S_1 دو بار (هم در $N(c_2)$ و هم در $N(c_3)$) شمرده می‌شود ولی در $2S_2$ دو بار برداشته می‌شود (زیرا یک بار در S_2 در $N(c_2c_3)$ شمرده می‌شود)، پس در جمع، شمرده نمی‌شود. خواننده اینک باید عنصری از ناحیهٔ ۱۲ و عنصری از ناحیهٔ ۱۶ را در نظر بگیرد و نشان دهد که هر کدام در دو طرف فرمول E_1 سهمی برابر ۰ دارند.)

E_2 [ناحیه‌های ۶ـ۱۱]:

با توجه به شکل ۶.۸، $E_2 = S_2 - 3S_3 + 6S_4 = S_2 - \binom{3}{1}S_3 + \binom{4}{2}S_4$. برای جزئیات در بارهٔ این فرمول، نتایج را در جدول ۱.۸ بررسی می‌کنیم، که در آن مجاور هر جمعوند S_2، S_3 و

جدول ۱.۸

$S_۲$	$S_۳$	$S_۴$
$N(c_۱c_۲)$: ۷, ۱۳, ۱۵, ۱۶	$N(c_۱c_۲c_۳)$: ۱۵, ۱۶	$N(c_۱c_۲c_۳c_۴)$: ۱۶
$N(c_۱c_۳)$: ۱۰, ۱۴, ۱۵, ۱۶	$N(c_۱c_۲c_۴)$: ۱۳, ۱۶	
$N(c_۱c_۴)$: ۱۱, ۱۳, ۱۴, ۱۶	$N(c_۱c_۳c_۴)$: ۱۴, ۱۶	
$N(c_۲c_۳)$: ۶, ۱۲, ۱۵, ۱۶	$N(c_۲c_۳c_۴)$: ۱۲, ۱۶	
$N(c_۲c_۴)$: ۸, ۱۲, ۱۳, ۱۶		
$N(c_۳c_۴)$: ۹, ۱۲, ۱۴, ۱۶		

$S_۴$، ناحیه‌هایی را که عناصر آنها را در تعیین آن جمعوندبخصوص حساب کرده‌ایم ثبت نموده‌ایم.
در محاسبهٔ $S_۲ - ۳S_۳ + ۶S_۴$، عنصرهایی از ناحیه‌های ۶ـ۱۱ را به‌دست می‌آوریم که دقیقاً آنهایی هستند که در $E_۲$ شمرده شده‌اند.

سرانجام، $E_۳$ از ناحیه‌های ۱۲ـ۱۵ ساخته می‌شود، و $E_۳ = S_۳ - ۴S_۴ = S_۳ - \binom{۴}{۱}S_۴$؛ $E_۴$ متشکل از عنصرهای ناحیهٔ ۱۶ است، و $E_۴ = S_۴$.

این نتایج، اشاره به قضیهٔ زیر دارند.

قضیه ۲.۸ با فرضهای قضیهٔ ۱.۸، برای هر $۱ \leq m \leq t$، تعداد عنصرهایی از S که دقیقاً در m تا از شرطهای $c_۱$، $c_۲$، ...، c_t صدق می‌کنند به‌وسیلهٔ

$$E_m = S_m - \binom{m+۱}{۱}S_{m+۱} + \binom{m+۲}{۲}S_{m+۲} - \cdots + (-۱)^{t-m}\binom{t}{t-m}S_t \quad (۱)$$

داده می‌شود. (اگر $m = ۰$، قضیهٔ ۱.۸ را به‌دست می‌آوریم.)

برهان با استدلالی نظیر استدلال قضیهٔ ۱.۸، فرض کنید $x \in S$، و حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) وقتی x درکمتر از m شرط صدق کند، در هر یک از جمله‌های E_m،S_m،$S_{m+۱}$،$\cdots$،S_t سهمی برابر ۰ دارد، لذا در هیچ‌یک از دو طرف معادله شمرده نمی‌شود.

ب) اگر x در دقیقاً m شرط صدق کند یک بار در E_m و یک بار در S_m شمرده می‌شود، ولی در $S_{m+۱}$،$\cdots$،S_t شمرده نمی‌شود. در نتیجه در هر طرف معادله یک بار شمرده می‌شود.

ج) فرض کنید x در r شرط، $m < r \leq t$، صدق کند. در این صورت x در E_m اصلاً شمرده نمی‌شود. امّا $\binom{r}{m}$ بار در S_m، $\binom{r}{m+۱}$ بار در $S_{m+۱}$، $\cdots$، و $\binom{r}{r}$ بار در S_r، امّا ۰ بار

برای هر جملهٔ بعد از S_r، شمرده می‌شود. لذا در طرف راست معادله، x به اندازهٔ

$$\binom{r}{m}-\binom{m+1}{1}\binom{r}{m+1}+\binom{m+2}{2}\binom{r}{m+2}-\cdots+(-1)^{r-m}\binom{r}{r-m}\binom{r}{r}$$

بار شمرده می‌شود.

به‌ازای $0 \leq k \leq r-m$

$$\begin{aligned}\binom{m+k}{k}\binom{r}{m+k}&=\frac{(m+k)!}{k!m!}\cdot\frac{r!}{(m+k)!(r-m-k)!}\\&=\frac{r!}{m!}\cdot\frac{1}{k!(r-m-k)!}=\frac{r!}{m!(r-m)!}\cdot\frac{(r-m)!}{k!(r-m-k)!}\\&=\binom{r}{m}\binom{r-m}{k}\end{aligned}$$

در نتیجه، در سمت راست معادلهٔ (۱)، x به اندازهٔ

$$\begin{aligned}&\binom{r}{m}\binom{r-m}{0}-\binom{r}{m}\binom{r-m}{1}+\binom{r}{m}\binom{r-m}{2}-\cdots+(-1)^{r-m}\binom{r}{m}\binom{r-m}{r-m}\\&=\binom{r}{m}\left[\binom{r-m}{0}-\binom{r-m}{1}+\binom{r-m}{2}-\cdots+(-1)^{r-m}\binom{r-m}{r-m}\right]\\&=\binom{r}{m}[1-1]^{r-m}=\binom{r}{m}\cdot 0=0\end{aligned}$$

بار شمرده می‌شود و درستی فرمول محقق می‌شود. ■

بر اساس این قضیه، اگر L_m تعداد عنصرهایی از S (با فرضهای قضیهٔ ۱.۸) باشد که حداقل در m تا از t شرط صدق کنند، آن‌گاه فرمول زیر را داریم

فرع ۲.۸

$$\begin{aligned}L_m =&S_m-\binom{m}{m-1}S_{m+1}+\binom{m+1}{m-1}S_{m+2}\\&-\cdots+(-1)^{t-m}\binom{t-1}{m-1}S_t\end{aligned}$$

برهان در تمرینهای انتهای این فصل طرح برهانی ریخته شده است. ■

وقتی $m = ۱$، نتیجهٔ فرع ۲.۸ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} L_۱ &= S_۱ - \binom{۱}{۰} S_۲ + \binom{۲}{۰} S_۳ - \cdots + (-۱)^{t-۱} \binom{t-۱}{۰} S_t \\ &= S_۱ - S_۲ + S_۳ - \cdots + (-۱)^{t-۱} S_t \end{aligned}$$

از مقایسهٔ این نتیجه با نتیجهٔ قضیهٔ ۱.۸ به‌دست می‌آوریم که

$$L_۱ = N - \overline{N} = |S| - \overline{N}$$

این خیلی شگفت‌آور نیست، زیرا یک عنصر x از S وقتی در $L_۱$ شمرده می‌شود که در حداقل یکی از شرطهای $c_۱$، $c_۲$، $c_۳$، . . . ، c_t صدق کند ـ یعنی، اگر $x \in S$، و در $\overline{N} = N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳ \cdots \overline{c}_t)$ شمرده نشود.

مثال ۷.۸ اگر برگردیم و نگاهی به مثال ۶.۸ بیندازیم، تعداد دستگاههای جاده‌های دوطرفه‌ای را که مهندس می‌تواند طرحریزی کند تا، بعد از ساخته‌شدن آنها، به‌ترتیب، دقیقاً $(E_۲)$ و حداقل $(L_۲)$ دو تا از دهکده‌ها بی‌ارتباط با دیگران باقی بمانند به‌دست خواهیم آورد.

با استفاده از نتایجی که با محاسبه قبلاً برای این مثال به‌دست آوردیم، داریم

$$E_۲ = S_۲ - \binom{۳}{۱} S_۳ + \binom{۴}{۲} S_۴ - \binom{۵}{۳} S_۵ = ۸۰ - ۳(۲۰) + ۶(۵) - ۱۰(۱) = ۴۰$$

$$L_۲ = S_۲ - \binom{۲}{۱} S_۳ + \binom{۳}{۱} S_۴ - \binom{۴}{۱} S_۵ = ۸۰ - ۲(۲۰) + ۳(۵) - ۴(۱) = ۵۱$$

□

تمرینهای ۲.۸

۱. در شرایط مثالهای ۶.۸ و ۷.۸، E_i، $۰ \leq i \leq ۵$ را حساب کنید و نشان دهید که $\sum_{i=۰}^{۵} E_i = N = |S|$.

۲. **الف)** به چند راه می‌توان حروف واژهٔ ARRANGEMENT را آرایش داد به قسمی که: دقیقاً دو جفت از حروف عین هم به‌طور متوالی وجود داشته باشند؟ حداقل دو جفت از حروف عین هم به‌طور متوالی وجود داشته باشند؟

ب) با قراردادن سه به جای دو، به قسمت (الف) پاسخ دهید:

۳. به چند راه می‌توان حروف واژهٔ CORRESPONDENTS را آرایش داد به قسمی که (الف) هیچ جفتی از حروف عین هم به‌طور متوالی وجود نداشته باشند؟ (ب) دقیقاً دو جفت از حروف عین هم به‌طور متوالی وجود داشته باشند؟ (ج) حداقل سه جفت از حروف عین هم به‌طور متوالی وجود داشته باشند؟

۴. **الف)** فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۰\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۷\}$. چند تابع $f : A \to B$ در شرط $|F(A)| = ۴$ صادق‌اند؟ برای چند تا $|f(A)| \leq ۴$؟

ب) به چند راه می‌توان جایزه‌هایی متمایز را بین چهار دانشجو توزیع کرد که دقیقاً دو دانشجو جایزه‌ای دریافت نکنند؟ حداقل دو دانشجو هیچ جایزه‌ای دریافت نکنند؟

۵. **الف)** فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۷\}$. می‌گویند که $f : A \to A$ نقطهٔ ثابت دارد اگر به ازای xی متعلق به A، $f(x) = x$. چند تابع یک به یک $f : A \to A$ حداقل یک نقطهٔ ثابت دارند؟

ب) به چند راه می‌توان، با تخصیص حرفی متفاوت به هر حرف الفبا برای نمایش آن، کدی محرمانه پیشنهاد کرد؟

۶. خانم Z قرار است برای خود و نه تن از خانمهای باشگاه تنیس ناهاری تهیه کند. صبح روزی که قرار ناهار دارد کارتهای نام افراد را در ده مکان میز ناهارخوری قرار داده و برای انجام آخرین کارها از خانه خارج شده است. آقای H، همسرش، از مسابقهٔ تنیس به خانه برمی‌گردد و متأسفانه درِ پُشتِ خانه را باز می‌گذارد. باد می‌زند و ده کارت نامها را در هم می‌ریزد. اگر آقای H کارتها را به طریقی تصادفی روی میز قرار دهد، به چند راه می‌تواند این‌کار را انجام دهد به قسمی که دقیقاً ۴ خانم از ده خانم در همان مکانی بنشینند که خانم Z تعیین کرده بوده است؟ به چند راه می‌تواند این‌کار را انجام دهد که حداقل چهار تای آنها همان جاهایی را اشغال کنند که خانم Z تعیین کرده بوده است؟

۷. اگر ۱۳ کارت از دسته کارت ۵۲تایی معمولی کشیده شوند، مطلوب است احتمال اینکه این ۱۳ کارت شامل (الف) حداقل یک کارت از هر نوع باشد؟ (ب) دقیقاً یک نوع از چهار نوع (مثلاً کارت دل) نباشد؟ (ج) دقیقاً دو نوع از چهار نوع نباشد؟

۸. مراحل زیر طرحی برای اثبات فرع ۲.۸ به ما می‌دهد. جزئیات لازم را بنویسید.

الف) ابتدا توجه کنید که $E_t = L_t = S_t$.

ب) $E_{t-۱}$ چیست، و L_t و $L_{t-۱}$ چگونه به هم مربوط‌اند؟

ج) نشان دهید که $L_{t-۱} = S_{t-۱} - \binom{t-۱}{t-۲} S_t$.

د) برای هر $۱ \leq m \leq t-۱$، L_m، $L_{m+۱}$، و E_m چگونه به هم وابسته‌اند؟

هـ) با استفاده از نتایج مراحل (الف) تا (د) به‌کمک استقراء در جهت عکس، این فرع را ثابت کنید.

۳.۸ پریشیها: هیچ چیز در جای خود نیست

در حساب انتگرال و دیفرانسیل مقدماتی، سری مکلورن برای تابع‌نمایی به‌صورت زیر داده می‌شود

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

لذا

$$e^{-۱} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n!} = ۱ - ۱ + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \cdots$$

با پنج رقم اعشار، $e^{-۱} = ۰٫۳۶۷۸۸$ و

$$۱ - ۱ + (۱/۲!) - (۱/۳!) + \cdots - (۱/۷!) = ۰٫۳۶۷۸۶$$

در نتیجه برای هر $k \in \mathbf{Z}^+$، اگر $k \geq ۷$، آنگاه $e^{-۱}$ تقریبی بسیار خوب برای $\sum_{n=۰}^{k}((-۱)^n)/n!$ است.

در پرداختن به مثالهای زیر، این نکته‌ها کمک‌کننده‌اند.

مثال ۸.۸ در میدان اسب‌دوانی، آقای R دربارهٔ چگونگی برد ۱۰ اسب که قرار است در مسابقه شرکت کنند شرط می‌بندد. به چند راه اسبها می‌توانند به خط پایان برسند تا او همهٔ شرطها را ببازد؟

با حذف واژه‌های «اسبها» و «میدان اسب‌دوانی» از مسأله، در واقع می‌خواهیم بدانیم به چند راه می‌توانیم اعداد ۱، ۲، ۳، . . . ، ۱۰ را آرایش دهیم به قسمی که ۱ در اولین مکان (موضع طبیعی خودش) نباشد، ۲ در دومین مکان (موضع طبیعی خودش) نباشد، ··· و ۱۰ در دهمین مکان (موضع طبیعی خودش) نباشد. این آرایشها را پریشیهای ۱، ۲، ۳، . . . ، ۱۰ می‌نامند.

اصل شمول و طرد نقش کلیدی در حل مسأله دارد. برای $۱ \leq i \leq ۱۰$، می‌گویند یک آرایش ۱، ۲، ۳، . . . ، ۱۰ در شرط c_i صدق می‌کند اگر عدد صحیح i در iامین مکان جای داشته باشد. تعداد پریشیها را، که با $d_{۱۰}$ نشان می‌دهند، به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} d_{۱۰} = N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳\cdots\overline{c}_{۱۰}) &= ۱۰! - \binom{۱۰}{۱}۹! + \binom{۱۰}{۲}۸! - \binom{۱۰}{۳}۷! + \cdots + \binom{۱۰}{۱۰}۰! \\ &= ۱۰![۱ - \binom{۱۰}{۱}(۹!/۱۰!) + \binom{۱۰}{۲}(۸!/۱۰!) - \binom{۱۰}{۳}(۷!/۱۰!) + \cdots + \binom{۱۰}{۱۰}(۰!/۱۰!)] \\ &= ۱۰![۱ - ۱ + (۱/۲!) - (۱/۳!) + \cdots + (۱/۱۰!)] \doteq (۱۰!)(e^{-۱}) \end{aligned}$$

فضای نمونه‌ای در اینجا متشکل از !۱۰ راهی است که اسبها می‌توانند به خط پایان برسند. پس احتمال اینکه آقای R همهٔ شرط‌بندیها را ببازد تقریباً $e^{-1} = (10!)(e^{-1})/(10!)$ است. این احتمال، اگر تعداد اسبهای مسابقه ۱۱، ۱۲، $\cdots$ رأس باشد (کم و بیش) همین جور باقی می‌ماند. از سوی دیگر برای n اسب، $n \geq 10$، احتمال اینکه آقای R، حداقل یکی از شرط‌بندیها را ببرد تقریباً $1 - e^{-1} = 0{,}63212$ است. □

مثال ۹.۸ یک شرکت انتشاراتی می‌خواهد هفت جلد کتاب را تجدیدنظر کند. این شرکت هفت نفر برای تجدیدنظر در کتابها استخدام کرده است، و مایل است هر کتاب را دو نفر مرور کنند. اولین هفته به هر نفر یک کتاب می‌دهد و سپس در شروع هفتهٔ دوم کتابها را از نو بین هفت نفر توزیع می‌کند. به چند راه این دو توزیع را می‌تواند انجام دهد تا دو تجدیدنظر هر کتاب به‌وسیلهٔ افراد مختلف انجام شوند؟

در هفتهٔ اول می‌تواند کتابها را به !۷ راه توزیع کند. اگر کتابها و تجدیدنظرکننده‌ها را (در هفتهٔ اول) به‌صورت ۱، ۲، ... ، ۷ شماره‌گذاری کند، برای توزیع دوم باید این اعداد را طوری آرایش دهد که هیچ کدام آنها در جای طبیعی خود نباشند. این کار به d_7 راه انجام می‌شود. بنابر اصل ضرب، شرکت می‌تواند این دو توزیع را به $(7!)d_7 \doteq (7!)^2(e^{-1})$ راه انجام دهد. □

تمرینهای ۳.۸

۱. به چند راه می‌توان اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، ... ، ۱۰ را بر خطی آرایش داد تا هیچ عدد زوجی در جای طبیعیش نباشد؟

۲. از هر یک از چهار متقاضی شغلی، قرار است ۳۰ دقیقه مصاحبه به عمل آید: ۱۵ دقیقه با هر یک از دو مصاحبه‌گر. (مصاحبه‌گرها در اطاقهای جداگانه‌اند و مصاحبه ساعت ۹ صبح شروع می‌شود.) (الف) به چند راه می‌توان این مصاحبه را برای یک دورهٔ یک ساعته برنامه‌ریزی کرد؟ (ب) یک متقاضی به نام J، سر ساعت ۹ از راه می‌رسد. احتمال اینکه مصاحبه‌هایش یکی پس از دیگری انجام گیرد چقدر است؟ (ج) متقاضی دیگر، R، ساعت ۹ از راه می‌رسد و امیدوار است که مصاحبه‌هایش طوری تمام شود که ۹ و ۵۰ دقیقه به قرار دیگری که دارد برسد. احتمال اینکه R بتواند موفق به انجام این کار شود چقدر است؟

۳. خانم F به چند راه می‌تواند ده کتاب متمایز را بین ده طفل (یک کتاب برای هر طفل) توزیع و سپس آنها را جمع‌آوری و از نو کتابها را توزیع کند تا هر طفل فرصت خواندن دو کتاب متفاوت را داشته باشد؟

۴. **الف)** وقتی n توپ به‌شماره‌های ۱، ۲، ۳، ... ، n را به‌توالی از ظرفی برمی‌دارند **یک تطابق** وقتی رخ می‌دهد که انتخاب m امین توپ در استخراج شمارهٔ m، $1 \leq m \leq n$، صورت گیرد. مطلوب است احتمال (i) نداشتن هیچ تطابق؛ (ii) داشتن دقیقاً یک تطابق؛ (iii) داشتن حداقل یک

تطابق؛ (iv) داشتن r، $1 \leq r \leq n$، تطابق.

ب) پاسخهای سؤالهای قسمت (الف) را تقریب بزنید.

۵. ده خانم در ضیافتی شرکت می‌کنند. هر خانم کت و کیفش را به دربان می‌سپارد. پس از ترک ضیافت به هر خانم کت و کیفی به تصادف داده می‌شود.

(الف) به چند راه می‌توان کتها و کیفها را توزیع کرد تا هیچ خانمی کت و کیف خود را با هم تحویل نگیرد؟ (ب) به چند راه می‌توان این توزیع را انجام داد که هیچ خانمی کیف و کت خود را با هم برای تعویض برنگرداند؟

۶. الف) به چند راه می‌توان اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، . . . ، n را بر خطی آرایش داد که هیچ‌یک از الگوهای ۱۲، ۲۳، ۳۴، $\cdots$، $(n-1)n$ پیدا نشود؟

ب) نشان دهید که نتیجهٔ قسمت (الف) برابر $d_n + d_{n-1}$ است. (d_n برابر تعداد پریشیهای ۱، ۲، . . . ، n است.)

۷. به قسمت (الف) تمرین ۶ پاسخ دهید به شرطی که اگر اعداد بر یک دایره آرایش داده شوند، و، وقتی در جهت حرکت عقربهٔ ساعت پیش می‌رویم هیچ یک از الگوهای ۱۲،۲۳،۳۴،$\cdots$،$(n-1)n$، $n1$ پیدا نشود.

۸. مطلوب است احتمال اینکه شرط‌بند مثال ۸.۸ (الف) دقیقاً پنج شرط‌بندی را ببرد؛ (ب) حداقل پنج شرط‌بندی را ببرد؟

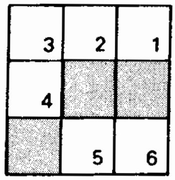
۴.۸ چندجمله‌ایهای رخی

«صفحهٔ شطرنجی» شش مربعی شکل ۷.۸ را در نظر بگیرید. در شطرنج مهره‌ای وجود دارد که رخ یا قلعه خوانده می‌شود و مجاز است به‌صورت افقی یا قائم به هر تعداد خانهٔ خالی که می‌خواهد حرکت کند. در اینجا رخی در خانهٔ ۳ی شکل می‌تواند در یک بازی به خانه‌های ۱، ۲، یا ۴ حرکت کند. رخی در خانهٔ ۵ می‌تواند به خانهٔ ۶ یا خانهٔ ۲ برود (گرچه خانه‌ای بین خانه‌های ۵ و ۲ هست)

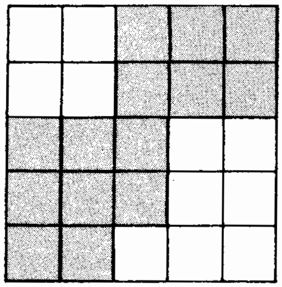
برای $k \in \mathbf{Z}^+$ می‌خواهیم تعداد راههایی را بیابیم که k رخ می‌توانند بر این صفحهٔ شطرنج قرار گیرند به قسمی که هیچ دو تای آنها نتوانند به هم برخورد کنند، یعنی هیچ دو تای آنها در یک سطر یا یک ستون صفحهٔ شطرنج نباشند. این تعداد را با r_k یا اگر بخواهند تأکید کنند که روی صفحهٔ شطرنج C کار می‌کنند با $r_k(C)$ نشان می‌دهند.

برای هر صفحهٔ شطرنجی، r_1 تعداد خانه‌های صفحه است. در اینجا $r_1 = 6$. رخهایی را که با هم برخورد نمی‌کنند در جفت موضعهای زیر می‌توان قرار داد: $(1,4)$، $(1,5)$، $(2,4)$، $(2,6)$، $(3,5)$، $(3,6)$، $(4,5)$، و $(4,6)$، پس $r_2 = 8$. با ادامهٔ کار، با استفاده از مکانهای $(1,4,5)$ و $(2,4,6)$ به‌دست می‌آوریم $r_3 = 2$؛ و بالاخره برای $k \geq 4$، $r_k = 0$.

با $r_0 = 1$، چندجمله‌ای رخی $r(C,x)$ برای صفحهٔ شطرنجی شکل ۷.۸ به‌صورت $r(C,x) = 1 + 6x + 8x^2 + 2x^3$ تعریف می‌شود. برای هر $k \geq 0$، ضریب x^k تعداد



شکل۸.۷



شکل۸.۸

راههایی است که می‌توان k رخی را که با هم برخورد ندارند در صفحهٔ Cی شطرنج قرار داد.

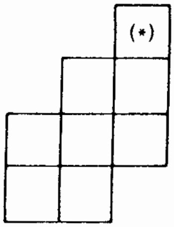
خواهیم دید که آنچه در اینجا (با استفاده از تحلیل مورد به مورد) انجام دادیم کاری خسته‌کننده است. وقتی اندازهٔ صفحه زیاد شود، مجبوریم حالتهایی را که در آنها اعدادی نظیر r_4 و r_5 صفر نیستند در نظر بگیریم. در نتیجه، اینک مشاهداتی را انجام می‌دهیم که یا استفاده از صفحه‌های کوچک را میسر می‌سازند و یا می‌توانند صفحهٔ بزرگ را به زیرصفحه‌هایی کوچکتر تفکیک کنند.

صفحهٔ شطرنجی C در شکل ۸.۸ از ۱۱ خانهٔ هاشور نخورده ساخته شده است. توجه می‌کنیم که C متشکل از یک زیرصفحهٔ 2×2ی C_1 و یک زیرصفحهٔ هفت‌خانه‌ای C_2 است که در گوشهٔ پایین سمت راست قرار دارد. این زیرصفحه‌ها مجزا از هم هستند، زیرا خانه‌ای در یک سطر یا ستون C ندارند.

با محاسبه‌ای نظیر آنچه برای اولین صفحهٔ شطرنجی انجام دادیم، به‌دست می‌آوریم

$$r(C_1, x) = 1 + 4x + 2x^2 \qquad r(C_2, x) = 1 + 7x + 10x^2 + 2x^3$$
$$r(C, x) = 1 + 11x + 40x^2 + 56x^3 + 28x^4 + 4x^5 = r(C_1, x) \cdot r(C_2, x)$$

بنابراین، $r(C, x) = r(C_1, x) \cdot r(C_2, x)$. امّا آیا تصادفی بوده است که این رابطه پیدا شده است یا چیزی است که باید دقیقتر آن‌را بررسی کنیم؟ مثلاً در به‌دست آوردن r_3 برای C، لازم



شکل ۹.۸

است که بدانیم به چند راه می‌توانیم سه رخی را که با هم برخورد ندارند بر صفحهٔ C قرار دهیم. سه حالت روی می‌دهند:

الف) هر سه رخ در زیر-صفحهٔ C_2 هستند: ۲ راه.

ب) دو رخ در زیر-صفحهٔ C_2 هستند و یک رخ روی C_1 است: $(10)(4) = 40$ راه.

ج) یک رخ در زیر-صفحهٔ C_2 است و دو رخ روی زیر-صفحهٔ C_1 هستند: $(7)(2) = 14$ راه.

در نتیجه، سه رخی را که با هم برخورد ندارند می‌توان به $56 = (2)(7) + (4)(10) + 2$ راه در صفحهٔ C قرار داد. در اینجا می‌بینیم که ۵۶ درست برابر است با ضریب x^3 در حاصلضرب $r(C_1, x) \cdot r(C_2, x)$.

به طور کلی، اگر صفحهٔ شطرنجی C از زیرصفحه‌های دو به دو مجزای C_1، C_2، ...، C_n ساخته شده باشد، آن‌گاه $r(C, x) = r(C_1, x)r(C_2, x)\cdots r(C_n, x)$.

آخرین نتیجهٔ این بخش نوع اصلی را که در قضایای دیگر ترکیبیاتی و ریاضیات گسسته دیده‌ایم به ما می‌دهد: به فرض داشتن یک صفحهٔ شطرنجی بزرگ، آن‌را به زیرصفحه‌های کوچکتری تفکیک می‌کنیم که چندجمله‌ایهای رخی آنها را بتوان با تجسس، تعیین کرد.

صفحهٔ شطرنجی C در شکل ۹.۸ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $k \geq 1$. برای هر خانهٔ C، نظیر خانه‌ای که با (*) تعیین شده است، دو امکان برای بررسی وجود دارند.

الف) یک رخ را در خانهٔ معینی قرار می‌دهیم. آن‌گاه باید همهٔ خانه‌های دیگر C را که در سطر و ستون این خانهٔ معین قرار دارند، به‌عنوان مکانهای ممکن $k - 1$ رخ دیگر، حذف کنیم. زیرصفحهٔ کوچکتر باقی‌مانده رابا C_s نشان می‌دهیم.

ب) از آن خانهٔ معین اصلاً استفاده نمی‌کنیم. k رخ را در زیرصفحهٔ C_e (همان C که خانهٔ معیّن اولی از آن حذف شده است) قرار می‌دهیم.

چون این دو حالت شامل همهٔ حالتها و مجزا هستند،

$$r_k(C) = r_{k-1}(C_s) + r_k(C_e)$$

از این رابطه داریم

$$r_k(C)x^k = r_{k-1}(C_s)x^k + r_k(C_e)x^k \qquad (1)$$

اگر تعداد خانه‌های صفحهٔ شطرنجی برابر با n (در اینجا $n = 8$) باشد، آن‌گاه معادلهٔ (۱) برای $1 \leq k \leq n$ معتبر است و می‌نویسیم

$$\sum_{k=1}^{n} r_k(C)x^k = \sum_{k=1}^{n} r_{k-1}(C_s)x^k + \sum_{k=1}^{n} r_k(C_e)x^k \qquad (2)$$

برای معادلهٔ (۲) ملاحظه می‌کنیم که مجموعیابیها ممکن است قبل از $k = n$ متوقف شوند. حالتهایی نظیر حالتهای شکل ۷.۸، وجود دارند که در آنها r_n و برخی r_kهای قبلی صفرند. مجموعیابیها با $k = 1$ شروع می‌شوند، زیرا در غیر این‌صورت ممکن است در نخستین جمعوند، در طرف راست معادلهٔ (۲)، با جملهٔ $r_{-1}(C_s)x^0$ روبه‌رو شویم.

معادلهٔ (۲) را می‌توان به‌صورت

$$\sum_{k=1}^{n} r_k(C)x^k = x\sum_{k=1}^{n} r_{k-1}(C_s)x^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} r_k(C_e)x^k \qquad (3)$$

یا به‌صورت

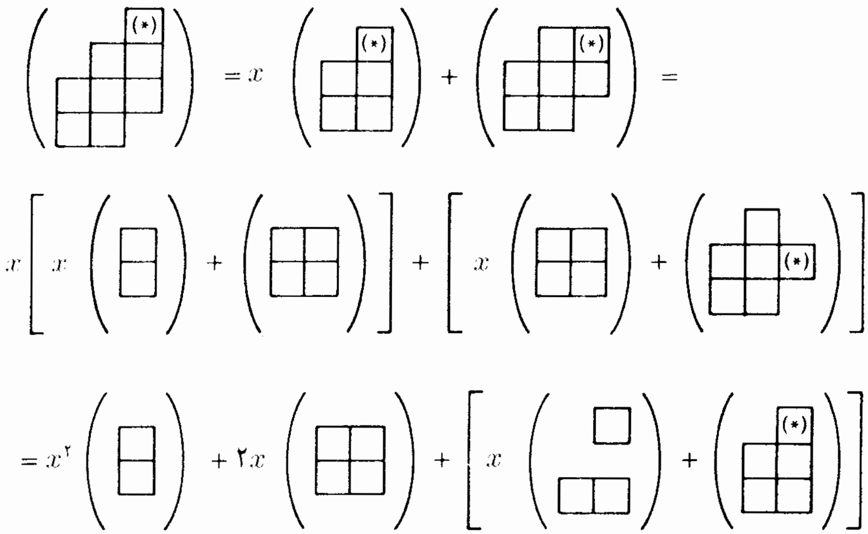
$$1 + \sum_{k=1}^{n} r_k(C)x^k = x \cdot r(C_s, x) + \sum_{k=1}^{n} r_k(C_e)x^k + 1$$

نوشت، که از آن نتیجه می‌شود

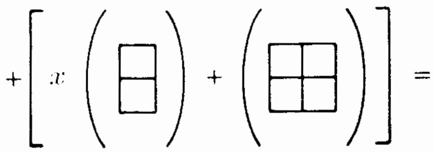
$$r(C,x) = x \cdot r(C_s, x) + r(C_e, x) \qquad (4)$$

اینک این معادلهٔ نهایی را برای تعیین چندجمله‌ای رخی در صفحهٔ شطرنجی شکل ۹.۸ به‌کار می‌بریم. هر بار که مفهوم معادلهٔ (۴) را به‌کار می‌بریم خانهٔ خاصی را که با علامت (*) نشان داده‌ایم مشخص می‌کنیم. دور هر صفحهٔ شطرنجی پرانتزی برای نشان دادن چندجمله‌ای

رخی آن صفحه گذاشته‌ایم.



$$= x^2(1+2x) + 2x(1+4x+2x^2) + x(1+3x+x^2)$$



$$3x + 12x^2 + 7x^3 + x(1+2x) + (1+4x+2x^2) = 1 + 8x + 16x^2 + 7x^3$$

۵.۸ آرایشهایی با موضعهای ممنوع

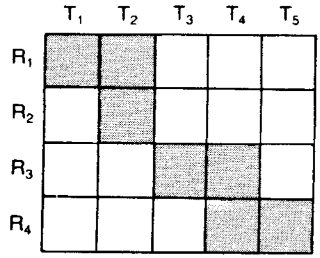
چندجمله‌ایهای رخی بخش قبل فی‌نفسه جالب به نظر می‌رسند. اینک خواهیم دید که آنها در حل مسائل زیر مفیدند.

مثال ۱۰.۸ زن و شوهری برای تنظیم صندلیهای مدعوین در مراسم عروسی پسرشان با چهار خویشاوند R_i، $1 \le i \le 4$، مواجه‌اند که هیچ یک مایل نیست پهلوی دیگری بنشینند. سر هر یک از پنج میز T_j، $0 \le j \le 1$، یک صندلی خالی گذاشته شده است. به دلیل اختلاف خانوادگی،

الف) R_1 سر میزهای T_1 یا T_2 نخواهد نشست **ب)** R_2 سر میز T_2 نخواهد نشست.

ج) R_3 سر میزهای T_3 یا T_4 نخواهد نشست **د)** R_4 سر میزهای T_4 یا T_5 نخواهد نشست

این وضعیت را در شکل ۱۰.۸ نمایش داده‌ایم. تعداد راههایی که می‌توانیم این ۴ نفر را بنشانیم و در شرایط (الف) تا (د) صدق کنند برابر با تعداد راههای قراردادن چهار رخ بر صفحهٔ شطرنجی است که از خانه‌های هاشورنخورده ساخته می‌شود. رخها با هم برخورد ندارند. امّا چون تنها هفت خانهٔ



شکل۸.۱۰

هاشورخورده داریم در مقایسه با سیزده خانهٔ هاشورنخورده، راحت‌تر است که با صفحهٔ شطرنجی هاشورخورده کار کنیم.

کار را با شرطهایی شروع می‌کنیم که درکاربرد اصل شمول و طرد ضروری‌اند: برای $1 \leq i \leq 4$، فرض‌کنید c_i شرط تخصیص‌دادن یک صندلی به خویشاوند R_i در یک جای ممنوع (هاشورخورده) باشد. طبق معمول، $|S|$ معرف تعداد کل راههایی است که می‌توانیم هر یک از چهار خویشاوند را سر یک میز بنشانیم. پس $|S| = N = S_0 = 5!$.

برای تعیین S_1 هر یک از موارد زیر را در نظر می‌گیریم:

- $N(c_1) = 4! + 4!$، زیرا برای نشاندن R_2، R_3، و R_4، اگر R_1 در موضع ممنوع T_1 باشد $4!$ راه وجود دارد و اگر R_1 در موضع ممنوع دیگرش در میز T_2 باشد $4!$ راه دیگر برای او وجود دارد.
- $N(C_2) = 4!$، زیرا پس از قراردادن R_2 در میز ممنوع T_2، باید R_1، R_3، و R_4 را هر یک بر میزهای T_1، T_3، T_4، و T_5 بنشانیم.
- $N(C_3) = 4! + 4!$، یک جمعوند مربوط به R_3 در موضع ممنوع T_3 و جمعوند دیگر مربوط به R_3 در موضع ممنوع T_4 است.
- $N(C_4) = 4! + 4!$، دو جمعوند حاصل برای R_4 که در هر یک از دو موضع ممنوع T_4 و T_5 قرار می‌گیرند.

بنابراین $S_1 = 7(4!)$.

با برگشت به S_2، ملاحظات زیر را داریم:

- $N(c_1c_2) = 3!$، زیرا بعد از اینکه R_1 را در T_1 و R_2 را در T_2 قرار می‌دهیم، سه میز (T_3، T_4، و T_5) می‌مانند که R_3 و R_4 می‌توانند روی آنها نشانده شوند.
- $N(c_1c_3) = 3! + 3! + 3! + 3!$، زیرا چهار حالت وجود دارند که برای آنها R_1 و R_3 در مواضع ممنوع قرار می‌گیرند:

(i) R_1 در T_1؛ R_3 در T_3 (ii) R_1 در T_2؛ R_3 در T_3

(iii) R_1 در T_1؛ R_3 در T_4 (iv) R_1 در T_2؛ R_3 در T_4

به‌روشی مشابه به‌دست می‌آوریم که $N(c_1c_4) = 4(3!)$، $N(c_2c_3) = 2(3!)$، $N(c_2c_4) = 2(3!)$، و $N(c_3c_4) = 3(3!)$. در نتیجه $S_2 = 16(3!)$.

قبل ازادامه، ذکر چند نکته دربارهٔ S_1 و S_2 را لازم می‌دانیم. برای S_1 داریم $7(4!) = 7(5-1)!$، که ۷ تعداد خانه‌های هاشورخوردهٔ شکل ۱۰.۸ است. همچنین $S_2 = 16(3!) = 16(5-2)!$، که ۱۶ تعداد راههای قرارگرفتن رخهایی است که برخورد ندارند و می‌توان آنها را بر صفحهٔ شطرنجی هاشورخورده قرار داد.

به‌طور کلی، برای $0 \leq i \leq 4$، $S_i = r_i(5-i)!$، که r_i تعداد راههای ممکن قراردادن i رخ است که با هم برخورد ندارند و می‌توان آنها را بر صفحهٔ شطرنجی هاشورخوردهٔ شکل ۱۰.۸ قرار داد.

در نتیجه، برای تسریع در حل این مسأله، به $r(C,x)$، یعنی چندجمله‌ای رخی صفحهٔ شطرنجی برمی‌گردیم. با استفاده از تجزیهٔ C به زیرصفحه‌های مجزا در گوشه‌های بالای چپ و پایین راست صفحه، به‌دست می‌آوریم که

$$r(C,x) = (1+3x+x^2)(1+4x+3x^2) = 1+7x+16x^2+13x^3+3x^4$$

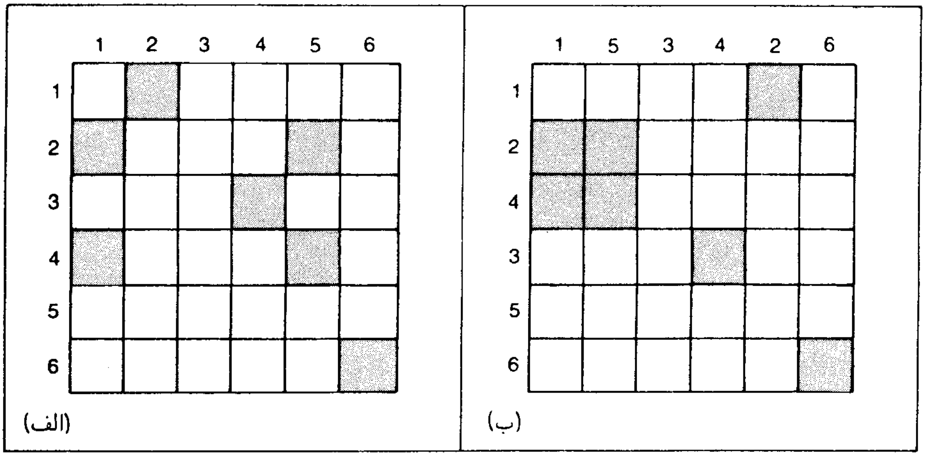
لذا

$$N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\overline{c}_4) = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 5! - 7(4!) + 16(3!) - 13(2!) + 3(1!) = \sum_{i=0}^{4}(-1)^i r_i(5-i)! = 25$$

حالا این زن و شوهر می‌توانند نفس راحتی بکشند. ۲۵ راه وجود دارند که آنها می‌توانند این چهار خویشاوند را در مراسم عروسی بنشانند و جلوی یک‌به‌دوکردن خویشاوندان را بگیرند. □

مثال آخر نشان می‌دهد که چگونه تجدید آرایش مختصر صفحهٔ شطرنجی می‌تواند در محاسبات کمک‌کننده باشد.

مثال ۱۱.۸ یک جفت تاس داریم؛ که یکی قرمز است، و دیگری سبز، این دو تاس را شش بار متوالی می‌ریزیم. اگر بدانیم که جفتهای مرتب $(1,2)$، $(2,1)$، $(2,5)$، $(3,4)$، $(4,1)$، $(4,5)$ و $(6,6)$ رخ نداده‌اند، احتمال اینکه بقیهٔ شش مقدار برای هر دو تاس قرمز و سبز به‌دست آیند چقدر است؟ (در اینجا، در زوج مرتب (x,y)، x معرف عدد تاس قرمز و y معرف عدد تاس سبز است.)



شکل ۱۱.۸

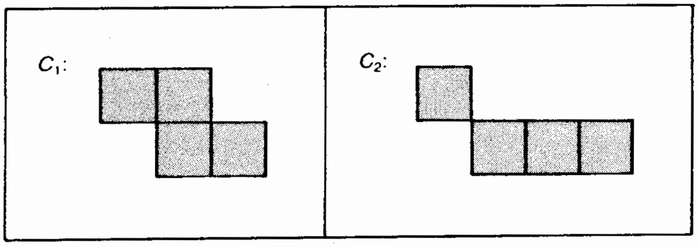
با پذیرفتن این مسأله به‌عنوان مسألهٔ دیگری که با جایگشتها و موضعهای ممنوع سروکار دارد، صفحهٔ شطرنجی شکل ۱۱.۸ (الف) را بنا می‌کنیم، که در آن خانه‌های هاشورخورده، موضعهای ممنوع را تشکیل می‌دهند. در این شکل، خانه‌های هاشورخورده پراکنده‌اند. با برچسب‌زدن جدید سطرها و ستونها، می‌توانیم صفحهٔ شطرنجی را به‌صورت شکل ۱۱.۸(ب) از نو رسم کنیم، که در آن خانه‌های هاشورخورده در همان سطر (یا ستون) از صفحهٔ قسمت (الف) هستند و مجاور هم قرارگرفته‌اند. در شکل ۱۱.۸(ب) صفحهٔ شطرنج C، اجتماع چهار زیرصفحهٔ دو به دو مجزاست و

$$r(C,x) = (۱ + ۴x + ۲x^۲)(۱ + x)^۳ = ۱ + ۷x + ۱۷x^۲ + ۱۹x^۳ + ۱۰x^۴ + ۲x^۵$$

برای $۱ \leq i \leq ۶$، c_i را به‌عنوان شرطی تعریف می‌کنیم، که در ریختن شش بار تاسها، تمام شش مقدار برای هر دو تاس قرمز و سبز رخ دهند، امّا i در تاس قرمز با یکی از اعداد ممنوع مربوط به تاس سبز جفت شود. (توجه کنید $N(c_۵) = ۰$.) در این‌صورت، تعداد دنباله‌های ۶ پرتاب تاسها برای پیشامد موردنظر عبارت است از

$$\begin{aligned}(۶!)N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\overline{c}_۳\overline{c}_۴\overline{c}_۵\overline{c}_۶) &= (۶!)\sum_{i=۰}^{۶}(-۱)^i S_i = (۶!)\sum_{i=۰}^{۶}(-۱)^i r_i \cdot (۶-i)! \\ &= ۶![۶! - ۷(۵!) + ۱۷(۴!) - ۱۹(۳!) + ۱۰(۲!) - ۲(۱!) + ۰(۰!)] \\ &= ۶![۱۹۲] = ۱۳۸۲۴۰\end{aligned}$$

چون فضای نمونه‌ای متشکل از همهٔ دنباله‌های شش جفت مرتب منتخب با تکرار، از ۲۹



شکل ۱۲.۸

خانهٔ هاشورنخوردهٔ صفحهٔ شطرنجی است، احتمال این پیشامد $۰٫۰۰۰۲۳ \doteq ۱۳۸۲۴۰/(۲۹)^۶$ است. □

تمرینهای ۴.۸ و ۵.۸

۱. درستی چندجمله‌ایهای رخی را مستقیماً برای (الف) صفحه‌های شطرنجی هاشورنخوردهٔ شکلهای ۸.۸ و ۹.۸، و (ب) صفحه‌های شطرنجی هاشورخوردهٔ شکلهای ۱۰.۸ و ۱۱.۸ (ب) تحقیق کنید.

۲. کوچکترین صفحهٔ شطرنجی (با کمترین تعداد خانه‌ها) را که برای آن $r_{۱۰} \neq ۰$، بسازید یا توصیف کنید.

۳. **الف)** برای صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ متعارف، چندجمله‌ای رخی را بیابید.
ب) به‌جای n، $n \in \mathbf{Z}^+$، مقدار ۸ را قرار دهید و به قسمت (الف) پاسخ دهید.

۴. چندجمله‌ایهای رخی را برای صفحه‌های شطرنجی هاشورخوردهٔ شکل ۱۲.۸ بیابید.

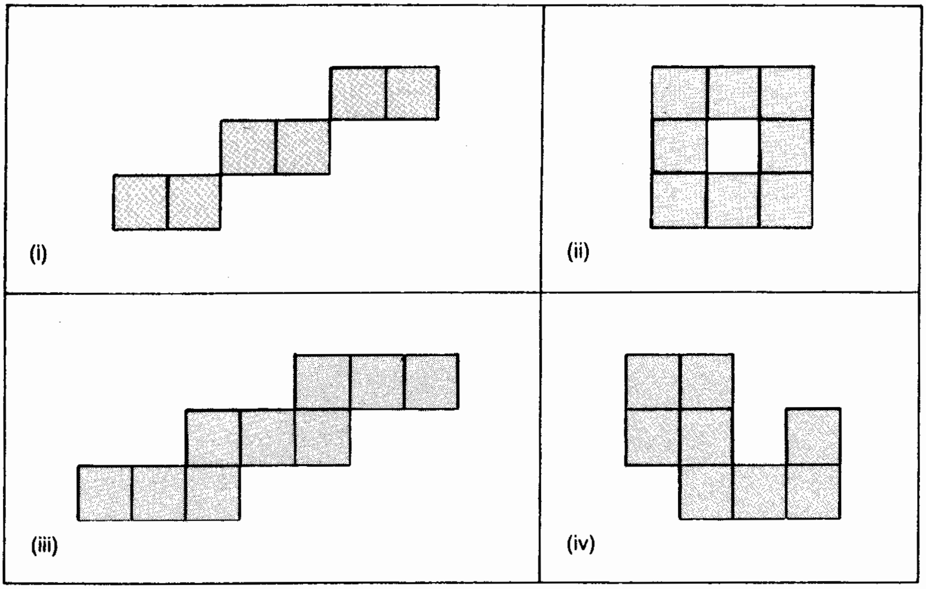
۵. **الف)** چندجمله‌ایهای رخی را برای صفحه‌های شطرنجی هاشورخوردهٔ شکل ۱۳.۸ بیابید.
ب) صفحهٔ شطرنجی (و چندجمله‌ای رخی) را برای شکل ۱۳.۸ (i) تعمیم دهید.

۶. فرض کنید C صفحهٔ شطرنجی است که m سطر و n ستون دارد، $m \leq n$. (برای کل، mn مربع). برای $۰ \leq k \leq m$، به چند راه می‌توانیم k رخ همانند را که با هم برخورد ندارند بر C آرایش دهیم؟

۷. پروفسور R، پنج مصحح برای تصحیح برنامه‌های دروس APL، **بیسیک**، **فورترن**، **پاسکال** و PL/I دارد. دو مصحح، J و C، زبان فورترن را دوست ندارند. مصحح S مایل است از پرداختن به زبانهای بیسیک و PL/I پرهیز کند. P از زبانهای APL و بیسیک بیزار است، و T از کار با زبان فورترن و پاسکال امتناع می‌کند. پروفسور R به چند راه می‌تواند به هر مصحح برنامه‌های مربوط به یک زبان را برای تصحیح تخصیص دهد، تا هر پنج زبان مصحح داشته باشد و همه را هم راضی نگهدارد؟

۸. چرا برای جواب مثال ۱۱.۸، !۶ را در جملهٔ $N(\overline{c}_۱\overline{c}_۲\cdots\overline{c}_۶)$ (!۶) آورده‌ایم؟

۹. پنج استاد به نامهای A، V، G، J، و M قرار است به تدریس یکی از کلاسهای دروس حسابان I، حسابان II، حسابان III، ترکیبیات، و آمار گمارده شوند. A مایل نیست حسابان II یا ترکیبیات



شکل ۱۳.۸

را تدریس کند، G تدریس آمار را دوست ندارد، V و M هر دو از تدریس حسابان I و III امتناع می‌کنند و J از تدریس حسابان II بیزار است.

الف) مدیر بخش ریاضی به چند راه می‌تواند هر یک از این استادان را به تدریس یکی از این پنج درس بگمارد و در عین حال رضایت افراد بخش را فراهم نماید؟

ب) برای تخصیصهای قسمت (الف) احتمال اینکه V ترکیبیات را تدریس کند چقدر است؟

ج) برای تخصیصهای قسمت (الف) احتمال اینکه G یا M حسابان II را تدریس کند چقدر است؟

۱۰. یک جفت تاس، یکی قرمز و دیگری سبز، شش بار ریخته می‌شوند. می‌دانیم که جفتهای مرتب (۱, ۱)، (۱, ۵)، (۲, ۴)، (۳, ۶)، (۴, ۲)، (۴, ۴)، (۵, ۱)، و (۵, ۵) رخ نداده‌اند. احتمال اینکه هر مقداری برای هر دو تاس قرمز و سبز بیاید چقدر است؟

۱۱. *

۶.۸ خلاصه و مرور تاریخی

در فصلهای اول و سوّم این کتاب با مسائل شمارشیی سروکار داشتیم که مجبور بودیم دقت خود را متوجه وضعیتهایی کنیم که در آنها همهٔ آرایشها یا انتخابها محاسبه می‌شدند. در این زمینه، در فصل ۵ وقتی سعی داشتیم تعداد تابعهای پوشا بین دو مجموعهٔ متناهی را حساب کنیم، بیشتر درگیر بودیم.

* تمرین ۱۱ حذف شده‌است. ـم.

در این فصل، با نمودارهای ون برای ارائهٔ طریق، الگویی به‌نام اصل شمول و طرد به‌دست آوردیم. با استفاده از این اصل، هر مسأله را برحسب شرطها و زیرمجموعه‌ها از نو بیان کردیم. با استفاده از فرمولهای شمارش، دربارهٔ جایگشتها و ترکیبها که قبلاً بسط داده بودیم، برخی از مسائل فرعی ساده‌تر را حل کردیم و به این اصل توانایی دادیم تا انجام شمارش کامل را به‌عهده بگیرد. در نتیجه، توانستیم مسائلی متنوع را حل کنیم که برخی به نظریهٔ اعداد و یکی از آنها به نظریهٔ گراف مربوط می‌شد. همچنین فرمولی را که قبلاً در بخش ۳.۵ برای تعداد تابعهای پوشا، بین دو مجموعهٔ متناهی حدس زده بودیم ثابت کردیم.

این اصل تاریخچهٔ جالبی دارد که در نوشته‌های مختلف تحت نامهایی نظیر «روش غربال» یا «اصل رده‌بندی حذفی» وجود دارد. یک صورت نظریهٔ مجموعه‌ای این اصل، که با اجتماعها و اشتراکها سروکار دارد در اصول شانسها (۱۷۱۸)، کتابی درسی دربارهٔ نظریهٔ احتمال اثر آبراهام دمواور (۱۶۶۷ـ۱۷۵۴) آمده است. کمی پیشتر از آن در ۱۷۱۳، پی‌یر ریمون دومنمور (۱۶۷۸ـ۱۷۱۹) اندیشهٔ زیربنایی این اصل را در حل مسأله‌ای که عموماً به مسألهٔ پریشیها معروف است به‌کار برد.

امتیاز این نحوهٔ بسط و پرداختن به این اصل، از آن جیمزجوزف سیلوستر[1] (۱۸۱۴ـ۱۸۹۷) است. ولی اهمیت این تکنیک، تا زمانی که نوشته‌های ویت‌ورث[2] [۱۰]، ریاضیدانان را از توان و استفادهٔ آن آگاه نکرده بود، به‌طور کلی درک نشده بود.

برای اطلاع بیشتر دربارهٔ کاربرد این اصل، فصل ۴ لیو [۴]، فصل ۲ رایزر [۸]، یا فصل ۵ تاکر [۹] را مطالعه کنید. قضایای بیشتری از نظریهٔ اعداد مربوط به این اصل است، از جمله فرمول انعکاس موبیوس را می‌توان در فصل ۲ هال [۱]، فصل ۱۰ لیو [۵]، و فصل ۱۶ هاردی و رایت [۳] یافت. تعمیمی از این فرمول را روتا در مقاله‌ای [۷] عرضه کرده است.

هنسن[3]، سیفارث[4]، و وستن[5] در مقاله‌ای [۲] تعمیمی جالب از مسألهٔ پریشی که در بخش ۳.۸ از آن بحث شد تهیه کرده‌اند. اندیشهٔ زیربنایی چندجمله‌ایهای رخی و کاربردهای آنها در دههٔ ۱۹۳۰ و طی دهه‌های ۱۹۴۰ و ۱۹۵۰ بسط یافته است. مطالبی اضافی دربارهٔ این عناوین را می‌توان در فصلهای ۷ و ۸ ریوردان[6] [۶] یافت.

مراجع

1. Hall, Marshall, Jr. *Combinatorial Theory*. Waltham, Mass.: Blaisdell, 1967.
2. Hanson, Denis, Seyffarth, Karen, and Weston, J. Harley. "Matchings, Derangements, Rencontres," *Mathematics Magazine* 56, no. 4 (September 1983): pp. 224–229.
3. Hardy, Godfrey Harold, and Wright, Edward Maitland. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed. Oxford, England: Clarendon Press, 1960.

1. James Joseph Sylvester 2. W. A. Whitworth 3. D. Hanson 4. K. Seyffarth
5. J. H. Weston 6. J. Riordan

4. Liu, C. L. *Introduction to Combinatorial Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1968
5. Liu, C. L. *Topics in Combinatorial Mathematics*. Mathematical Association of America, 1972.
6. Riordan, John. *An Introduction to Combinatorial Analysis*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1980. (Originally published in 1958 by John Wiley & Sons.)
7. Rota, Gian Carlo. "On the Foundations of Combinatorial Theory, I. Theory of Möbius Functions," *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeits Theorie, 2:* pp. 340–368, 1964.
8. Ryser, Herbert J. *Combinatorial Mathematics*. Carus Mathematical Monograph, No. 14. Published by the Mathematical Association of America, distributed by John Wiley & Sons, New York, 1963.
9. Tucker, Alan. *Applied Combinatorics*. New York: Wiley, 1980.
10. Whitworth, William Allen. *Choice and Chance*. Originally published at Cambridge in 1867. Reprint of the 5th ed. (1901), Hafner, New York, 1965.

تمرینهای گوناگون

۱. تعیین کنید چند عدد $n \in \mathbf{Z}^+$ در $n \leq ۵۰۰$ صدق می‌کنند و بر ۲، ۳، ۵، ۶، ۸، یا ۱۰ تقسیمپذیر نیستند.

۲. مطلوب است همهٔ مقادیر $x \in \mathbf{R}$ به قسمی که $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{۱}{۲} \rfloor = \lfloor ۲x \rfloor$.

۳. سه مقدار برای $n \in \mathbf{Z}^+$ بیابید که برای آنها برابری $\phi(n) = ۱۶$ برقرار باشد.

۴. تعداد $n \in \mathbf{Z}^+$هایی را بیابید که $n \leq ۱۰۰۰$ و n مربع، مکعب، یا توان چهارم نباشد.

۵. به چند راه می‌توانیم اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، ...، ۸ را روی خطی آرایش دهیم به قسمی که هیچ‌کدام از الگوهای ۱۲، ۲۳، ...، ۷۸، ۸۱ ظاهر نشود؟

۶. الف) اگر k رنگ موجود باشند، به چند راه می‌توانیم دیوارهای اطاقی پنج‌گوشه را رنگ بزنیم به شرطی که دیوارهای مجاور با رنگهای مختلف رنگ‌آمیزی شوند؟

ب) کوچکترین مقدار k که برای آن، این رنگ‌آمیزی امکان دارد چقدر است؟

ج) اگر اطاق شش‌گوشه باشد به قسمتهای (الف) و (ب) پاسخ دهید.

۷. به چند راه می‌توان پنج زن و شوهر را گرد میزی مدوّر نشاند به قسمی که هیچ زن و شوهری پهلوی هم نباشند؟ (در اینجا، مانند مثال ۱۶.۱، بین دو آرایشی که در آنها می‌توان اولی را از دومی با دوران موضعهای ده نفر به‌دست آورد تمایزی قائل نیستیم.)

۸. با استفاده از نتیجهٔ قضیهٔ ۲.۸، ثابت کنید که تعداد راههایی که می‌توانیم s شیٔ مختلف را در n ظرف متمایز قرار دهیم که m ظرف آن هر یک محتوی دقیقاً r تا از شیٔها باشند برابر است با

$$\frac{(-۱)^m n! s!}{m!} \sum_{i=m}^{n} \frac{(-۱)^i (n-i)^{s-ir}}{(i-m)!(n-i)!(s-ir)!(r!)^i}$$

۹. اگر آرایشی از حروف واژهٔ SURREPTITIOUS به تصادف انتخاب شود، احتمال اینکه شامل (الف) دقیقاً سه جفت از حروف همانند متوالی باشد؛ (ب) حداکثر سه جفت از حروف همانند متوالی باشد، چقدر است؟

۱۰. فهرست x_1، x_1، x_2، x_2، . . . ، x_n، x_n متشکل از n جفت نماد متمایز است. به چند راه می‌توان این $2n$ نماد را آرایش داد به قسمی که هیچ جفت نماد همانند متوالی وجود نداشته باشد؟

۱۱. به چند راه می‌توان چهار w، چهار x، چهار y، و چهار z را آرایش داد به قسمی که هیچ چهارتایی متوالی از یک حرف وجود نداشته باشد؟

۱۲. فهرستی از سه x، سه y، و سه z در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که این نه حرف را می‌توان به $(7!/3!3!) - (8!/3!3!)$ راه، با دو یا سه x مجاور، آرایش داد.

ب) نشان دهید که این حروف را می‌توان به $(7!/3!) - 2(6!/3!) + (5!/3!)$ راه، با یک جفت یا یک سه‌تایی از xهای مجاور و yهای مجاور، آرایش داد.

ج) با آرایش دادن این نه حرف، نشان دهید که تعداد $3! - 3(4!) + 3(5!) - 6!$ آرایش با دو یا سه حرف از هر حرفی که پیدا می‌شود وجود دارد.

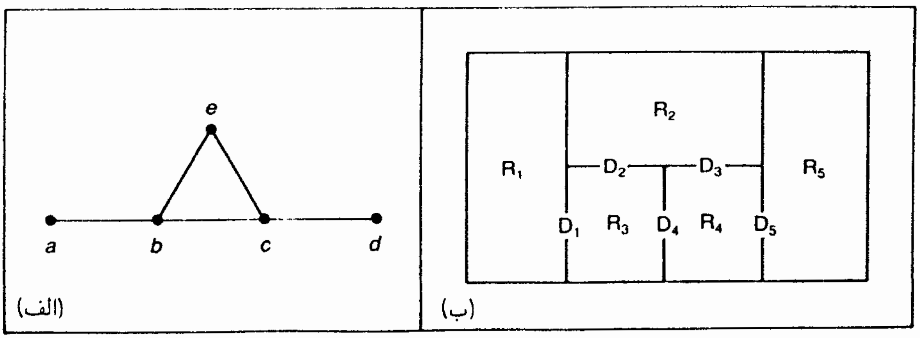
د) به چند راه می‌توان این حروف را آرایش داد به قسمی که حروف همانند متوالیاً قرار نگیرند.

ه) چرا نمی‌توانیم قسمت (د) را با در نظر گرفتن دو راه حلّ کنیم که در آنها می‌توانیم سه x و سه y را بدون اینکه حروف متوالی همانند باشند آرایش دهیم، و آن‌گاه تعیین کنیم که چگونه سه z را قرار دهیم که هیچ دو حرفی متوالی نباشند؟

۱۳. **(الف)** n شیئ متمایز داده شده‌اند، به چند راه می‌توان rتا از این اشیاء را انتخاب کرد به قسمی که هر انتخاب، شامل m شیئ بخصوص از این n شیئ باشد؟ (در اینجا $m \le r \le n$.)

ب) با استفاده از اصل شمول و طرد، ثابت کنید که برای $m \le r \le n$

$$\binom{n-m}{n-r} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \binom{n-i}{r}$$



شکل ۱۴.۸

۱۴. **الف)** فرض کنید $\lambda \in \mathbf{Z}^+$. اگر λ رنگ مختلف داشته باشیم، به چند راه می‌توانیم رأسهای گراف شکل ۱۴.۸ (الف) را رنگ بزنیم به قسمی که رأسهای مجاور یکرنگ نباشند؟ این نتیجه که برحسب λ حاصل می‌شود به چندجمله‌ای فامی گراف موسوم است، و کوچکترین مقدار λ که به ازای آن مقدار این چندجمله‌ای مثبت باشد عدد فامی گراف نامیده می‌شود. عدد فامی این گراف چقدر است؟ (این مفهوم را بعدتر در فصل ۱۱ دنبال خواهیم کرد.)

ب) اگر شش رنگ موجود باشند، به چند راه می‌توان اطاقهای R_i، $۱ \leq i \leq ۵$، در شکل ۱۴.۸ (ب) را رنگ کرد تا اطاقهایی که درب مشترک D_j، $۱ \leq j \leq ۵$، دارند رنگهای مختلف داشته باشند؟

۹

تابعهای مولّد

در این فصل و فصل بعد، مطالعهٔ شمارش را، این بار با معرفی مفهوم مهم تابع مولّد ادامه می‌دهیم.

مسألهٔ انجام انتخابها، با تکرارهای مجاز در فصل ۱ بررسی شد. در آنجا، مثلاً، تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 25$ را که درآن، مقادیر $c_i \geq 0$ را به‌ازای $1 \leq i \leq 4$، پیدا می‌کردیم. با اصل شمول و عدم شمول در فصل ۸ توانستیم که نوع مقیدتر مسأله، نظیر $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 25$ را با قید $0 \leq c_i < 10$ به‌ازای $1 \leq i \leq 4$ حل کنیم. اگر، به علاوه می خواستیم c_2 زوج و c_1 مضربی از ۳ باشد، می‌توانستیم نتایج فصلهای ۱ و ۸ را در مورد چندین جزء حالت به کار بریم.

توان تابع مولد تنها در توانایی آن برای حل انواع مسائلی که تاکنون بررسی کرده‌ایم نیست بلکه درکمک به وضعیتهای جدیدی است که ممکن است درگیر قیودی اضافی نیز باشند.

۱.۹ مثالهای مقدماتی

به جای اینکه دراین مرحله تابع مولّد را تعریف کنیم، مثالهایی را بررسی می‌کنیم که انگیزهٔ مطرح‌کردن تابع مولد را روشن کنند. شاید هم ببینیم در جای دیگری قبلاً با این مفهوم سروکار داشته‌ایم.

مثال ۱.۹ در خرید روز یکشنبه، خانمی، برای اطفالش، G، M، و F دوازده پرتقال خریده‌است.

جدول ۱.۹

G	M	F	G	M	F
۴	۳	۵	۶	۲	۴
۴	۴	۴	۶	۳	۳
۴	۵	۳	۶	۴	۲
۴	۶	۲	۷	۲	۳
۵	۲	۵	۷	۳	۲
۵	۳	۴	۸	۲	۲
۵	۴	۳			
۵	۵	۲			

به چند راه می‌تواند پرتقالها را بین آنها توزیع کند که G حداقل ۴ پرتقال، و M و F حداقل ۲ پرتقال دریافت کنند، ولی F بیش از ۵ پرتقال دریافت نکند؟ درجدول ۱.۹ تمام توزیعهای ممکن ثبت شده‌اند. می‌بینیم که تمام جوابهای صحیح معادلهٔ $c_1 + c_2 + c_3 = 12$ را که در آن $4 \le c_1$، $2 \le c_2$ و $2 \le c_3 \le 5$، داریم.

اگر در این جدول دو حالت اول را در نظر بگیریم، جوابهای $12 = 5+3+4$ و $12 = 4+4+4$ را پیدا می‌کنیم. حال ببینیم در مشاهده‌های جبری قبلی خود به چیزی شبیه این مطلب برخورده‌ایم؟ در ضرب چند جمله‌ایها، توانهای متغیرها را جمع می‌کنیم و دراینجا وقتی سه چند جمله‌ای را در هم ضرب می‌کنیم، یعنی

$$(x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

دو تا از راههای به‌دست آوردن x^{12} چنین‌اند:

۱. درحاصلضرب $x^4x^3x^5$، x^4 از $(x^4 + 5^5 + \cdots + x^8)$، x^3 از $(x^2 + x^3 + \cdots + x^6)$، و x^5 از $(x^2 + x^3 + \cdots + x^5)$گرفته شده‌اند.

۲. از حاصلضرب $x^4x^4x^4$ که اولین x^4 در اولین چند جمله‌ای، دومین x^4 در دومین چند جمله‌ای، و سومین x^4 در سومین چند جمله‌ای هستند. از بررسی دقیقتر حاصلضرب

$$(x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

ملاحظه می‌کنیم که حاصلضرب $x^ix^jx^k$ را به‌ازای هر سه‌تایی (i, j, k) که در جدول ۱.۹

ظاهر شده‌اند به‌دست می‌آوریم. درنتیجه، ضریب x^{12} در

$$f(x) = (x^4 + x^5 + \cdots + x^8)(x^2 + x^3 + \cdots + x^6)(x^2 + x^3 + \cdots + x^5)$$

تعداد توزیعها، یعنی ۱۴، را که در جستجوی آنیم، معین می‌کند. تابع $f(x)$ را تابع مولّد می‌نامند.
اما عاملهای این حاصلضرب از کجا آمدند؟

مثلاً عامل $x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$، نشان می‌دهد که می‌توانیم به G، یا ۴ یا ۵ یا ۶ یا ۷ یا ۸ پرتقال بدهیم. بار دیگر از تاثیر متقابل بین مانعةالجمع بودن یا و جمع معمولی استفاده می‌کنیم. ضریب هر توان x برابر ۱ است زیرا با در نظر گرفتن اینکه پرتقالها اشیایی همانندند، تنها با یک راه می‌توان به G چهار پرتقال و یا پنج پرتقال و نظیر اینها داد. چون هر یک از دو نفر M و F باید حداقل دو پرتقال دریافت کند، جمله‌های دیگر $(x^2 + x^3 + \cdots + x^6)$ و $(x^2 + x^3 + \cdots + x^5)$ با x^2 شروع می‌شوند، و برای F در x^5متوقف می‌شویم زیرا او نمی‌تواند بیش از پنج پرتقال دریافت کند. (چرا برای M، جمله‌ها در x^6 متوقف می‌شوند؟)

حال اکثر ما منطقاً قانع شدیم که ضریب x^{12} در $f(x)$، پاسخ مسأله را می‌دهد. اما بعضیها ممکن است دربارهٔ این فکر نو تردید داشته باشند. به نظر می‌رسد که می‌توانستیم حالتهای جدول ۱.۹ را سریعتر از حاصلضرب $f(x)$ یا محاسبهٔ ضریب x^{12} در $f(x)$ثبت کنیم. در این حال ممکن است این نظر درست باشد. اما، وقتی به مسائلی با مجهولهای بیشتر و کمیتهای بزرگتر برای توزیع می‌رسیم تابع مولّد ارزش خود را بیشتر نمایان می‌سازد. (خواننده می‌تواند تحقیق کند که چند جمله‌ایهای رخی فصل ۸، مثالهایی از تابعهای مولّدند.) اینک دو مثال دیگر در نظر می‌گیریم.□

مثال ۲.۹ اگر تعدادی نامحدود (یا حداقل ۲۴ تا از هر رنگ) آب‌نبات به رنگهای سرخ، سبز، سفید و سیاه موجود باشند به چند راه کودکی می‌تواند ۲۴ تا از این آب‌نباتها را انتخاب کند تا تعدادی زوج آب‌نبات سفید و حداقل شش آب‌نبات سیاه داشته باشد؟

چند جمله‌ایهای مربوط به رنگهای آب‌نباتها به صورت زیرند:

- سرخ (سبز): $1 + x + x^2 + \cdots + x^{24}$، که در آن جملهٔ اول برای $1x^0$ است، زیرا یک امکان برای آب‌نبات سرخ (یا سبز) آن است که هیچ یک از رنگها انتخاب نشود.
- سفید: $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{24})$
- سیاه: $(x^6 + x^7 + x^8 + \cdots + x^{24})$

بنابراین پاسخ مسأله، ضریب x^{24} در تابع مولّد زیر است

$$f(x) = (1+x+x^2+\cdots+x^{24})^2(1+x^2+x^4+\cdots+x^{24}) \times \\ (x^6 + x^7 + \cdots + x^{24})$$

یک چنین انتخابی عبارت است از انتخاب پنج آب‌نبات سرخ، سه تا سبز، هشت تا سفید، و هشت تا سیاه. این مطلب، از $x^۵$ دراولین عامل، $x^۳$ در دومین عامل، و $x^۸$در دو عامل آخر نتیجه می‌شود. □

قبل از ختم این بخش، مثال دیگری می‌آوریم!

مثال ۳.۹ برای معادلهٔ $c_۱ + c_۲ + c_۳ + c_۴ = ۲۵$، اگر $۰ \leq c_i$، به‌ازای $۱ \leq i \leq ۴$، چند جواب صحیح وجود دارد؟
می‌توانیم به این صورت سؤال کنیم که به چند راه می‌توان ۲۵ سکهٔ همانند را بین چهار کودک توزیع کرد؟
برای هر کودک، امکانها را می‌توان به‌وسیلهٔ چند جمله‌ای $۱ + x + x^۲ + x^۳ + \cdots + x^{۲۵}$ بیان کرد. پس، پاسخ این مسأله، ضریب $x^{۲۵}$ در تابع مولّد

$$f(x) = (۱ + x + x^۲ + \cdots + x^{۲۵})^۴$$

است.
پاسخ را می‌توان از ضریب $x^{۲۵}$ در تابع مولّد

$$g(x) = (۱ + x + x^۲ + x^۳ + \cdots + x^{۲۵} + x^{۲۶} + \cdots)^۴$$

نیز به‌دست آورد، به شرط آنکه مسأله را برحسب توزیع ۲۵ سکه از تعدادی زیاد (یا نامحدود) سکه بین ۴ کودک بیان کنیم. (در اینجا $f(x)$ یک چند جمله‌ای و$g(x)$ یک سری توانی برحسب x است.) توجه کنید که از جمله‌های x^k، $k \geq ۲۶$، اصلاً استفاده نشده است. پس چرا با دخالت دادن آنها خود را به زحمت بیندازیم؟ زیرا مواقعی هست که محاسبه با سری توانی آسانتر از محاسبه با چند جمله‌ای است. □

تمرینهای ۱.۹

۱. برای هریک از موردهای زیر تابع مولّدی تعیین کنید و ضریب مورد نیاز برای حل مسأله را در تابع مولّد مشخص سازید. (هر وقت مناسب است، هم صورت چند جمله‌ای و هم سری توانی تابع مولّد را بنویسید.)
تعداد جوابهای صحیح معادله‌های زیر را بیابید:
الف) $c_۱ + c_۲ + c_۳ + c_۴ = ۲۰$، $۰ \leq c_i \leq ۷$، $۱ \leq i \leq ۴$.
ب) $c_۱ + c_۲ + c_۳ + c_۴ = ۲۰$، $۰ \leq c_i$ ، $۱ \leq i \leq ۴$ ، $c_۲$ و $c_۳$ زوج.

ج) $c_1+c_2+c_3+c_4+c_5=30$، $2\le c_1\le 4$ و $2 \le c_i \le 8$، $3\le i\le 5$.

د) $c_1+c_2+c_3+c_4+c_5=30$، $0\le c_i$ به‌ازای $1\le i\le 5$، c_2 زوج و c_3 فرد.

۲. تابع مولّد را برای تعداد راههای توزیع ۳۵ سنت (از موجودی نامحدود) بین پنج کودک تعیین کنید به شرط آنکه (الف) قیدی وجود نداشته باشد؛ (ب) هرکودک حداقل یک سنت دریافت کند؛ (ج) هرکودک حداقل ۲ سنت دریافت کند؛ (د) بزرگترین طفل حداقل ده سنت دریافت کند؛ (ه) دو کودک کوچکتر هر یک حداقل ۱۰ سنت دریافت کنند.

۳. الف) تابع مولّد را برای تعداد راههای انتخاب ۱۰ آب‌نبات از مجموعهٔ بزرگ ۶ نوع آب‌نبات بیابید.

ب) تابع مولّد را برای تعداد راههای انتخاب rشیء از مجموعهٔ n شیء متمایز، به شرط مجاز بودن تکرار، بیابید.

۴. الف) توضیح دهید که چرا تابع مولّد برای تعداد راههای داشتن n سنت از سکه‌های یک‌سنتی و پنج‌سنتی به‌صورت $(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)$ است.

ب) تابع مولّد را برای تعداد راههای داشتن n سنت از سکه‌های یک‌سنتی، پنج‌سنتی، و ده‌سنتی بیابید.

۵. تابع مولّد را برای تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $c_1+c_2+c_3+c_4=20$ که درآن $-3\le c_1$، $-3\le c_2 \le 5$، $-5\le c_3\le 5$، و $0\le c_4$، بیابید.

۶. برای $S=\{a,b,c\}$، تابع

$$f(x)=(1+ax)(1+bx)(1+cx)=$$
$$1+ax+bx+cx+abx^2+acx^2+bcx^2+abcx^3$$

را درنظر بگیرید. اینجا، در $f(x)$

- ضریب x^0 برابر ۱ است ــ برای زیر مجموعهٔ $\emptyset$ی S
- ضریب x^1 برابر $a+b+c$ است ــ برای زیرمجموعه‌های $\{a\}$، $\{b\}$، و $\{c\}$ی S.
- ضریب x^2 برابر $ab+ac+bc$ است ــ برای زیرمجموعه‌های $\{a,b\}$، $\{a,c\}$، و $\{b,c\}$ی S.
- ضریب x^3 برابر abc است ــ برای زیرمجموعهٔ $S=\{a,b,c\}$.

در نتیجه، $f(x)$ تابع مولّد برای زیر مجموعه‌های S است. زیرا وقتی $f(1)$ را حساب می‌کنیم مجموعی به‌دست می‌آوریم که در آن، هریک از هشت جمعوند متناظر با یک زیر مجموعهٔ S است؛ جمعوند ۱ متناظر با ϕ است. (اگر یک گام دیگر برداریم و در $f(x)$ قراردهیم $a=b=c=1$، آن‌گاه $f(1)=8$ تعداد زیر مجموعه‌های S است.)

الف) تابع مولّد را برای زیر مجموعه‌های $S=\{a,b,c,\cdots,r,s,t\}$ به‌دست آورید.

ب) به قسمت (الف) برای انتخابهایی که در آنها، هر عنصر را می‌توان یا انتخاب نکرد، یا تا سه بار انتخاب کرد، پاسخ دهید.

۲.۹ تعریف و مثالها: تکنیکهای محاسباتی

دراین بخش تعدادی از فرمولها و مثالهایی را که با سریهای توانی سروکار دارند بررسی خواهیم کرد. این فرمولها در به‌دست آوردن ضریبهای جمله‌های خاص در تابع مولّد به کار خواهند رفت.

مطلب را با مفهوم زیر شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۹ فرض کنید $a_{0}, a_{1}, a_{2}, \cdots$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. تابع

$$f(x) = a_{0} + a_{1}x + a_{2}x^{2} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i}x^{i}$$

را تابع مولّد برای این دنباله می‌گویند.

این فکر ازکجا پیدا شده است؟

مثال ۴.۹ برای هر $n \in \mathbf{Z}^{+}$

$$(1+x)^{n} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^{2} + \cdots + \binom{n}{n}x^{n}$$

بنابراین، $(1+x)^{n}$ تابع مولّد است برای دنبالهٔ

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n}, 0, 0, 0, \cdots$$

□

مثال ۵.۹ **الف)** برای $n \in \mathbf{Z}^{+}$،

$$(1 - x^{n+1}) = (1-x)(1 + x + x^{2} + x^{3} + \cdots + x^{n})$$

بنابراین

$$(1 - x^{n+1})/(1-x) = (1 + x + x^{2} + \cdots + x^{n})$$

و $(1 - x^{n+1})/(1-x)$ تابع مولّد برای دنبالهٔ

$$1, 1, 1, \cdots, 1, 0, 0, 0, \cdots$$

است که در آن $n+1$ جملهٔ اول برابر ۱ هستند.

ب) با بسط ایدهٔ قسمت (الف)، به‌دست می‌آوریم که

$$1=(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots)$$

بنابراین $1/(1-x)$ تابع مولد دنبالهٔ $1, 1, 1, 1, \cdots$ است. [$1/(1-x)=1+x+x^2+x^3+\cdots$ به‌ازای تمام اعداد حقیقی x، که برای آن $|x|<1$، معتبر است. برای این برد از مقادیر است که سری‌هندسی $1+x+x^2+\cdots$ همگراست. اما در کار با تابعهای مولّد ما به ضریبهای توانهای x بیش از همگرایی توجه داریم. موضوع این نیست که مفهوم همگرایی اهمیت ندارد، بلکه صرفاً برای مطالبی که دراین بخش مطالعه خواهیم کرد به آن نیازی نیست.]

ج) با $1/(1-x)=1+x+x^2+x^3+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}x^i$، اگر از دو طرف برابری مشتق بگیریم، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}&=\frac{d}{dx}(1-x)^{-1}=(-1)(1-x)^{-2}(-1)\\&=\frac{d}{dx}(1+x+x^2+x^3+\cdots)=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\end{aligned}$$

درنتیجه، $1/(1-x)^2$ تابع مولّد برای دنبالهٔ $1, 2, 3, 4, \cdots$ است، در حالی که $x/(1-x)^2$ دنبالهٔ $0, 1, 2, 3, \cdots$ را تولید می‌کند.

د) با ادامهٔ قسمت (ج)

$$(d/dx)[x/(1-x)^2]=(d/dx)[0+x+2x^2+\cdots]$$

یا

$$(x+1)/(1-x)^3=1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots$$

بنابراین، $(x+1)/(1-x)^3$، دنبالهٔ $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ را تولید می‌کند و $x(x+1)/(1-x)^3$ دنبالهٔ $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ را. □

مثال ۶.۹ الف) باتوجه به قسمت (ب) مثال ۵.۹ می‌دانیم که تابع مولّد برای دنبالهٔ $1, 1, 1, 1, \cdots$ به صورت $f(x)=1/(1-x)$ است. بنابراین، تابع

$$g(x)=f(x)-x^2=1/(1-x)-x^2$$

تابع مولّد برای دنبالهٔ

$$۱, ۱, ۰, ۱, ۱, ۱, \cdots$$

است، در حالی که تابع

$$h(x) = f(x) + ۲x^{۳} = ۱/(۱-x) + ۲x^{۳}$$

دنبالهٔ

$$۱, ۱, ۱, ۳, ۱, ۱, \ldots$$

را تولید می‌کند.

ب) آیا می‌توان از نتایج مثال ۵.۹ برای یافتن تابع مولّد دنبالهٔ $۰, ۲, ۶, ۱۲, ۲۰, ۳۰, ۴۲, \cdots$، استفاده کرد؟

دراینجا مشاهده می‌کنیم که

$$\begin{aligned}
a_۰ &= ۰ = ۰^{۲} + ۰ \\
a_۱ &= ۲ = ۱^{۲} + ۱ \\
a_۲ &= ۶ = ۲^{۲} + ۲ \\
a_۳ &= ۱۲ = ۳^{۲} + ۳ \\
a_۴ &= ۲۰ = ۴^{۲} + ۴ \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

به طور کلی، داریم به‌ازای $n \geq ۰$، $a_n = n^{۲} + n$.

حال با استفاده از نتایج قسمتهای (ج) و (د) مثال ۵.۹ ملاحظه می‌کنیم که

$$\frac{x(x+۱)}{(۱-x)^{۳}} + \frac{x}{(۱-x)^{۲}} = \frac{x(x+۱)+x(۱-x)}{(۱-x)^{۳}} = \frac{۲x}{(۱-x)^{۳}}$$

تابع مولّد برای دنبالهٔ داده شده است.(در اینجا، جواب بستگی به توانایی ما در تشخیص هر a_n به عنوان مجموع $n^{۲}$ و nدارد. اگر متوجه این مطلب نشویم، ممکن است نتوانیم به سؤال مطروحه پاسخ دهیم. در نتیجه، در مثال ۵.۱۰ فصل آینده، تکنیک دیگری را برای کمک به تشخیص فرمول مربوط به a_n بررسی خواهیم کرد.) □

به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، قضیهٔ دو جمله‌ای به ما می‌گوید که

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

می‌خواهیم این مطلب را به حالتهایی گسترش دهیم که درآنها (الف) $n < 0$ و (ب) n الزاماً عدد صحیح نیست.

با $n, r \in \mathbf{Z}^+$ و $n \geq r > 0$، داریم

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{[r!(n-r)!]} \frac{[n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)]}{r!}$$

اگر $n \notin \mathbf{Z}^+$، برای تعریف $\binom{n}{r}$، عبارت

$$[n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)]/r!$$

را به کار می‌بریم. اگر $n \in \mathbf{Z}^+$، آن گاه

$$\begin{aligned}\binom{-n}{r} &= [(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)]/r! \\ &= (-1)^r(n)(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)/r! \\ &= (-1)^r(n+r-1)!/[(n-1)!r!] = (-1)^r\binom{n+r-1}{r}\end{aligned}$$

سرانجام، به‌ازای هرعدد حقیقی n، تعریف می‌کنیم $\binom{n}{0} = 1$.

مثال ۷.۹ به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$، بسط عبارت $(1+x)^{-n}$ به سری مکلورن به صورت زیر است

$$\begin{aligned}(1+x)^{-n} &= 1 + (-n)x + (-n)(-n-1)x^2/2! \\ &\quad + (-n)(-n-1)(-n-2)x^3/3! + \cdots \\ &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{r!}x^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{n+r-1}{r}x^r\end{aligned}$$

بنابراین

$$(۱+x)^{-n}=\binom{-n}{۰}+\binom{-n}{۱}x+\binom{-n}{۲}x^۲+\cdots=\sum_{r=۰}^{\infty}\binom{-n}{r}x^r$$

این رابطه، قضیهٔ دو جمله‌ای فصل ۱ را تعمیم و نشان می‌دهد که $(۱+x)^{-n}$ تابع مولّد برای دنبالهٔ $\binom{-n}{۰},\binom{-n}{۱},\binom{-n}{۲},\binom{-n}{۳},\cdots$ است. □

مثال ۸.۹ ضریب $x^۵$ را در $(۱-۲x)^{-۷}$ بیابید.

با $y=-۲x$، نتیجهٔ مثال ۷.۹ را به‌کار می‌بریم و به‌دست می‌آوریم

$$(۱-۲x)^{-۷}=(۱+y)^{-۷}=\sum_{r=۰}^{\infty}\binom{-۷}{r}y^r=\sum_{r=۰}^{\infty}\binom{-۷}{r}(-۲x)^r$$

درنتیجه، ضریب $x^۵$ برابر است با

$$\binom{-۷}{۵}(-۲)^۵=(-۱)^۵\binom{۷+۵-۱}{۵}(-۳۲)=(۳۲)\binom{۱۱}{۵}=۱۴۷۸۴$$ □

مثال ۹.۹ سری مکلورن برای $(۱+x)^n$ به‌ازای هر عدد حقیقی n، چنین است

$$\begin{aligned}&۱+nx+n(n-۱)x^۲/۲!+(n)(n-۱)(n-۲)x^۳/۳!+\cdots\\&=۱+\sum_{r=۱}^{\infty}\frac{n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-r+۱)}{r!}x^r\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}(۱+۳x)^{-۱/۳}&=۱+\sum_{r=۱}^{\infty}\frac{(-۱/۳)(-۴/۳)(-۷/۳)\cdots((-۳r+۲)/۳)}{r!}(۳x)^r\\&=۱+\sum_{r=۱}^{\infty}\frac{(-۱)(-۴)(-۷)\cdots(-۳r+۲)}{r!}x^r\end{aligned}$$

و $(۱+۳x)^{-۱/۳}$ دنبالهٔ

$$۱,-۱,(-۱)(-۴)/۲!,(-۱)(-۴)(-۷)/۳!,\cdots,(-۱)(-۴)(-۷)\cdots(-۳r+۲)/r!,\ldots$$

را تولید می‌کند. □

جدول ۲.۹

به‌ازای هر $m, n \in \mathbf{z}^+$، $a \in \mathbf{R}$

۱. $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$

۲. $(1+ax)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}ax + \binom{n}{2}a^2x^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^nx^n$

۳. $(1+x^m)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} + \cdots + \binom{n}{n}x^{nm}$

۴. $(1-x^{n+1})/(1-x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

۵. $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$

۶. $1/(1+x)^n = \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}x + \binom{-n}{2}x^2 + \cdots$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i}x^i$$
$$= 1 + (-1)\binom{n+1-1}{1}x + (-1)^2\binom{n+2-1}{2}x^2 + \cdots$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{n+i-1}{i}x^i$$

۷. $1/(1-x)^n = \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}(-x) + \binom{-n}{2}(-x)^2 + \cdots$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i}(-x)^i$$
$$= 1 + (-1)\binom{n+1-1}{1}(-x) + (-1)^2\binom{n+2-1}{2}(-x)^2 + \cdots$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i}x^i$$

اگر $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i$، $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_ix^i$، و $h(x) = f(x)g(x)$، آن‌گاه $h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_ix^i$، که درآن، به‌ازای هر $k \geq 0$

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0$$

قبل از ادامه، اتحادهایی راکه در جدول ۲.۹ نشان داده‌ایم برای مراجعهٔ بعدی گردآوری کرده‌ایم.

مثال ۱۰.۹ ضریب x^{15} را در $f(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^4$ معین کنید.

چون

$$(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) = x^2(1 + x + x^2 + \cdots) = x^2/(1-x)$$

ضریب x^{15} در $f(x)$ ضریب x^{15} در $(x^2/(1-x))^4 = x^8/(1-x)^4$ است. بنابراین، ضریبی که در جستجوی آنیم ضریب x^7 در $(1-x)^{-4}$ است، یعنی

$$\binom{-4}{7}(-1)^7 = (-1)^7\binom{4+7-1}{7}(-1)^7 = \binom{10}{7} = 120$$

به طور کلی، به‌ازای $n \in \mathbf{z}^+$، ضریب x^n در $f(x)$ برابر 0 است، وقتی $0 \leq n \leq 7$. به‌ازای

$n \geq ۸$، ضریب x^n در $f(x)$ برابر ضریب $x^{n-۸}$ در $(۱-x)^{-۴}$، یعنی برابر است با

$$\binom{-۴}{n-۸}(-۱)^{n-۸} = \binom{n-۵}{n-۸}$$

□

مثال ۱۱.۹ به چند راه می‌توان r شیء از n شیء متمایز را انتخاب کرد به شرطی که تکرار مجاز باشد؟

برای هر کدام از n شیء متمایز، سری هندسی $\cdots + x^۳ + x^۲ + x + ۱$ معرف انتخابهای ممکن برای آن شیء است (یعنی هیچ، یک، دو، ...). با در نظر گرفتن همهٔ n شیء متمایز، تابع مولّد عبارت است از

$$f(x) = (۱ + x + x^۲ + x^۳ + \cdots)^n$$

و پاسخ، ضریب x^r در $f(x)$ است. امّا

$$(۱+x+x^۲+x^۳+\cdots)^n = \left(\frac{۱}{(۱-x)}\right)^n = \frac{۱}{(۱-x)^n} = \sum_{i=۰}^{n}\binom{n+i-۱}{i}x^i$$

بنابراین، ضریب x^r برابر است با

$$\binom{n+r-۱}{r}$$

نتیجه‌ای که در فصل ۱ به‌دست آوردیم. □

مثال ۱۲.۹ به چند راه یک رئیس پلیس می‌تواند ۲۴ فشنگ تفنگ را بین ۴ افسر پلیس توزیع کند به قسمی که هر افسر حداقل سه فشنگ، و حداکثر ۸ فشنگ، دریافت کند؟

تعداد انتخاب برای فشنگهایی که هر افسر دریافت می‌کند به‌وسیلهٔ $x^۳ + x^۴ + \cdots + x^۸$ داده می‌شود. چهار افسر وجود دارند، بنابراین، تابع مولّد حاصل عبارت است از $f(x) = (x^۳ + x^۴ + \cdots + x^۸)^۴$.

ضریب $x^{۲۴}$ را در $f(x)$ پیدا می‌کنیم. با توجه به

$$(x^۳ + x^۴ + \cdots + x^۸)^۴ = x^{۱۲}(۱ + x + x^۲ + \cdots + x^۵)^۴$$
$$= x^{۱۲}((۱-x^۶)/(۱-x))^۴$$

پاسخ، ضریب $x^{۱۲}$ در

$$(۱-x^۶)^۴(۱-x)^{-۴} = [۱-\binom{۴}{۱}x^۶ + \binom{۴}{۲}x^{۱۲} - \cdots + x^{۲۴}]\left[\binom{-۴}{۰}+\binom{-۴}{۱}(-x)+\binom{-۴}{۲}(-x^۲)+\cdots\right]$$

است که برابر است با

$$\left[\binom{-۴}{۱۲}(-۱)^{۱۲} - \binom{۴}{۱}\binom{-۴}{۶}(-۱)^۶ + \binom{۴}{۲}\binom{-۴}{۰}\right] = \left[\binom{۱۵}{۱۲} - \binom{۴}{۱}\binom{۹}{۶} + \binom{۴}{۲}\right] = ۱۲۵$$

□

مثال ۱۳.۹ تحقیق کنید که به‌ازای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{z}^+$، $\binom{۲n}{n} = \sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}^۲$.

چون $(۱+x)^{۲n} = [(۱+x)^n]^۲$، با مقایسهٔ ضرایب (توانهای مشابه x)، ضریب x^n در $(۱+x)^{۲n}$ که برابر $\binom{۲n}{n}$ است باید برابر ضریب x^n در $[\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}x+\binom{n}{۲}x^۲+\cdots+\binom{n}{n}x^n]^۲$ باشد که برابر است با

$$\binom{n}{۰}\binom{n}{n} + \binom{n}{۱}\binom{n}{n-۱} + \binom{n}{۲}\binom{n}{n-۲} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{۰}$$

با توجه به برابری $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ به‌ازای $۰ \le r \le n$، نتیجه به‌دست می‌آید. □

مثال ۱۴.۹ ضریب $x^۸$ را در $۱/(x-۳)(x-۲)^۲$ تعیین کنید.

چون به‌ازای هر $a \neq ۰$

$$۱/(x-a) = (-۱/a)(۱/(۱-(x/a))) = (-۱/a)[۱+(x/a)+(x/a)^۲+\cdots]$$

می‌توانیم این مسأله را با یافتن ضریب $x^۸$ در $۱/(x-۳)(x-۲)^۲$ که به صورت

$$(-۱/۳)[۱+(x/۳)+(x/۳)^۲+\cdots](۱/۴)\times \left[\binom{-۲}{۰}+\binom{-۲}{۱}(-x/۲)+\binom{-۲}{۲}(-x/۲)^۲+\cdots\right]$$

نوشته می‌شود حل کنیم.

تکنیکی دیگر استفاده از تجزیه به کسرهای جزئی است

$$\frac{۱}{(x-۳)(x-۲)^{۲}}=\frac{A}{(x-۳)}+\frac{B}{(x-۲)}+\frac{C}{(x-۲)^{۲}}$$

این تجزیه، به‌ازای جمیع مقادیر x، نتیجه می‌دهد

$$۱=A(x-۲)^{۲}+B(x-۲)(x-۳)+C(x-۳)$$

یا

$$۱=(A+B)x^{۲}+(-۴A-۵B+C)x+(۴A+۶B-۳C)$$

با مقایسهٔ ضریبها به‌دست می‌آوریم که $A+B=۰$، $-۴A-۵B+C=۰$، و $۴A+۶B-۳C=۱$. نتیجه می‌شود که $A=۱$، $B=-۱$، و $C=-۱$. بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{۱}{(x-۳)(x-۲)^{۲}}&=\frac{۱}{x-۳}-\frac{۱}{x-۲}-\frac{۱}{(x-۲)^{۲}}\\&=\left(\frac{-۱}{۳}\right)\frac{۱}{۱-(x/۳)}+\left(\frac{۱}{۲}\right)\frac{۱}{۱-(x/۲)}+\left(\frac{-۱}{۴}\right)\frac{۱}{(۱-(x/۲))^{۲}}\\&=\left(\frac{-۱}{۳}\right)\sum_{i=۰}^{\infty}\left(\frac{x}{۳}\right)^{i}+\left(\frac{۱}{۲}\right)\sum_{i=۰}^{\infty}\left(\frac{x}{۲}\right)^{i}\\&\quad+\left(\frac{-۱}{۴}\right)\left[\binom{-۲}{۰}+\binom{-۲}{۱}\left(\frac{-x}{۲}\right)+\binom{-۲}{۲}\left(\frac{-x}{۲}\right)^{۲}+\cdots\right]\end{aligned}$$

ضریب $x^{۸}$ برابر است با

$$\begin{aligned}(-۱/۳)(۱/۳)^{۸}+(۱/۲)(۱/۲)^{۸}+(-۱/۴)\binom{-۲}{۸}(-۱/۲)^{۸}=\\-[(۱/۳)^{۹}+۷(۱/۲)^{۱۰}]\end{aligned}$$

□

مثال ۱۵.۹ با استفاده از تابع مولّد تعیین کنید که چند زیر مجموعهٔ ۴ عنصری از $S=\{۱,۲,۳,\cdots,۱۵\}$ شامل اعداد صحیح متوالی نیستند.

الف) یک زیر مجموعه از این نوع (مثلاً $\{۱,۳,۷,۱۰\}$) را در نظر می‌گیریم و می‌نویسیم $۱\le ۱<۳<۷<۱۰\le ۱۵$. می‌بینیم که این مجموعهٔ نابرابریها تفاضلهای $۱-۱=۰$،

$۲ = ۱ - ۳$، $۴ = ۳ - ۷$، $۳ = ۷ - ۱۰$، $۵ = ۱۰ - ۱۵$ رامعین می‌کند، و مجموع این تفاضلها برابر ۱۴ است. یک زیر مجموعهٔ دیگر از این نوع (مثلاً $\{۲, ۵, ۱۱, ۱۵\}$) را درنظر می‌گیریم و می‌نویسیم $۱۵ \leq ۱۵ < ۱۱ < ۵ < ۲ \leq ۱$؛ این نابرابریها تفاضلهای ۱، ۳، ۶، ۴، و ۰ را نتیجه می‌دهند که باز هم مجموع آنها ۱۴ است.

اگر از دیدگاه دیگر نگاه کنیم می‌بینیم که مجموع اعداد صحیح نامنفی ۰، ۲، ۳، ۲، و ۷ برابر ۱۴ است و همان تفاضلهایی هستند که از نابرابریهای $۱۵ \leq ۸ < ۶ < ۳ < ۱ \leq ۱$ (برای زیرمجموعهٔ $\{۱, ۳, ۶, ۸\}$) نتیجه می‌شوند.

این مثالها تناظری یک به یک بین چهار عنصر زیر مجموعه‌هایی که باید شمارش شوند و جوابهای صحیح $c_۱ + c_۲ + c_۳ + c_۴ + c_۵ = ۱۴$ به وجود می‌آورند که در اینجا $۰ \leq c_۱, c_۵$، و $۲ \leq c_۲, c_۳, c_۴$. پاسخ، ضریب $x^{۱۴}$ است در

$$f(x) =(۱ + x + x^۲ + x^۳ + \cdots)(x^۲ + x^۳ + x^۴ + \cdots)^۳ \times$$
$$(۱ + x + x^۲ + x^۳ + \cdots) = x^۶(۱ - x)^{-۵}$$

پس این ضریب همان ضریب $x^۸$ در $(۱ - x)^{-۵}$ است که برابر است با

$$\binom{-۵}{۸}(-۱)^۸ = \binom{۵ + ۸ - ۱}{۸} = \binom{۱۲}{۸} = ۴۹۵$$

ب) راه دیگر نگرش به این مسأله چنین است.

برای زیر مجموعهٔ $\{۱, ۳, ۷, ۱۰\}$، نابرابریهای اکید $۱۶ > ۱۰ > ۷ > ۳ > ۱ > ۰$ را در نظر می‌گیریم و بررسی می‌کنیم که چند عدد صحیح بین هر دو عدد متوالی از این اعداد وجود دارند. در اینجا، ۰، ۱، ۳، ۲، و ۵ را به‌دست می‌آوریم: ۰ زیرا عددی صحیح بین ۰ و ۱ وجود ندارد، و ۱ زیرا عدد ۲ بین ۱ و ۳ است، ۳ زیرا اعداد صحیح ۴، ۵، ۶ بین ۳ و ۷ هستند، و قس علی‌هذا. مجموع این ۵ عدد صحیح ۱۱ است. وقتی همین کار را برای زیرمجموعهٔ $\{۲, ۵, ۱۱, ۱۵\}$ انجام دهیم، نا برابریهای اکید $۱۶ > ۱۵ > ۱۱ > ۵ > ۲ > ۰$ نتایج ۱، ۲، ۵، ۳، و ۰ را نتیجه می‌دهد که مجموع آنها ۱۱ است.

از سوی دیگر، می‌بینیم که مجموع اعداد صحیح نامنفی ۰، ۱، ۲، ۱، و ۷ برابر ۱۱ است و این اعداد، تعداد اعداد صحیح متمایز بین اعداد صحیح ۵ نابرابری اکید متوالی $۱۶ > ۸ > ۶ > ۳ > ۱ > ۰$ هستند. اینها با زیر مجموعهٔ $\{۱, ۳, ۶, ۸\}$ متناظرند.

این نتایج تناظری یک به یک را با جوابهای صحیح $b_۱ + b_۲ + b_۳ + b_۴ + b_۵ = ۱۱$ به

ذهن القا می‌کنند که در آن $\circ \leq b_1, b_5$ و $1 \leq b_2, b_3, b_4$. تعداد این جوابها برابر ضریب x^{11} در

$$\begin{aligned} g(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)(x + x^2 + x^3 + \cdots)^3(1 + x + x^2 + \cdots) \\ &= x^3(1 - x)^{-5} \end{aligned}$$

است. پاسخ، مانند مثال بالا برابر با $\binom{-5}{8}(-1)^8 = 495$ است. (خواننده اگر بخواهد می‌تواند برگردد و نگاهی به تمرین ۱۷ مسائل گوناگون فصل ۳ بیندازد.) □

در آخرین مثال این بخش، از فرصت استفاده می‌کنیم و آخرین اتحاد جدول ۲.۹ را به کار می‌بریم.

مثال ۱۶.۹ فرض کنید $f(x) = x/(1 - x)^2$. این تابع، تابع مولّد دنبالهٔ $a_1, a_2, a_3, \cdots$ است که در آن برای $k \in \mathbf{N}$، $a_k = k$. تابع $g(x) = x(x + 1)/(1 - x)^3$ دنبالهٔ $b_0, b_1, b_2, \cdots$ را به‌ازای $b_k = k^2$، $k \in \mathbf{N}$، تولید می‌کند.

در نتیجه تابع $h(x) = f(x)g(x)$ به ما

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots$$

را می‌دهد، بنابراین $h(x)$ تابع مولّد دنبالهٔ $c_0, c_1, c_2, \cdots$ است که در آن به‌ازای هر $k \in \mathbf{N}$

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \cdots + a_{k-2}b_2 + a_{k-1}b_1 + a_kb_0$$

مثلاً، در اینجا به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} c_0 &= 0.0^2 = 0 \\ c_1 &= 0.1^2 + 1.0^2 = 0 \\ c_2 &= 0.2^2 + 1.1^2 + 2.0^2 = 1 \\ c_3 &= 0.3^2 + 1.2^2 + 2.1^2 + 3.0^2 = 6 \\ c_4 &= 0.4^2 + 1.3^2 + 2.2^2 + 3.1^2 + 4.0^2 = 20 \end{aligned}$$

و به طورکلی $c_k = \sum_{i=0}^{k} i(k - i)^2$ (ما این فرمول مجموعیابی را در تمرینهای این بخش ساده خواهیم کرد.)

هر وقت یک دنبالهٔ $c_0, c_1, c_2, \cdots$، نظیر این مثال، از دو تابع مولّد $f(x)$ [برای $a_0, a_1, a_2, \cdots$] و $g(x)$ [برای $b_0, b_1, b_2, \ldots$]، به وجود آید، دنبالهٔ $c_0, c_1, c_2, \cdots$ را پیچش دنباله‌های $a_0, a_1, a_2, \cdots$ و $b_0, b_1, b_2, \cdots$ می‌نامند. □

تمرینهای ۲.۹

۱. تابع مولّد هر یک از دنباله‌های زیر را بیابید. [مثلاً در مورد دنبالهٔ $0, 1, 3, 9, 27, \cdots$ پاسخ مطلوب $x/(1-3x)$ است و نه $\sum_{x=0}^{\infty} 3^i x^{i+1}$ یا اصلاً $0 + x + 3x^2 + 9x^3 + \cdots$]

الف) $\binom{8}{0}, \binom{8}{1}, \binom{8}{2}, \ldots \binom{8}{8}$ ب) $\binom{8}{1}, 2\binom{8}{2}, 3\binom{8}{3}, \ldots, 8\binom{8}{8}$

ج) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ د) $0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$

ه) $0, 0, 0, 6, -6, 6, -6, 6, \ldots$ و) $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$

ز) $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ ح) $0, 0, 1, a, a^2, a^3, \ldots$، $a \neq 0$

۲. دنباله‌ای را که به‌وسیلهٔ هر یک از تابعهای مولّد زیر تولید می‌شود معین کنید.

الف) $f(x) = (2x-3)^3$ ب) $f(x) = x^4/(1-x)$

ج) $f(x) = x^3/(1-x^2)$ د) $f(x) = 1/(1+3x)$

ه) $f(x) = 1/(3-x)$ و) $f(x) = 1/(1-x) + 3x^7 - 11$

ز) $f(x) = 1/(1-2x) + 5x/(1-x)$

۳. در هر یک از موارد زیر، تابع $f(x)$ تابع مولد دنبالهٔ $a_0, a_1, a_2, \cdots$است، در حالی که دنبالهٔ $b_0, b_1, b_2, \cdots$ به‌وسیلهٔ تابع $g(x)$ تولید شده است. تابع $g(x)$ را برحسب $f(x)$بیان کنید.

الف) $b_3 = 3$، $b_n = a_n$، برای $n \in \mathbf{N}$، $n \neq 3$

ب) $b_3 = 3$، $b_7 = 7$، $b_n = a_n$، برای $n \in \mathbf{N}$، $n \neq 3, 7$

ج) $b_1 = 1$، $b_3 = 3$، و $b_n = 2a_n$، برای $n \in \mathbf{N}$، $n \neq 1, 3$

د) $b_1 = 1$، $b_3 = 3$، $b_7 = 7$، و $b_n = 2a_n + 5$، برای $n \in \mathbf{N}$، $n \neq 1, 3, 7$.

۴. مقدار ثابت در $(3x^2 - (2/x))^{15}$ را تعیین کنید.

۵. الف) ضریب x^7 را در $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^{15}$ بیابید.

ب) ضریب x^7 را در $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n$، $n \in \mathbf{Z}^+$، بیابید.

۶. ضریب x^{50} را در $(x^7 + x^8 + x^9 + \cdots)^6$ بیابید.

۷. ضریب x^{20} را در $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^5$ بیابید.

۸. برای $n \in \mathbf{Z}^+$، در $(1 + x + x^2)(1+x)^n$، ضریب (الف) x^7؛ (ب) x^8؛ (ج) x^r را به‌ازای $0 \leq r \leq n+2$، $r \in \mathbf{Z}$، بیابید.

۹. ضریب x^{15} را در هر یک از موردهای زیر پیدا کنید

الف) $x^3(1-2x)^{10}$ ب) $(x^3 - 5x)/(1-x)^3$

ج) $(1+x)^4/(1-x)^4$

۱۰. به چند راه می‌توان دو دوجین آدمک مصنوعی همانند را به چهار خط مونتاژ گمارد، به شرطی که (الف) حداقل سه آدمک به هر خط بگماریم؟ (ب) حداقل سه و حداکثر نه آدمک به هر خط بگماریم؟

۱۱. به چند راه می توان ۳۰۰۰ پاکت همانند را در بسته‌های ۲۵تایی، بین چهار گروه دانشجو تقسیم کرد به قسمی که هر گروه حداقل ۱۵۰، و حداکثر ۱۰۰۰ پاکت دریافت کند؟

۱۲. دو جعبه نوشابه، ۲۴ بطری از یک نوع و ۲۴ بطری از نوع دیگر، بین پنج خبره که آزمونهای طعم را اجرا می‌کنند توزیع می‌شود. به چند راه می‌توان ۴۸ بطری را توزیع کرد که هر خبره (الف) حداقل دوبطری از هر نوع دریافت کند (ب) حداقل دو بطری از یک نوع و حداقل سه تا از نوع دیگر، دریافت کند؟

۱۳. اگر تاسی را ۱۲ بار بریزند، احتمال اینکه مجموع شماره‌هایی که ظاهر می‌شوند ۳۰ باشد چقدر است؟

۱۴. مریم از عموزاده‌هایش برای دادن یک میهمانی به خاطر عمه‌اش، پول جمع‌آوری می‌کند. اگر هر یک از هشت عموزاده‌اش قول پرداخت ۲، ۳، ۴، یا ۵ دلار و دو عموزادهٔ دیگرش قول پرداخت ۵ یا ۱۰ دلار بدهند، احتمال اینکه مریم دقیقا ۴۰ دلار جمع‌آوری کند چقدر است؟

۱۵. محمد به چند راه می‌تواند n مهره از تعداد زیادی از مهره‌های آبی، سرخ، و زرد انتخاب کند به شرطی که این انتخاب شامل تعدادی زوج از مهره‌های آبی باشد؟

۱۶. مریم چگونه می‌تواند ۱۲ همبرگر و ۱۶ سوسیس را بین پسرانش، علی، محمد، حسن، و حسین تقسیم کند به قسمی که حسین حداقل یک همبرگر و سه سوسیس دریافت کند و هر یک از برادرانش حداقل دو همبرگر، و حداکثر پنج سوسیس دریافت کند؟

۱۷. وقتی یک تاس به تعداد دلخواهی از دفعات ریخته شود، تحقیق کنید که

$$(1-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6)^{-1}$$

تابع مولّد برای تعداد راههایی است که مجموع شماره‌های ظاهرشده برابر n؛ $n\in\mathbf{N}$، باشد.

۱۸. نشان دهید که تابع $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ مولّد دنبالهٔ $\binom{2n}{n}$، $n\in\mathbf{N}$، است.

۱۹. a، b، k را به‌قسمی بیابید که $(a+bx)^k$ تابع مولّد دنبالهٔ زیر باشد:

$$1, 2/5, 12/25, 88/125, \cdots$$

۲۰. پنج جملهٔ اول هریک از بسطهای زیر را به‌دست آورید.

الف) $(۱ + ۲x)^{۱/۳}$
ب) $(۱ - ۳x)^{۱/۲}$
ج) $(۲x - ۱)^{-۱/۳}$
د) $(۲ - x)^{۱/۴}$

۲۱. قسمت (الف) مثال ۱۵.۹ را درنظر می‌گیریم.

الف) برای نابرابریهایی که از زیر مجموعهٔ $\{۳, ۶, ۸, ۱۵\}$ از مجموعهٔ S نتیجه می‌شود تفاضلها را تعیین، و تحقیق کنید که مجموع آنها به حاصل جمع صحیحی منجر می‌شود.

ب) آن زیر مجموعه‌ای از S را به‌دست آورید که تفاضلهای ۲، ۲، ۳، ۷، و ۰ را معین کند.

ج) آن زیر مجموعه‌ای از S را بیابید که تفاضلهای a، b، c، d، و e را معین کند و $۰ \leq a, e$ و $۲ \leq b, c, d$.

۲۲. به چند راه می‌توانیم از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \cdots, ۵۰\}$ هفت عدد صحیح غیرمتوالی انتخاب کنیم؟

۲۳. برای ساده کردن عبارت c_k در مثال ۱۶.۹، فرمولهای مجموعیابی زیر را به‌کار برید (این فرمولها در مطالب و تمرینهای بخش ۱.۴ آمده‌اند.)

$$\sum_{i=۰}^{k} i = \sum_{i=۱}^{k} i = k(k+۱)/۲$$

$$\sum_{i=۰}^{k} i^۲ = \sum_{i=۱}^{k} i^۲ = k(k+۱)(۲k+۱)/۶$$

و

$$\sum_{i=۰}^{K} i^۳ = \sum_{i=۱}^{k} i^۳ = k^۲(k+۱)^۲/۴$$

۲۴. الف) برای هر جفت از دنباله‌های زیر اولین چهار جملهٔ $c_۰$، $c_۱$، $c_۲$، و $c_۳$ی پیچش را بیابید.

(i) $a_n = ۱$، $b_n = ۱$، به‌ازای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{N}$.

(ii) $a_n = ۱$، $b_n = ۲^n$، به‌ازای تمام مقادیر $n \in \mathbf{N}$.

(iii) $a_۰ = a_۱ = a_۲ = a_۳ = ۱$؛ $a_n = ۰$، $n \in \mathbf{N}$، $n \neq ۰, ۱, ۲, ۳$؛ $b_n = ۱$، به‌ازای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{N}$.

ب) در هر یک از نتایج قسمت (الف)، فرمولی کلی برای c_n بیابید.

۳.۹ افرازهای اعداد صحیح

در مطالعهٔ نظریهٔ اعداد، با افراز اعداد صحیح مثبت n به جمعوندهای مثبت و جستجوی تعداد چنین افرازهایی، بدون توجه به ترتیب، مواجه هستیم. این تعداد را با $p(n)$ نشان می‌دهیم. مثلاً

$$p(۱) = ۱: \quad ۱$$
$$p(۲) = ۲: \quad ۲ = ۱ + ۱$$
$$p(۳) = ۳: \quad ۳ = ۲ + ۱ = ۱ + ۱ + ۱$$
$$p(۴) = ۵: \quad ۴ = ۳ + ۱ = ۲ + ۲ = ۲ + ۱ + ۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

ما مایلیم $p(n)$ را، برای مقدار مفروض n، بدون نوشتن همهٔ افرازها، به‌دست آوریم. ما به ابزاری برای نگهداری حساب تعداد ۱ها، ۲ها، ... ، nهایی که به عنوان جمعوندهای n به‌کار می‌روند نیاز داریم.

اگر $n \in \mathbf{Z}^+$، تعداد ۱هایی که می‌توانیم به کار بریم برابر است با ۰ یا ۱ یا ۲ یا ... . سری توانی $۱ + x + x^۲ + x^۳ + x^۴ + \cdots$ حساب این تعداد را نگه می‌دارد. به همین طریق، $۱ + x^۲ + x^۴ + x^۶ + \cdots$ حساب تعداد ۲ها را در افراز n نگه می‌دارد. مثلاً برای تعیین $p(۱۰)$، باید ضریب $x^{۱۰}$ را در

$$f(x) = (۱+x+x^۲+x^۳+\cdots)(۱+x^۲+x^۴+x^۶+\cdots)\cdots(۱+x^{۱۰}+x^{۲۰}+\cdots)$$

یا در

$$g(x) = (۱ + x + x^۲ + x^۳ + \cdots + x^{۱۰})(۱+x^۲+x^۴+\cdots+x^{۱۰})\cdots(۱+x^{۱۰})$$

پیدا کنیم. ترجیح می‌دهیم با $f(x)$ کار کنیم، چرا که می‌توانیم آن را به صورت جمع و جورتر

$$f(x) = \frac{۱}{(۱-x)}\frac{۱}{(۱-x^۲)}\cdots\frac{۱}{(۱-x^{۱۰})} = \prod_{i=۱}^{۱۰}\frac{۱}{(۱-x^i)}$$

بنویسیم. اگر این حاصلضرب را برای بیش از $i = ۱۰$ بسط دهیم، به‌دست می‌آوریم

$$P(x) = \prod_{i=۱}^{\infty}[۱/(۱-x^i)]$$

که دنبالهٔ $p(۰)$، $p(۱)$، $p(۲)$، $p(۳)$، $\cdots$ را تولید می‌کند، که بنا به تعریف $p(۰) = ۱$.

گرچه $P(x)$ از لحاظ نظری حساب شده است، ولی محاسبهٔ حاصلضرب تعدادی نامتناهی جمله مشکل است. اگر، تنها $\prod_{i=1}^{r}[1/(1-x^i)]$ را به‌ازای مقدار تثبیت شدهٔ r در نظر بگیریم، آن‌گاه ضریب x^n، تعداد افرازهای n به جمعوندهایی است که از r تجاوز نمی‌کنند.

با وجود مشکل‌بودن محاسبهٔ $p(n)$ از روی $P(x)$ به‌ازای مقادیر بزرگ n، مفهوم تابع مولّد در مطالعهٔ برخی از انواع افرازها مفید خواهد بود.

مثال ۱۷.۹ پیدا کنید تابع مولّد را برای تعداد راههایی که یک بنگاه تبلیغاتی می‌تواند n دقیقه ($n \in \mathbf{Z}^+$) وقت بخرد، به‌شرط آنکه فاصله‌های زمانی برای پخش آگهیهای تجارتی به صورت ۳۰، ۶۰، یا ۱۲۰ ثانیه باشد.

فرض کنید واحد زمان ۳۰ ثانیه باشد. دراین صورت، پاسخ مسأله، تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $a + 2b + 4c = 2n$ با شرط $0 \le a, b, c$ است. تابع مولّد مربوط عبارت است از

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + \cdots) \\ &= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^4} \end{aligned}$$

و ضریب x^{2n}، تعداد افرازهای $2n$ به ۱ها، ۲ها، ۴ها، پاسخ مسأله است. □

مثال ۱۸.۹ تابع مولّد برای $p_d(n)$، یعنی تعداد افرازهای عدد صحیح مثبت n به جمعوندهای متمایز، را بیابید.

پیش از شروع، ۱۱ افراز عدد ۶ را درنظر می‌گیریم

$(1)\ 1+1+1+1+1+1$	$(2)\ 1+1+1+1+2$
$(3)\ 1+1+1+3$	$(4)\ 1+1+4$
$(5)\ 1+1+2+2$	$(6)\ 1+5$
$(7)\ 1+2+3$	$(8)\ 2+2+2$
$(9)\ 2+4$	$(10)\ 3+3$
$(11)\ 6$	

افرازهای (۶)، (۷)، (۹)، و (۱۱) جمعوندهای متمایز دارند، لذا $p_d(6) = 4$.

برای محاسبهٔ $p_d(n)$ به‌ازای هر $k \in \mathbf{Z}^+$، دو انتخاب وجود دارد. یا k به‌صورت یکی از جمعوندهای n به‌کار نمی‌رود و یا به‌کار می‌رود. این مطلب را می‌توان به‌وسیلهٔ چندجمله‌ای $1 + x^k$ حساب کرد، و درنتیجه تابع مولّد برای

افرازها عبارت است از

$$P_d(x) = (۱+x)(۱+x^۲)(۱+x^۳)\cdots = \prod_{i=۱}^{\infty}(۱+x^i)$$

به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}$، مقدار $p_d(n)$ برابر ضریب x^n در $(۱+x)(۱+x^۲)\cdots(۱+x^n)$ است. (بنابه تعریف $p_d(۰) = ۱$.) وقتی $n = ۶$، ضریب $x^۶$ در $(۱+x)(۱+x^۲)\cdots(۱+x^۶)$ برابر ۴ است. □

مثال ۱۹.۹ با در نظر گرفتن افرازهای مثال ۱۸.۹، می‌بینیم که تعداد افرازهای ۶ به جمعوندهای فرد برابر ۴ است، که برابر $p_d(۶)$ نیز هست. آیا این امر، یک پیشامد تصادفی است؟

فرض کنید $p_\circ(n)$، وقتی $n \geq ۱$، معرّف تعداد افرازهای n به جمعوندهای فرد باشد. تعریف می‌کنیم $p_\circ(۰) = ۱$. تابع مولّد برای دنبالهٔ $p_\circ(۰), p_\circ(۱), p_\circ(۲), \cdots$ به‌صورت زیر است

$$P_\circ(x) = (۱+x+x^۲+x^۳+\cdots)(۱+x^۳+x^۶+\cdots)(۱+x^۵+x^{۱۰}+\cdots) \times (۱+x^۷+\cdots)\cdots = \frac{۱}{۱-x}\frac{۱}{۱-x^۳}\frac{۱}{۱-x^۵}\frac{۱}{۱-x^۷}\cdots$$

امّا، چون

$$۱+x = \frac{۱-x^۲}{۱-x}, \quad ۱+x^۲ = \frac{۱-x^۴}{۱-x^۲}, \quad ۱+x^۳ = \frac{۱-x^۶}{۱-x^۳}, \cdots$$

داریم

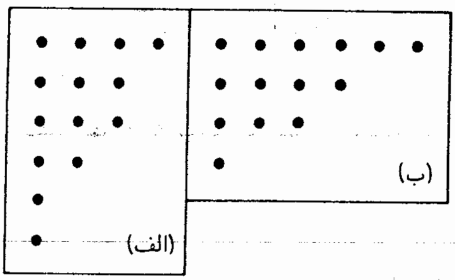
$$\begin{aligned} P_d(x) &= (۱+x)(۱+x^۲)(۱+x^۳)(۱+x^۴)\cdots \\ &= \frac{۱-x^۲}{۱-x}\frac{۱-x^۴}{۱-x^۲}\frac{۱-x^۶}{۱-x^۳}\frac{۱-x^۸}{۱-x^۴}\cdots = \frac{۱}{۱-x}\frac{۱}{۱-x^۳}\cdots = P_\circ(x) \end{aligned}$$

بنابر برابری تابعهای مولّد، به‌ازای همهٔ مقادیر $n \geq ۰$، $p_d(n) = p_\circ(n)$. □

به این فصل با عرضهٔ طرحی به نام نمودار فرر[1] پایان می‌دهیم. در این نمودار برای نمایش افراز یک عدد صحیح از سطرهای نقاط استفاده می‌شود و در آن تعداد نقاط سطرها، وقتی از بالا به پایین از سطری به سطر دیگر می‌رویم، زیاد نمی‌شود.

در شکل ۱.۹، نمودارهای فرر را برای دو افراز ۱۴ می‌بینیم: (الف) $۱+۱+۲+۳+۳+۴$

1. Ferrer



شکل۱.۹

و (ب) $۱ + ۳ + ۴ + ۶$. نمودار قسمت (ب) را ترانهادهٔ نمودار قسمت (الف) می‌نامند و برعکس، زیرا هر نمودار را می‌توان از دیگری، با تعویض جای سطرها و ستونها، به‌دست آورد.

این نمودارها غالباً نتایجی را دربارهٔ افرازها القا می‌کنند. در اینجا افرازی از ۱۴ را به جمعوندها می‌بینیم که ۴ بزرگترین جمعوند آن است، و افراز دیگر ۱۴ را می‌بینیم که دقیقاً ۴ جمعوند دارد. تناظری یک به یک بین نمودار فرر و ترانهادهٔ آن وجود دارد، لذا این مثال مورد خاصی از این نتیجهٔ کلی است: تعداد افرازهای یک عدد صحیح n به m جزء برابر است با تعداد افرازهای n به جمعوندهایی که برای آنها m بزرگترین جمعوند است.

تمرینهای ۳.۹

۱. همهٔ افرازهای ۵ و ۷ را بیابید.

۲. مطلوب تعیین تابع مولّد دنبالهٔ $a_۰, a_۱, a_۲, \cdots$ است که در آن، a_nبرابر تعداد افرازهای عدد صحیح n به (الف) جمعوندهای زوج؛ (ب) جمعوندهای متمایز زوج؛ (ج) جمعوندهای متمایز فرد باشد.

۳. اگر $f(x) = [۱/(۱-x)][۱/(۱-x^۲)][۱/(۱-x^۳)]$، ضریب $x^۶$ برابر ۷ است. این نتیجه را برحسب افرازهای ۶ نشان دهید.

۴. برای تعداد جوابهای صحیح معادله‌های زیر تابع مولّد را بیابید.

الف) $۲w + ۳x + ۵y + ۷z = n$، $۰ \leq w, x, y, z$

ب) $۲w + ۳x + ۵y + ۷z = n$، $۰ \leq w,\ ۴ \leq x, y,\ ۵ \leq z$

ج) $۲w + ۳x + ۵y + ۷z = n$ $\quad ۲ \leq w \leq ۴ \leq x \leq ۷ \leq y \leq ۱۰ \leq z$

۵. تابع مولّدی برای تعداد افرازهای عدد صحیح نامنفی n به جمعوندها بیابید که در آن (الف) هر جمعوند به تعداد دفعات زوج ظاهر شود؛ (ب) هر جمعوند زوج باشد.

۶. تابع مولدی برای تعداد افرازهای $n \in \mathbf{N}$ به جمعوندهایی بیابید که (الف) نتوانند بیش از پنج بار ظاهر شوند؛ و (ب) نتوانند بیش از ۱۲ باشند و بیش از پنج بار ظاهر نشوند.

۷. نشان دهید که تعداد افرازهای عدد صحیح مثبت n، که در آنها هیچ جمعوندی بیش از دوبار ظاهر نشود برابر است با تعداد آن افرازهای n که هیچ جمعوندش به ۳ تقسیمپذیر نباشد.

۸. نشان دهید که تعداد افرازهای $n \in \mathbf{Z}^+$ که درآنها هیچ جمعوندی به ۴ تقسیمپذیر نیست برابر است با تعداد افرازهایی از n که در آنها هیچ جمعوند زوجی تکراری نیست (مهم نیست جمعوندهای فرد تکراری باشند یا نباشند.)

۹. مطلوب است تعیین تابع مولّد برای تعداد راههای داشتنn سنت، $۰ \leq n \leq ۹۹$ به صورت یک‌سنتی، پنج‌سنتی، ده‌سنتی، بیست‌وپنج سنتی، و پنجاه‌سنتی.

۱۰. درستی اتحاد زیر را تحقیق کنید

$$\begin{aligned}\frac{۱}{۱-x} =&(۱+x+x^۲+\cdots+x^۹)(۱+x^{۱۰}+x^{۲۰}+\cdots+x^{۹۰}) \times \\ &(۱+x^{۱۰۰}+x^{۲۰۰}+\cdots+x^{۹۰۰})\cdots\end{aligned}$$

و نتیجه را برحسب افرازهای عدد صحیح $n \geq ۰$ نشان دهید.

۱۱. با استفاده از نمودار فرر، نشان دهید که تعداد افرازهای عدد صحیح n به جمعوندهایی که بیش از m نیستند برابر با تعداد افرازهای n به حداکثر m جمعوند است.

۱۲. با استفاده از نمودار فرر نشان دهید که تعداد افرازهای n برابر است با تعداد افرازهای $۲n$ به n جمعوند.

۴.۹ تابع مولّد نمایی

به تابع مولّدی که با آن تاکنون سروکار داشتیم غالباً تابع مولّد معمولی یک دنبالهٔ مفروض گفته می‌شود. این تابع در مسائل انتخابی پیش می‌آید که در آنها ترتیب مورد نظر نیست. اما، اینک به مسائل آرایش برمی‌گردیم که درآنها ترتیب نکتهٔ اساسی است و تکنیک مشابهی برای آن جستجو می‌کنیم. برای یافتن چنین تکنیکی به قضیهٔ دو جمله‌ای باز می‌گردیم.

برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$

$$(۱+x)^n = \binom{n}{۰} + \binom{n}{۱}x + \binom{n}{۲}x^۲ + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

به قسمی که $(۱+x)^n$ تابع مولّد (معمولی) دنبالهٔ

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots \binom{n}{n}, 0, 0, \cdots$$

است. وقتی با این مفهوم در فصل ۱ سروکار داشتیم و می‌خواستیم تأکید کنیم که $\binom{n}{r}$ معرف تعداد ترکیبهای rتایی n شیء، $0 \leq r \leq n$، است می‌نوشتیم $\binom{n}{r} = C(n, r)$. در نتیجه، $(1 + x)^n$ مولّد دنبالهٔ زیر است:

$$c(n, 0), c(n, 1), c(n, 2), \cdots, c(n, n), 0, 0, \cdots$$

حال به‌ازای هر $0 \leq r \leq n$

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \left(\frac{1}{r!}\right) P(n, r)$$

لذا

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= C(n, 0) + C(n, 1)x + C(n, 2)x^2 + C(n, 3)x^3 + \cdots + C(n, n)x^n \\ &= P(n, 0) + P(n, 1)x + P(n, 2)\frac{x^2}{2!} + P(n, 3)\frac{x^3}{3!} + \cdots + P(n, n)\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

بنابراین، اگر در $(1 + x)^n$، ضرایب $x^r/r!$ را با $0 \leq r \leq n$ در نظر بگیریم، $P(n, r)$ را به‌دست می‌آوریم. برپایهٔ این مشاهده، تعریف زیر را داریم.

تعریف ۲.۹ برای دنبالهٔ اعداد حقیقی $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$،

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}$$

را تابع مولّد نمایی دنبالهٔ داده شده می‌نامند.

مثال ۲۰.۹ با بررسی بسط e^x، به‌دست می‌آوریم

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

جدول ۳.۹

E E N N	$۴!/۲!۲!$	E G N N	$۴!/۲!$
E E G N	$۴!/۲!$	E I N N	$۴!/۲!$
E E I N	$۴!/۲!$	G I N N	$۴!/۲!$
E E G I	$۴!/۲!$	E I G N	$۴!$

پس، e^x تابع مولّد نمایی دنبالهٔ $۱, ۱, ۱, \cdots$ است (e^x تابع مولّد معمولی دنبالهٔ $۱, ۱, ۱/۲!, ۱/۳!, ۱/۴!, \cdots$ است.) □

مثال بعدی نشان می‌دهد که چگونه این مطلب می‌تواند به شمارش انواع خاص آرایشها کمک کند.

مثال ۲۱.۹ به چند راه می‌توان چهار حرف از حروف ENGINE را آرایش داد؟

در جدول ۳.۹ انتخابهای ممکن ۴ حرف از حروف E، N، G، I، N، E را همراه با تعداد آرایشهایی که این چهار حرف دارند ثبت کرده‌ایم.

حال، پاسخ را به‌وسیلهٔ یک تابع مولّد نمایی به‌دست می‌آوریم. برای حرف E، از $[۱+x+(x^۲/۲!)]$ استفاده می‌کنیم، زیرا ۰، ۱، یا ۲ حرف E برای آرایش دادن وجود دارند. توجه کنید که ضریب $x^۲/۲!$ برابر ۱، یعنی برابر تعداد راههای متمایز آرایش دادن دو حرف E است. به همین روش، برای آرایشهای ۰، ۱، یا ۲ حرف N داریم $[۱ + x + (x^۲/۲!)]$. برای هر یک از حروف G و I، آرایشها به‌وسیلهٔ $(۱ + x)$ نمایش داده می‌شوند.

در نتیجه، درمی‌یابیم که تابع مولّد نمایی به‌صورت $f(x) = [۱+x+(x^۲/۲!)]^۲(۱+x)^۲$ است، و پاسخ، ضریب $x^۴/۴!$ در $f(x)$ است. در محاسبهٔ $f(x)$، جملهٔ شامل $x^۴$ عبارت است از

$$\left(\frac{x^۴}{۲!۲!}+\frac{x^۴}{۲!}+\frac{x^۴}{۲!}+\frac{x^۴}{۲!}+\frac{x^۴}{۲!}+\frac{x^۴}{۲!}+\frac{x^۴}{۲!}+x^۴\right)$$
$$=\left[\left(\frac{۴!}{۲!۲!}\right)+\left(\frac{۴!}{۲!}\right)+\left(\frac{۴!}{۲!}\right)+\left(\frac{۴!}{۲!}\right)+\left(\frac{۴!}{۲!}\right)+\left(\frac{۴!}{۲!}\right)+\left(\frac{۴!}{۲!}\right)+۴!\right]\left(\frac{x^۴}{۴!}\right)$$

وضریب $x^۴/۴!$ همان پاسخی است (۱۰۲ آرایش) که از جدول حاصل می‌شود. □

مثال ۲۲.۹ بسطهای e^x و e^{-x} را در نظر می‌گیریم

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۴}{۴!} + \cdots \qquad e^{-x} = ۱ - x + \frac{x^۲}{۲!} - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۴}{۴!} - \cdots$$

از جمع این دو سری، به‌دست می‌آوریم که

$$e^x + e^{-x} = ۲(۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \cdots)$$

یا

$$\frac{e^x + e^{-x}}{۲} = ۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \cdots$$

از تفریق e^{-x} از e^x نتیجه می‌شود

$$\frac{e^x - e^{-x}}{۲} = x + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} + \cdots$$ □

مثال ۲۳.۹ یک کشتی ۴۸ پرچم، ۱۲ تا از هر رنگ قرمز، سفید، آبی، و سیاه با خود دارد. دوازده تا از این پرچمها را بر دیرکی برای دادن علامت به کشتیهای دیگر برافراشته‌اند. در دادن چند علامت از تعداد زوجی از پرچمهای آبی و تعداد فردی از پرچمهای سیاه می‌توانند استفاده کنند؟

تابع مولّد نمایی

$$f(x) = \left(۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots\right)^۲ \times \left(۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \cdots\right) \times \left(x + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} + \cdots\right)$$

همهٔ چنین علائمی را که با n، $n \geq ۱$ پرچم داده می‌شوند در نظر می‌گیریم. دو عامل آخر $f(x)$، به‌ترتیب قیدی برای تعداد زوجی از پرچمهای آبی و تعداد فردی از پرچمهای سیاه در دادن علامتها هستند. چون

$$f(x) = (e^x)^۲ \left(\frac{e^x + e^{-x}}{۲}\right)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{۲}\right) = \left(\frac{۱}{۴}\right)(e^{۲x})(e^{۲x} - e^{-۲x})$$
$$= \frac{۱}{۴}(e^{۴x} - ۱) = \frac{۱}{۴}\left(\sum_{i=۰}^{\infty} \frac{(۴x)^i}{i!} - ۱\right) = \left(\frac{۱}{۴}\right)\sum_{i=۱}^{\infty} \frac{(۴x)^i}{i!}$$

ضریب $x^{۱۲}/۱۲!$ در $f(x)$ یعنی $(\frac{۱}{۴})(۴^{۱۲}) = ۴^{۱۱}$، تعداد علامتهایی است که با ۱۲ پرچم داده می‌شود به شرطی که تعداد پرچمهای آبی زوج وتعداد پرچمهای سیاه فرد باشد. □

مثال نهایی زیر یادآور نتایج گذشته است.

مثال ۲۴.۹ شرکتی ۱۱ کارمند جدید استخدام می‌کند. هر یک از این کارمندان را به یکی از ۴ بخش می‌گمارند، و هر بخش حداقل یک کارمند جدید پیدا می‌کند. به چند راه می‌توان این گمارش را انجام داد؟

اگر بخشها را A، B، C، و D بنامیم می‌توانیم به صورتی هم‌ارز، تعداد دنباله‌های ۱۱ حرفی را که در هر یک حداقل یک مورد از هر حرف A، B، C، و D وجود دارد شمارش کنیم. تابع مولد نمایی برای این آرایشها عبارت است از

$$f(x) = \left(x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۴}{۴!} + \cdots\right)^۴$$
$$= (e^x - ۱)^۴ = e^{۴x} - ۴e^{۳x} + ۶e^{۲x} - ۴e^x + ۱$$

پس، پاسخ مسأله، ضریب $x^{۱۱}/۱۱!$ در $f(x)$ است. این ضریب برابر است با

$$۴^{۱۱} - ۴(۳^{۱۱}) + ۶(۲^{۱۱}) - ۴(۱^{۱۱}) = \sum_{i=۰}^{۴}(-۱)^i\binom{۴}{i}(۴-i)^{۱۱}$$

این صورت پاسخ، یادآور برخی از مسائل شمارش فصل ۵ است. اگر اصطلاحات خاص را کنار بگذاریم، تعداد تابعهای پوشای $g: X \to Y$ را، که در آنها $|X| = ۱۱$، $|Y| = ۴$ ، حساب کرده‌ایم.□

تمرینهای ۴.۹

۱. تابع مولّد نمایی برای هر یک از دنباله‌های زیر را بیابید.

الف) $۱, -۱, ۱, -۱, ۱, -۱, \ldots$ ب) $۱, ۲, ۲^۲, ۲^۳, ۲^۴, \ldots$

ج) $۱, -a, a^۲, -a^۳, a^۴, \ldots$، $a \in \mathbf{R}$ د) $۱, a^۲, a^۴, a^۶, \ldots$، $a \in \mathbf{R}$

ه) $a, a^۳, a^۵, a^۷, \ldots$، $a \in \mathbf{R}$ و) $۰, ۱, ۲(۲), ۳(۲^۲), ۴(۲^۳), \ldots$

۲. دنباله‌ای را که به‌وسیلهٔ هر یک از تابعهای مولد زیر تولید می‌شود معین کنید.

الف) $f(x) = ۳e^{۳x}$ ب) $f(x) = ۶e^{۵x} - ۳e^{۲x}$

ج) $f(x) = e^x + x^۲$ د) $f(x) = e^{۲x} - ۳x^۳ + ۵x^۲ + ۷x$

ه) $f(x) = ۱/(۱-x)$ و) $f(x) = ۳/(۱-۲x) + e^x$

۳. در هر یک از موارد زیر، تابع $f(x)$ تابع مولّد نمایی دنبالهٔ $a_۰, a_۱, a_۲, \cdots$ است، در حالی که $g(x)$ تابع مولّد نمایی دنبالهٔ $b_۰, b_۱, b_۲, \cdots$. تابع $g(x)$ را برحسب $f(x)$ بیان کنید اگر

الف) $b_۳ = ۳$ $b_n = a_n,\ n \in \mathbf{N}, n \neq ۳$

ب) $a_n = ۵^n,\ n \in \mathbf{N}$ $b_۳ = -۱$ $b_n = a_n,\ n \in \mathbf{N}, n \neq ۳$

ج) $b_۱ = ۲$ $b_۲ = ۴$ $b_n = ۲a_n, n \in \mathbf{N}, n \neq ۱, ۲$

د) $b_۱ = ۲$ $b_۲ = ۴$ $b_۳ = ۸$ $b_n = ۲a_n + ۳,\ n \in \mathbf{N}, n \neq ۱, ۲, ۳$

۴. الف) برای کشتی مثال ۲۳.۹، با استفاده از حداقل یک پرچم از هر رنگ، چند علامت می‌توان داد؟ (این مسئله را با تابع مولّد نمایی حل کنید.)

ب) قسمت (الف) را به راهی دیگر که در آن از مفهوم تابع پوشا استفاده می‌شود مجدداً بیان کنید.

ج) در مثال ۲۳.۹ اگر تعداد کل پرچمهای آبی و سیاه زوج باشد چند علامت می‌توان داد؟

۵. برای تعداد راههای آرایش n حرف، $n \geq ۰$، که از هریک از کلمات زیر انتخاب می‌شوند، تابع مولّد نمایی را بیابید:

الف) HAWAII   ب) MISSISSIPPI   ج) ISOMORPHISM

۶. برای قسمت (ب) تمرین ۵، اگر آرایش شامل حداقل ۲ تا I باشد، تابع مولّد نمایی چیست؟

۷. فرض کنید شرکت در مثال ۲۴.۹، ۲۵ کارمند جدید استخدام کند. برای تعیین تعداد راههای گماشتن این افراد در چهار بخش، به قسمی که در هر بخش حداقل ۳ و حداکثر ۱۰ کارمند جدید گماشته شوند، تابع مولّد نمایی را بیابید.

۸. دنباله‌های $a_۰, a_۱, a_۲, \cdots$ و $b_۰, b_۱, b_۲, \cdots$ به‌ترتیب با تابعهای مولّد نمایی $f(x)$ و $g(x)$ داده شده‌اند. نشان دهید که اگر $h(x) = f(x).g(x)$، آن‌گاه $h(x)$ تابع مولّد نمایی دنبالهٔ $c_۰, c_۱, c_۲, \cdots$ است که در آن به‌ازای هر $n \geq ۰$، $c_n = \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$.

۹. اگر دنباله‌ای ۲۰ رقمی از سه عدد (۰, ۱, ۲) به تصادف تولید شود، مطلوب است احتمال اینکه:

الف) دنباله، تعداد زوجی ۱ داشته باشد؟

ب) دنباله، تعداد زوجی ۱ و تعداد زوجی ۲ داشته باشد؟

ج) در دنباله، تعداد ۰ها فرد باشد؟

د) کل تعداد ۰ها و ۱ها فرد باشد؟

ه) کل تعداد ۰ها و ۱ها زوج باشد؟

۱۰. چند دنبالهٔ ۲۰ رقمی از ۴ عدد (۰, ۱, ۲, ۳) وجود دارند که در آنها:

الف) حداقل یک ۲ و تعداد فردی ۰ وجود دارد؟

ب) هیچ نمادی دقیقاً دو بار رخ ندهد؟

ج) هیچ نمادی دقیقاً سه بار رخ ندهد؟

د) دقیقاً دو تا ۳ رخ دهد یا اصلاً ۳ رخ ندهد؟

۱۱. قرار است بیست و پنج قرارداد (برای ۲۵ قطعهٔ مختلف از یک ماشین نساجی) بین پنج شرکت c_1، c_2، $\cdots$، c_5 بسته شود. مطلوب است تابع مولّد نمایی برای تعداد راههایی که با آنها می‌توان این قراردادها را بست به قسمی که (الف) شرکت c_1 حداقل پنج قرارداد و بقیهٔ شرکتها حداقل دو قرارداد را عهده دار شوند؛ (ب) هر شرکت حداقل یک قرارداد، شرکت c_2 قراردادهایی بیش از شرکت c_1، و شرکت c_2 حداقل ۵ قرارداد، داشته باشد؟

۵.۹ عملگر مجموعیابی

در این بخش آخر، تکنیکی معرفی می‌شود که به یاری آن می‌توانیم از تابع مولّد (معمولی) دنبالهٔ $a_0, a_1, a_2, \cdots$ به تابع مولّد دنبالهٔ $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \cdots$ برسیم.

برای $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$، تابع $f(x)/(1-x)$ را درنظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
f(x)/(1-x) &= [a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots][1 + x + x^2 + x^3 + \cdots] \\
&= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 \\
&\quad + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)x^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

بنابراین، $f(x)/(1-x)$ دنبالهٔ مجموعهای

$$a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \ldots$$

را تولید می‌کند. این دنباله، پیچش دنبالهٔ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ و دنبالهٔ $b_0, b_1, b_2, \ldots$ است که در آن به‌ازای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{N}$، $b_n = 1$.

این تکنیک در مثال زیر به سادگی اعمال می‌شود.

مثال ۲۵.۹ فرمولی برای بیان $0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ به صورت تابعی از n بیابید.

نظیر بخش ۲.۹ با $g(x) = 1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \cdots$ شروع می‌کنیم. پس،

$$(-1)(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{dg(x)}{dx} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

لذا، $x/(1-x)^2$ تابع مولد برای دنبالهٔ $0, 1, 2, 3, 4, \cdots$ است. از تکرار این تکنیک، به‌دست می‌آوریم

$$x\frac{d}{dx}\left[x\left(\frac{dg(x)}{dx}\right)\right]=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=x+2^2x^2+3^2x^3+\cdots$$

به قسمی که $x(1+x)/(1-x)^3$ مولّد دنبالهٔ $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ است. به عنوان نتیجهٔ مشاهدهٔ اخیر، تابع

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\frac{1}{(1-x)}=\frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$$

تابع مولّد دنبالهٔ

$$0^2, 0^2+1^2, 0^2+1^2+2^2, 0^2+1^2+2^2+3^2, \ldots$$

است. بنابراین، ضریب x^n در $x(1+x)/(1-x)^4$ برابر $\sum_{i=0}^n i^2$ است. امّا ضریب x^n در $x(1+x)/(1-x)^4$ را می‌توان به‌صورت زیر نیز حساب کرد

$$\begin{aligned}\frac{x(1+x)}{(1-x)^4}&=(x+x^2)(1-x)^{-4}\\&=(x+x^2)\left[\binom{-4}{0}+\binom{-4}{1}(-x)+\binom{-4}{2}(-x)^2+\cdots\right]\end{aligned}$$

که در آن، ضریب x^n برابر است با

$$\begin{aligned}&\binom{-4}{n-1}(-1)^{n-1}+\binom{-4}{n-2}(-1)^{n-2}\\&=(-1)^{n-1}\binom{4+(n-1)-1}{n-1}(-1)^{n-1}\\&+(-1)^{n-2}\binom{4+(n-2)-1}{n-2}(-1)^{n-2}\\&=\binom{n+2}{n-1}+\binom{n+1}{n-2}=\frac{(n+2)!}{3!(n-1)!}+\frac{(n+1)!}{3!(n-2)!}\\&=\frac{1}{6}[(n+2)(n+1)(n)+(n+1)(n)(n-1)]\\&=\frac{1}{6}(n)(n+1)[(n+2)+(n-1)]=(n)(n+1)(2n+1)/6\end{aligned}$$

□

تمرینهای ۵.۹

۱. با ادامهٔ بسط ایده‌های مطروحه در مثال ۲۵.۹ فرمول $\sum_{i=0}^{n} i^3 = [n(n+1)/2]^2$ را نتیجه بگیرید.

۲. **الف)** تابع مولّد دنبالهٔ حاصلضربهای

$$0(-1),\ 1(0),\ 2(1),\ 3(2),\ 4(3), \ldots,\ i(i-1), \ldots$$

را بیابید.

ب) از نتیجهٔ قسمت (الف) استفاده کنید و فرمولی برای $\sum_{i=0}^{n} i(i-1)$ به‌دست آورید.

۳. فرض کنید $f(x)$ تابع مولّد دنبالهٔ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ باشد. تابع $(1-x)f(x)$، تابع مولّد چه دنباله‌ای است؟

۴. فرض کنید $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$، که $f(1) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ عددی متناهی است. تحقیق کنید که $[f(x) - f(1)]/(x-1)$ تابع مولّد دنبالهٔ $s_0, s_1, s_2, \cdots$ است که در آن $s_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$.

۵. تابع مولّد دنبالهٔ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ را بیابید که در آن $a_n = \sum_{i=0}^{n} (1/i!)$، $n \in \mathbf{N}$.

۶.۹ خلاصه و مرور تاریخی

دراوایل قرن سیزدهم، لئوناردو[1] پیسایی ریاضیدان ایتالیایی (۱۱۷۵ـ۱۲۵۰) درکتاب حسابش (لیبر آباکی) برای اولین بار مطالعهٔ دنبالهٔ $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$ را، که می‌توان آن را به صورت بازگشتی $F_0 = 1$، $F_1 = 1$، $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ به‌ازای $n \geq 0$ نیز نشان داد، شروع کرد. چون لئوناردو پسر بوناتچیو بود، این دنباله را اعداد فیبوناتچی[2] نامیدند.*

اگر فرمول

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \quad n \geq 0$$

را درنظر بگیریم، به‌دست می‌آوریم

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3, \cdots$$

این فرمول هر عدد فیبوناتچی را به‌صورت تابعی از n معین می‌کند. (دراینجا، جواب کلی رابطهٔ بازگشتی فیبوناتچی را داریم. در فصل آینده مطالب بیشتری دربارهٔ آن می‌آموزیم.) اما این فرمول

1. Leonardo 2. Fibonacci

* Filius Bonaccii صورت لاتین پسر «بوناتچیو» است.

تا سال ۱۷۱۸، که آبراهام دموآور (۱۶۶۷_۱۷۵۴) آن را از تابع مولّد

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) x} - \frac{1}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) x} \right]$$

نتیجه گرفت، به‌دست نیامده بود.

با بسط تکنیکهای موجود تابع مولّد، لئونهارت اویلر(۱۷۰۷_۱۷۸۳) در اثر دوجلدی خود به نام آشنایی با آنالیز بینهایت کوچکها* مطالعهٔ افرازهای اعداد صحیح را افزایش داد. با

$$P(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}\cdots = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^i}$$

تابع مولّد دنبالهٔ $p(0), p(1), p(2), \cdots$ را داریم که در آن $p(n)$ تعداد افرازهای n به جمعوندهای مثبت است و $p(0)$ برابر با ۱ تعریف شده است.

در اواخر قرن هیجدهم، بسطهای بیشتر تابعهای مولّد در ارتباط با مفاهیم نظریهٔ احتمال، به‌ویژه با آنچه که اینک «تابع مولد گشتاور» نامیده می‌شود، صورت گرفتند. نخستین منظومهٔ کامل این مفاهیم را دانشمند بزرگ فرانسوی، پی‌یرسیمون دولاپلاس (۱۷۴۹_۱۸۲۷) در نظریهٔ تحلیلی احتمال خود به سال ۱۸۱۲ مطرح کرد.

سرانجام، از نورمن مکلود[1] فرر(۱۸۲۹_۱۹۰۳) ذکری به میان می‌آوریم که نمودار موسوم به نمودار فرر به نام اوست.

مطالعهٔ تابعهای مولّد معمولی و نمایی تکنیکی توانا فراهم کرده است که وحدت‌بخش مفاهیم موجود در فصلهای ۱، ۵ و ۸ است. از تعمیم کارهای پیشین خود با چند جمله‌ایها به سریهای توانی، و بسط قضیهٔ دو جمله‌ای به $(1+x)^n$ برای مواردی که در آنها n مثبت یا حتی یک عدد صحیح نباشد، ابزارهای لازم برای محاسبهٔ ضریبها در تابعهای مولّد را به‌دست آوردیم. این تلاشی بود ارزشمند، زیرا محاسبات جبریی که اجرا کردیم همهٔ فرایندهای انتخابی را که سعی داشتیم بررسی کنیم به حساب آورده است. همچنین دریافتیم که بعضی از تابعهای مولّد را درفصل قبل دیده‌ایم و ملاحظه کرده‌ایم که چگونه در بررسی افرازها پیدا شده‌اند.

مفهوم افراز عدد صحیح اینک به ما توانایی بخشیده است تا نکات برجستهٔ مباحث قبلی دربارهٔ توزیعها را، به صورتی که در جدولهای ۶.۱ و ۱۱.۵ داده شده‌اند، تکمیل کنیم. اینک می‌توانیم به توزیعهای m شیء در $n(n \le m)$ ظرف برای حالتهایی که در آنها اشیاء و جعبه‌ها متمایز نیستند، بپردازیم. این توزیعها در درایه‌های سطرهای دوم و چهارم جدول ۴.۹ آمده‌اند. نماد $p(m,n)$ که در ستون آخر برای این درایه‌ها ظاهر شده‌است معرف تعداد افرازهای عدد صحیح

* Introduction in Analysin Infinitorum

1. Norman Macleod Ferrer

جدول ۴.۹

تعدادتوزیعها	بعضی از جعبه‌ها ممکن است خالی باشند	جعبه‌ها متمایزند	اشیاء متمایزند
$\binom{n+m-1}{m}$	آری	آری	نه
(۱)به‌ازای $n = m$، $p(m)$ (۲) به‌ازای $n < m$ $p(m, 1) + p(m, 2) + \cdots + p(m, n)$	آری	نه	نه
$\binom{n+(m-n)-1}{(m-n)} = \binom{m-1}{m-n} = \binom{m-1}{n-1}$	نه	آری	نه
$p(m, n)$	نه	نه	نه

m به دقیقاً n جمعوند (مثبت) است. (این نظر، بعدها در تمرین ۳ی مسائل گوناگون فصل آینده بررسی خواهد شد.) انواع توزیع در اولین و سومین سطر این جدول، در جدول ۱۱.۵ نیز ثبت شده بودند. ما اینها را برای دومین بار برای مقایسه و تکمیل در اینجا گنجانیده‌ایم.

برای تکمیل مطالبی که در این فصل عرضه شد خوانندهٔ علاقه‌مند باید به فصل ۲ اثر لیو[1] [۳] و فصل ۳ اثر تاکر[2] [۷] رجوع کند. کتاب درسی ریوردان[3] [۵] مطالبی جامع دربارهٔ تابعهای مولّد معمولی و نمایی دارد. یک مقالهٔ جالب در بررسی تابعهای مولّد، نوشتهٔ ریچارد استانلی[4] را می‌توان درکتاب درسی اثر روتا[5] [۶] یافت.

خوانندهٔ علاقه‌مند به مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ نظریهٔ افرازها باید به فصل ۱۰ اثر نیون[6] و تسوکرمن[7] [۴] رجوع کند.

سرانجام در فصل ۳ اثر لارسن[8] [۲] و فصل یازده اثر جامع فلر[9] [۱]، می‌توان مطالبی زیاد دربارهٔ تابع مولد گشتاور و استفاده از آن در نظریهٔ احتمال پیدا کرد.

مراجع

1. Feller, William. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I, 3rd ed. New York: Wiley, 1968.
2. Larson, Harold J. *Introduction to Probability Theory and Statistical Inference*, 2nd ed. New York: Wiley, 1969.
3. Liu, C. L. *Introduction to Combinatorial Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1968.
4. Niven, Ivan, and Zuckerman, Herbert. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 3rd ed. New York: Wiley, 1960.

1. C. Liu 2. A. Tucker 3. J. Riordan 4. Richard P. Stanley 5. G. Rota
6. I. Niven 7. H. Zuckerman 8. H. Larson 9. W. Feller

5. Riordan, John. *An Introduction to Combinatorial Analysis.* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1980. (Originally published in 1958 by John Wiley & Sons.)
6. Rota, Gian-Carlo, ed. *Studies in Combinatorics,* Studies in Mathematics, Volume 17. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1978.
7. Tucker, Alan. *Applied Combinatorics.* New York: Wiley, 1980.

تمرینهای گوناگون

۱. تابع مولّد هریک از دنباله‌های زیر را بیابید.

الف) $۷, ۸, ۹, ۱۰, \ldots$

ب) $a \in \mathbf{R}$، $۱, a, a^۲, a^۳, a^۴, \ldots$

ج) $a \in \mathbf{R}$، $۱, (۱+a), (۱+a)^۲, (۱+a)^۳, \ldots$

د) $a \in \mathbf{R}$، $۲, ۱+a, ۱+a^۲, ۱+a^۳, \ldots$

۲. فرض کنید $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

الف) تابع مولّد زیر مجموعه‌های S را بیابید. چند جمعوند در ضریب $x^۲$ی این تابع وجود دارد؟

ب) تابع مولّد تعداد راههای انتخاب n شیء، $۰ \leq n \leq ۱۴$، از S را به‌دست آورید، که در آن هر شیء را حداکثر بتوان دوبار انتخاب کرد. چند جمعوند در ضریب $x^۲$ی این تابع وجود دارد؟

۳. با استفاده از تجزیهٔ جزئی کسر، تحقیق کنید که

$$\frac{x}{۱-x-x^۲} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}\left[\frac{۱}{۱-\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)x} - \frac{۱}{۱-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)x}\right]$$

۴. ضریب $x^{۸۳}$ را در $f(x) = (x^۵ + x^۸ + x^{۱۱} + x^{۱۴} + x^{۱۷})^{۱۰}$ بیابید.

۵. گروهبانی باید ۴۰ فشنگ (۲۰ فشنگ تفنگ و ۲۰ فشنگ هفت تیر) را بین ۴ افسر پلیس توزیع کند به قسمی که هر افسر حداقل دو، و حداکثر هفت فشنگ از هر نوع دریافت کند. گروهبان به چند راه می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۶. تابع مولد تعداد راههای افراز عدد صحیح مثبت n را به جمعوندهای صحیح مثبت بیابید، به طوری که هر جمعوند به تعداد فردی از دفعات ظاهر شود و یا اصلاً ظاهر نشود.

۷. به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$، نشان دهید که تعداد افرازهای n که در آنها هیچ جمعوند زوجی تکراری نباشد (جمعوند فرد ممکن است تکراری باشد یا نباشد) برابر است با تعداد افرازهای n که در آنها هیچ جمعوندی بیش از سه بار رخ ندهد.

۸. نشان دهید که به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$،

$$(\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n/n!$$

۹. در چند شمارهٔ تلفن ۱۰ رقمی تنها ارقام ۱، ۳، ۵، و ۷ به کار می‌رود به شرطی که هر رقم حداقل دوبار ظاهر شود و یا اصلاً ظاهر نشود؟

۱۰. با استفاده از پنج جملهٔ اول بسط دو جمله‌ای $(1+x)^{1/3}$ مقدار تقریبی ریشه سوم ۲ را پیدا کنید.

۱۱. **الف)** برای چه دنبالهٔ عددی، $g(x) = (1-2x)^{-5/2}$ تابع مولّد نمایی است؟

ب) a و b را طوری بیابید که $(1-ax)^b$ تابع مولّد نمایی دنبالهٔ $1, 7, 7(11), 7(11)(15), \ldots$ باشد.

۱۲. برای اعداد صحیح n و $k \geq 0$ فرض کنید

- P_1 تعداد افرازهای n باشد.
- P_2 تعداد افرازهای $2n+k$ باشد، که در آن $n+k$ بزرگترین جمعوند است.
- P_3 تعداد افرازهای $2n+k$ به دقیقاً $n+k$ جمعوند باشد.

با استفاده از مفهوم نمودار فرر ثابت کنید که $P_1 = P_2$ و $P_2 = P_3$، و سپس نتیجه بگیرید که تعداد افرازهای $2n+k$ به دقیقاً $n+k$ جمعوند برای همهٔ مقادیر k یکسان است.

۱۳. در ناحیه‌ای روستایی ۱۲ صندوق پستی در فروشگاه عمومی وجود دارند.

الف) اگر توزیع‌کنندهٔ آگهیها، ۲۰ آگهی همانند داشته باشد، به چند راه می‌تواند این آگهیها را توزیع کند به قسمی که به هر صندوق پستی حداقل یک آگهی برسد؟

ب) اگر صندوقها در دو ردیف شش‌تایی قرار گرفته باشند، احتمال اینکه توزیعی در قسمت (الف) ۱۰ آگهی برای صندوقهای بالایی و ۱۰ آگهی برای شش صندوق پایینی داشته باشد چقدر است؟

۱۴. فرض کنید S مجموعه‌ای از n شیء متمایز باشد. تحقیق کنید که $e^x/(1-x)^k$ **تابع مولّد** نمایی تعداد راههای انتخاب m شیء در S، به‌ازای $0 \leq m \leq n$، است، و این اشیاء را بین k جعبهٔ متمایز، با توجه به‌ترتیب توزیع اشیاء در هر جعبهٔ مربوط، توزیع کنید.

۱۰

رابطه‌های بازگشتی

در بخشهای مختلف این کتاب تعدادی از تعریفها و ساختمانهای بازگشتی را دیدیم که در آنها مفاهیم ریاضی با اندازهٔ $n+1$، از مفاهیم مقایسه‌پذیر با اندازهٔ n، به‌دست آمده‌بود، با این شرط که می‌توانستیم چنین مفهومی را برای اولین مقدار n، نظیر ۰ یا ۱، ثابت کنیم. این مفاهیم را به نتایج پیشین ارجاع می‌دادیم تا نتیجه‌گیریهایی برای مراحل کنونی و بعدی به‌دست آوریم. اینک می‌خواهیم همین کار را دوباره انجام دهیم. تابعهای عددی $a(n)$ را که ترجیحاً به‌صورت $a_n (n \geq 0)$ می‌نویسیم بررسی خواهیم کرد که در آنها a_n به جمله‌های قبلی a_0، a_1، ... ، a_{n-2}، a_{n-1} بستگی دارد. این بررسی، بررسیِ چیزهایی است که رابطه‌های بازگشتی یا معادلات تفاضلی نامیده می‌شوند و همتای گسستهٔ مفاهیمی هستند که در معادلات دیفرانسیل معمولی کاربرد دارند.

در بحث خود، مفاهیم مربوط به معادلات دیفرانسیل را به‌کار نمی‌بریم ولی با مفهوم سری هندسی شروع خواهیم کرد. وقتی مفاهیم گسترش بیشتری یافتند برخی ازکاربردهای آنها را خواهیم دید که اهمیت این مبحث را نشان می‌دهند.

۱.۱۰ رابطهٔ بازگشتی خطی مرتبهٔ اول

سری هندسی، دنباله‌ای نامتناهی از اعداد، نظیر ۵، ۱۵، ۴۵، ۱۳۵، ... است که در آن خارج‌قسمت هر جمله، جز جملهٔ اوّل، بر جملهٔ بلافاصله قبل از آن، مقداری ثابت است که نسبت

مشترک نام دارد. در دنبالهٔ بالا این نسبت برابر ۳ است: $۳(۵) = ۱۵$، $۳(۱۵) = ۴۵$، و نظایر آنها. اگر $a_۰, a_۱, a_۲, \cdots$ یک سری هندسی باشد، آن‌گاه

$$a_۱/a_۰ = a_۲/a_۱ = \cdots = a_{n+۱}/a_n = \cdots = r$$

که نسبت مشترک است. در این سری هندسی خاص، داریم $a_{n+۱} = ۳a_n$، $n \geq ۰$.

رابطهٔ بازگشتی $a_{n+۱} = ۳a_n$، $n \geq ۰$، یک سری هندسی یکتا را تعریف نمی‌کند. دنبالهٔ $۷, ۲۱, ۶۳, ۱۸۹, \cdots$ هم در این رابطه صادق است. برای تعیین دقیق دنبالهٔ خاصی که با $a_{n+۱} = ۳a_n$ مشخص می‌شود، به یکی از جمله‌های آن دنباله نیاز داریم. بنابراین

$$a_{n+۱} = ۳a_n, \quad n \geq ۰ \quad a_۰ = ۵$$

دنبالهٔ $۵, ۱۵, ۴۵, \cdots$ را به‌صورت یکتا تعریف می‌کند، در حالی‌که

$$a_{n+۱} = ۳a_n, \quad n \geq ۰ \quad a_۱ = ۲۱$$

سری $۷, ۲۱, ۶۳, \cdots$ را به‌عنوان سری هندسی تحت مطالعه مشخص می‌نماید.

معادلهٔ $a_{n+۱} = ۳a_n$، $n \geq ۰$، را رابطهٔ بازگشتی می‌نامیم، زیرا مقدار $a_{n+۱}$ (مقدار فعلی) وابسته به a_n (مقدار پیشین) است. چون $a_{n+۱}$ تنها به مقدم بلافصل خود بستگی دارد،رابطه را از مرتبهٔ اول گویند. به‌خصوص، این رابطه یک رابطهٔ بازگشتی خطی همگن مرتبهٔ اول با ضریبهای ثابت است. (دربارهٔ این مطلب بعداً بیشتر گفتگو می‌کنیم.) صورت کلی چنین معادله‌ای را می‌توان به شکل $a_{n+۱} - ca_n = ۰, n \geq ۰$ نوشت که در آن c مقداری ثابت است.

وقتی علاوه بر رابطه‌های بازگشتی مقادیر دیگری نظیر $a_۰$ یا $a_۱$ داده شده باشند، آن مقادیر را شرایط مرزی می‌نامیم. عبارت $a_۰ = k$ را نیز، که در آن k مقداری ثابت است، شرط اولیهٔ می‌نامند. مثالهای ما، اهمیت شرط مرزی را در تعیین جواب یکتا نشان می‌دهند.

حال به رابطهٔ بازگشتی زیر برمی‌گردیم

$$a_{n+۱} = ۳a_n, \quad n \geq ۰, \quad a_۰ = ۵$$

با نوشتن چهار جملهٔ اوّل این دنباله، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
a_۰ &= ۵ \\
a_۱ &= ۳a_۰ = ۳(۵) \\
a_۲ &= ۳a_۱ = ۳(۳a_۰) = ۳^۲(۵) \\
a_۳ &= ۳a_۲ = ۳(۳^۲(۵)) = ۳^۳(۵)
\end{aligned}$$

بنابراین، این نتایج،به ذهن القا می‌کنند که به ازای هر $n \geq 0$، $a_n = 5(3^n)$. این جواب، جواب عمومی رابطهٔ بازگشتی مفروض نامیده می‌شود. در جواب عمومی، مقدار a_n تابعی از n است و دیگر هیچ بستگیی به جمله‌های قبلی دنباله وجود ندارد. اگر بخواهیم a_{10} را حساب کنیم، صرفاً $5(3^{10}) = 295245$ را حساب می‌کنیم؛ نیازی نیست که از a_0 شروع کنیم و برای به‌دست آوردن a_{10}، جملهٔ a_9 را به‌دست آوریم.

از این مثال به مطلب زیر هدایت می‌شویم. (این نتیجه را می‌توان با استقرای ریاضی ثابت کرد.)

جواب عمومی رابطهٔ بازگشتی

$$a_{n+1} = ca_n \qquad n \geq 0$$

که در آن c ثابت است، یکتاست و به‌وسیلهٔ

$$a_n = a_0 c^n, \qquad n \geq 0$$

داده می‌شود.

پس، جواب $a_n = a_0 c^n$، $n \geq 0$، معرف تابع گسسته‌ای است که حوزهٔ مقادیرش مجموعهٔ $\mathbf{N}$ یعنی همهٔ اعداد صحیح نامنفی است.

مثال ۱.۱۰ رابطهٔ بازگشتی $a_n = 7a_{n-1}$ را که در آن $n \geq 1$ و $a_2 = 98$، حل کنید. این رابطه دقیقاً صورت دیگری از رابطهٔ $a_{n+1} = 7a_n$ به‌ازای $n \geq 0$، $a_2 = 98$ است. بنابراین، جواب عمومی به‌صورت $a_n = a_0(7^n)$ است. چون $a_2 = 98 = a_0(7^2)$، نتیجه می‌شود که $a_0 = 2$ و $n \geq 0$ و $a_n = 2(7^n)$ جوابی یکتاست. □

مثال ۲.۱۰ بانکی سودی (سالیانه) معادل ۶٪، به‌صورت ربح مرکب ماهیانه، به پس‌اندازها می‌پردازد. اگر B در روز اول ماه مه ۱۰۰۰ دلار به حساب بگذارد، یک سال بعد چه مبلغی در حساب پس‌انداز خود دارد؟

نرخ سود سالیانه ۶٪ است، پس نرخ سود ماهیانه $0{,}005 = 0{,}5\% = \frac{6\%}{12}$ است. فرض کنید به‌ازای $0 \leq n \leq 12$، مقدار پس‌انداز B در پایان n ماه برابر p_n باشد. پس، $p_{n+1} = p_n + 0{,}005p_n$، که در آن $0{,}005p_n$ سود حاصل از p_n در طول ماه $n+1$ به‌ازای $0 \leq n \leq 11$ است، و $p_0 = 1000$ دلار.

رابطهٔ $p_{n+1} = (1{,}005)p_n$، $p_0 = 1000$، دارای جواب

$$p_n = p_0(1{,}005)^n = 1000(1{,}005)^n \text{ دلار}$$

است. بنابراین، در پایان یک سال، B پس اندازی برابر دلار ۱۰۶۱٫۶۸ $= {}^{۱۲}(۱٫۰۰۵)$ ۱۰۰۰ دارد.□

رابطهٔ بازگشتی $a_{n+1} - ca_n = ۰$ را خطی می‌نامند، زیرا در آن هر جملهٔ اندیسدار با توان ۱ ظاهر می‌شود (نظیر x و y در معادلهٔ خط واقع در صفحه). گاهی اوقات یک رابطهٔ بازگشتی غیرخطی را می‌توان با جایگذاریهای جبری به رابطهٔ بازگشتی خطی تبدیل کرد.

مثال ۳.۱۰ اگر $a_{n+1}^۲ = ۵a_n^۲$، که در آن به‌ازای $n \geq ۰$، $a_n > ۰$، و $a_۰ = ۲$، مقدار $a_{۱۲}$ را بیابید.
اگرچه این رابطهٔ بازگشتی برحسب a_n خطی نیست، اگر قرار دهیم $b_n = a_n^۲$، آن‌گاه رابطهٔ جدید $b_{n+1} = ۵b_n$ به‌ازای $n \geq ۰$ و $b_۰ = ۴$ رابطه‌ای خطی است که جواب آن $b_n = ۴(۵^n)$ است. بنابراین، به‌ازای $n \geq ۰$، $a_n = ۲(\sqrt{۵})^n$ و $a_{۱۲} = ۳۱۲۵۰$. □

رابطهٔ بازگشتی خطی مرتبهٔ اول کلی با ضریبهای ثابت دارای صورت $a_{n+1} + ca_n = f(n)$، $n \geq ۰$ است، که در آن c مقداری ثابت و $f(n)$ تابعی بر مجموعهٔ $\mathbf{N}$، اعداد صحیح نامنفی، است.

وقتی به‌ازای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{N}$، $f(n) = ۰$، رابطه را همگن و در غیر این صورت، ناهمگن می‌خوانند. تا اینجا تنها با رابطه‌های بازگشتی همگن سروکار داشتیم. اینک رابطه‌ای ناهمگن را حل خواهیم کرد. تکنیکهای خاصی را بسط خواهیم داد که برای همهٔ رابطه‌های بازگشتی همگن خطی با ضریبهای ثابت کارایی دارند. امّا ثابت می‌شود که تکنیکهای مختلف بسیاری، وقتی با مسألهٔ ناهمگن سروکار داریم، مفیدند، گرچه هیچ‌یک توانایی حل هر معادله‌ای را که ظاهر شود به ما نمی‌دهد. ولی اگر بشود الگویی را از روی تجارب گذشته تشخیص دهیم، به احتمال زیاد موفق خواهیم شد.

مثال ۴.۱۰ شاید رایجترین، ولی نه کاراترین، روش جور کردن داده‌های عددی، تکنیکی است که جورکردن حبابی نامیده می‌شود. در این روش، ورودی، آرایه‌ای به‌صورت $A[۱]$، $A[۲]$، . . . ، $A[n]$ از n عدد حقیقی است که باید به ترتیب صعودی جور شوند.

قطعه برنامهٔ پاسکال، که در شکل ۱.۱۰ نشان داده شده است، نحوهٔ پیاده‌سازی این نوع

```
Begin
  For i := 1 to n-1 do
    For j := n downto i+1 do
      If A[j] < A[j-1] then
        Begin
          temp := A[j-1];
          A[j-1] := A[j];
          A[j] := temp
        End
End;
```

شکل ۱.۱۰

الگوریتم را به‌دست می‌دهد. در اینجا، متغیر صحیح i شمارندهٔ For برای حلقهٔ برونی است، در حالی‌که متغیر صحیح j شمارندهٔ For برای حلقهٔ درونی است. سرانجام متغیر حقیقی $temp$ برای ذخیره‌سازی به‌کار رفته است که وقتی معاوضه‌ای رخ می‌دهد مورد نیاز است.

با شروع از آخرین درایه، $A[n]$، در آرایهٔ مفروض، این درایه را با درایهٔ بلافاصله قبل از آن، $A[n-۱]$، مقایسه می‌کنیم. اگر $A[n-۱] < A[n]$، مقادیر ذخیره شده در $A[n-۱]$ و $A[n]$ را با هم عوض می‌کنیم. آن‌گاه، $A[n-۱]$ را (که ممکن است در اصل $A[n]$ بوده باشد) با درایهٔ بلافاصله قبل از آن، $A[n-۲]$، مقایسه می‌کنیم. (اگر $A[n-۱]$ و $A[n]$ اصلی به قسمی باشند که $A[n] \leq A[n-۱]$، آن‌گاه صرفاً مقدار اصلی $A[n-۱]$ را با $A[n-۲]$ مقایسه می‌کنیم. اگر $A[n-۱] < A[n-۲]$، جای آنها را با هم عوض می‌کنیم. این فرایند را ادامه می‌دهیم. بعد از $n-۱$ مقایسه از این نوع، کوچکترین عدد لیست، در $A[۱]$ ذخیره می‌شود. سپس این فرایند را برای $n-۱$ عددی که اینک در آرایهٔ (کوچکتر) $A[۲]$، $A[۳]$، ...، $A[n]$ ذخیره شده است تکرار می‌کنیم. بدین طریق، هر بار که این فرایند اجرا می‌شود (با i شمارش می‌شود) کوچکترین عدد باقی‌مانده در لیست فرعی «حباب وار» به بالا می‌آید و در جلوی لیست فرعی قرار می‌گیرد.

برای نشان دادن چگونگی جور کردن حبابی، با برنامهٔ شکل ۱.۱۰، در مرتب کردن صعودی یک دنبالهٔ مفروض، مثالی کوچک که در آن $n = ۵$، $A[۱] = ۷$، $A[۲] = ۹$، $A[۳] = ۲$، $A[۴] = ۵$، و $A[۵] = ۸$ است در شکل ۲.۱۰ داده شده است. در این شکل هر مقایسه‌ای را که به تعویض منجر شده است با نماد نشان داده‌ایم؛ نماد $\{$ معرف مقایسه‌ای است که به تعویضی منتهی نمی‌شود.

برای تعیین تابع پیچیدگی زمان، $f(n)$، وقتی این الگوریتم برای خروجی (آرایه)‌ای به حجم $n \geq ۱$، به‌کار می‌رود، تعداد کل مقایسه‌هایی را که برای جورشدن n عدد مفروض به ترتیب صعودی انجام می‌شوند می‌شماریم.

اگر a_n معرف تعداد مقایسه‌های لازم برای جور شدن n عدد بدین طریق باشد، آن‌گاه رابطهٔ بازگشتی زیر را به‌دست می‌آوریم

$$a_n = a_{n-۱} + (n-۱), \qquad n \geq ۲ \qquad a_۱ = ۰$$

این رابطه به‌صورت زیر نتیجه می‌شود. اگر لیستی از n عدد داده شده باشد، $n-۱$ مقایسه انجام می‌دهیم تا اینکه کوچکترین عدد به ابتدای لیست بیاید. پس لیست فرعیِ $n-۱$ عددیِ باقیمانده، برای اینکه کاملاً جور شود به $a_{n-۱}$ مقایسه نیاز دارد.

این رابطه، رابطهٔ خطی مرتبهٔ اوّلی با ضریبهای ثابت است، امّا جملهٔ $n-۱$ام، آن را ناهمگن می‌کند. چون تکنیکی برای دستیابی به چنین رابطه‌ای نداریم، بعضی از جمله‌ها را ثبت می‌کنیم

$i = 1$									
A[1]	7		7		7		7	$j = 2$	2
A[2]	9		9		9	$j = 3$	2		7
A[3]	2		2	$j = 4$	2		9		9
A[4]	5	$j = 5$	5		5		5		5
A[5]	8		8		8		8		8

چهار مقایسه و دو تعویض

$i = 2$							
A[1]	2		2		2		2
A[2]	7		7		7	$j = 3$	5
A[3]	9		9	$j = 4$	5		7
A[4]	5	$j = 5$	5		9		9
A[5]	8		8		8		8

سه مقایسه و دو تعویض

$i = 3$					
A[1]	2		2		2
A[2]	5		5		5
A[3]	7		7	$j = 4$	7
A[4]	9	$j = 5$	8		8
A[5]	8		9		9

دو مقایسه و یک تعویض

$i = 4$		
A[1]	2	
A[2]	5	
A[3]	7	
A[4]	8	$j = 5$
A[5]	9	

یک مقایسه، بدون تعویض

شکل ۲.۱۰

تا ببینیم آیا الگوی مشخصی پیدا می‌شود یا نه.

$$\begin{aligned} a_۱ &= ۰ \\ a_۲ &= a_۱ + (۲-۱) = ۱ \\ a_۳ &= a_۲ + (۳-۱) = ۱+۲ \\ a_۴ &= a_۳ + (۴-۱) = ۱+۲+۳ \\ \cdots & \quad \cdots \quad\quad \cdots \quad \cdots \end{aligned}$$

به‌طور کلی

$$a_n = ۱ + ۲ + \cdots + (n-۱) = [(n-۱)n]/۲ = (n^۲ - n)/۲$$

در نتیجه، جورکردن‌حبابی تابع $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ را که با $f(n) = a_n = (n^۲ - n)/۲$ داده می‌شود معین می‌کند. از این‌رو، به‌عنوان اندازه‌ای برای زمان اجرای الگوریتم، می‌نویسیم $f \in O(n^۲)$. بنابراین می‌گویند جورکردن حبابی، $O(n^۲)$ مقایسه لازم دارد. □

مثال ۵.۱۰ در قسمت (ب)ی مثال ۶.۹ تابع مولّد دنبالهٔ $۰, ۲, ۶, ۱۲, ۲۰, ۳۰, ۴۲, \cdots$ را یافتیم و جواب براساس توانایی ما در تشخیص این بود که به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $a_n = n^۲ + n$.
اگر نتوانستیم این رابطه را ببینیم، شاید بتوانیم دنبالهٔ مفروض را بررسی و تعیین کنیم که آیا الگوی دیگری وجود دارد که به ما کمک کند یا نه.
در اینجا $a_۰ = ۰$، $a_۱ = ۲$، $a_۲ = ۶$، $a_۳ = ۱۲$، $a_۴ = ۲۰$، $a_۵ = ۳۰$، $a_۶ = ۴۲$، و

$$\begin{array}{ll} a_۱ - a_۰ = ۲ & a_۴ - a_۳ = ۸ \\ a_۲ - a_۱ = ۴ & a_۵ - a_۴ = ۱۰ \\ a_۳ - a_۲ = ۶ & a_۶ - a_۵ = ۱۲ \end{array}$$

این محاسبات رابطهٔ بازگشتی

$$a_n - a_{n-۱} = ۲n \qquad n \geq ۱, \qquad a_۰ = ۰$$

را به ذهن القا می‌کنند.

برای حل این رابطه، به روشی که اندکی با روش مورد استفاده در مثال ۴.۱۰ متفاوت است پیش می‌رویم. n معادلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &= 2 \\ a_2 - a_1 &= 4 \\ a_3 - a_2 &= 6 \\ \vdots \quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_n - a_{n-1} &= 2n \end{aligned}$$

وقتی این معادلات را با هم جمع کنیم، مجموع سمت چپ شامل a_i و $-a_i$ به‌ازای همهٔ مقادیر $1 \le i \le n-1$ است. لذا به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} a_n - a_0 &= 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) \\ &= 2[n(n+1)/2] = n^2 + n \end{aligned}$$

چون $a_0 = 0$، از اینجا نتیجه می‌شود که مثل آنچه قبلاً در قسمت (ب)ی مثال ۶.۹ به‌دست آوردیم، به‌ازای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{N}$، $a_n = n^2 + n$. □

حال به مطالعهٔ رابطهٔ بازگشتی با ضریب متغیر می‌پردازیم.

مثال ۶.۱۰ رابطهٔ بازگشتی $a_n = n.a_{n-1}$ را که $n \ge 1$ و $a_0 = 1$، حلّ کنید. با نوشتن پنج جملهٔ اوّلی که از این رابطه مشخص می‌شوند، داریم

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 & a_3 &= 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ a_1 &= 1 \cdot a_0 = 1 & a_4 &= 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ a_2 &= 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 & \cdots & \quad \cdots \quad \cdots \end{aligned}$$

بنابراین $a_n = n!$، و جواب، تابع عددی گسستهٔ a_n، $n \ge 0$، است که تعداد جایگشتهای n شئ را حساب می‌کند. □

وقتی موضوع جایگشتها مطرح باشند، الگوریتم بازگشتی را برای تولید جایگشتهای $\{1, 2, 3, \cdots, n-1, n\}$ از روی جایگشتهای $\{1, 2, 3, \cdots, n-1\}$ بررسی خواهیم کرد*.

* مطالب مذکور از اینجا تا پایان بخش، از مفاهیم مربوط به رابطه‌های بازگشتی دور شده‌اند. این مطالب با روشهای حل رابطه‌های بازگشتی سروکار ندارند و می‌توان از آنها بدون از دست رفتن پیوستگی متن، صرف‌نظر کرد.

برای {۱} تنها یک جایگشت وجود دارد. با بررسی جایگشتهای {۱, ۲}

۱	۲
۲	۱

می‌بینیم که با دو بار نوشتن جایگشت ۱، عدد ۲ را یک‌بار در سمت راست و بار دیگر در سمت چپ ۱ قرار می‌دهیم تا جایگشتهای فهرست شده به‌دست آیند. با سه بار نوشتن هریک از این دو جایگشت عدد ۳ را در هر جایگشت ولی در موضعهای مختلف وارد می‌کنیم تا جایگشتهای ۱، ۲، و ۳ به‌صورت زیر تشکیل شوند

	۱		۲
۱	۲	۳	

۱ ۲ ۳
۱ ۳ ۲
۳ ۱ ۲
۳ ۲ ۱
۲ ۳ ۱
۲ ۱ ۳

در اینجا می‌بینیم که اولین جایگشت ۱۲۳ است و ما هر یک از دو جایگشت بعدی را از جایگشت بلافاصله قبل از آن به‌وسیلهٔ تعویض دو عدد با هم به‌دست آورده‌ایم: ۳ و عدد صحیح سمت چپش. وقتی ۳ به سمت چپ جایگشت می‌رسد، اعداد باقیمانده را بررسی می‌کنیم و آنها را طبق فهرست جایگشتهایی که برای {۱, ۲} تولید کردیم جایگشت می‌دهیم. (با این کار، شیوهٔ بازگشتی انجام می‌شود.) بعد از آن، ۳ را با عدد صحیح سمت راستش تعویض می‌کنیم تا ۳ در سمت راست جایگشت قرار بگیرد. (توجه می‌کنیم که اگر ۱ و ۲ را در آخرین جایگشت با هم عوض کنیم، ۱۲۳ یعنی اولین جایگشت ثبت شده را به‌دست می‌آوریم.)

با ادامهٔ کار برای $S = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، ابتدا هریک از شش جایگشت {۱, ۲, ۳} را چهار بار ثبت می‌کنیم. وقتی با جایگشت ۱۲۳۴ شروع می‌نماییم، در تمام ۲۳ جایگشت باقیمانده، به‌صورتی که در جدول ۱.۱۰ نشان داده‌ایم، ۴ را وارد می‌کنیم. تنها فکر جدید در اینجا به‌صورت زیر ظاهر می‌شود. وقتی از جایگشت (۵) به (۶) به (۷) به (۸) جلو می‌رویم، ۴ را با عدد صحیح سمت راستش عوض می‌کنیم. در جایگشت (۸) که ۴ به سمت راست رسیده است، جایگشت (۹) را از فهرست جایگشتهای {۱, ۲, ۳}، با حفظ مکان ۴ و قرار دادن ۳۱۲ به‌جای ۱۳۲، به‌دست می‌آوریم. پس از آن مثل ۸ جایگشت اول، عمل را ادامه می‌دهیم تا به جایگشت (۱۶) برسیم، که در آن ۴ باز در سمت راست است. سپس از جایگشت ۳۲۱ جایگشت ۲۳۱ را به‌دست می‌آوریم و به واردکردن ۴ ادامه می‌دهیم تا ۲۴ جایگشت تولید شوند. اگر بار دیگر جای ۱ و ۲ را در آخرین جایگشت عوض کنیم اولین جایگشت فهرست را به‌دست می‌آوریم.

جدول ۱.۱۰

(۱)		۱		۲		۳	۴
(۲)		۱		۲	۴	۳	
(۳)		۱	۴	۲		۳	
(۴)	۴	۱		۲		۳	
(۵)	۴	۱		۳		۲	
(۶)		۱	۴	۳		۲	
(۷)		۱		۳	۴	۲	
(۸)		۱		۳		۲	۴
(۹)		۳		۱		۲	۴
(۱۰)		۳		۱	۴	۲	
(۱۱)		۳	۴	۱		۲	
...		...		...		...	
(۱۵)		۳		۲	۴	۱	
(۱۶)		۳		۲		۱	۴
(۱۷)		۲		۳		۱	۴
...		...		...		...	
(۲۲)		۲	۴	۱		۳	
(۲۳)		۲		۱	۴	۳	
(۲۴)		۲		۱		۳	۴

مراجع فصل، اطلاعاتی بیشتر دربارهٔ شیوه‌های بازگشتی تولید جایگشتها و ترکیبها در اختیار ما قرار می‌دهند.

به مطالب این اولین بخش با برگشت به یک مفهوم قبلی، یعنی بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح مثبت، پایان می‌دهیم.

مثال ۷.۱۰ روشهای بازگشتی در زمینه‌های ریاضیات گسسته و تحلیل الگوریتمها روشهایی پایه‌ای هستند. این روشها وقتی به‌وجود می‌آیند که می‌خواهیم مسالهٔ مفروضی را از راه تجزیه و یا با ارجاع آن به مسائل مشابه کوچکتر حل کنیم. در برنامه‌نویسی زبان پاسکال، این کار را می‌توان با استفاده از تابعها و شیوه‌های بازگشتی انجام داد، که مجازند از خودشان در متن برنامه کمک بگیرند. این مثال چنین تابعی را در اختیار ما قرار می‌دهد.

در محاسبهٔ (۸۴، ۳۳۳)، ب. م. م ۳۳۳ و ۸۴، وقتی الگوریتم اقلیدسی را به‌کار می‌بریم،

محاسبات زیر را انجام می‌دهیم (که در بخش ۳.۴ عرضه شدند)

$$۳۳۳ = ۳(۸۴) + ۸۱ \qquad ۰ < ۸۱ < ۸۴ \qquad (۱)$$

$$۸۴ = ۱(۸۱) + ۳ \qquad ۰ < ۳ < ۸۱ \qquad (۲)$$

$$۸۱ = ۲۷(۳) + ۰ \qquad (۳)$$

چون ۳ آخرین مانده مخالف صفر است، الگوریتم اقلیدسی می‌گوید که $۳ = (۳۳۳, ۸۴)$. اما اگر فقط محاسبات موجود در معادله‌های (۲) و (۳) را به‌کار بریم، آن‌گاه به‌دست می‌آوریم که $۳ = (۸۴, ۸۱)$. از معادلهٔ (۳)، به تنهایی، نتیجه می‌شود $۳ = (۸۱, ۳)$ زیرا ۳ عدد ۸۱ را می‌شمارد. در نتیجه

$$(۳۳۳, ۸۴) = (۸۴, ۸۱) = (۸۱, ۳) = ۳$$

که در آن، اعداد صحیح موجود در محاسبات متوالی، وقتی از معادلهٔ (۱) به معادلهٔ (۲) و به معادلهٔ (۳) می‌رویم، تدریجاً کوچکتر می‌شوند.

همچنین مشاهده می‌کنیم که

$$۸۱ = ۳۳۳\mathrm{Mod}۸۴ \text{ و } ۳ = ۸۴\mathrm{Mod}۸۱$$

بنابراین نتیجه می‌شود که

$$(۳۳۳, ۸۴) = (۸۴, ۳۳۳\mathrm{Mod}۸۴) = (۳۳۳\mathrm{Mod}۸۴, ۸۴\mathrm{Mod}(۳۳۳\mathrm{Mod}۸۴))$$

این نتایج، روش بازگشتی زیر را برای محاسبهٔ (a, b)، که در آن $a, b \in \mathbf{Z}^+$، در اختیار ما قرار می‌دهد.

فرض کنید ورودی $a, b \in \mathbf{Z}^+$ را داریم.

گام ۱. اگر $b|a$ (یا $a\mathrm{Mod}b = ۰$)، آن‌گاه $(a, b) = b$.

گام ۲. اگر $b \nmid a$، آن‌گاه کارهای زیر را به ترتیبی که مشخص شده‌اند انجام دهید.

(i) قرار دهید $a = b$

(ii) قرار دهید $b = a\mathrm{Mod}b$، که در آن مقدار a برای این تخصیص مقدار قدیمی a است.

(iii) به گام ۱ برگردید.

این ایده‌ها در برنامهٔ پاسکال، شکل ۳.۱۰، به‌کار رفته‌اند، که در آن قطعهٔ هاشورخورده یک تابع بازگشتی تعیین‌کنندهٔ (a, b) است. (خواننده اگر بخواهد می‌تواند این برنامه را با برنامه‌ای که در شکل ۸.۴ داده شده است مقایسه کند.) □

```
Program  EuclideanAlgorithm2 (input,output);

Var
   p,q: integer;

Function gcd (a,b: integer): integer;

Begin
   If  a Mod b = 0  then
     gcd := b
   Else  gcd := gcd (b,a Mod b)
End;

Begin
   Writeln ('This program is designed to find');
   Writeln ('the gcd of two positive integers');
   Writeln ('p and q.');
   Write ('The first positive integer p is ');
   Readln (p);
   Write ('The second positive integer q is ');
   Readln (q);

   Writeln ('The greatest common divisor of ');
   Writeln (p,' and ', q,' is ', gcd (p,q), '.')
End.
```

شکل ۳.۱۰

تمرینهای ۱.۱۰

۱. رابطه‌ای بازگشتی، با شرط اولیه، بیابید که به‌صورتی یکتا هریک از سریهای هندسی زیر را تعیین کند.

الف) $۲, ۱۰, ۵۰, ۲۵۰, \cdots$ ب) $۶, -۱۸, ۵۴, -۱۶۲, \cdots$

ج) $۱, ۱/۳, ۱/۹, ۱/۲۷, \cdots$ د) $۷, ۱۴/۵, ۲۸/۲۵, ۵۶/۱۲۵, \cdots$

۲. جواب عمومی هر یک از رابطه‌های بازگشتی زیر را بیابید.

الف) $a_{n+۱} - ۱{,}۵a_n = ۰, n \geq ۰$ ب) $۴a_n - ۵a_{n-۱} = ۰, n \geq ۱$

ج) $۳a_{n+۱} - ۴a_n = ۰, n \geq ۰, a_۱ = ۵$ د) $۲a_n - ۳a_{n-۱} = ۰, n \geq ۱, a_۴ = ۸۱$

۳. اگر a_n، $n \geq ۰$، جواب رابطهٔ بازگشتی $a_{n+۱} - ca_n = ۰$ باشد، و $a_۳ = ۱۵۳/۴۹$، $a_۵ = ۱۳۷۷/۲۴۰۱$، c چقدر است؟

۴. در یک کشت، تعداد باکتریها (تقریباً) ۱۰۰۰ است، و این تعداد در هر دو ساعت ۲۵۰٪ زیاد می‌شود. یک رابطهٔ بازگشتی بیابید که تعداد باکتریهای موجود بعد از روز اول را به‌دست دهد.

۵. اگر ۱۰۰ دلار با سود ۶٪ به مرابحه مرکب فصلی گذاشته شود چند ماه باید انتظار کشید تا این

مبلغ دو برابر شود؟ (قبل از پایان فصل نمی‌توان پولی از حساب برداشت.)

۶. شخصی سودهای سهامی را که ۱۵ سال قبل دریافت کرده است در حسابی سرمایه‌گذاری نموده است که نرخ مرابحهٔ مرکب فصلی را ۸٪ می‌پردازد. اگر در این حساب فعلاً ۷۲۱۸٫۲۷ دلار موجود باشد سرمایهٔ اولیه چقدر بوده است؟

۷. اگر $a_n^۳ = ۷a_{n-۱}^۳$، که در آن $n \geq ۱$ و $a_۰ = ۳$، مقدار $a_{۱۰}$ را بیابید.

۸. اگر $۵na_n + ۲na_{n-۱} = ۲a_{n-۱}$ که در آن $n \geq ۳$ و $a_۲ = -۳۰$، آن را نسبت به a_n، $n \geq ۲$، حل کنید.

۹. فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، ...، $x_{۲۰}$ فهرستی از اعداد حقیقی متمایز باشد که قرار است به‌وسیلهٔ تکنیک جور کردن حبابی مثال ۴.۱۰ جور شود. (الف) بعد از چند مقایسه ۱۰ عدد کوچکتر فهرست اولیه به ترتیب صعودی آرایش می‌یابند؟ (ب) برای انجام کار جور کردن، به چند مقایسهٔ دیگر نیاز است؟

۱۰. فهرست جایگشتهایی را که در جدول ۱.۱۰ نشان داده‌ایم کامل کنید.

۱۱. فرض کنید جایگشتهای $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ با شیوه‌ای که از روی مثال ۶.۱۰ بسط یافته تولید شوند. (الف) آخرین جایگشت این فهرست چیست؟ (ب) کدام دو جایگشت قبل از ۲۵۱۳۴ می‌آیند؟ (ج) کدام سه جایگشت پس از ۲۵۱۳۴ می‌آیند؟ (د) در فهرست ۱۲۰ جایگشت، جایگشتهای ۲۱۵۴۳، ۳۵۴۲۱، و ۳۱۵۲۴ در کجا پیدا می‌شوند؟

۱۲. برای انجام جورکردن حبابی که در شکل ۱.۱۰ داده شده است، حلقهٔ برونی $n - ۱$ بار اجرا شده است. این عمل، بدون توجه به آنکه تعویضهایی در طول اجرای حلقه‌های برونی صورت گرفته است یا نه انجام شده است. در نتیجه، به‌ازای $i = k$، که در آن $i \leq k \leq n - ۲$، اگر اجرای حلقهٔ داخلی تعویضی را نتیجه ندهد، فهرست به ترتیب صعودی است. لذا به اجرای حلقهٔ برونی به‌ازای $k + ۱ \leq i \leq n - ۱$ نیاز نیست.

الف) برای وضعیتی که در اینجا توصیف شده اگر اجرای حلقهٔ درونی به‌ازای $i = k(۱ \leq k \leq n-۲)$ تعویض را نتیجه ندهد، چند مقایسهٔ غیر لازم انجام شده است؟

ب) صورت اصلاح‌شدهٔ جورکردن حبابی را که در شکل ۱.۱۰ نشان داده‌ایم بنویسید. (نتیجهٔ شما باید مقایسه‌های غیرلازم مورد بحث در آغاز این تمرین را حذف کند.)

ج) با استفاده از تعداد مقایسه‌ها به‌عنوان اندازهٔ زمان اجرای آن، برای الگوریتمی که در قسمت (ب) اجرا شده است پیچیدگیهای زمانیِ بهترین و بدترین حالت را تعیین کنید.

۱۳. فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n، n عدد حقیقی با شرط $x_۱ \leq x_۲ \leq x_۳ \leq \cdots \leq x_n$ باشد. میانهٔ این مجموعهٔ اعداد به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$x_{(n+۱)/۲}$ برای n فرد

$(۱/۲)[x_{n/۲} + x_{(n/۲)+۱}]$ برای n زوج

الف) فرض کنید که

$$A[1], A[2], \cdots, A[n]$$

آرایه‌ای از n عدد حقیقی باشد که الزاماً به ترتیب صعودی یا نزولی نیست. برای تعیین میانهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی این فهرست، برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید.)

ب) برای برنامه‌ای که در قسمت (الف) نوشته‌اید دربارهٔ پیچیدگی زمانیِ بدترین حالت بحث کنید.

۱۴. در برنامهٔ مربوط به شکل ۳.۱۰، آیا شرط $a \geq b$ ضروری است؟

۲.۱۰ رابطهٔ بازگشتیِ همگن‌خطیِ مرتبهٔ دوم با ضریبهای ثابت

فرض کنید $k \in \mathbf{Z}^+$ و $c_n (\neq 0)$، c_{n-1}، c_{n-2}، ...، $c_{n-k} (\neq 0)$ اعدادی حقیقی باشند. اگر a_n، $n \geq 0$، تابع عددی گسسته باشد، آن‌گاه

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + c_{n-2} a_{n-2} + \cdots + c_{n-k} a_{n-k} = f(n) \qquad n \geq k$$

رابطهٔ بازگشتی (با ضریبهای ثابت) مرتبهٔ k است. وقتی به‌ازای همهٔ مقادیر $n \geq 0$، $f(n) = 0$، رابطه را همگن می‌نامند، در غیر این صورت ناهمگن است.

در این بخش توجه ما بر رابطهٔ بازگشتی همگن مرتبهٔ دو:

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + c_{n-2} a_{n-2} = 0, \qquad n \geq 2$$

متمرکز است. بر پایهٔ کارمان در بخش ۱.۱۰، جوابی به‌صورت $a_n = cr^n$ را که در آن $c \neq 0$ و $r \neq 0$، جستجو می‌کنیم.

با قراردادن $a_n = cr^n$ در $c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + c_{n-2} a_{n-2} = 0$، به‌دست می‌آوریم

$$c_n cr^n + c_{n-1} cr^{n-1} + c_{n-2} cr^{n-2} = 0, \ c, r \neq 0$$

که به معادلهٔ درجهٔ دوم $c_n r^2 + c_{n-1} r + c_{n-2} = 0$ تبدیل می‌شود. بنابراین ریشه‌های r_1 و r_2ی این معادله، که معادلهٔ مشخصه نام دارد، یکی از سه حالت زیر را دارند: (الف) r_1 و r_2 اعداد حقیقی متمایزند؛ (ب) r_1 و r_2 یک جفت عدد مختلط مزدوج‌اند؛ یا (ج) r_1 و r_2 حقیقی‌اند، اما $r_1 = r_2$. در همهٔ این حالتها، r_1 و r_2 را ریشه‌های مشخصه می‌گویند.

حالت (الف): (ریشه‌های حقیقی متمایز)

مثال ۸.۱۰ رابطهٔ بازگشتی $a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$ را، که در آن $n \geq 2$ و $a_0 = 1$، $a_1 = 2$، حلّ کنید.

اگر $a_n = cr^n$ با $c, r \neq 0$، معادلهٔ $cr^n + cr^{n-1} - 6cr^{n-2} = 0$ را به‌دست می‌آوریم که از آن معادلهٔ مشخصهٔ $r^2 + r - 6 = 0$ نتیجه می‌شود.

$$0 = r^2 + r - 6 = (r+3)(r-2) \Rightarrow r = 2, -3$$

چون دارای ریشه‌های حقیقی متمایزیم، $a_n = 2^n$ و $a_n = (-3)^n$ هر دو جواب‌اند. اینها جوابهای خطی-مستقل هستند زیرا یکی مضربی از دیگری نیست؛ یعنی ثابت حقیقی k وجود ندارد که برابری $(-3)^n = k(2^n)$ به‌ازای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{N}$ برقرار باشد.* لذا $a_n = c_1(2)^n + c_2(-3)^n$ معرف جواب کلی است، که در آن c_1 و c_2 ثابتهایی دلخواه‌اند.

با توجه به مفروضات $a_0 = 1$ و $a_1 = 2$، c_1 و c_2 به‌صورت زیر تعیین می‌شوند

$$1 = a_0 = c_1(2)^0 + c_2(-3)^0 = c_1 + c_2$$
$$2 = a_1 = c_1(2)^1 + c_2(-3)^1 = 2c_1 - 3c_2$$

از حل این دستگاه معادلات به‌دست می‌آوریم $c_1 = 1$، $c_2 = 0$. بنابراین $a_n = 2^n$ جواب یکتای رابطهٔ بازگشتی مفروض است. □

یک رابطهٔ بازگشتی همگن مرتبهٔ دوم جالب، رابطهٔ فیبوناتچی است. (به این رابطه قبلاً در بخش ۶.۹ اشاره کردیم.)

مثال ۹.۱۰ رابطهٔ بازگشتی $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ را که در آن $n \geq 0$ و $F_0 = 1$، $F_1 = 1$، حلّ کنید.

مانند مثال قبل، فرض کنید $F_n = cr^n$ به‌ازای $c, r \neq 0$، $n \geq 0$. پس از قراردادن این مقدار در رابطهٔ اصلی، به‌دست می‌آوریم $cr^{n+2} = cr^{n+1} + cr^n$ که نتیجهٔ آن، معادلهٔ مشخصهٔ $r^2 - r = 1$ است. ریشه‌های مشخصه $r = (1 \pm \sqrt{5})/2$ هستند، لذا جواب عمومی به‌صورت زیر است

$$F_n = c_1[(1 + \sqrt{5})/2]^n + c_2[(1 - \sqrt{5})/2]^n$$

* می‌توانیم جوابهای $a_n = 2^n$ و $a_n = (-3)^n$ را به‌صورت خطی مستقل بنامیم وقتی شرط زیر برقرار باشد. به‌ازای $k_1 \in \mathbf{R}$ و $k_2 \in \mathbf{R}$، اگر به‌ازای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{N}$، $k_1(2^n) + k_2(-3)^n = 0$، آن‌گاه $k_1 = k_2 = 0$.

برای تعیین c_1 و c_2، مقادیر اولیه را به‌کار می‌بریم و می‌نویسیم $0 = F_0 = c_1 + c_2$، $1 = F_1 = c_1[(1+\sqrt{5})/2] + c_2[(1-\sqrt{5})/2]$. چون $c_2 = -c_1$، داریم $2 = c_1(1+\sqrt{5}) - c_1(1-\sqrt{5})$ و $c_1 = 1/\sqrt{5}$. جواب عمومی به‌صورت زیر است

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$
□

مثال ۱۰.۱۰ به‌ازای $n \geq 0$، قرار می‌دهیم $S = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ (وقتی $n = 0$، $S = \emptyset$)، و فرض می‌کنیم a_n معرف تعداد زیرمجموعه‌های S است که شامل اعداد صحیح متوالی نیستند. برای a_n رابطه‌ای بازگشتی به‌دست آورید و آن را حل کنید.

به‌ازای $0 \leq n \leq 4$، داریم $a_0 = 1$، $a_1 = 2$، $a_2 = 3$، $a_3 = 5$ و $a_4 = 8$. (مثلاً $a_3 = 5$، زیرا $S = \{1, 2, 3\}$ دارای زیرمجموعه‌های ϕ، $\{1\}$، $\{2\}$، $\{3\}$، و $\{1, 3\}$ است که اعداد صحیح متوالی ندارند.) این پنج جملهٔ اوّل یادآور دنبالهٔ فیبوناتچی هستند. امّا وقتی ادامه می‌دهیم آیا چیزی عوض می‌شود؟

فرض کنید $n \geq 2$ و $S = \{1, 2, 3, \cdots, n-2, n-1, n\}$. اگر $A \subseteq S$ و A برحسب a_n حساب شود، دو امکان وجود دارد:

الف) $n \in A$: وقتی این اتفاق می‌افتد که $(n-1) \notin A$ و $A - \{n\}$ باید برحسب a_{n-2} حساب شود.

ب) $n \notin A$: برای این حالت، A باید برحسب a_{n-1} حساب شود.

چون این دو حالت جامع و ناسازگارند، لذا می‌توانیم نتیجه بگیریم که رابطهٔ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ با شرطهای $n \geq 2$، $a_0 = 1$ و $a_1 = 2$، رابطهٔ بازگشتی برای مسأله است. اینک می‌توانیم آن را برحسب a_n حل کنیم. امّا اگر توجه کنیم که $a_n = F_{n+2}$، $n \geq 0$، آن‌گاه نتیجهٔ مثال ۹.۱۰ ایجاب می‌کند که

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right], \quad n \geq 0$$
□

اینک رابطه‌ای مشابه را که در علم کامپیوتر کاربرد دارد بررسی می‌کنیم.

مثال ۱۱.۱۰ در بسیاری از زبانهای برنامه‌نویسی ممکن است بخواهیم آن عبارتهای رسمی، یعنی، بدون پرانتز، را که از ارقام ۰، ۱، ۲، ... ، ۹ و نمادهای عمل دوتایی +، *، / ساخته شده‌اند بررسی کنیم. مثلاً $3 + 4$ و $2 + 3 * 5$ عبارتهای حسابی رسمی‌اند؛ $8 + * 9$ چنین نیست. در اینجا $2 + 3 * 5 = 17$، زیرا سلسله مراتبی از عملها وجود دارند: یعنی ضرب و تقسیم که قبل از جمع انجام می‌شوند. وقتی عبارت از چپ به راست مرور شود، عملهایی که در یک سطح‌اند به ترتیبی که ظاهر می‌شوند انجام می‌گیرند.

به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$، فرض کنید a_n تعداد این عبارتهای حسابی (رسمی) باشند که از n نماد ساخته می‌شوند. در این صورت $a_1 = ۱۰$، زیرا عبارتهای حسابی یک نماد، ده رقم هستند. سپس $a_2 = ۱۰۰$ ~~این برای بیان عبارتهای~~ ۰۰، ۰۱، ...، ۰۹، ۱۰، ۱۱، ...، ۹۹ به‌کار می‌رود. (علامتهای غیر لازم مثبت در جلوی اعداد وجود ندارند.) وقتی $n \geq ۳$، دو حالت برای a_n در نظر می‌گیریم:

۱. اگر x عبارتی حسابی از $n - ۱$ نماد باشد، آخرین نماد باید یک رقم باشد. با افزودن یک رقم دیگر به سمت راست x عبارتهای حسابی $۱۰a_{n-1}$ از n نماد را به‌دست می‌آوریم که آخرین دو نماد آنها، رقم هستند.

۲. اینک فرض کنید که y عبارتی دارای $n - ۲$ نماد باشد. برای به‌دست آوردن عبارتی با n نماد (که در حالت اول به حساب نیامده است) در طرف راست y یکی از ۲۹ عبارت دو نمادی ۱+، ...، ۹+، ۰+، ۱*، ...، ۹*، ۰* و ...، ۱/، ...، ۹/ را اضافه می‌کنیم.

با توجّه به این دو حالت داریم $a_n = ۱۰a_{n-1} + ۲۹a_{n-2}$، که در آن $n \geq ۲$ و $a_1 = ۱۰$، $a_2 = ۱۰۰$. در اینجا ریشه‌های مشخصه $۵ \pm ۳\sqrt{۶}$ هستند و جواب عبارت است از

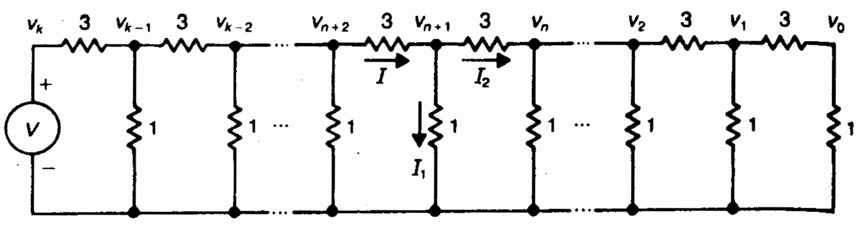
$$a_n = (۵/۳\sqrt{۶})[(۵ + ۳\sqrt{۶})^n - (۵ - ۳\sqrt{۶})^n]$$

(درستی این جواب را تحقیق کنید.) □

اینک به کاربرد در علوم فیزیکی برمی‌گردیم.

مثال ۱۲.۱۰ شبکهٔ خطی شکل ۴.۱۰ را در نظر می‌گیریم، که در آن k مقاومت یک اهمی و k مقاومت ۳ اهمی وجود دارند که با سیمهایی به مولّدی با ولتاژ V وصل شده‌اند. برای v_n، $۰ \leq n \leq k$، فرمولی بیابید که در هر نقطهٔ اتصال، این ولتاژ را به‌صورت تابعی از n به‌دست دهد. (این، افت ولتاژ در طول مقاومت یک اهمی قبل از نقطهٔ اتصال نیز هست.)

می‌دانیم که $v_k = V$ ولتاژی است که مولّد تولید می‌کند. برای یافتن یک رابطهٔ بازگشتی اصلهای زیر را به‌کار می‌بریم.



شکل ۴.۱۰

۱. قانون کیرشهوف: در هر نقطهٔ اتصال، مجموع جریانهای ورودی به نقطهٔ اتصال برابر مجموع جریانهای خروجی از آن نقطه است.

۲. قانون اهم: اگر افت ولتاژ در طول مقاومت R اهمی برابر $V_۲ - V_۱$ باشد، آنگاه جریان در مقاومت برابر $(V_۲ - V_۱)/R$ است.

جریان را در نقطهٔ اتصالی که با $v_{n+۱}$ نشان می‌دهیم در نظر بگیرید. بنابر قانون کیرشهوف $I = I_۱ + I_۲$. بنابر قانون اهم، $I = (v_{n+۲} - v_{n+۱})/۳$، $I_۱ = v_{n+۱}/۱$ و $I_۲ = (v_{n+۱} - v_n)/۳$. در نتیجه

$$\frac{v_{n+۲} - v_{n+۱}}{۳} = \frac{v_{n+۱}}{۱} + \frac{v_{n+۱} - v_n}{۳} \qquad ۰ \leq n \leq k - ۲$$

یا $v_{n+۲} - ۵v_{n+۱} + v_n = ۰$.

قرار دهید $v_n = cr^n$ به‌ازای $c, r \neq ۰$ و $۰ \leq n \leq k$. معادلهٔ بالا دارای معادلهٔ مشخصهٔ $r^۲ - ۵r + ۱ = ۰$ است که ریشه‌های آن $\alpha = (۵ + \sqrt{۲۱})/۲$ و $\beta = (۵ - \sqrt{۲۱})/۲$ هستند. لذا نتیجه می‌شود که $v_n = c_۱\alpha^n + c_۲\beta^n$.

حال $v_۰$ هرچه باشد، بنابر دو قانون بالا داریم $v_۰/۱ = (v_۱ - v_۰)/۳$ یا $v_۱ = ۴v_۰$. پس، $v_۰ = c_۱ + c_۲$ و $۴v_۰ = v_۱ = c_۱\alpha + c_۲\beta$. از این معادله‌ها نتیجه می‌شود که $c_۱ = v_۰(\beta - ۴)/(\beta - \alpha)$، $c_۲ = v_۰(\alpha - ۴)/(\alpha - \beta)$، و

$$v_n = v_۰\left[\frac{(\beta - ۴)}{(\beta - \alpha)}\alpha^n + \frac{(\alpha - ۴)}{(\alpha - \beta)}\beta^n\right]$$

چون

$$V = v_k = v_۰\left[\frac{(\beta - ۴)\alpha^k - (\alpha - ۴)\beta^k}{(\beta - \alpha)}\right]$$

به‌دست می‌آوریم

$$v_۰ = (\beta - \alpha)V/[(\beta - ۴)\alpha^k - (\alpha - ۴)\beta^k]$$

که نتیجه می‌دهد

$$v_n = V\left[\frac{(\beta - ۴)\alpha^n - (\alpha - ۴)\beta^n}{(\beta - ۴)\alpha^k - (\alpha - ۴)\beta^k}\right]$$

□

مثال بعد نشان می‌دهد که چگونه ممکن است متغیرهای کمکی مفید واقع شوند.

مثال ۱۳.۱۰ برای تعداد دنباله‌های دوتایی به طول n که ۰های متوالی نداشته باشند رابطه‌های بازگشتی بیابید.

به‌ازای $n \geq ۰$، فرض کنید a_n تعداد این‌گونه دنباله‌های به طول n باشد. گیریم $a_n^{(۰)}$ تعداد آن دنباله‌هایی باشد که به ۰ ختم می‌شوند، و $a_n^{(۱)}$ تعداد دنباله‌هایی باشد که به ۱ ختم می‌شوند. بنابراین $a_n = a_n^{(۰)} + a_n^{(۱)}$، و

$$a_n = ۲ \cdot a_{n-۱}^{(۱)} + ۱ \cdot a_{n-۱}^{(۰)}$$

nامین موضع می‌تواند ۰ یا ۱ باشد — nامین موضع تنها می‌تواند ۱ باشد

در نتیجه

$$a_n = a_{n-۱}^{(۱)} + \left[a_{n-۱}^{(۱)} + a_{n-۱}^{(۰)}\right] = a_{n-۱}^{(۱)} + a_{n-۱} = a_{n-۱} + a_{n-۲}$$

(چرا $a_{n-۱}^{(۱)} = a_{n-۲}$؟). بنابراین، رابطهٔ بازگشتی برای این مسأله چنین است

$$a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$$

که در آن $n \geq ۲$، $a_۰ = ۱$ و $a_۱ = ۲$. (جزئیات راه‌حل مساله را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.) □

آخرین مثال برای حالت (الف) نشان می‌دهد که چگونه نتایج مربوط به رابطه‌های بازگشتی مرتبهٔ دوم را به مرتبه‌های بالاتر باید بسط داد.

مثال ۱۴.۱۰ رابطهٔ بازگشتی

$$۲a_{n+۳} = a_{n+۲} + ۲a_{n+۱} - a_n, \quad n \geq ۰, \quad a_۰ = ۰, \quad a_۱ = ۱, \quad a_۲ = ۲$$

را حلّ کنید.

با قراردادن $a_n = cr^n$ به‌ازای $c, r \neq ۰$ و $n \geq ۰$، معادلهٔ مشخصهٔ

$$۲r^۳ - r^۲ - ۲r + ۱ = ۰ = (۲r - ۱)(r - ۱)(r + ۱)$$

را به‌دست می‌آوریم. ریشه‌های مشخصه $\frac{۱}{۲}$، ۱، و ۱− هستند، لذا جواب به‌صورت زیر است

$$a_n = c_۱(۱)^n + c_۲(-۱)^n + c_۳(\frac{۱}{۲})^n = c_۱ + c_۲(-۱)^n + c_۳(\frac{۱}{۲})^n$$

(جوابهای ۱، $(-۱)^n$، و $(\frac{۱}{۲})^n$ را به‌طور خطی مستقل می‌نامند زیرا ممکن نیست که یکی از آنها را به‌صورت ترکیب خطی از دوتای دیگر به‌دست آورد.*) از برابریهای $a_۰ = ۰$، $a_۱ = ۱$، و $a_۲ = ۲$ نتیجه می‌شود $c_۱ = ۵/۲$، $c_۲ = ۱/۶$، $c_۳ = -۸/۳$ □

حالت (ب): (ریشه‌های مختلط) قبل از بحث دربارهٔ حالت ریشه‌های مختلط، قضیهٔ دموآور را یادآوری می‌کنیم

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \quad n \geq ۰$$

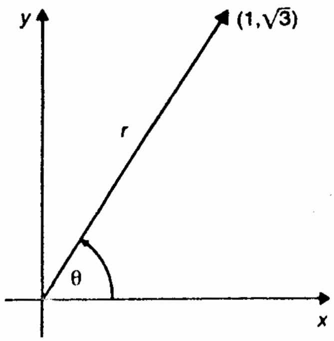
(این برابری، در قسمت (ب) از تمرین ۶ بخش ۱.۴ آمده است.)

اگر $z = x + iy \in \mathbf{C}$، می‌توانیم بنویسیم $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، که در آن $r = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و $\tan\theta = (y/x)$. پس بنابر قضیهٔ دموآور

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \quad n \geq ۰$$

مثال ۱۵.۱۰ مطلوب است $(۱ + \sqrt{۳}i)^{۱۰}$.

شکل ۵.۱۰، راه نمایش هندسی عدد مختلط $۱ + \sqrt{۳}i$ را به‌صورت نقطهٔ $(۱, \sqrt{۳})$ در صفحهٔ xy نشان می‌دهد. در اینجا $r = \sqrt{۱^۲ + (\sqrt{۳})^۲} = ۲$، و $\theta = \pi/۳$.



شکل ۵.۱۰

* به‌راه دیگر، جوابهای ۱، $(-۱)^n$، و $(-۱/۲)^n$ به‌طور خطی مستقل‌اند، زیرا اگر a، b، و c اعدادی حقیقی باشند و به‌ازای تمام مقادیر $n \in \mathbf{N}$ داشته باشیم $a(۱) + b(-۱)^n + c(-۱/۲)^n = ۰$، نتیجه می‌گیریم که $a = b = c = ۰$.

بنابراین

$$۱ + \sqrt{۳}i = ۲(\cos(\pi/۳) + i\sin(\pi/۳))$$

و

$$\begin{aligned}(۱ + \sqrt{۳}i)^{۱۰} &= ۲^{۱۰}(\cos(۱۰\pi/۳) + i\sin(۱۰\pi//۳)) \\ &= ۲^{۱۰}(\cos(۴\pi/۳) + i\sin(۴\pi/۳)) \\ &= ۲^{۱۰}((-۱/۲) - (\sqrt{۳}/۲)i) = (-۲^{۹})(۱ + \sqrt{۳}i)\end{aligned}$$

□

این‌گونه نتایج را در مثالهای زیر به‌کار خواهیم برد.

مثال ۱۶.۱۰ رابطهٔ بازگشتی $a_n = ۲(a_{n-۱} - a_{n-۲})$ را که در آن $n \geq ۲$ و $a_۰ = ۱$، $a_۱ = ۲$، حل کنید.

با قراردادن $a_n = cr^n$ به‌ازای $c, r \neq ۰$، معادلهٔ مشخصهٔ $r^۲ - ۲r + ۲ = ۰$ به‌دست می‌آید که ریشه‌هایش $۱ \pm i$ هستند. بنابراین، جواب عمومی به‌صورت

$$c_۱(۱ + i)^n + c_۲(۱ - i)^n$$

است که در آن $c_۱$ و $c_۲$ فعلاً معرّف ثابتهای مختلط دلخواه‌اند. [مانند حالت **(الف)**، دو جواب مستقل وجود دارند: $(۱ + i)^n$ و $(۱ - i)^n$.]

$$۱ + i = \sqrt{۲}(\cos(\pi/۴) + i\sin(\pi/۴))$$

و

$$۱ - i = \sqrt{۲}(\cos(-\pi/۴) + i\sin(-\pi/۴)) = \sqrt{۲}(\cos(\pi/۴) - i\sin(\pi/۴))$$

که نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}a_n &= c_۱(\sqrt{۲})^n(\cos(n\pi/۴) + i\sin(n\pi/۴)) + c_۲(\sqrt{۲})^n(\cos(n\pi/۴) - i\sin(n\pi/۴)) \\ &= (\sqrt{۲})^n[k_۱\cos(n\pi/۴) + k_۲\sin(n\pi/۴)]\end{aligned}$$

که در آن $k_۱ = c_۱ + c_۲$ و $k_۲ = (c_۱ - c_۲)i$.

$$۱ = a_۰ = [k_۱ \cos ۰ + k_۲ \sin ۰] = k_۱$$
$$۲ = a_۱ = \sqrt{۲}[۱ \cdot \cos(\pi/۴) + k_۲ \sin(\pi/۴)],$$

یا $۲ = ۱ + k_۲$ و $k_۲ = ۱$.

پس، جواب به‌ازای شرطهای اولیهٔ مفروض، به‌صورت

$$a_n = (\sqrt{۲})^n[\cos(n\pi/۴) + \sin(n\pi/۴)], \quad n \geq ۰$$

است. (توجه کنید که این جواب شامل اعداد مختلط نیست. نکتهٔ کوچکی ممکن است در اینجا موجب تعجّب خواننده باشد. چگونه شده است که با $c_۱$ و $c_۲$ مختلط شروع کردیم و به $k_۱ = c_۱ + c_۲$ و $k_۲ = (c_۱ - c_۲)i$ حقیقی رسیدیم؟ این حالت وقتی رخ می‌دهد که $c_۱$ و $c_۲$ مختلطهای مزودج باشند.) □

حال کاربردی از جبرخطی را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱۷.۱۰ برای $b \in \mathbf{R}^+$، D_n یعنی دترمینان $n \times n$ را که به‌صورت زیر است در نظر بگیرید

$$\begin{vmatrix}
b & b & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\
b & b & b & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\
۰ & b & b & b & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\
۰ & ۰ & b & b & b & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\
۰ & ۰ & ۰ & b & b & b & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\
. & . & . & . & . & . & \cdots & . & . & . & . & . \\
۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & b & b & b & ۰ & ۰ \\
۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & b & b & b & ۰ \\
۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & b & b & b \\
۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & b & b
\end{vmatrix}$$

مقدار D_n را به‌صورت تابعی از n به‌دست آورید.

فرض کنید a_n، $n \geq ۱$، معرف مقدار D_n، دترمینان $n \times n$، باشد. پس $a_۱ = |b| = b$ و $a_۲ = \begin{vmatrix} b & b \\ b & b \end{vmatrix} = ۰$.

از بسط D_n برحسب اولین سطر، داریم

$$D_n = b\underbrace{\begin{vmatrix} b & b & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ b & b & b & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & b & b & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & b & b & b & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ . & . & . & . & . & \cdots & . & . & . & . \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & b & b & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & b & b & b \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & b & b \end{vmatrix}}_{\text{(این } D_{n-۱} \text{ است)}} - b\begin{vmatrix} b & b & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ b & b & b & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & b & b & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & b & b & b & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ . & . & . & . & . & \cdots & . & . & . & . \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & b & b & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & b & b & b \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & b & b \end{vmatrix}$$

وقتی دترمینان دوم را برحسب اولین ستون بسط دهیم به‌دست می‌آوریم که

$$D_n = bD_{n-۱} - (b)(b)D_{n-۲} = bD_{n-۱} - b^۲ D_{n-۲}$$

این رابطه، به رابطهٔ

$$a_n = ba_{n-۱} - b^۲ a_{n-۲}, \quad n \geq ۳, \quad a_۱ = b, \quad a_۲ = ۰$$

تبدیل می‌شود.

اگر قرار دهیم $a_n = cr^n$ به‌ازای $c, r \neq ۰$ و $n \geq ۱$، معادلهٔ مشخصه، ریشه‌های $b[(۱/۲) \pm i(\sqrt{۳}/۲)]$ را به‌دست می‌دهد.
بنابراین

$$\begin{aligned} a_n &= c_۱[b((۱/۲)+i\sqrt{۳}/۲)]^n + c_۲[b((۱/۲)-i\sqrt{۳}/۲)]^n \\ &= b^n[c_۱(\cos(\pi/۳)+i\sin(\pi/۳))^n + c_۲(\cos(\pi/۳)-i\sin(\pi/۳))^n] \\ &= b^n[k_۱\cos(n\pi/۳)+k_۲\sin(n\pi/۳)] \end{aligned}$$

$b = a_۱ = b[k_۱\cos(\pi/۳) + k_۲\sin(\pi/۳)]$. لذا $۱ = k_۱(۱/۲) + k_۲(\sqrt{۳}/۲)$، یا $k_۱ + \sqrt{۳}k_۲ = ۲$.

$\circ = a_{\text{۲}} = b^{\text{۲}}[k_{\text{۱}}\cos(\text{۲}\pi/\text{۳}) + k_{\text{۲}}\sin(\text{۲}\pi/\text{۳})]$، لذا $\circ = (k_{\text{۱}})(-\text{۱}/\text{۲}) + k_{\text{۲}}(\sqrt{\text{۳}}/\text{۲})$ یا $k_{\text{۱}} = \sqrt{\text{۳}}k_{\text{۲}}$.

لذا، $k_{\text{۱}} = \text{۱}$، $k_{\text{۲}} = \text{۱}/\sqrt{\text{۳}}$، و مقدار D_n عبارت است از

$$b^n[\cos(n\pi/\text{۳}) + (\text{۱}/\sqrt{\text{۳}})\sin(n\pi/\text{۳})]$$

□

وقتی مسأله ریشه‌های چندگانه دارد.

حالت (ج): (ریشه‌های حقیقی تکراری)

مثال ۱۸.۱۰ رابطهٔ بازگشتی $a_{n+\text{۲}} = \text{۴}a_{n+\text{۱}} - \text{۴}a_n$ را که در آن $n \geq \circ$ و $a_\circ = \text{۱}$، $a_{\text{۱}} = \text{۳}$، حل کنید.

مانند دو حالت دیگر، قرار می‌دهیم $a_n = cr^n$ که در آن $c, r \neq \circ$ و $n \geq \circ$. در این صورت معادلهٔ مشخصه $r^{\text{۲}} - \text{۴}r + \text{۴} = \circ$ است و ریشه‌های مشخصه هر دو $r = \text{۲}$ هستند. ($r = \text{۲}$ را «ریشه‌ای با چندگانگی ۲» می‌نامند.) متأسفانه دیگر دو جواب مستقل نیستند؛ ۲^n و ۲^n قطعاً مضربی از یکدیگرند. به جواب (مستقل) دیگری نیاز داریم. $n(\text{۲}^n)$ را آزمایش می‌کنیم.

با قراردادن $a_n = n(\text{۲}^n)$ در رابطهٔ مفروض نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\text{۴}a_{n+\text{۱}} - \text{۴}a_n &= \text{۴}(n+\text{۱})\text{۲}^{n+\text{۱}} - \text{۴}n\text{۲}^n = \text{۲}(n+\text{۱})\text{۲}^{n+\text{۲}} - n\text{۲}^{n+\text{۲}} \\ &= [\text{۲}n+\text{۲}-n]\text{۲}^{n+\text{۲}} = (n+\text{۲})\text{۲}^{n+\text{۲}} = a_{n+\text{۲}}\end{aligned}$$

لذا، $n(\text{۲}^n)$ دومین جواب مستقل است. (این جواب مستقل است زیرا ممکن نیست که اگر k ثابت باشد برای همهٔ مقادیر $n \geq \circ$ داشته باشیم $n\text{۲}^n = k\text{۲}^n$.)

جواب عمومی به‌صورت

$$a_n = c_{\text{۱}}(\text{۲}^n) + c_{\text{۲}}n(\text{۲}^n)$$

است. با $a_\circ = \text{۱}$، $a_{\text{۱}} = \text{۳}$ به‌دست می‌آوریم

$$a_n = \text{۲}^n + (\text{۱}/\text{۲})n(\text{۲}^n) = \text{۲}^n + n(\text{۲}^{n-\text{۱}}),\quad n \geq \circ$$

□

به‌طور کلی، اگر رابطهٔ $c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \cdots + c_{n-k} a_{n-k} = 0$ با ثابتهای حقیقی $c_n(\neq 0)$، c_{n-1}، … ، $c_{n-k}(\neq 0)$، و ریشهٔ مشخصهٔ r با چندگانگی m، که در آن، $2 \leq m \leq k$، برقرار باشد، آن‌گاه آن قسمت جواب عمومی که متضمن ریشهٔ r است دارای صورت زیر است

$$\begin{aligned} &A_0 r^n + A_1 n r^n + A_2 n^2 r^n + \cdots + A_{m-1} n^{m-1} r^n \\ &\qquad = (A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \cdots + A_{m-1} n^{m-1}) r^n \end{aligned}$$

که در آن A_0، A_1، A_2، … ، A_{m-1} ثابتهایی دلخواه‌اند.

آخرین مثال شامل کمی احتمال است.

مثال ۱۹.۱۰ اگر اولین مورد سرخجه در مدرسه‌ای ثبت شود، فرض کنید p_n معرف احتمال آن باشد که لااقل بیش از یک مورد در طول n هفته بعد از ثبت اولین مورد، گزارش شود. ثبت موردها از طرف مدرسه گواه بر این است که $p_n = p_{n-1} - (0/25) p_{n-2}$، که در آن $n \geq 2$. چون $p_0 = 0$ و $p_1 = 1$، اگر اولین مورد (از بروز جدید) در دوشنبهٔ، اول مارس ۱۹۸۲ ثبت شود، چه موقع احتمال وقوع موردی جدید به کمتر از ۰٫۰۱ برای اولین بار کاهش می‌یابد؟

با $p_n = cr^n$ به‌ازای $r, c \neq 0$، معادلهٔ مشخصه برای این رابطهٔ بازگشتی به‌صورت $r^2 - r + (1/4) = 0 = (r - (1/2))^2$ است. جواب عمومی چنین است

$$p_n = (c_1 + c_2 n)(1/2)^n, \quad n \geq 0$$

به‌ازای $p_0 = 0$، $p_1 = 1$ به‌دست می‌آوریم $c_1 = 0$، $c_2 = 2$، لذا $p_n = n 2^{-n+1}$، $n \geq 0$.

اولین عدد صحیح n که به‌ازای آن $p_n < 0/01$، برابر ۱۲ است. بنابراین، تا هفتهٔ ۱۶ مه ۱۹۸۲ طول می‌کشد تا احتمال وقوع مورد جدید دیگری کمتر از ۰٫۰۱ شود. □

تمرینهای ۲.۱۰

۱. رابطه‌های بازگشتی زیر را حلّ کنید. (جوابهای نهایی نباید شامل اعداد مختلط باشند.)

الف) $a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2}$، $n \geq 2$، $a_0 = 1$، $a_1 = 3$

ب) $2a_{n+2} - 11a_{n+1} + 5a_n = 0$، $n \geq 0$، $a_0 = 2$، $a_1 = -8$

ج) $3a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$، $n \geq 1$، $a_0 = 7$، $a_1 = 3$

د) $a_{n+2} + a_n = 0$، $n \geq 0$، $a_0 = 0$، $a_1 = 3$

ه) $a_{n+2} + 4a_n = 0$، $n \geq 0$، $a_0 = a_1 = 1$

و) $a_n - ۶a_{n-۱} + ۹a_{n-۲} = ۰$، $n \geq ۲$، $a_۰ = ۵$، $a_۱ = ۱۲$

ز) $a_n + ۲a_{n-۱} + ۲a_{n-۲} = ۰$، $n \geq ۲$، $a_۰ = ۱$، $a_۱ = ۳$

ح) $a_n = ۷a_{n-۱} - ۱۰a_{n-۲}$، $n \geq ۲$، $a_۰ = ۳$، $a_۱ = ۱۵$،

ط) $۹a_{n+۲} + ۱۲a_{n+۱} + ۴a_n = ۰$، $n \geq ۰$، $a_۰ = ۱$، $a_۱ = ۴$

ی) $a_n = ۳a_{n-۲} + ۲a_{n-۳}$، $n \geq ۳$، $a_۰ = ۱$، $a_۱ = ۳$، $a_۲ = ۷$

۲. الف) در مثالهای ۱۱.۱۰ و ۱۸.۱۰ درستی جواب نهایی را تحقیق کنید.

ب) رابطهٔ بازگشتی مثال ۱۳.۱۰ را حل کنید.

۳. اگر $a_۰ = ۰$، $a_۱ = ۱$، $a_۲ = ۴$، و $a_۳ = ۳۷$ در رابطهٔ بازگشتی

$$a_{n+۲} + ba_{n+۱} + ca_n = ۰, \quad n \geq ۰$$

که در آن b و c مقادیر ثابتی هستند، صدق کنند این رابطه را برحسب a_n حل کنید.

۴. برای تعداد راههای پارک کردن موتورسیکلتها و اتومبیلهای کوچک در ردیفی با n جای پارک، به شرط اینکه هر موتور به یک جا و هر ماشین به ۲ جا برای پارک نیاز داشته باشد، رابطه‌ای بازگشتی بیابید و آن را حلّ کنید. (تمام موتورها و همین‌طور ماشینها ظاهراً همانندند و مایلیم از همهٔ n جا استفاده کنیم.)

۵. در دنبالهٔ فیبوناتچی‌داریم؛ $F_n = F_{n+۲} - F_{n+۱}$، به‌ازای $n \geq ۰$. بنابراین بعد از جمع‌کردن معادله‌های

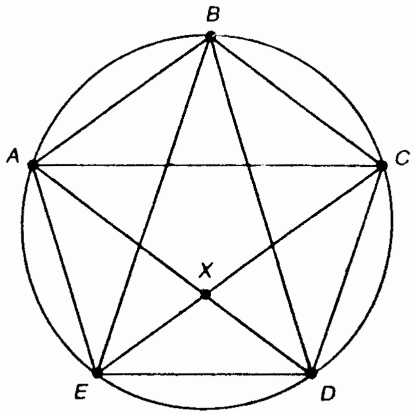
$$\begin{aligned}
F_۰ &= F_۲ - F_۱ \\
F_۱ &= F_۳ - F_۲ \\
F_۲ &= F_۴ - F_۳ \\
\cdots &\quad \cdots \quad \cdots \\
F_n &= F_{n+۲} - F_{n+۱}
\end{aligned}$$

به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{i=۰}^{n} F_i = F_{n+۲} - F_۱ = F_{n+۲} - ۱$$

این یکی از ویژگیهای بسیاری است که فرانسوا لوکا(۱۸۴۲ـ۱۸۹۱) کشف کرده است. ویژگیهای دیگر زیر را ثابت کنید

الف) $F_۱ + F_۳ + F_۵ + \cdots + F_{۲n-۱} = F_{۲n}$، $n \geq ۱$



شکل ۶.۱۰

ب) $F_\circ + F_۲ + F_۴ + \cdots + F_{۲n} = F_{۲n+۱} - ۱$، $n \geq \circ$

ج) $F_\circ + F_۱ - F_۲ + F_۳ - F_۴ + \cdots + F_{۲n-۱} - F_{۲n} = -F_{۲n-۱} + ۱$، $n \geq ۱$

۶. **الف)** ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+۱}}{F_n} = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

(این حد به نسبت زرین مشهور شده است.)

ب) پنج‌ضلعی منتظم $ABCDE$ محاط در دایره‌ای را، به‌صورتی که در شکل ۶.۱۰ نشان داده‌ایم، در نظر بگیرید.

(i) با استفاده از قانون سینوسها و فرمول سینوس دو برابر یک زاویه، ثابت کنید $\frac{AC}{AX} = ۲\cos ۳۶^\circ$.

(ii) چون $\cos ۱۸^\circ = \sin ۷۲^\circ = ۴ \sin ۱۸^\circ \cos ۱۸^\circ (۱ - ۲\sin^۲ ۱۸^\circ)$ (چرا؟) نشان دهید که $\sin ۱۸^\circ$ ریشه‌ای از معادلهٔ چند جمله‌ای $۸x^۳ - ۴x + ۱ = \circ$ است، و نتیجه بگیرید که $\sin ۱۸^\circ = (\sqrt{۵} - ۱)/۴$.

ج) تحقیق کنید که $AC/AX = (۱ + \sqrt{۵})/۲$.

۷. برای $n \geq \circ$، فرض کنید a_n تعداد راههای شمارش دنباله‌ای از ۱ ها و ۲ هاست که مجموع آنها n است. مثلاً $a_۳ = ۳$ زیرا (۱) ۱, ۱, ۱؛ (۲) ۲, ۱؛ و (۳) ۱, ۲ دارای حاصلجمع ۳ هستند. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید و آن را حل کنید.

۸. برای تعداد دنباله‌های n رقمی از سه‌تایی (۲، ۱، ۰) بدون دو ۰ متوالی، رابطه‌ای بازگشتی بیابید و آن را حل کنید.

۹. *

* این تمرین حذف شده‌است. ـ م.

۱۰. برای $n \geq 1$، فرض کنید a_n تعداد راههایی است که می‌توانیم n را به‌صورت مجموع مرتب اعداد صحیح مثبتی بنویسیم که در آنها هر جمعوند حداقل ۲ باشد. (مثلاً $a_5 = 3$، زیرا در اینجا ممکن است ۵ را با ۵، با $3 + 2$، و با $2 + 3$ نمایش داد.) رابطهٔ بازگشتی برای a_n بیابید و آن‌را حل کنید.

۱۱. ذره‌ای به‌صورت افقی به‌طرف راست حرکت می‌کند. برای $n \in \mathbf{Z}^+$، فاصلهٔ جابه‌جایی ذره در ثانیهٔ $(n+1)$ام دو برابر فاصله‌ای است که در ثانیهٔ nام می‌پیماید. اگر x_n، $n \geq 0$، معرف وضعیت ذره در شروع ثانیهٔ $(n+1)$ام باشد، برای x_n، که در آن $x_0 = 1$ و $x_1 = 5$، رابطه‌ای بازگشتی بیابید و آن را حل کنید.

۱۲. برای $n \geq 1$، فرض کنید D_n دترمینان $n \times n$ زیر باشد

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

برای مقدار D_n رابطه‌ای بازگشتی بیابید و آن را حل کنید.

۱۳. رابطهٔ بازگشتی $a_{n+2}^2 - 5a_{n+1}^2 + 4a_n^2 = 0$ را که در آن $n \geq 0$ و $a_0 = 4$، $a_1 = 13$، حلّ کنید.

۱۴. اگر $a_n = c_1 + c_2(7^n)$، $n \geq 0$، جواب عمومی رابطهٔ $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = 0, n \geq 0$ باشد ثابتهای b و a را تعیین کنید.

۱۵. ثابت کنید هر دو عدد متوالی فیبوناتچی نسبت به هم اول‌اند.

۱۶. برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید) که تعیین کند آیا عدد صحیح نامنفی مفروضی عدد فیبوناتچی هست یا نیست.

۳.۱۰ رابطهٔ بازگشتی ناهمگن

اینک به رابطه‌های بازگشتی

$$a_n + ca_{n-1} = f(n), \qquad n \geq 1 \qquad (1)$$

$$a_n + ba_{n-1} + ca_{n-2} = f(n), \qquad n \geq 2 \qquad (2)$$

برمی‌گردیم که در آنها b و c ثابت‌اند، $c \neq ۰$، و $f(n)$ برابر با ۰ نیست.
گرچه روشی کلی برای حل همهٔ رابطه‌های ناهمگن وجود ندارد، ولی وقتی تابع $f(n)$ صورتی معین داشته باشد تکنیکی موفقیت‌آمیز به‌دست خواهیم آورد
مسأله را با حالت خاص معادلهٔ (۱) وقتی $c = -۱$، شروع می‌کنیم.
برای رابطهٔ ناهمگن $a_n - a_{n-۱} = f(n)$، داریم

$$\begin{aligned}
a_۱ &= a_۰ + f(۱)\\
a_۲ &= a_۱ + f(۲) = a_۰ + f(۱) + f(۲)\\
a_۳ &= a_۲ + f(۳) = a_۰ + f(۱) + f(۲) + f(۳)\\
&\vdots\\
a_n &= a_۰ + f(۱) + \cdots + f(n) = a_۰ + \sum_{i=۱}^{n} f(i)
\end{aligned}$$

این نوع رابطه را می‌توانیم برحسب $\sum_{i=۱}^{n} f(i)$ حل کنیم، به شرط آنکه بتوانیم فرمول مجموعیابی مناسبی از روی کارهای قبلی به‌دست آوریم.

مثال ۲۰.۱۰ رابطهٔ بازگشتی $a_n - a_{n-۱} = ۳n^۲$ را که در آن $n \geq ۱$ و $a_۰ = ۷$، حل کنید.
در اینجا $f(n) = ۳n^۲$، پس جواب عمومی چنین است

$$a_n = a_۰ + \sum_{i=۱}^{n} f(i) = ۷ + ۳\sum_{i=۱}^{n} i^۲ = ۷ + \frac{۱}{۲}(n)(n+۱)(۲n+۱)$$
□

وقتی فرمولی برای مجموعیابی در دست نباشد، به شیوهٔ زیر، می‌توان با معادلهٔ (۱)، صرف‌نظر از مقدار c($c \neq ۰$)، کار کرد. این شیوه برای رابطهٔ ناهمگن مرتبهٔ دوم معادلهٔ (۲)، برای برخی از تابعهای $f(n)$ نیز کاراست. این شیوه که به روش ضریبهای نامعین معروف است بر رابطهٔ همگنی متّکی است که از قرار دادن ۰ به‌جای $f(n)$ به‌دست می‌آید.
چه برای معادلهٔ (۱) و چه برای معادلهٔ (۲)، فرض می‌کنیم $a_n^{(h)}$ معرف جواب عمومی رابطهٔ همگن مربوط باشد، و فرض می‌کنیم $a_n^{(p)}$ جواب رابطهٔ ناهمگن مفروض است. جملهٔ $a_n^{(p)}$ را جواب خصوصی می‌نامند. پس $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ جواب عمومی رابطهٔ مفروض است. برای به‌دست آوردن $a_n^{(p)}$ صورتی از $f(n)$ را به‌کار می‌بریم که صورتی از $a_n^{(p)}$ را به ذهن القا می‌کند.

مثال ۲۱.۱۰ رابطهٔ بازگشتی $a_n - ۳a_{n-۱} = ۵(۷^n)$ را، که در آن $n \geq ۱$، و $a_۰ = ۲$، حل کنید.
جواب رابطهٔ همگن مربوط $a_n^{(h)} = c(۳^n)$ است. چون $f(n) = ۵(۷^n)$، یک جواب خصوصی $a_n^{(p)}$ را که به‌صورت $A(۷^n)$ است حستجو می‌کنیم. و چون $a_n^{(p)}$ جواب رابطهٔ ناهمگن

مفروض است، $a_n^{(p)} = A(۷^n)$ را در رابطهٔ مفروض قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم که، $A(۷^n) - ۳A(۷^{n-۱}) = ۵(۷^n)$، $n \geq ۱$. با تقسیم این برابری بر $۷^{n-۱}$، به‌دست می‌آوریم که $۷A - ۳A = ۵(۷)$، پس $A = \frac{۳۵}{۴}$، و $a_n^{(p)} = (۳۵/۴)۷^n = (۵/۴)۷^{n+۱}$، $n \geq ۰$. جواب عمومی، $a_n = c(۳^n) + (۵/۴)۷^{n+۱}$ است. با $۲ = a_۰ = c + (۵/۴)(۷)$، داریم $c = \frac{-۲۷}{۴}$ و

$$a_n = (۵/۴)(۷^{n+۱}) - (۱/۴)(۳^{n+۳}), \quad n \geq ۰$$

□

مثال ۲۲.۱۰ رابطهٔ بازگشتی $a_n - ۳a_{n-۱} = ۵(۳^n)$ را که در آن $n \geq ۱$، و $a_۰ = ۲$، حل کنید.

نظیر مثال ۲۱.۱۰، $a_n^{(h)} = c(۳^n)$، امّا در اینجا، $a_n^{(h)}$ و $f(n)$ به‌صورت خطی مستقل نیستند. در نتیجه یک جواب خصوصی $a_n^{(p)}$ از صورت $Bn(۳^n)$ را در نظر می‌گیریم. (اگر $a_n^{(p)} = B(۳^n)$ را در رابطهٔ مفروض قرار دهیم چه پیش می‌آید؟)

از قراردادن $a_n^{(p)} = Bn(۳^n)$ در رابطهٔ مفروض، نتیجه می‌شود

$$Bn(۳^n) - ۳B(n-۱)(۳^{n-۱}) = ۵(۳^n)$$

یا $Bn - B(n-۱) = ۵$، پس $B = ۵$.

بنابراین، $n \geq ۰$، $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = (c + ۵n)۳^n$. با $a_۰ = ۲$، جواب عمومی چنین است

$$a_n = (۲ + ۵n)(۳^n)$$

□

با استفاده از این دو مثال، مطلب را به‌صورت زیر تعمیم می‌دهیم.

اگر در رابطهٔ مرتبهٔ اوّل، $f(n) = k(r^n)$، k ثابت، $n \geq ۰$، آن‌گاه اگر r^n یک جواب رابطهٔ همگن مربوط نباشد، $a_n^{(p)} = Ar^n$. وقتی چنین است، $a_n^{(p)} = Bnr^n$.

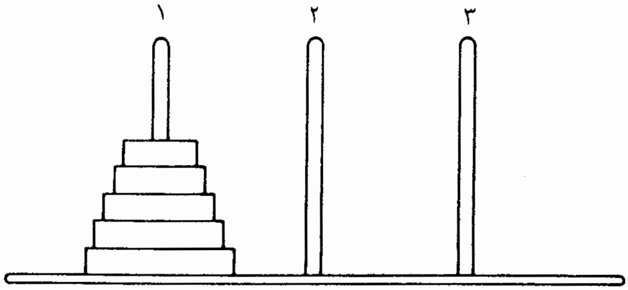
برای رابطهٔ مرتبهٔ دوم، اگر $f(n) = k(r^n)$، آن‌گاه

الف) $a_n^{(p)} = Ar^n$، اگر r^n یک جواب همگن نباشد.

ب) $a_n^{(p)} = Bnr^n$، اگر $a_n^{(h)} = c_۱r^n + c_۲r_۱^n$ که در آن $r \neq r_۱$.

ج) $a_n^{(p)} = Cn^۲r^n$، اگر $a_n^{(h)} = (c_۱ + c_۲n)r^n$.

مثال ۲۳.۱۰ (برجهای هانوی) n قرص مدور را با سوراخهایی در مرکز آنها در نظر بگیرید. این قرصها را می‌توان مطابق شکل ۷.۱۰ بر یکی از سه میله روی هم چید. در این شکل $n = ۵$ و



شکل ۷.۱۰

قرصها بر میلهٔ ۱ روی هم چیده شده‌اند و هیچ قرصی روی قرص کوچکتر از خود نیست. هدف، انتقال یک به یک قرصهاست به قسمی که قرصها بر میلهٔ ۳ وضعی مثل وضع اولیه را داشته باشند. از میلهٔ ۲ می‌توان به‌عنوان مکانی موقت برای هر قرص (چند قرص) استفاده کرد، امّا در هیچ زمانی نباید قرصی بزرگتر روی قرصی کوچکتر قرار گیرد. چند جابه‌جایی برای انجام این‌کار با n قرص، لازم است؟

برای $n \geq \circ$، فرض کنید a_n تعداد جابه‌جایی لازم برای انتقال n قرص از میلهٔ ۱ به میلهٔ ۳ با روش مذکور باشد. در این صورت برای $n + ۱$ قرص به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) n قرص رویی میلهٔ ۱ را با استفاده از میلهٔ ۳ به‌عنوان مکان موقت، به میلهٔ ۲ منتقل می‌کنیم. این کار به n گام نیاز دارد.

ب) بزرگترین قرص را از میلهٔ ۱ به میلهٔ ۳ منتقل می‌کنیم. این عمل به ۱ گام نیاز دارد.

ج) سرانجام با استفاده از میلهٔ ۱ به‌عنوان مکان موقت، n قرص بر میلهٔ ۲ را روی بزرگترین قرص که فعلاً بر میلهٔ ۳ چیده شده است منتقل می‌کنیم. این کار مستلزم a_n جابه‌جایی دیگر است.

این نتایج، رابطهٔ $a_{n+۱} = ۲a_n + ۱$ را به‌دست می‌دهد که در آن $n \geq \circ$ و $a_\circ = \circ$.

برای $a_{n+۱} - ۲a_n = ۱$، $a_n^{(h)} = c(۲^n)$. چون $f(n) = ۱$ یک جواب معادلهٔ $a_{n+۱} - ۲a_n = \circ$ نیست، قرار می‌دهیم $a_n^{(p)} = A(۱)^n = A$ و از رابطهٔ مفروض به‌دست می‌آوریم که $A = ۲A + ۱$، پس $A = -۱$ و $a_n = c(۲^n) - ۱$. از $a_\circ = \circ = c - ۱$ نتیجه می‌گیریم که $c = ۱$ و $a_n = ۲^n - ۱$، $n \geq \circ$. □

مثال بعد از ریاضیات مربوط به امور مالی حاصل می‌شود.

مثال ۲۴.۱۰ شخصی S دلار وام گرفته است که باید در T دورهٔ زمانی آن را بازپرداخت کند. اگر i نرخ سود در هر دورهٔ وام باشد چه مبلغ P (ثابت) در پایان هر دوره باید بپردازد؟

فرض می‌کنیم a_n مبلغ وامی باشد که در پایان دورهٔ nام (بعد از پرداخت nام) هنوز بدهکار

است. پس

$$a_{n+1} = a_n + ia_n - P, \quad 0 \le n \le T-1, \quad a_0 = S, \quad a_T = 0$$

برای این رابطه، $a_n^{(h)} = c(1+i)^n$، در حالی‌که $a_n^{(p)} = A$، زیرا $-P$ یک جواب رابطهٔ همگن مربوط نیست. با قراردادن $a_n^{(p)} = A$ به‌دست می‌آوریم $A - (1+i)A = -P$، پس $A = P/i$. از $a_0 = S$ به‌دست می‌آوریم

$$a_n = (S - (P/i))(1+i)^n + (P/i), \quad 0 \le n \le T$$

چون $0 = a_T = (S - (P/i))(1+i)^T + (P/i)$، از اینجا نتیجه می‌شود که

$$(P/i) = ((P/i) - S)(1+i)^T \quad \text{و} \quad P = (Si)[1 - (1+i)^{-T}]^{-1}, \qquad \square$$

اینک مسأله‌ای را در تحلیل الگوریتمها بررسی می‌کنیم.

مثال ۲۵.۱۰ برای $n \ge 1$، فرض کنید S، مجموعه‌ای شامل 2^n عدد حقیقی است.
برای تعیین ماکسیمم و مینیمم عنصرهای S، شیوهٔ زیر به‌کار برده شده است. می‌خواهیم تعداد مقایسه‌هایی را تعیین کنیم که بین جفتهای عناصر S در طول اجرای این شیوه انجام می‌گیرند.
اگر a_n معرف تعداد مقایسه‌های لازم باشد، آن‌گاه $a_1 = 1$. وقتی $n = 2$، $|S| = 2^2 = 4$، پس $S = \{x_1, x_2, y_1, y_2\} = S_1 \cup S_2$ که در آن $S_1 = \{x_1, x_2\}$ و $S_2 = \{y_1, y_2\}$. چون $a_1 = 1$، یک مقایسه برای تعیین عنصرهای ماکسیمم و مینیمم S_1 و S_2 لازم است. از مقایسهٔ عنصرهای مینیمم S_1 و S_2 و سپس عنصرهای ماکسیمم، از عنصرهای ماکسیمم و مینیمم S آگاه می‌شویم و به‌دست می‌آوریم که $a_2 = 4 = 2a_1 + 2$. به‌طور کلی، اگر $|S| = 2^{n+1}$، می‌نویسیم $S = S_1 \cup S_2$ که در آن $|S_1| = |S_2| = 2^n$. برای تعیین عنصرهای ماکسیمم و مینیمم در هر یک از مجموعه‌های S_1 و S_2 به a_n مقایسه نیاز است. مقایسهٔ عناصر ماکسیمم (مینیمم) S_1 و S_2 یک مقایسهٔ اضافی لازم دارد؛ بنابراین، $a_{n+1} = 2a_n + 2$، $n \ge 1$.
در اینجا $a_n^{(h)} = c(2^n)$ و $a_n^{(p)} = A$، که A مقداری ثابت است. با قراردادن $a_n^{(p)}$ در این رابطه، به‌دست می‌آوریم $A = 2A + 2$، یا $A = -2$. بنابراین $a_n = c2^n - 2$، و با $a_1 = 1 = 2c - 2$، به‌دست می‌آوریم $c = 3/2$. بنابراین، $a_n = (3/2)(2^n) - 2$.
توجه! وجود این شیوه، که مستلزم $(3/2)(2^n) - 2$ مقایسه است، احتمال این را که از راه دیگر بتوانیم با روش داهیانه‌یی که نیاز به مقایسه‌هایی کمتر داشته باشد به همین نتیجه برسیم، منتفی نمی‌کند. $\square$

آخرین مثال، با رابطهٔ مرتبهٔ دوم سروکار دارد.

مثال ۲۶.۱۰ آمارهای محیطی نشان می‌دهند که در دریاچه‌ای جمعیت نوعی خاص از حلزون با نرخی سه برابر نرخ سال قبل افزایش یافته است. با ۳۰۰۰ حلزون از این نوع شروع می‌کنیم و سال بعد ۳۵۰۰ حلزون می‌یابیم. ۲۰۰ حلزون از این دریاچه برمی‌داریم تا افزایش آنها را در دریاچه‌ای دیگر به‌دست آوریم. به برداشتن ۲۰۰ حلزون در انتهای هر سال ادامه می‌دهیم. اگر a_n معرف جمعیت حلزونها در دریاچهٔ اصلی پس از n سال باشد، رابطه‌ای بازگشتی برای a_n، $n \geq ۰$، بیابید و آن را حل کنید.

در اینجا، $(a_{n+۲} - a_{n+۱}) = ۳(a_{n+۱} - a_n) - ۲۰۰$، $n \geq ۰$. این رابطه، رابطهٔ مرتبهٔ دوم $a_{n+۲} - ۴a_{n+۱} + ۳a_n = -۲۰۰$ را نتیجه می‌دهد که برای آن

$$a_n^{(h)} = c_۱(۳^n) + c_۲(۱^n) = c_۱(۳^n) + c_۲$$

چون $f(n) = -۲۰۰ = -۲۰۰(۱^n)$ یک جواب رابطهٔ همگن مربوط است، در اینجا به‌ازای Aی ثابت، $a_n^{(p)} = An$. این، ما را به رابطهٔ

$$A(n+۲) - ۴A(n+۱) + ۳An = -۲۰۰$$

هدایت می‌کند. پس $-۲A = -۲۰۰$، $A = ۱۰۰$.

بنابراین، $a_n = c_۱(۳^n) + c_۲ + ۱۰۰n$. با $a_۰ = ۳۰۰۰$ و $a_۱ = ۳۵۰۰ - ۲۰۰ = ۳۳۰۰$، داریم

$$a_n = ۱۰۰(۳^n) + ۲۹۰۰ + ۱۰۰n, \quad n \geq ۰$$

□

به این بخش با خلاصه‌ای شامل نتایج مثالهای ۲۱.۱۰ تا ۲۶.۱۰ خاتمه می‌دهیم.

برای رابطهٔ بازگشتی ناهمگن خطی (با ضریبهای ثابت) به‌صورت

$$c_n a_n + c_{n-۱} a_{n-۱} + \cdots + c_{n-k} a_{n-k} = f(n)$$

که در آن $c_n, c_{n-k} \neq ۰$، فرض کنید $a_n^{(h)}$ معرف قسمت همگن جواب a_n باشد.

۱. اگر $f(n)$ مضرب ثابتی از یکی از صورتهای جدول ۲.۱۰ باشد و یک جواب رابطهٔ همگن مربوط نباشد، آن‌گاه $a_n^{(p)}$ به‌صورتی است که در جدول ۲.۱۰ نشان داده‌ایم. (در اینجا A، B، $A_۰$، $A_۱$، $A_۲$، ...، $A_{t-۱}$، A_t ثابتهایی هستند که به‌وسیلهٔ قراردادن $a_n^{(p)}$ در رابطهٔ مفروض تعیین می‌شوند؛ t، r، و α نیز ثابت هستند.)

۲. وقتی $f(n)$ متشکّل از مجموع مضارب جملاتی نظیر آنهایی باشد که در جدول برای قسمت (۱) در بالا، نشان داده‌ایم، آن‌گاه $a_n^{(p)}$ از مجموع جملات متناظر ستونی که سر ستون آن $a_n^{(p)}$ است

جدول ۲.۱۰

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
ثابت c, a	ثابت A, a
n	$A_1 n + A_0$
n^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
$n^t, t \in \mathbf{Z}^+$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \cdots + A_1 n + A_0$
$r^n, r \in \mathbf{R}$	$A r^n$
$\sin \alpha n$	$A \sin \alpha n + B \cos \alpha n$
$\cos \alpha n$	$A \sin \alpha n + B \cos \alpha n$
$n^t r^n$	$r^n (A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \cdots + A_1 n + A_0)$
$r^n \sin \alpha n$	$A r^n \sin \alpha n + B r^n \cos \alpha n$
$r^n \cos \alpha n$	$A r^n \sin \alpha n + B r^n \cos \alpha n$

ساخته می‌شود. مثلاً، اگر $f(n) = n^3 + 3 \sin 2n$، و هیچ‌یک از جمعوندهای $f(n)$ جواب رابطهٔ همگن مربوط نباشد، آن‌گاه $a_n^{(p)} = (A_2 n^2 + A_1 n + A_0) + (A \sin 2n + B \cos 2n)$.

۳. اگر جمعوند $f_1(n)$ در $f(n)$ مضربی ثابت از جواب رابطهٔ همگن مربوط باشد، حل مسأله با ترفند بیشتری همراه است. این حالت، مثلاً، وقتی رخ می‌دهد که $f(n)$ شامل جمعوندهایی نظیر cr^n یا $(c_1 + c_2 n) r^n$ باشد که r ریشهٔ مشخصه است. اگر $f_1(n)$ چنین مسأله‌ای را به‌وجود آورد، جواب خصوصی $a_{n_1}^{(p)}$ متناظر با $f_1(n)$ را در کمترین توان n، مثلاً n^s، که برای آن هیچ جمعوند $n^s f_1(n)$ یک جواب رابطهٔ همگن مربوط نیست، ضرب می‌کنیم. در این‌صورت $n^s a_{n_1}^{(p)}$ قسمت متناظر با $a_n^{(p)}$ است.

تمرینهای ۳.۱۰

۱. هریک از رابطه‌های بازگشتی زیر را حل کنید.

الف) $a_{n+1} - a_n = 2n + 3$، $n \geq 0$، $a_0 = 1$

ب) $a_{n+1} - a_n = 3n^2 - n$، $n \geq 0$، $a_0 = 3$

ج) $a_{n+1} - 2a_n = 5$، $n \geq 0$، $a_0 = 1$

د) $a_{n+1} - 2a_n = 2^n$، $n \geq 0$، $a_0 = 1$

۲. رابطه‌ای بازگشتی به‌کار برید تا فرمولی برای $\sum_{i=0}^{n} i^2$ به‌دست آورید.

۳. الف) فرض کنید n خط در صفحه‌ای چنان رسم شوند که هر خط همهٔ خطوط دیگر را قطع کند ولی هیچ سه خطی متقارب نباشند. به‌ازای $n \geq 0$، فرض کنید a_n تعداد ناحیه‌هایی باشد که به‌وسیلهٔ n خط از صفحه جدا می‌شوند. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید و آن را حل کنید.

ب) برای جواب قسمت (الف)، فرض کنید b_n تعداد ناحیه‌های نامتناهی حاصل باشد. رابطه‌ای بازگشتی برای b_n بیابید و آن را حل کنید.

۴. در روز اول سال نو، شخصی مبلغ ۱۰۰۰ دلار به حسابی می‌گذارد که بهرهٔ مرکب ماهیانهٔ آن ۶٪ است. در آغاز هر ماه ۲۰۰ دلار به این حساب اضافه می‌کند. اگر وی تا چهار سال بعد به این کار ادامه دهد (به قسمی که ۴۷ سپردهٔ ۲۰۰ دلاری اضافه کند)، در حساب او، دقیقاً ۴ سال پس از افتتاح حساب، چه مبلغی موجود خواهد بود؟

۵. رابطه‌های بازگشتی زیر را حل کنید

الف) $a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 3^n$، $n \geq 0$، $a_0 = 0$، $a_1 = 1$

ب) $a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n = 7$، $n \geq 0$، $a_0 = 1$، $a_1 = 2$

ج) $a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n = n^2$، $n \geq 0$، $a_0 = 0$، $a_1 = 2$

د) $a_{n+2} - a_n = \sin(n\pi/2)$، $n \geq 0$، $a_0 = 1$، $a_1 = 1$

۶. رابطهٔ بازگشتی $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 3(2^n) + 7(3^n)$ را که در آن، $n \geq 0$، و $a_0 = 1$، $a_1 = 4$، حل کنید.

۷. رابطهٔ بازگشتی $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 3 + 5n$، $n \geq 0$ را حل کنید.

۸. تعداد دنباله‌های n رقمی مرکب از ارقام چهارتایی $(0, 1, 2, 3)$ را که در آنها هیچوقت ۳ در سمت راست ۰ نباشد تعیین کنید.

۹. مریم ۲۵۰۰ دلار با بهرهٔ مرکب ماهیانهٔ ۱۲٪ وام می‌گیرد تا کامپیوتری بخرد. اگر قرار باشد که این وام دو ساله پس داده شود مبلغ پرداخت ماهیانه چقدر است؟

۱۰. جواب عمومی رابطهٔ بازگشتی $a_{n+2} + b_1a_{n+1} + b_2a_n = b_3n + b_4$، $n \geq 0$ با b_iهای ثابت به‌ازای $1 \leq i \leq 4$، به‌صورت $c_1 2^n + c_2 3^n + n - 7$ است. برای هر $1 \leq i \leq 4$، b_i را بیابید.

۱۱. رابطه‌های بازگشتی زیر را حل کنید.

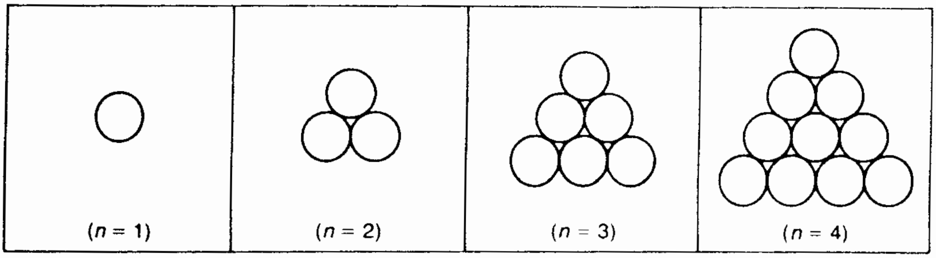
الف) $a_{n+2}^2 - 5a_{n+1}^2 + 6a_n^2 = 7n$، $n \geq 0$، $a_0 = a_1 = 1$

ب) $a_n + na_{n-1} = n!$، $n \geq 1$، $a_0 = 1$

ج) $a_n^2 - 2a_{n-1} = 0$، $n \geq 1$، $a_0 = 2$ (قرار دهید $b_n = \log_2 a_n$، $n \geq 0$.)

۱۲. الف) برای $n \geq 1$، nامین عدد مثلثی t_n به‌وسیلهٔ $t_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ تعریف می‌شود. برای $n \geq 1$، s_n با $s_n = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$، که مجموع اولین n عدد مثلثی است، رابطه‌ای بازگشتی بیابید و آن را حل کنید.

ب) در آزمایشگاه شیمی آلی، کاظم ساختار بلورینی را به‌صورت سنتز از ۱۰۰۰۰۰۰۰ لایهٔ مثلثی از اتمها تهیه کرده است. اولین لایهٔ ساختار، یک اتم دارد، دومین لایه سه اتم، سومین لایه شش اتم و به‌طور کلی nامین لایه $t_n = 1 + 2 + \cdots + n$ اتم دارد. (ممکن است هر لایه را به صورتی در نظر گرفت که این لایه روی فضاهای حاصل بین اتمهای مجاور لایهٔ بعدی به‌دست آیند. شکل ۸.۱۰ را ببینید)



شکل ۸.۱۰

(i) چند اتم در یکی از این ساختارهای بلورین وجود دارد؟

(ii) چند اتم (دقیقاً) بین ۱۰۰۰۰ امین و ۱۰۰۰۰۰ امین لایه انباشته شده‌اند؟

۱۳. برای حل مسألهٔ برجهای هانوی، برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید). برای $n \in \mathbf{Z}^+$، برنامه باید گامهای لازم برای جابه‌جایی n قرص از میلهٔ ۱ به میلهٔ ۳ را، تحت قیدهایی که در مثال ۲۳.۱۰ تصریح شده‌اند، به‌دست دهد.

۴.۱۰ روش تابعهای مولّد

به موازات همهٔ حالتهای مختلفی که ناگزیر برای رابطهٔ بازگشتی خطی ناهمگن در نظر می‌گرفتیم اینک از تابع مولّد کمک می‌گیریم. با این تکنیک هم جوابهای خصوصی و هم جوابهای همگن برای a_n به‌دست می‌آیند، و شرایط اولیه نیز دخالت داده می‌شوند. به‌علاوه قادر خواهیم بود که از این روش حتی بیش از اینها استفاده کنیم.

این تکنیک را در مثالهای زیر نشان خواهیم داد.

مثال ۲۷.۱۰ رابطهٔ $a_n - ۳a_{n-۱} = n$ ، $n \geq ۱$ ، $a_\circ = ۱$ را حل کنید.

این رابطه معرف مجموعه‌ای نامتناهی از معادلات است

$$\begin{array}{ll} (n = ۱) & a - ۳a_\circ = ۱ \\ (n = ۲) & a_۲ - ۳a_۱ = ۲ \\ (n = ۳) & a_۳ - ۳a_۲ = ۳ \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \end{array}$$

از ضرب اولین معادله در x، دومی در $x^۲$، سوّمی در $x^۳$ و ... ، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{array}{ll} (n=۱) & a_۱x^۱ - ۳a_۰x^۱ = ۱x^۱ \\ (n=۲) & a_۲x^۲ - ۳a_۱x^۲ = ۲x^۲ \\ (n=۳) & a_۳x^۳ - ۳a_۲x^۳ = ۳x^۳ \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array}$$

از جمع کردن این مجموعهٔ دوم معادلات به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n x^n - ۳\sum_{n=۱}^{\infty} a_{n-۱}x^n = \sum_{n=۱}^{\infty} nx^n \qquad (۱)$$

می‌خواهیم a_n را برحسب n پیداکنیم. برای انجام این کار، فرض می‌کنیم $f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ تابع مولّد (معمولی) دنبالهٔ $a_۰, a_۱, a_۲, \cdots$ باشد. پس معادلهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت

$$(f(x) - a_۰) - ۳x\sum_{n=۱}^{\infty} a_{n-۱}x^{n-۱} = \sum_{n=۱}^{\infty} nx^n \left(= \sum_{n=۰}^{\infty} nx^n\right) \qquad (۲)$$

نوشت. چون $\sum_{n=۱}^{\infty} a_{n-۱}x^{n-۱} = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n = f(x)$، طرف چپ عادلهٔ (۲) به‌صورت $(f(x) - ۱) - ۳xf(x)$ درمی‌آید.

قبل از اینکه بتوانیم کار را شروع کنیم به تابع مولّد دنبالهٔ $۰, ۱, ۲, ۳, \cdots$ نیاز داریم. با توجه به قسمت (ج) مثال ۵.۹ یادآوری می‌کنیم که

$$\frac{۱}{(۱-x)^۲} = \frac{d}{dx}\left(\frac{۱}{۱-x}\right) = ۱ + ۲x + ۳x^۲ + \cdots$$

بنابراین، $x/(۱-x)^۲ = x + ۲x^۲ + ۳x^۳ + \cdots$، و

$$(f(x) - ۱) - ۳xf(x) = \frac{x}{(۱-x)^۲}$$

پس

$$f(x) = \frac{۱}{(۱-۳x)} + \frac{x}{(۱-x)^۲(۱-۳x)}$$

با استفاده از تجزیهٔ کسر به کسرهای جزئی، به‌دست می‌آوریم که

$$\frac{x}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-3x)}$$

یا

$$x = A(1-x)(1-3x) + B(1-3x) + C(1-x)^2$$

از دادن مقادیر زیر به x، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{array}{ll} (x=1):\ 1 = B(-2), & B = -\frac{1}{2} \\ (x=\frac{1}{3}):\ \frac{1}{3} = C\left(\frac{2}{3}\right)^2, & C = \frac{3}{4} \\ (x=0):\ 0 = A+B+C, & A = -(B+C) = -\frac{1}{4} \end{array}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{(-1/4)}{(1-x)} + \frac{(-1/2)}{(1-x)^2} + \frac{(3/4)}{(1-3x)} \\ &= \frac{(7/4)}{(1-3x)} + \frac{(-1/4)}{(1-x)} + \frac{(-1/2)}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

با تعیین ضریب x^n در هر یک از سه جمعوند بالا، a_n را به‌دست می‌آوریم

الف)

$$\begin{aligned} (7/4)(1-3x) &= (7/4)[1/(1-3x)] \\ &= (7/4)[1+(3x)+(3x)^2+(3x)^3+\cdots] \end{aligned}$$

و ضریب x^n برابر $(7/4)3^n$ است.

ب) $(-1/4)/(1-x) = (-1/4)[1+x+x^2+\cdots]$ و ضریب x^n در اینجا $(-1/4)$ است.

ج)

$$\begin{aligned} (-1/2)/(1-x)^2 &= (-1/2)(1-x)^{-2} \\ &= (-1/2)\left[\binom{-2}{0}+\binom{-2}{1}(-x)+\binom{-2}{2}(-x)^2+\binom{-2}{3}(-x)^3+\cdots\right] \end{aligned}$$

و ضریب x^n برابر است با

$$\left(-\frac{۱}{۲}\right)\binom{-۲}{n}(-۱)^n = \left(-\frac{۱}{۲}\right)(-۱)^n\binom{۲+n-۱}{n}(-۱)^n = \left(-\frac{۱}{۲}\right)(n+۱)$$

بنابراین، $a_n = (۷/۴)۳^n - (۱/۲)n - (۳/۴)$، $n \geq ۰$. (توجه کنید که در اینجا کاری با $a_n^{(p)}$ نداریم.) □

مثال دیگری را در نظر می‌گیریم که با نتیجهٔ آن آشنا هستیم.

مثال ۲۸.۱۰ فرض کنید $n \in \mathbf{N}$. به‌ازای $r \geq ۰$، تعداد راههایی را که می‌توان با تکرار، r شیء از مجموعهٔ n شیئ متمایز را انتخاب کرد برابر با $a(n,r)$ قرار می‌دهیم.

به‌ازای $n \geq ۱$، فرض کنید $\{b_۱, b_۲, \cdots, b_n\}$ مجموعهٔ این اشیاء باشد، و شیء $b_۱$ را در نظر بگیرید. دقیقاً دو حالت ممکن است رخ دهد.

الف) شیء $b_۱$ هرگز انتخاب نشده است. بنابراین r شیء از $\{b_۲, \cdots, b_n\}$ انتخاب شده‌اند. این انتخاب را می‌توان به $a(n-۱, r)$ راه انجام داد.

ب) شیء $b_۱$ حداقل یک بار انتخاب شده است. در این صورت، باید $r-۱$ شیء از $\{b_۱, b_۲, \cdots, b_n\}$ انتخاب کنیم و لذا می‌توانیم علاوه بر یک باری که $b_۱$ انتخاب شده است باز هم به انتخاب آن ادامه دهیم. برای انجام این کار، تعداد $a(n, r-۱)$ راه وجود دارد.

پس $a(n,r) = a(n-۱,r) + a(n,r-۱)$، زیرا این دو حالت تمام امکانها را شامل می‌شوند و ناسازگارند.

فرض کنید $f_n = \sum_{r=۰}^{\infty} a(n,r)x^r$ تابع مولّد دنبالهٔ

$$a(n,۰), a(n,۱), a(n,۲), \cdots$$

باشد. از $a(n,r) = a(n-۱,r) + a(n,r-۱)$، که در آن $n \geq ۱$ و $r \geq ۱$، نتیجه می‌شود که $a(n,r)x^r = a(n-۱,r)x^r + a(n,r-۱)x^r$، و

$$\sum_{r=۱}^{\infty} a(n,r)x^r = \sum_{r=۱}^{\infty} a(n-۱,r)x^r + \sum_{r=۱}^{\infty} a(n,r-۱)x^r$$

با در نظر گرفتن اینکه به‌ازای $n \geq ۰$، $a(n,۰) = ۱$، و به‌ازای $r > ۰$، $a(۰,r) = ۰$ ، می‌نویسیم

$$f_n - a(n,۰) = f_{n-۱} - a(n-۱,۰) + x\sum_{r=۱}^{\infty} a(n,r-۱)x^{r-۱}$$

پس، $f_n - 1 = f_{n-1} - 1 + xf_n$. بنابراین، $f_n - xf_n = f_{n-1}$ یا $f_n = f_{n-1}/(1-x)$.
اگر، مثلاً، $n = 5$، آن‌گاه

$$f_5 = \frac{f_4}{(1-x)} = \frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{f_3}{(1-x)} = \frac{f_3}{(1-x)^2} = \frac{f_2}{(1-x)^3} = \frac{f_1}{(1-x)^4}$$
$$= \frac{f_0}{(1-x)^5} = \frac{1}{(1-x)^5}$$

زیرا $f_0 = a(0,0) + a(0,1)x + a(0,2)x^2 + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots$

در حالت کلی، $f_n = 1/(1-x)^n = (1-x)^{-n}$، لذا $a(n,r)$ ضریب x^r در $(1-x)^{-n}$ است که برابر است با $\binom{-n}{r}(-1)^r = \binom{n+r-1}{r}$.
(در اینجا با رابطه‌ای بازگشتی برای $a(n,r)$ سروکار داریم که تابعی گسسته از دو متغیر (صحیح) $n \geq 0$ و $r \geq 0$ است.) $\square$

آخرین مثال نشان می‌دهد که چگونه تابع مولّد را می‌توان برای حل یک دستگاه از رابطه‌های بازگشتی به‌کار برد.

مثال ۲۹.۱۰ این مثال مدلی است تقریبی برای انتشار نوترونهای با انرژی بالا و پایین، وقتی به هسته‌های ماده‌ای شکافت‌پذیر (نظیر اورانیوم) برخورد می‌کنند و جذب می‌شوند. در اینجا با رآکتور سریع سروکار داریم که در آن کندساز (نظیر آب) وجود ندارد. (درواقع، تمام نوترونها انرژی نسبتاً زیاد دارند و دقیقاً دو سطح انرژی وجود ندارد. طیفی پیوسته از سطوح انرژی موجود است، و آن نوترونهایی را که در انتهای بالایی طیف قرار دارند نوترونهای با انرژی بالا می‌نامند. نوترونهای با انرژی بالاتر بیشتر از نوترونهای با انرژی پایینتر گرایش به تولید نوترونهای جدید دارند.)
رآکتور را در زمان ۰ در نظر بگیرید و فرض کنید یک نوترون با انرژی بالا به دستگاه وارد شود. در طول هر فاصلهٔ زمانی بعد از آن (حدود یک میکروثانیه، یا 10^{-6} ثانیه) پیشامدهای زیر رخ می‌دهند.
الف) وقتی نوترونی با انرژی بالا با هسته‌ای (از مادّه شکافت‌پذیر) برخورد می‌کند، پس از جذب (یک میکروثانیه بعد) دو نوترون با انرژی بالا و یک نوترون با انرژی پایین ایجاد می‌کند.
ب) برای برخوردهایی که شامل نوترون با انرژی پایین است، تنها یک نوترون از هر سطح انرژی تولید می‌شود.
اگر فرض کنیم که همهٔ نوترونهای آزاد، یک میکروثانیه پس از ایجاد، با هسته برخورد داشته باشند بعد از n میکروثانیه، $n \geq 0$، تابعهایی از n در رآکتور به‌دست می‌آوریم، به قسمی که

$a_n =$ تعداد نوترونهای با انرژی بالا
$b_n =$ تعداد نوترونهای با انرژی پایین

در اینجا، $a_0 = 1$، $b_0 = 0$ و دستگاه رابطه‌های بازگشتی

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n \tag{1}$$

$$b_{n+1} = a_n + b_n \tag{2}$$

را داریم.

فرض کنید $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ به ترتیب تابعهای مولّد دنباله‌های $\{a_n|n \geq 0\}$ و $\{b_n|n \geq 0\}$ باشند.

بنابر معادله‌های (۱) و (۲) وقتی $n \geq 0$

$$a_{n+1}x^{n+1} = 2a_n x^{n+1} + b_n x^{n+1} \tag*{(1)$'$}$$

$$b_{n+1}x^{n+1} = a_n x^{n+1} + b_n x^{n+1} \tag*{(2)$'$}$$

از مجموعیابی معادلهٔ $(1)'$ به‌ازای همهٔ مقادیر $n \geq 0$، داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} = 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \tag*{(1)$''$}$$

به‌روشی مشابه، از معادلهٔ $(2)'$ نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1}x^{n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \tag*{(2)$''$}$$

با واردکردن تابعهای مولّد در این مقطع، به‌دست می‌آوریم

$$f(x) - a_0 = 2xf(x) + xg(x) \tag*{(1)$''$}$$

$$g(x) - b_0 = xf(x) + xg(x) \tag*{(2)$''$}$$

که دستگاه معادلاتی است که تابعهای مولّد را به‌هم ربط می‌دهد. از حل این دستگاه به‌دست می‌آوریم که

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2 - 3x + 1} = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1}{\alpha - x}\right) + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1}{\beta - x}\right)$$

و

$$g(x) = \frac{x}{x^۲ - ۳x + ۱} = \left(\frac{-۵ - ۳\sqrt{۵}}{۱۰}\right)\left(\frac{۱}{\alpha - x}\right) + \left(\frac{-۵ + ۳\sqrt{۵}}{۱۰}\right)\left(\frac{۱}{\beta - x}\right)$$

که در اینجا

$$\alpha = \frac{۳ + \sqrt{۵}}{۲}, \quad \beta = \frac{۳ - \sqrt{۵}}{۲}$$

در نتیجه

$$a_n = \left(\frac{۵ + \sqrt{۵}}{۱۰}\right)\left(\frac{۳ - \sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱} + \left(\frac{۵ - \sqrt{۵}}{۱۰}\right)\left(\frac{۳ + \sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱}$$

و

$$b_n = \left(\frac{-۵ - ۳\sqrt{۵}}{۱۰}\right)\left(\frac{۳ - \sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱} + \left(\frac{-۵ + ۳\sqrt{۵}}{۱۰}\right)\left(\frac{۳ + \sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱}, \quad n \geq ۰$$

□

تمرینهای ۴.۱۰

۱. رابطه‌های بازگشتی زیر را با روش تابعهای مولّد حل کنید.

الف) $a_{n+۱} - a_n = ۳^n$، $n \geq ۰$، $a_۰ = ۱$

ب) $a_{n+۱} - a_n = n^۲$، $n \geq ۰$، $a_۰ = ۱$

ج) $a_{n+۲} - ۲a_{n+۱} + a_n = ۲^n$، $n \geq ۰$، $a_۰ = ۱$، $a_۱ = ۲$

د) $a_{n+۲} - ۲a_{n+۱} + a_n = n$، $n \geq ۰$، $a_۰ = ۱$، $a_۱ = ۲$

۲. برای n شیء متمایز، فرض کنید $a(n, r)$ معرف تعداد راههایی است که می‌توانیم r شیء از n شیء را بدون تکرار، وقتی $۰ \leq r \leq n$، انتخاب کنیم. در اینجا وقتی $r > n$، $a(n, r) = ۰$. رابطهٔ بازگشتی

$$a(n, r) = a(n - ۱, r - ۱) + a(n - ۱, r), \quad n \geq ۱, \quad r \geq ۱$$

را به‌کار برید و نشان دهید $f(x) = (۱ + x)^n$ مقدار $a(n, r)$، $r \geq ۰$، را تولید می‌کند.

۳. دستگاههای رابطه‌های بازگشتی زیر را حل کنید.

الف)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -2a_n - 4b_n \\ b_{n+1} &= 4a_n + 6b_n \\ n \geq 0, &\quad a_0 = 1, \quad b_0 = 0 \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n - b_n + 2 \\ b_{n+1} &= -a_n + 2b_n - 1 \\ n \geq 0, &\quad a_0 = 0, \quad b_0 = 1 \end{aligned}$$

۵.۱۰ نوعی خاص از رابطهٔ بازگشتی غیرخطی (اختیاری)

تا اینجا، در مطالعهٔ رابطه‌های بازگشتی، با رابطه‌های خطی با ضریبهای ثابت سروکار داشتیم. مطالعهٔ رابطه‌های بازگشتی غیرخطی و رابطه‌های با ضریبهای متغیّر را فقط به‌منظور یک رابطهٔ غیر خطّی خاصّی که به‌روشِ تابعهای مولّد کمک می‌کند، ادامه می‌دهیم.

ما این روش را در یک مسألهٔ شمارش مربوط به ساختارهای داده‌ها بسط خواهیم داد. قبل از انجام این کار، ملاحظه می‌کنیم که اگر $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ تابع مولّد برای دنبالهٔ $a_0, a_1, a_2, \cdots$ باشد، آن‌گاه $[f(x)]^2$، پیچش دنبالهٔ $a_0, a_1, \cdots$ با خودش، یعنی

$$a_0a_0, a_0a_1 + a_1a_0, a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0, \cdots, a_0a_n + a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \cdots + a_{n-1}a_1 + a_na_0, \cdots$$

را تولید می‌کند.

مثال ۳۰.۱۰ در بخش ۱.۵ مفهوم یک نمودار درختی را وارد کردیم. به‌طور کلی، یک درخت، گرافی است بی‌سو که همبند است و طوقه یا دوری ندارد. در اینجا درختهای دوتایی ریشه‌دار را بررسی می‌کنیم.

در شکل ۹.۱۰ دو تا از چنین درختهایی را می‌بینیم، که در آنها رأسی که حول آن دایره کشیده‌ایم معرف ریشه است. این درختها را به دلیل آنکه از هر رأس حداکثر دو یال (به نام شاخه) به سمت پایین رسم شده‌اند، (زیرا درخت ریشه‌دار، گرافی سودار است) دوتایی می‌نامند.

به‌خصوص، این درختهای دوتایی ریشه‌دار، مرتب‌اند بدین معنا که شاخهٔ چپی که از رأس به پایین می‌آید متفاوت از شاخهٔ راستی که از همان رأس به پایین می‌آید در نظر گرفته می‌شود. در حالت وجود سه رأس، پنج درخت دوتایی مرتب ریشه‌دار ممکن را در شکل ۱۰.۱۰ نشان داده‌ایم. (اگر توجه به ترتیب نباشد، چهار درخت دوتایی ریشه‌دار آخر دارای یک ساختارند.)

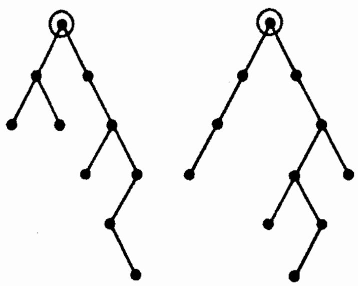
هدف ما، شمارش b_n، تعداد درختهای دوتایی مرتب ریشه‌دار مربوط به n رأس، $n \geq ۰$، است. با فرض اینکه مقادیر b_i به‌ازای $۰ \leq i \leq n$ در دست باشد برای به‌دست آوردن $b_{n+۱}$، رأسی را به‌عنوان ریشه انتخاب و توجه می‌کنیم که مثل شکل ۱۱.۱۰، زیرساختارهایی که از چپ و راست ریشه پایین می‌آیند درختهای (دوتایی مرتب ریشه‌دار) کوچکتری هستند که تعداد کل رأسهای آنها n است. این درختهای کوچکتر را زیر درختهای درخت مفروض می‌نامند. از جملهٔ این زیردرختهای ممکن، زیردرخت تهی است که برای آن فقط $(b_۰ =)۱$.

اینک بررسی می‌کنیم که چگونه n رأس را می‌توان در این دو زیر درخت طبقه‌بندی کرد.

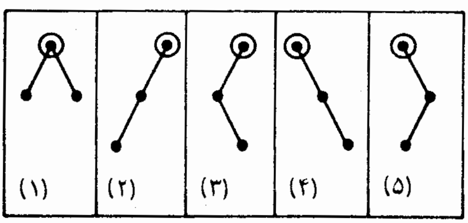
(۱) ۰ رأس در سمت چپ قرار دارد، n رأس در سمت راست. این امر نتیجه می‌دهد که همهٔ زیرساختارهایی که در $b_{n+۱}$ شمرده می‌شوند برابر $b_۰ b_n$ اند.

(۲) ۱ رأس در سمت چپ قرار دارد، $n-۱$ رأس در سمت راست، که $b_۱ b_{n-۱}$ درخت دوتایی مرتب ریشه‌دار، با $n+۱$ رأس به‌دست می‌دهد.

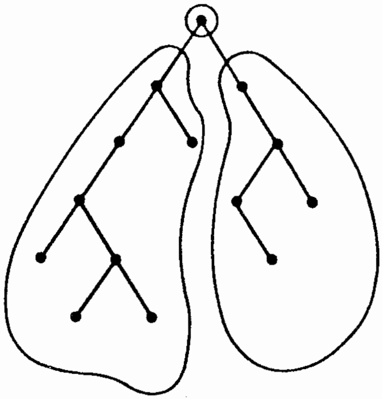
......



شکل ۹.۱۰



شکل ۱۰.۱۰



شکل ۱۱.۱۰

(i + ۱) i رأس در سمت چپ، $n-i$ رأس در سمت راست قرار دارند که در این حالت b_{n+1} برابر $b_i b_{n-i}$ است.

......

(n + ۱) n رأس در سمت چپ است و هیچ رأسی در سمت راست نیست، در این صورت b_{n+1} برابر $b_n b_0$ از درختهاست.

بنابراین، به‌ازای همهٔ مقادیر $n \geq 0$

$$b_{n+1} = b_0 b_n + b_1 b_{n-1} + b_2 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_1 + b_n b_0$$

و

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (b_0 b_n + b_1 b_{n-1} + \cdots + b_{n-1} b_1 + b_n b_0) x^{n+1} \qquad (1)$$

اینک فرض کنید $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ تابع مولّد $b_0, b_1, b_2, \cdots$ است. معادلهٔ (۱) را به‌صورت

$$\begin{aligned}(f(x) - b_0) &= x \sum_{n=0}^{\infty} (b_0 b_n + b_1 b_{n-1} + \cdots + b_n b_0) x^n \\ &= x[f(x)]^2\end{aligned}$$

می‌نویسیم.

این معادله ما را به معادلهٔ درجه دوم زیر (برحسب $f(x)$) می‌رساند

$$x[f(x)]^۲ - f(x) + ۱ = ۰$$

پس

$$f(x) = [۱ \pm \sqrt{۱ - ۴x}]/(۲x)$$

امّا

$$\sqrt{۱-۴x} = (۱-۴x)^{\frac{۱}{۲}} = \binom{۱/۲}{۰} + \binom{۱/۲}{۱}(-۴x) + \binom{۱/۲}{۲}(-۴x)^۲ + \cdots$$

که در آن ضریب x^n، $n \geq ۱$، برابر است با

$$\begin{aligned}\binom{۱/۲}{n}(-۴)^n &= \frac{(۱/۲)((۱/۲)-۱)((۱/۲)-۲)\cdots((۱/۲)-n+۱)}{n!}(-۴)^n \\ &= (-۱)^{n-۱}\frac{(۱/۲)(۱/۲)(۳/۲)\cdots((۲n-۳)/۲)}{n!}(-۴)^n \\ &= \frac{(-۱)۲^n(۱)(۳)\cdots(۲n-۳)}{n!} \\ &= \frac{(-۱)۲^n(n!)(۱)(۳)\cdots(۲n-۳)(۲n-۱)}{(n!)(n!)(۲n-۱)} \\ &= \frac{(-۱)(۲)(۴)\cdots(۲n)(۱)(۳)\cdots(۲n-۱)}{(۲n-۱)(n!)(n!)} = \frac{(-۱)}{(۲n-۱)}\binom{۲n}{n}\end{aligned}$$

در $f(x)$ رادیکال منفی را انتخاب می‌کنیم؛ در غیر این‌صورت، مقادیری منفی برای b_nها پیدا می‌کنیم؛ پس

$$f(x) = \frac{۱}{۲x}\left[۱ - \left[۱ - \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)}\binom{۲n}{n}x^n\right]\right]$$

و b_n، ضریب x^n در $f(x)$، نصف ضریب $x^{n+۱}$ در

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)}\binom{۲n}{n}x^n$$

است، به‌قسمی که

$$b_n = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{۲(n+۱)-۱}\right]\binom{۲(n+۱)}{(n+۱)} = \frac{(۲n)!}{(n+۱)!(n!)} = \frac{۱}{(n+۱)}\binom{۲n}{n}$$

اعداد b_n را که منسوب به ریاضیدان بلژیکی اوژن کاتالان[1] (۱۸۱۴ـ۱۸۹۴)اند، اعداد کاتالان می‌نامند. کاتالان آنها را در تعیین تعداد راههای داخل پرانتزگذاشتن عبارت $x_۱x_۲x_۳\cdots x_n$ به‌کار برده است. هفت عدد اول کاتالان، $b_۰ = ۱$، $b_۱ = ۱$، $b_۲ = ۲$، $b_۳ = ۵$، $b_۴ = ۱۴$، $b_۵ = ۴۲$، و $b_۶ = ۱۳۲$ هستند. □

به این بخش با کاربرد دیگری از اعداد کاتالان خاتمه خواهیم داد. این مثال مبتنی بر مثالی است که شایمن ایون[2] آورده است. (صفحهٔ ۸۶ مرجع [۴] را ببینید.)

مثال ۳۱.۱۰ ساختار داده‌ای مهم دیگری که در علم کامپیوتر وجود دارد پُشته است. این ساختار، ذخیره کردن اقلام داده‌ها را برحسب شرایط زیر میسر می‌سازد.

۱. همهٔ درجها در یک انتهای ساختار صورت می‌گیرند. این انتها را بالای پشته می‌نامند، و این فرایند درج را شیوهٔ نشاندن اطلاق می‌کنند.

۲. همهٔ حذفها از پشته (ی ناتهی) نیز از بالا انجام می‌شوند. فرایند حذف را شیوهٔ پراندن می‌خوانند.

چون آخرین قلمی که در این ساختار درج شده است اولین قلمی است که می‌تواند به خارج پرانده شود، پشته را غالباً ساختار «آخرین ورودی‌ـاولّین خروجی» (LIFO)* می‌نامند.

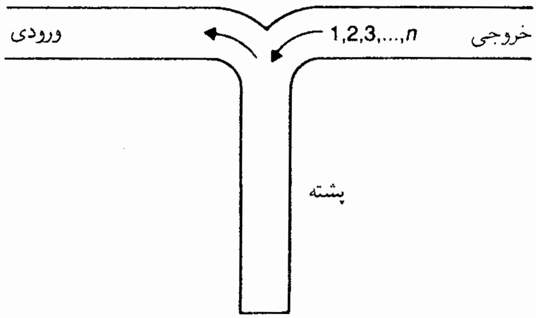
مدلهای شهودی برای این ساختار داده‌ها مثلاً عبارت‌اند از: توده‌ای از سینیهای کافه تریا، و توده‌ای از ورقهای اضافی که در بعضی از بازیهای با ورق‌بین بازیکنان توزیع می‌شود. در این هر دو حالت، می‌توانیم تنها (۱) درایه‌ای جدید به بالای توده یا پشته ضمیمه کنیم، یا (۲) درایه‌ای از بالای توده یا پشته (ی ناتهی) حذف کنیم.

در اینجا این ساختار داده‌ای را با شیوه‌های نشاندن و پراندن آن، به‌کار خواهیم برد تا در تهیهٔ جایگشتهای فهرست (مرتب) ۱، ۲، ۳، ... ، n برای $n \in \mathbf{Z}^+$، به‌ما کمک کند. نمودار شکل ۱۲.۱۰ نشان می‌دهد که چگونه هر عدد صحیح ورودی ۱، ۲، ۳، ... ، n باید در بالای پشته، در ترتیب مفروض، نشانده شود. امّا، می‌توانیم در هر زمانی درایه‌ای را از بالای پشته (ی ناتهی) برداریم. ولی وقتی درایه‌ای یک‌بار از پشته پرانده شد ممکن نیست که دوباره به بالای پشته و یا به ورودی مانده‌ای که باید در پشته نشانده شود برگردد. این فرایند تا وقتی درایه‌ای در پشته باقی است ادامه می‌یابد.

اگر $n = ۱$، فهرست خروجی شامل تنها عدد صحیح ۱ است. ۱ را در بالای پشتهٔ (ی تهی) درج می‌کنیم و آن‌گاه آن را به‌خارج می‌پرانیم.

1. Eugène Catalan 2. Shimon Even

* LIFO نمادی برای last-in-first-out است.



شکل ۱۲.۱۰

برای $n = ۲$، دو جایگشت برای ۱ و ۲ ممکن است و می‌توانیم با استفاده از پشته، هر دوی آنها را به‌دست آوریم.

۱. برای به‌دست آوردن ۱ و ۲ عدد ۱ را در بالای پشته (ی تهی) قرار می‌دهیم و آن‌گاه آن را خارج می‌کنیم. سپس ۲ را در بالای پشته (ی تهی) قرار می‌دهیم و آن را می‌پرانیم.

۲. جایگشت ۱ و ۲ وقتی به‌دست می‌آید که ۱ را در بالای پشته (ی تهی) قرار دهیم و آن‌گاه ۲ را بر بالای این پشته (ی ناتهی) برانیم. ابتدا با پراندن ۲ از بالای پشته و سپس پراندن ۱، جایگشت ۱ و ۲ را به‌دست می‌آوریم.

به‌حالت $n = ۳$ برمی‌گردیم و درمی‌یابیم که می‌توانیم تنها پنج تا از $۶ = !۳$ جایگشت ممکن ۱، ۲، ۳ را در این وضعیت به‌دست آوریم. مثلاً جایگشت ۲، ۳، ۱ وقتی نتیجه می‌شود که گامهای زیر را انجام دهیم.

- ۱ را در بالای پشته (ی تهی) قرار دهیم.
- ۲ را بر بالای پشته (بالای ۱) بپرانیم.
- ۲ را از پشته خارج کنیم.
- ۳ را بر بالای پشته (بالای ۱) بنشانیم.
- ۳ را از پشته بپرانیم.
- ۱ را از پشته خارج کنیم تا پشته تهی بماند.

دلیل اینکه نمی‌توانیم هر شش جایگشت ۱، ۲، ۳ را به‌دست آوریم این است که نمی‌توانیم جایگشت ۳، ۱، ۲ را با استفاده از پشته تولید کنیم. زیرا برای اینکه ۳ در اولین موضع جایگشت باشد، باید ابتدا با نشاندن ۱ بر پشته (ی تهی)، آن‌گاه نشاندن ۲ بر بالای پشته (روی ۱)، و سرانجام نشاندن ۳ بر پشته (روی ۲)، پشته‌ای بسازیم. بعد از اینکه ۳ از پشته پرانده شد، ۳ را به‌عنوان اولین

جدول ۳.۱۰

۱, ۲, ۳, ۴	۲, ۱, ۳, ۴	۲, ۳, ۱, ۴	۲, ۳, ۴, ۱
۱, ۲, ۴, ۳	۲, ۱, ۴, ۳	۳, ۲, ۱, ۴	۲, ۴, ۳, ۱
۱, ۳, ۲, ۴			۳, ۲, ۴, ۱
۱, ۳, ۴, ۲			۳, ۴, ۲, ۱
۱, ۴, ۳, ۲			۴, ۳, ۲, ۱

عدد در جایگشت خود به‌دست می‌آوریم. امّا اینک با بودن ۲ در بالای پشته نمی‌توانیم قبل از اینکه ۲ را بپرانیم عدد ۱ را بپرانیم، لذا جایگشت ۳، ۱، ۲ را نمی‌توانیم تولید کنیم.

با $n = 4$، ۱۴ جایگشت از فهرست (مرتب) ۱، ۲، ۳، ۴ وجود دارند که می‌توان با روش پشته تولید کرد. آنها را در چهار ستون جدول ۳.۱۰، برحسب مکان ۱ در جایگشت، فهرست می‌کنیم.

۱. پنج جایگشت وجود دارند که ۱ در اولین موضع آنهاست، زیرا پس از نشاندن ۱ در پشته و پراندن آن از پشته، پنج راه برای جایگشت دادن ۲، ۳، ۴، با استفاده از پشته وجود دارد.

۲. وقتی ۱ در موضع دوم است، ۲ بآید در اولین موضع باشد. زیرا وقتی ۱ را بر پشته (ی تهی) نشاندیم، آنگاه ۲ را بر روی آن می‌نشانیم و بعد ابتدا ۲ و سپس ۱ را می‌پرانیم. در ستون ۲ دو جایگشت وجود دارند، زیرا ۳، ۴ را می‌توان به دو راه در پشته جایگشت داد.

۳. در ستون ۳، عدد ۱ در موضع سوم است. توجه می‌کنیم که تنها اعدادی که می‌توانند قبل از ۱ باشند ۲ و ۳ هستند که می‌توان آنها را بر پشته (با ۱ در انتها) به دو راه جایگشت داد. آنگاه ۱ را می‌پرانیم و ۴ را بر پشته (ی تهی) می‌نشانیم و سپس آن را نیز می‌پرانیم.

۴. در آخرین ستون، پنج جایگشت به‌دست می‌آوریم: بعد از آنکه ۱ را بر بالای پشته (ی تهی) نشاندیم چهار راه برای جایگشت دادن ۲، ۳، ۴ با استفاده از پشته (با ۱ در انتها) وجود دارد. در این موقع برای تکمیل جایگشت، ۱ را از پشته می‌پرانیم.

بر پایهٔ این مشاهدات، به‌ازای $1 \leq i \leq 4$، فرض کنید a_i تعداد راههای جایگشت دادن اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، ...، i (یا هر فهرست از i عدد صحیح متوالی) با استفاده از پشته باشد. همچنین تعریف می‌کنیم $a_0 = 1$، زیرا تنها یک راه برای جایگشت دادن هیچ‌چیز با استفاده از پشته وجود دارد. پس

$$a_4 = a_0 a_3 + a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_3 a_0$$

که در آن

الف) هر جمعوند $a_j a_k$ در شرط $j + k = 3$ صدق می‌کند.

ب) اندیس j می‌گوید که j عدد صحیح در سمت راست ۱ در جایگشت وجود دارند ــ به‌خصوص،

به‌ازای $j \geq ۱$، اینها اعداد صحیح ۲ تا $j + ۱$ هستند.
ج) اندیس k نشان می‌دهد که k عدد صحیح در سمت راست ۱ در جایگشت وجود دارند ـ به‌ازای $k \geq ۱$، اینها، اعداد صحیح از $(k - ۱) - ۴$ تا ۴ هستند.

حال این مسألهٔ جایگشت را می‌توان برای هر مقدار $n \in \mathbf{N}$ تعمیم داد، به قسمی که $a_{n+۱} = a_۰ a_n + a_۱ a_{n-۱} + a_۲ a_{n-۲} + \cdots + a_{n-۱} a_۱ + a_n a_۰$، با فرض $a_۰ = ۱$. با توجّه به‌مثال قبل می‌دانیم که

$$a_n = \frac{۱}{(n+۱)} \binom{۲n}{n}$$

□

مثالهای دیگری را که شامل اعداد کاتالان هستند می‌توان در مراجع فصل یافت.

تمرینهای ۵.۱۰

۱. برای درختهای دوتایی مرتب ریشه‌دار، در مثال ۵.۱۰.۳۰، $b_۴$ را حساب کنید و همهٔ این ساختارهای چهار رأسی را رسم کنید.

۲. تحقیق کنید که به‌ازای همهٔ مقادیر $n \geq ۰$

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲n+۱}\right)\binom{۲n+۲}{n+۱} = \left(\frac{۱}{n+۱}\right)\binom{۲n}{n}$$

۳. نشان دهید که به‌ازای همهٔ مقادیر $n \geq ۲$

$$\binom{۲n-۱}{n} - \binom{۲n-۱}{n-۲} = \frac{۱}{(n+۱)}\binom{۲n}{n}$$

۴. برای یک n ضلعی محدب، فرض کنید t_n معرف تعداد راههایی است که می‌توان با رسم قطرهای نامتقاطع، داخل چندضلعی را به ناحیه‌های مثلثی افراز کرد.

الف) نشان دهید که $t_۳ = ۱$، $t_۴ = ۲$، و $t_۵ = ۵$.

ب) تعریف می‌کنیم $t_۰ = t_۱ = ۰$، $t_۲ = ۱$. تحقیق کنید که

$$t_{n+۱} = t_۲ t_n + t_۳ t_{n-۱} + \cdots + t_{n-۱} t_۳ + t_n t_۲$$

ج) t_n را به‌صورت تابعی از n بیابید.

۵. به‌ازای $n \geq ۰$، $b_n = \left(\frac{۱}{n+۱}\right)\binom{۲n}{n}$، nامین عدد کاتالان است.

الف) نشان دهید که به‌ازای همهٔ مقادیر $n \geq ۰$، $b_{n+۱} = \frac{۲(۲n+۱)}{(n+۲)} b_n$.

ب) برای نوشتن برنامه‌ای کامپیوتری (یا بسط الگوریتم) که ۱۵ عدد اول کاتالان را حساب کند، از نتیجهٔ قسمت (الف) استفاده کنید.

۶. به‌ازای $n \geq ۰$، $۲n$ نقطه را با فاصله‌های مساوی بر محیط دایره‌ای توزیع کنید و به‌صورت دوری، برچسبهای ۱، ۲، ۳، ...، $۲n$ به این نقاط بدهید. فرض کنید a_n تعداد راههایی باشد که از این $۲n$ نقطه می‌توان n وتر نامتقاطع رسم کرد. (حالت مربوط به $n = ۳$ را در شکل ۱۳.۱۰ نشان داده‌ایم.) رابطه‌ای بازگشتی برای a_n، $n \geq ۰$، بیابید و آن را حل کنید.

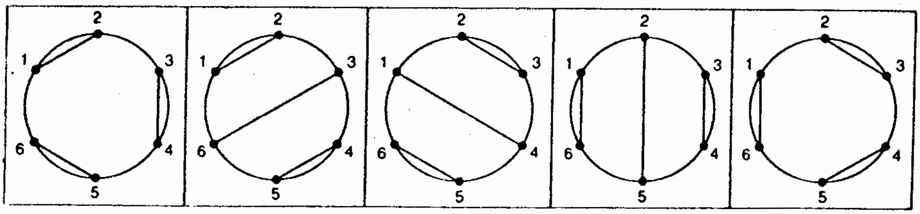
۶.۱۰ الگوریتمهای تقسیم و برتری (اختیاری)*

یکی از مهمترین و متداولترین نوع الگوریتمهای کارا، بر رهیافت تقسیم و برتری مبتنی شده‌است. خط‌مشی کار به‌طورکلی در این روش عبارت از حل مسأله‌ای مفروض با اندازهٔ n ($n \in \mathbf{Z}^+$) به‌وسیلهٔ

۱. حل مستقیم مسأله برای مقدار کوچک n (با این عمل، شرطی اولیه برای رابطهٔ بازگشتی حاصل، فراهم می‌شود).

۲. تقسیم مسألهٔ کلی با اندازهٔ n به a مسألهٔ کوچکتر از همان نوع و (تقریباً) به یک اندازه ــ یا $\lceil n/b \rceil$ یا $\lfloor n/b \rfloor$،** که در آن $a, b \in \mathbf{Z}^+$ با $۱ \leq a < n$ و $۱ < b < n$.

سپس a مسألهٔ کوچکتر به اندازهٔ n را حل می‌کنیم و جوابهای آنها را برای ساختن جواب مسألهٔ



شکل ۱۳.۱۰

* مطالب این بخش را بدون از دست دادن پیوستگی، می‌توان حذف کرد. این مطالب در بند ۳ی فصل ۱۲ در تعیین زمان تابع پیچیدگی برای الگوریتم مرتب‌کردن ادغامی به‌کار خواهند رفت. امّا، نتیجه، برای حالت خاص مرتب‌کردن ادغامی، با روشی دیگر نیز که در آن از مطالب این بخش استفاده نمی‌شود به‌دست خواهد آمد.

** به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$، $\lceil x \rceil$ معرّف سقف x و $\lfloor x \rfloor$ معرف کف x یا بزرگترین عدد صحیح در x است که در آنها الف) برای $x \in \mathbf{Z}$؛ $x = \lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$. ب) برای $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$، عدد صحیح بلافاصله در سمت چپ x، $x = \lfloor x \rfloor$ ج) برای $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$، عدد صحیح بلافاصله در سمت راست x، $\lceil x \rceil = x$

اصلی به اندازهٔ n به‌کار می‌بریم. ما بویژه به حالتهایی توجه داریم که در آنها n توانی از b است و $b = ۲$.
ما آن الگوریتمهای تقسیم و برتری را مطالعه خواهیم کرد که در آنها

۱ . زمان حل مسألهٔ اولیهٔ با اندازهٔ $n = ۱$، مقدار ثابت $c \geq ۰$ است، و

۲ . زمان تقسیم مسألهٔ مفروض با اندازهٔ n به a مسألهٔ کوچکتر (مشابه)، به‌علاوهٔ زمان ترکیب جوابهای این مسائل کوچکتر برای به‌دست آوردن جواب مسألهٔ مفروض، تابعی از n به‌صورت $h(n)$ است.

منظور ما از زمان، در واقع زمان تابع پیچیدگی، $f(n)$، برای این الگوریتمهاست. در نتیجه، به جای نماد اندیس‌دار a_n که در بخشهای قبلی این فصل به‌کار بردیم، در اینجا از نماد $f(x)$ استفاده می‌کنیم.

شرایطی که اینک بیان شدند به رابطهٔ بازگشتی زیر منجر می‌شوند

$$f(۱) = c$$
$$f(n) = af(n/b) + h(n) \qquad \text{به‌ازای } k \geq ۱, n = b^k$$

توجه می‌کنیم که حوزهٔ مقادیر f

$$\{۱, b, b^۲, b^۳, \cdots\} = \{b^i | i \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{Z}^+$$

است.

در اولین نتیجه، جواب این رابطهٔ بازگشتی برای حالتی که $h(n)$ برابر مقدار ثابت c است به‌دست می‌آید.

قضیه ۱.۱۰ فرض کنید $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$ با $b \geq ۲$، و $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$. اگر

$$f(۱) = c$$
$$f(n) = af(n/b) + c \quad \text{به‌ازای } n = b^k \text{،} k \geq ۱$$

آن‌گاه به‌ازای همهٔ مقادیر $n = ۱, b, b^۲, b^۳, \cdots$

۱. وقتی $a = ۱$، $f(n) = c(\log_b n + ۱)$
۲. وقتی $a \geq ۲$، $f(n) = \frac{c(an^{\log_b a} - ۱)}{a - ۱}$

برهان برای $k \geq ۱$ و $n = b^k$، دستگاه k معادلهٔ زیر را می‌نویسیم (با شروع از معادلهٔ دوم، هر یک از این معادلات را از معادلهٔ بلافاصله قبلی آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم: (i) به‌جای هر مورد n در معادلهٔ قبل، n/b قرار می‌دهیم و (ii) معادلهٔ حاصل از قسمت (i) را در a ضرب می‌کنیم.)

$$\begin{aligned} f(n) &= af(n/b) + c \\ af(n/b) &= a^{۲}f(n/b^{۲}) + ac \\ a^{۲}f(n/b^{۲}) &= a^{۳}f(n/b^{۳}) + a^{۲}c \\ a^{۳}f(n/b^{۳}) &= a^{۴}f(n/b^{۴}) + a^{۳}c \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a^{k-۲}f(n/b^{k-۲}) &= a^{k-۱}f(n/b^{k-۱}) + a^{k-۲}c \\ a^{k-۱}f(n/b^{k-۱}) &= a^{k}f(n/b^{k}) + a^{k-۱}c \end{aligned}$$

می‌بینیم که هر یک از جمله‌های $af(n/b)$، $a^{۲}f(n/b^{۲})$، $a^{۳}f(n/b^{۳})$، ...، $a^{k-۱}f(n/b^{k-۱})$ یک‌بار به‌صورت جمعوند در هر دو طرف چپ و راست این معادلات ظاهر می‌شود. بنابراین، بعد از جمع‌کردن دو طرف k معادله و حذف این جمعوندهای مشترک، به‌دست می‌آوریم

$$f(n) = a^{k}f(n/b^{k}) + [c + ac + a^{۲}c + \cdots + a^{k-۱}c]$$

چون $n = b^k$ و $f(۱) = c$، داریم

$$\begin{aligned} f(n) &= a^{k}f(۱) + c[۱ + a + a^{۲} + \cdots + a^{k-۱}] \\ &= c[۱ + a + a^{۲} + \cdots + a^{k-۱} + a^{k}] \end{aligned}$$

۱. اگر $a = ۱$، آن‌گاه $f(n) = c(k+۱)$. امّا $\log_b n = k \Leftrightarrow n = b^k$. پس، به‌ازای $n \in \{b^i | i \in \mathbf{N}\}$، $f(n) = c(\log_b n + ۱)$.

۲. وقتی $a \geq ۲$، از اتحاد ۴ جدول ۲.۹، خواهیم داشت

$$f(n) = \frac{c(۱ - a^{k+۱})}{۱ - a} = \frac{c(a^{k+۱} - ۱)}{a - ۱}$$

امّا، $\log_b n = k \Leftrightarrow n = b^k$. بنابراین

$$a^k = a^{\log_b n} = (b^{\log_b a})^{\log_b n} = (b^{\log_b n})^{\log_b a} = n^{\log_b a}$$

و به‌ازای $n \in \{b^i | i \in \mathbf{N}\}$، $f(n) = \frac{c(an^{\log_b a} - ۱)}{(a-۱)}$. ■

مثال ۳۲.۱۰ الف) فرض کنید $f:\mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$، که $f(۱)=۳$ و به‌ازای $n=۲^k$، $k\in\mathbf{Z}^+$، $f(n)=f(n/۲)+۳$.

لذا بنابر قسمت ۱ قضیهٔ ۱.۱۰، با $c=۳$، $b=۲$، و $a=۱$، نتیجه می‌شود که به‌ازای $n\in\{۱,۲,۴,۸,۱۶,\cdots\}$، $f(n)=۳(\log_۲ n+۱)$.

ب) فرض کنید که $g:\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}$ با $g(۱)=۷$، و به‌ازای $n=۳^k$، $k\in\mathbf{Z}^+$، $g(n)=۴g(n/۳)+۷$.

در این‌صورت با $c=۷$، $b=۳$، و $a=۴$ از قسمت ۲ قضیهٔ ۱.۱۰ نتیجه می‌شود که وقتی $n\in\{۱,۳,۹,۲۷,۸۱,\cdots\}$، $g(n)=(۷/۳)(۴n^{\log_۳ ۴}-۱)$. □

با در نظر گرفتن قضیهٔ ۱.۱۰، باید در نظر بگیریم که گرچه به‌ازای $n\in\{۱,b,b^۲,\cdots\}$ اطلاعاتی دربارهٔ f داریم، ولی متأسفانه نمی‌توانیم دربارهٔ مقدار f به‌ازای اعداد صحیح $\mathbf{Z}^+-\{۱,b,b^۲,\cdots\}$ چیزی بگوییم. بنابراین، فعلاً قادر به‌کار با مفهوم f به‌صورت تابع پیچیدگی زمان نیستیم. برای غلبه بر این مشکل، تعریف ۲۲.۵ را که در آن مفهوم غلبهٔ تابعی ابتدا معرفی شده‌بود تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۱.۱۰ فرض کنید $f,g:\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}$ و S زیرمجموعه‌ای نامتناهی از $\mathbf{Z}^+$ است. می‌گوییم که g بر f روی S غالب است (یا f مغلوب g روی S است) اگر ثابتهای $m\in\mathbf{R}^+$ و $k\in\mathbf{Z}^+$ وجود داشته باشند به‌قسمی که به‌ازای همهٔ مقادیر $n\in S$، $|f(n)|\le m|g(n)|$، که در آن $n\ge k$.

تحت این شرایط نیز می‌گوییم که در S، $f\in O(g)$.

مثال ۳۳.۱۰ فرض کنید $f:\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}$ به قسمی تعریف می‌شود که

$$f(n)=n \qquad n\in\{۱,۳,۵,۷,\cdots\}=S_۱$$
$$f(n)=n^۲ \qquad n\in\{۲,۴,۶,۸,\cdots\}=S_۲$$

در این صورت $f\in O(n)$ روی $S_۱$ و $f\in O(n^۲)$ روی $S_۲$. معهذا نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که $f\in O(n)$ یا $f\in O(n^۲)$. □

مثال ۳۴.۱۰ اینک از مثال ۳۲.۱۰، بنابر تعریف ۱.۱۰ نتیجه می‌شود که

الف) $f\in O(\log_۲ n)$ روی $\{۲^k|k\in\mathbf{N}\}$؛

ب) $g\in O(n^{\log_۳ ۴})$ روی $\{۳^k|k\in\mathbf{N}\}$ □

حال با استفاده از تعریف ۱.۱۰ فرعهای زیر را برای قضیهٔ ۱.۱۰ بررسی می‌کنیم. فرع اوّل تعمیم نتایج خاصی است که در مثال ۳۴.۱۰ داده شده‌اند.

فرع ۱.۱۰ فرض کنید $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$ با $b \geq ۲$، و $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$. اگر

$$f(۱) = c$$

و به‌ازای $n = b^k$، $k \geq ۱$

$$f(n) = af(n/b) + c$$

آن‌گاه

۱. $f \in O(\log_b n)$ روی $\{b^k | k \in \mathbf{N}\}$، وقتی $a = ۱$، و

۲. $f \in O(n^{\log_b a})$ روی $\{b^k | k \in \mathbf{N}\}$، وقتی $a \geq ۲$.

برهان آوردن این برهان به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود. ■

فرع دوّم، علامتهای برابری در قضیهٔ ۱.۱۰ را به نابرابری بدل می‌کند. در نتیجه، حوزهٔ تمام f باید از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}^+ \cup \{۰\}$ محدود شود.

فرع ۲.۱۰ برای $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$ با $b \geq ۲$، فرض می‌کنیم $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}^+ \cup \{۰\}$. اگر

$$f(۱) \leq c$$

و به‌ازای $n = b^k$، $k \geq ۱$

$$f(n) \leq af(n/b) + c$$

آن‌گاه برای همهٔ مقادیر $n = ۱, b, b^۲, b^۳, \cdots$

۱. $f \in O(\log_b n)$، وقتی $a = ۱$، و

۲. $f \in O(n^{\log_b a})$، وقتی $a \geq ۲$.

برهان تابع $g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}^+ \cup \{۰\}$ را در نظر بگیرید، که در آن

$$g(۱) = c$$

و به‌ازای $n \in \{۱, b, b^۲, \cdots\}$

$$g(n) = ag(n/b) + c$$

به‌موجب فرع ۱.۱۰

$g \in O(\log_b n)$ روی $\{b^k | k \in \mathbf{N}\}$ وقتی $a = ۱$، و

$g \in O(n^{\log_b^a})$ روی $\{b^k | k \in \mathbf{N}\}$، وقتی $a \geq ۲$.

چون به‌ازای همهٔ مقادیر $n \in \{۱, b, b^۲, \cdots\}$، $f(n) \leq g(n)$، نتیجه می‌شود که $f \in O(g)$ روی $\{b^k | k \in \mathbf{N}\}$، و لذا این فرع، به دلیل حکم اخیر ما دربارهٔ g، نتیجه می‌شود. ■

تا اینجا، مطالعهٔ الگوریتمهای تقسیم و برتری عمدتاً جنبه‌ای نظری داشت. اینک وقت آن رسیده است که مثالی بیاوریم که در آن این مفاهیم را بتوانیم به‌کار بریم. نتیجهٔ زیر مؤید یکی از مثالهای قبلی است.

مثال ۳۵.۱۰ فرض کنید $f(n)$ به‌ازای $n = ۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, \cdots$ تعداد مقایسه‌های لازم برای تعیین عناصر ماکسیمم و مینیمم مجموعهٔ $S \subset \mathbf{R}$ باشد، که در آن $|S| = n$ و شیوهٔ مثال ۲۵.۱۰ به‌کار برده شده است.

اگر $n = ۱$، آن‌گاه عنصرهای ماکسیمم و مینیمم یکی هستند. بنابراین، مقایسه‌ای لازم نیست و $f(۱) = ۰$.

اگر $n > ۱$، آن‌گاه به‌ازای kای متعلق به $\mathbf{Z}^+$، $n = ۲^k$، و S را به‌صورت $S_۱ \cup S_۲$ افراز می‌کنیم که در آن $|S_۱| = |S_۲| = n/۲ = ۲^{k-۱}$. برای تعیین ماکسیمم M_i و مینیمم m_i برای هر مجموعهٔ S_i، $i = ۱, ۲$، $f(n/۲)$ مقایسه انجام می‌شود. لذا، به‌ازای $n \geq ۴$ و با معلوم بودن $m_۱$، $M_۱$، $m_۲$، و $M_۲$، برای تعیین عنصرهای ماکسیمم و مینیمم S، مقادیر $m_۱$ و $m_۲$ را با هم و $M_۱$ و $M_۲$ را با هم مقایسه می‌کنیم. بنابراین

$f(n) = ۲f(n/۲) + ۱$، وقتی $n = ۲$، و

$f(n) = ۲f(n/۲) + ۲$، وقتی $n = ۴, ۸, ۱۶, \cdots$

متأسفانه این نتایج، فرضهای قضیهٔ ۱.۱۰ را تأمین نمی‌کنند. امّا، اگر معادلات را به نابرابریها تبدیل کنیم

$$f(۱) \leq ۲$$

$f(n) \leq ۲f(n/۲) + ۲$ به‌ازای $n = ۲^k$، $k \geq ۱$،

آن‌گاه بنابر فرع ۲.۱۰، $f(n)$، تابع پیچیدگی زمان، که به‌وسیلهٔ تعداد مقایسه‌های انجام شده در این شیوهٔ بازگشتی اندازه‌گیری شده است، به‌ازای همهٔ مقادیر $n = ۱, ۲, ۴, ۸, \cdots$، در برابری $f \in O(n^{\log_۲ ۲}) = O(n)$ صدق می‌کند.

می‌توانیم بستگی بین این مثال و مثال ۲۵.۱۰ را حتی بیشتر بررسی کنیم. با توجه به نتیجهٔ قبلی می‌دانیم که اگر $n = 2^k$ ،$|S| = n$ ،$k \geq 1$، آن‌گاه تعداد مقایسه‌های $f(n)$ لازم (در شیوه‌ای مفروض) برای تعیین عنصرهای ماکسیمم و مینیمم S برابر است با $(3/2)(2)^k - 2$. (توجه: در حکم ما در اینجا، متغیر k به‌جای متغیر n در مثال ۲۵.۱۰ گرفته شده‌است.)

چون $n = 2^k$، می‌توانیم بنویسیم

$$f(1) = 0$$

$$f(n) = f(2^k) = \left(\frac{3}{2}\right)(2^k) - 2 = \left(\frac{3}{2}\right)n - 2 \quad \text{به‌ازای} \ n = 2, 4, 8 \cdots$$

بنابراین، درست مثل آنچه با استفاده از فرع ۲.۱۰ به‌دست آوردیم به‌ازای $n \in \{2^k | k \in \mathbf{N}\}$، $f \in O(n)$. □

در همهٔ نتایج ما لازم بوده است که $n = b^k$، به‌ازای مقداری از $k \in \mathbf{N}$، لذا طبیعی است که بپرسیم آیا می‌توانیم در حالتی که n هر عدد صحیح مثبتی باشد کاری انجام دهیم؟ برای پاسخ‌دادن به این سؤال، مفهوم زیر را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲.۱۰ تابع $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$ را یکنوا صعودی می‌نامند اگر به‌ازای همهٔ مقادیر $m, n \in \mathbf{Z}^+$، $m < n \Rightarrow f(m) \leq f(n)$.

این تعریف اجازه می‌دهد که به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، در بعضی شرایط، قضایایی را بررسی کنیم.

قضیه ۲.۱۰ فرض می‌کنیم $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$ یکنوا صعودی است و $g : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$. برای $b \in \mathbf{Z}^+$، $b \geq 2$، فرض می‌کنیم که به‌ازای همهٔ مقادیر $n \in S = \{b^k | k \in \mathbf{N}\}$، $f \in O(g)$. در این شرایط

الف) اگر $g \in O(\log n)$، آن‌گاه $f \in O(\log n)$.

ب) اگر $g \in O(n \log n)$، آن‌گاه $f \in O(n \log n)$.

ج) اگر $g \in O(n^r)$، آن‌گاه به‌ازای $r \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$، $f \in O(n^r)$.

برهان قسمتهای (الف) و (ج) را ثابت می‌کنیم و اثبات قسمت (ب) را برای بخش تمرینها می‌گذاریم. قبل از شروع، باید توجه کنیم که پایهٔ لگاریتم در قسمتهای (الف) و (ب) عددی حقیقی، مثبت، و بزرگتر از یک است.

الف) چون $f \in O(g)$ روی S، و $g \in O(\log n)$، حداقل داریم $f \in O(\log n)$ روی S. لذا بنابر تعریف ۱.۱۰، ثابتهای $m \in \mathbf{R}^+$ و $s \in \mathbf{Z}^+$ وجود دارند به قسمی که به‌ازای همهٔ

مقادیر S ،$n \in S$ ،$n \geq s$

$$f(n) = |f(n)| \leq m|\log n| = m\log n$$

لازم است که ثابتهای $M \in \mathbf{R}^+$ و $s_1 \in \mathbf{Z}^+$ را به قسمتی بیابیم که به‌ازای همهٔ مقادیر $n \geq s_1$، و نه دقیقاً nهای متعلق به S، $f(n) \leq M\log n$.

فرض کنید $t \in \mathbf{Z}^+$، که $s < b^k < t \leq b^{k+1}$ (و $\log s \geq 1$). چون f یکنوا صعودی و مثبت است، داریم

$$\begin{aligned} f(t) \leq f(b^{k+1}) &\leq m\log(b^{k+1}) \\ &= m[\log(b^k) + \log b] \\ &= m\log(b^k) + m\log b \\ &< m\log(b^k) + m\log b\log(b^k) \\ &= m(1 + \log b)\log(b^k) \\ &< m(1+\log b)\log t \end{aligned}$$

بنابراین، با فرض $M = m(1+\log b)$ و $s_1 = b^k + 1$، ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای همهٔ مقادیر $t \in \mathbf{Z}^+$، اگر $t \geq s_1$، آن‌گاه $f(t) < M\log t$. لذا $f(t) \leq M\log t$ و $f \in O(\log n)$.

ج) تحت فرضهای مربوط به این قسمت قضیه، مقادیر ثابت $m \in \mathbf{R}^+$، $s \in \mathbf{Z}^+$ با $f(n) \leq m(n^r)$، به‌ازای آن nهای متعلق به S که برای آنها $n \geq s$، وجود دارند. بنابراین اگر $t \in \mathbf{Z}^+$ با $s < b^k < t \leq b^{k+1}$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} f(t) \leq f(b^{k+1}) \leq m(b^{k+1})^r &= m[b^{(k+1)r}] \\ &= mb^r(b^k)^r \\ &< mb^r t^r \end{aligned}$$

با $M = mb^r$ و $s_1 = b^k + 1$، نتیجه می‌شود که به‌ازای همهٔ مقادیر $t \in \mathbf{Z}^+$، اگر $t \geq s_1$ آن‌گاه $f(t) < Mt^r$ و $f \in O(n^r)$. ■

اینک در تعیین تابع پیچیدگی زمان $f(n)$، برای الگوریتم جستجویی معروف به جستجوی دوتایی، نتیجهٔ قضیهٔ ۲.۱۰ را به‌کار می‌بریم.

در مثال ۵۵.۵ الگوریتمی را تحلیل کردیم که در آن آرایهٔ $A[1]$، $A[2]$، $A[3]$، . . . ، $A[n]$ از اعداد صحیح برای پیداکردن عددی صحیح به نام Key مورد جستجو قرار گرفتند. در آنجا،

درایه‌های آرایه به ترتیبی خاص داده نشدند، لذا ما صرفاً مقدار Key را با تمام عنصرهای آرایهٔ $A[۱]$، $A[۲]$، $A[۳]$، . . . ، $A[n]$ مقایسه کردیم. (آخر، هیچکس دفتر تلفن را برای یافتن شمارهٔ تلفن مشخص خاص، از اوّل تا آخر ورق نمی‌زند: ترتیب‌الفبایی‌نام‌فامیل است که به فرایند جستجو سرعت می‌بخشد.) بیاییم نگاهی به مثالی خاص بیندازیم.

مثال ۳۶.۱۰ آرایهٔ $A[۱]$، $A[۲]$، $A[۳]$، . . . ، $A[۷]$ از اعداد صحیح را در نظر می‌گیریم که در آن $A[۱] = ۲$، $A[۲] = ۴$، $A[۳] = ۵$، $A[۴] = ۷$، $A[۵] = ۱۰$، $A[۶] = ۱۷$، و $A[۷] = ۲۰$، و قرار می‌دهیم $\text{Key} = ۹$. این آرایه را به‌صورت زیر جستجو می‌کنیم:

۱. Key را با درایهٔ مرکز یا نزدیک به مرکز آرایه مقایسه می‌کنیم؛ در اینجا درایهٔ مرکزی $A[۴] = ۷$. چون $\text{Key} > A[۴]$، توجه را بر عنصرهای باقی‌مانده در زیر-آرایهٔ $A[۵]$، $A[۶]$، $A[۷]$ معطوف می‌داریم.

۲. حال Key را با عنصر مرکزی $A[۶]$ مقایسه می‌کنیم. چون $\text{Key} = ۹ < ۱۷ = A[۶]$، به زیر-آرایهٔ ($A[۵]$، $A[۶]$، $A[۷]$) که شامل عنصرهایی کوچکتر از $A[۶]$ است برمی‌گردیم. در اینجا عنصر کوچکتر فقط $A[۵]$ است.

۳. Key را با $A[۵]$ مقایسه و ملاحظه می‌کنیم که $\text{Key} \neq A[۵]$، پس Key در آرایهٔ $A[۱]$، $A[۲]$، $A[۳]$، . . . ، $A[۷]$ وجود ندارد. □

بنابر نتایج مثال ۳۶.۱۰، مشاهدات زیر را برای آرایهٔ (مرتب) کلی، از اعداد صحیح (یا اعداد حقیقی) انجام می‌دهیم. فرض کنید $A[۱]$، $A[۲]$، $A[۳]$، . . . ، $A[n]$ معرف آرایهٔ مفروض باشد و Key معرف عددی صحیح (یا عددی حقیقی) باشد که در جستجوی آنیم. برخلاف آرایهٔ مثال ۵۵.۵، در اینجا

$$A[۱] < A[۲] < A[۳] < \cdots < A[n]$$

۱. ابتدا مقدار Key را با درایه‌ای از آرایه که در مرکز یا نزدیک آن است مقایسه می‌کنیم. این درایه برای عدد فرد n برابر $A[(n + ۱)/۲]$ است و برای عدد زوج n برابر با $A[n/۲]$ است.

خواه n فرد یا زوج باشد عنصری از آرایه که با اندیس $m = [(n + ۱)/۲]$ مشخّص شده عنصری در مرکز یا نزدیک مرکز است. توجه کنید که در این مرحله، ۱ مقدار حد پایینی اندیسهای آرایه است، در حالی‌که n حد بالایی است.

۲. اگر Key برابر $A[m]$ باشد کار تمام است. در غیر این صورت

الف) اگر Key بزرگتر از $A[m]$ باشد، (با این فرایند تقسیم) زیر-آرایهٔ

$$A[m + ۱], A[m + ۲], \cdots , A[n]$$

را جستجو می‌کنیم.

```
Begin

 flag := false;
 lower := 1;
 upper := n;

 While (lower <= upper) and (flag = false) do
  Begin
   center := (lower + upper) Div 2;
   If Key = A[center] then
     flag := true
   Else
     If Key < A[center] then
       upper := center - 1   {The lower subarray is searched.}
     Else lower := center + 1   {The upper subarray is searched.}
  End;

 If flag = false then
  Writeln('The value ', Key, ' is not present in the array.')
 Else Writeln('The value ', Key,' is located in entry ', center,'.')

End.
```

شکل ۱۴.۱۰

ب) اگر Key کوچکتر از $A[m]$ باشد، آن‌گاه فرایند تقسیم را در جستجوی زیرآرایهٔ

$$A[۱], A[۲], \cdots, A[m-۱]$$

به‌کار می‌بریم.

مشاهدات بالا برای بسط قطعه برنامهٔ پاسکال، در شکل ۱۴.۱۰، به‌کار رفته‌اند. در اینجا ورودی، آرایهٔ مرتب $A[۱]$، $A[۲]$، ... ، $A[n]$ از اعداد صحیح، یا اعداد حقیقی است که به ترتیب صعودی‌اند. این آرایه و مقدار عدد صحیح n همراه با مقدار متغیر Key، قبلاً در برنامه داده شده‌اند. اگر عنصرهای آرایه اعداد صحیح (اعداد حقیقی) باشند، آن‌گاه Key باید یک عدد صحیح (عدد حقیقی) باشد. متغیرهای lower و upper متغیرهای صحیح مقداری هستند که برای ذخیره‌کردن حدود پایینی و بالایی زیرنمایه‌های آرایه یا زیرآرایهٔ مورد جستجو به‌کار رفته‌اند. متغیر صحیح center، اندیس عنصری از آرایه (زیرآرایه) را که در مرکز آرایه (زیرآرایه) یا نزدیک آن است ذخیره می‌کند. به‌طور کلی

$$\text{center} = \lfloor(\text{lower} + \text{upper})/۲\rfloor$$

سرانجام، متغیر بولی flag به مقدار کاذب (اگر Key یافت نشود) یا به مقدار واقعی (اگر Key

یافت شود) تخصیص داده می‌شود.

می‌خواهیم پیچیدگی زمان را (در بدترین حالت) برای الگوریتم اجراشده در شکل ۱۴.۱۰ اندازه بگیریم. در اینجا، $f(n)$ تعداد ماکسیمم مقایسه‌های (بین Key و $A[\text{center}]$) لازم را، برای تعیین اینکه آیا عدد Key در آرایهٔ مرتب

$$A[۱], A[۲], \cdots, A[n]$$

ظاهر می‌شود یا نه، حساب می‌کند.

- به‌ازای $n = ۱$، Key با $A[۱]$ مقایسه می‌شود و $f(۱) = ۱$.
- وقتی $n = ۲$، در بدترین حالت، Key با $A[۱]$ و سپس با $A[۲]$ مقایسه می‌شود، لذا $f(۲) = ۲$.
- در حالت $n = ۳$، $f(۳) = ۲$ (در بدترین حالت).
- وقتی $n = ۴$، بدترین حالت وقتی رخ می‌دهد که Key ابتدا با $A[۲]$ مقایسه شده و بعد جستجوی دوتایی $A[۳]$، $A[۴]$ به دنبال آن صورت گیرد. جستجوی $A[۳]$، $A[۴]$ (در بدترین حالت) مستلزم $f(۲)$ مقایسه است. لذا $f(۴) = ۱ + f(۲) = ۳$.

در این مرحله می‌بینیم که $f(۱) \leq f(۲) \leq f(۳) \leq f(۴)$، و حدس می‌زنیم که f تابع یکنوا صعودی است. برای تحقیق این مطلب، روش استقرای ریاضی را به‌صورت دیگرش به‌کار خواهیم برد. در اینجا فرض می‌کنیم که به‌ازای همهٔ مقادیر $i, j \in \{۱, ۲, ۳, \cdots, n\}$، $i < j \Rightarrow f(i) \leq f(j)$. اینک عدد صحیح $(n + ۱)$ را در نظر می‌گیریم. دو حالت را باید بررسی کنیم.

۱. $n+۱$ فرد است: در اینجا به‌ازای مقداری از $k \in \mathbf{Z}^+$ می‌نویسیم، $n = ۲k$ و $n+۱ = ۲k+۱$. در بدترین حالت، $f(n+۱) = f(۲k+۱) = ۱ + f(k)$، که ۱، مقایسهٔ Key با $A[k+۱]$ را می‌رساند، و $f(k)$، تعداد (ماکسیمم) مقایسه‌های لازم در جستجوی دوتایی زیرآرایهٔ $A[۱]$، $A[۲]$، ...، $A[k]$ یا زیرآرایهٔ $A[k + ۲]$، $A[k + ۳]$، ...، $A[۲k + ۱]$ را. امّا

$$f(n) = f(۲k) = ۱ + \max\{f(k - ۱), f(k)\}$$

چون $k - ۱, k < n$، با فرض استقرا داریم $f(k - ۱) \leq f(k)$، پس

$$f(n) = ۱ + f(k) = f(n + ۱)$$

۲. $n+1$ زوج است: در این حال به‌ازای مقداری از $r \in \mathbf{Z}^+$، داریم $n+1 = 2r$، و در بدترین حالت، بنابر فرض استقرا $f(n+1) = 1 + \max\{f(r-1), f(r)\} = 1 + f(r)$، بنابراین

$$f(n) = f(2r-1) = 1 + f(r-1) \leq 1 + f(r) = f(n+1)$$

در نتیجه، تابع f یکنوا صعودی است.

اینک وقت آن است که زمان پیچیدگی در بدترین حالت را برای الگوریتم جستجوی دوتایی، با استفاده از تابع $f(n)$، تعیین کنیم. چون

$$f(1) = 1$$

و به‌ازای $n = 2^k$، $k \geq 1$

$$f(n) = f(n/2) + 1$$

از قضیهٔ ۱.۱۰ نتیجه می‌شود که (با $a = 1$، $b = 2$، و $c = 1$)، $f(n) = \log_2 n + 1$، و به‌ازای $n \in \{1, 2, 4, 8, \cdots\}$، $f \in O(\log_2 n)$.

امّا با توجه به یکنوا صعودی بودن f، از قضیهٔ ۲.۱۰ نتیجه می‌شود که (به‌ازای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{Z}^+$)، $f \in O(\log_2 n)$. در نتیجه، مورد جستجوی دوتایی، یک الگوریتم $O(\log_2 n)$ است، در حالی‌که الگوریتم مورد جستجوی مثال ۵۵.۵، به‌صورت $O(n)$ است. بنابراین، وقتی مقدار n زیاد می‌شود، جستجوی دوتایی الگوریتمی کاراتر است ــ امّا لازمهٔ آن، شرط اضافی مرتب بودن آرایه است.

در این بخش بعضی از مفاهیم پایه‌ای در مطالعهٔ الگوریتمهای تقسیم و برتری را معرفی کردیم. همچنین، مطالبی را که ابتدا دربارهٔ پیچیدگی محاسباتی و تحلیل الگوریتم در بخشهای ۷.۵ و ۸.۵ عرضه کردیم بسط دادیم.

تمرینهای بخش شامل بسطهای نتایجی است که در این بخش معرفی شده‌اند. خواننده‌ای که می‌خواهد این مبحث را بیشتر دنبال کند در مراجع این فصل مطالب مفید و جالبی خواهد یافت.

تمرینهای ۶.۱۰

۱. در هریک از موارد زیر، $f: \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$. $f(n)$ را نسبت به مجموعهٔ مفروض S حل کنید و شکل مناسب «اَی بزرگ» مربوط به f را روی S تعیین کنید.

الف)

$$f(۱) = ۵$$
$$f(n) = ۴f(n/۳) + ۵, \quad n = ۳, ۹, ۲۷, \cdots$$
$$S = \{۳^i | i \in \mathbf{N}\}$$

ب)

$$f(۱) = ۷$$
$$f(n) = f(n/۵) + ۷, \quad n = ۵, ۲۵, ۱۲۵, \cdots$$
$$S = \{۵^i | i \in \mathbf{N}\}$$

ج)

$$f(۱) = ۳$$
$$f(n) = ۸f(n/۲) + ۳, \qquad n = ۲, ۴, ۸, \cdots$$
$$S = \{۲^i | i \in \mathbf{N}\}$$

۲. فرض می‌کنیم $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$ با $b \geq ۲$، و $d \in \mathbf{N}$. ثابت کنید که جواب رابطهٔ بازگشتی

$$f(۱) = d$$
$$f(n) = af(n/b) + c, \quad n = b^k, k \geq ۱$$

در روابط زیر صدق می‌کند

الف) وقتی $a = ۱$، به‌ازای $k \in \mathbf{N}$ و $n = b^k$، $f(n) = d + c\log_b n$.

ب) وقتی $a \geq ۲$، به‌ازای $k \in \mathbf{N}$ و $n = b^k$، $f(n) = dn^{\log_b a} + (c/(a-۱))[n^{\log_b a} - ۱]$.

۳. شکلهای مناسب «اُی بزرگ» مربوط به f را روی $\{b^k | k \in \mathbf{N}\}$ در قسمتهای (الف) و (ب) تمرین ۲ تعیین کنید.

۴. در هریک از موارد زیر، $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$. $f(n)$ را نسبت به مجموعهٔ مفروض S حل کنید، و شکل مناسب «اُی بزرگ» مربوط به f را روی S تعیین نمایید.

الف)

$$f(۱) = ۰$$
$$f(n) = ۲f(n/۵) + ۳, \quad n = ۵, ۲۵, ۱۲۵, \cdots$$
$$S = \{۵^i | i \in \mathbf{N}\}$$

ب)

$$f(۱) = ۱$$
$$f(n) = f(n/۲) + ۲, \quad n = ۲, ۴, ۸, \cdots$$
$$S = \{۲^i | i \in \mathbf{N}\}$$

ج)

$$f(۳) = ۱۹$$
$$f(n) = ۶f(n/۳) + ۱, \quad n = ۳, ۹, ۲۷, \cdots$$
$$S = \{۳^i | i \in \mathbf{N}\}$$

۵. مسابقهٔ تنیس برای n بازیکن را در نظر می‌گیریم، که در آن $n = ۲^k$، $k \in \mathbf{Z}^+$. در دور اول $n/۲$ بازی انجام شده‌است، و $n/۲$ برنده به دور دوم راه یافته‌اند، که در آن $n/۴$ بازی انجام شده‌است. این فرایند نصف شدن تا تعیین یک برنده ادامه یافته است.

الف) برای $n = ۲^k$، $k \in \mathbf{Z}^+$، فرض می‌کنیم $f(n)$ تعداد کل بازیهایی باشد که در مسابقه انجام شده‌اند. رابطه‌ای بازگشتی برای $f(n)$ به‌صورت زیر بیابید و آن را حل کنید

$$f(۱) = d$$
$$f(n) = af(n/۲) + c, \qquad n = ۲, ۴, ۸, \cdots$$

که در آنها، a، c و d مقادیری ثابت‌اند.

ب) نشان دهید که پاسخ شما برای قسمت (الف) جوابگوی رابطهٔ بازگشتی زیر نیز هست

$$f(۱) = d$$
$$f(n) = f(n/۲) + (n/۲), \qquad n = ۲, ۴, ۸, \cdots$$

۶. **الف)** برهان فرع ۱.۱۰ را کامل کنید.

ب) قسمت (ب) قضیهٔ ۲.۱۰ را ثابت کنید.

۷. تابع پیچیدگی زمان در بهترین حالت برای جستجوی دوتایی چیست؟

۸. **الف)** شیوهٔ مربوط به مثال ۳۵.۱۰ را به‌صورت زیر اصلاح می‌کنیم: به‌ازای هر $S \subset \mathbf{R}$، با $|S| = n$، S را به‌صورت $S_۱ \cup S_۲$ افراز می‌کنیم به‌طوری که

$$|S_۱| = |S_۲| \qquad \text{به‌ازای } n \text{ زوج}$$
$$|S_۱| = ۱ + |S_۲| \qquad \text{به‌ازای } n \text{ فرد}$$

نشان دهید اگر $f(n)$، تعداد مقایسه‌های لازم (در این شیوه) برای تعیین عنصرهای ماکسیمم و مینیمم S باشد، آن‌گاه f تابع یکنوا صعودی است.

ب) صورت مناسب «اُی بزرگ» مربوط به تابع f قسمت (الف) چیست؟

۹. در فرع ۲.۱۰ با یافتن صورت مناسب «اُی بزرگ» مربوط به تابع $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R} \cup \{۰\}$ سروکار داشتیم، که در آن

$$f(۱) \le c$$
$$f(n) \le af(n/b) + c, \quad k \in \mathbf{Z}^+ \text{ ،} n = b^k \text{ به‌ازای}$$

در اینجا، ثابت c در نابرابری دوم معرف مدت زمان لازم برای تفکیک مسألهٔ مفروض با اندازهٔ n، به a مسألهٔ (مشابه) کوچکتر با اندازهٔ n/b و ترکیب a جواب این مسائل کوچکتر برای به‌دست آوردن جواب مسألهٔ اصلی با اندازه n است. اینک وضعیتی را بررسی می‌کنیم که در آن، این مدت زمان ثابت نیست ولی به n بستگی دارد.

الف) فرض کنید $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$، با $b \ge ۲$. فرض کنید $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}^+ \cup \{۰\}$ تابع یکنوا صعودی باشد که در آن

$$f(۱) \le c$$
$$f(n) \le af(n/b) + cn \qquad k \in \mathbf{Z}^+ \text{ ،} n = b^k \qquad \text{به‌ازای}$$

با استفاده از استدلالی شبیه به آنچه در قضیهٔ ۱.۱۰ (برای برابریها) داده شد ثابت کنید که به‌ازای همهٔ مقادیر $n = ۱, b, b^۲, b^۳, \cdots$

$$f(n) \le cn \sum_{i=۰}^{k} (a/b)^i$$

ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) نشان دهید که وقتی $a = b$، $f \in O(n \log n)$.
(پایهٔ تابع لگاریتم، در اینجا عددی حقیقی و بزرگتر از ۱ است.)
ج) وقتی $a \neq b$، نشان دهید که از قسمت (الف) نتیجه می‌شود

$$f(n) \leq \left(\frac{c}{a-b}\right)(a^{k+1} - b^{k+1})$$

د) از قسمت (ج) ثابت کنید که
(i) وقتی $a < b$، $f \in O(n)$، و
(ii) وقتی $a > b$، $f \in O(n^{\log_b a})$.
(توجه: صورت «اُی بزرگ» مربوط به f در هریک از قسمتهای (ب) و (د)، برای موقعی است که f روی $\mathbf{Z}^+$ است، و نه روی $\{b^k | k \in \mathbf{N}\}$.)

۷.۱۰ خلاصه و مرور تاریخی

در این فصل، رابطهٔ بازگشتی به‌صورت ابزاری دیگر برای حل مسائل ترکیبیاتی آمده است. در این مسائل وضعیتی مفروض را تحلیل می‌کنیم و آن‌گاه نتیجهٔ a_n را برحسب نتایج مربوط به اعداد صحیح نامنفی کوچکتری بیان می‌نماییم. همین‌که رابطهٔ بازگشتی تعیین شد، می‌توانیم آن را برای هر مقدار a_n (در جریان استدلال) حل کنیم. وقتی به کامپیوتر دسترسی داریم، چنین رابطه‌هایی به‌ویژه قابل ارزیابی‌اند، خصوصاً اگر نتوانیم آنها را به‌صورتی صریح حل کنیم.

مطالعهٔ رابطه‌های بازگشتی ممکن است به رابطهٔ فیبوناتچی

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \geq 0, F_0 = 0, F_1 = 1$$

بازگردد که آن را لئوناردوپیسایی (حدود ۱۱۷۵ـ۱۲۵۰) در ۱۲۰۲ بررسی کرده است. او در لیبرآباکی (کتاب حساب) خود از مسألهٔ مربوط به تعداد جفت خرگوشهایی صحبت می‌کند که در یک سال نتیجه می‌شوند به شرطی که با یک جفت خرگوشی شروع کنیم که در انتهای هر ماه یک جفت جدید تولید می‌کنند. هر جفت جدید هریک ماه بعد از تولد جفتی را تولید می‌کند و فرض می‌کنیم که در طول یک سال هیچ خرگوشی نمیرد. بنابراین در آخر ماه اول دو جفت خرگوش داریم، بعد از دو ماه سه جفت، بعد از سه ماه پنج جفت به همین قیاس برای ماههای دیگر. [همان‌طور که در خلاصهٔ فصل ۹ اشاره کردیم، آبراهام دمواور (۱۶۶۷ـ۱۷۵۴) این نتیجه را صریحاً با روش تابعهای مولّد در ۱۷۱۸ به‌دست آورد.] همین دنباله درکار ریاضیدان آلمانی، یوهان کپلر[1] (۱۵۷۱ـ۱۶۳۰) پیدا شده است که آن را در مطالعاتش دربارهٔ چگونگی آرایش برگهای درخت یا گلهایی که پیرامون

1. Johannes Kepler

ساقه‌اش جوانه می‌زنند به‌کار برده است. ریاضیدان فرانسوی، گابریل لامه[1] (۱۷۹۵ـ۱۸۷۰) در ۱۸۱۴ این دنباله را در تحلیلش از کارایی الگوریتم اقلیدسی به‌کار برده است. بعدها، فرانسوا لوکا[2] (۱۸۴۲ـ۱۸۹۱) بسیاری از ویژگیهای این دنباله را نتیجه گرفته و اولین فردی بوده است که این اعداد را دنبالهٔ فیبوناتچی نامیده است. جین[3] [۱۰] در مقاله‌ای در مجلّهٔ UMAP، بسیاری از کاربردهای این دنباله را داده است. هانسبرگر[4] [۹] در فصل ۸ شرح ریاضی خود، محاسبه‌ای جالب از اعداد فیبوناتچی را تهیه کرده و دنبالهٔ مربوط به آن را اعداد لوکا نامیده است.

مطالبی را قابل مقایسه با آنچه که در اینجا بیان شد می‌توان در فصل ۳ لیو [۱۴] یافت. برای مطالب بیشتر دربارهٔ بسط نظری رابطه‌های بازگشتی خطی با ضریبهای ثابت، فصل ۹ اثر فینیتسیو[5] و لاداس[6] [۶] را بررسی کنید. این کتاب شامل کاربردی از این دنباله در نورشناسی است که در آن، رابطهٔ بازگشتی برای تعیین مسیر شعاعی که از یک رشته عدسیهای نازک متساوی‌الفاصله می‌گذرد به‌کار رفته است.

کاربردهای مربوط به نظریهٔ احتمال را که با پیشامدهای بازگشتی، گامهای تصادفی، و مسائل ورشکستگی سروکار دارند می‌توان در فصلهای سیزده و چهارده کتاب درسی فلر[7] [۵] یافت. شربرت[8] در مدول UMAP [۱۷] معادلات تفاضلی را معرفی کرده و کاربردی از آنها را در اقتصاد که به قضیهٔ تار عنکبوت معروف است افزوده است. کتاب درسی اثر گولدبرگ[9] [۸] کاربردهای بیشتری در زمینهٔ علوم اجتماعی دارد.

تکنیکهای بازگشتی در تولید جایگشتها، ترکیبها، و افراز اعداد صحیح در فصل ۳ اثر بروآلدی[10] [۲] و فصل ۵ اثر پیج[11] و ویلسن [۱۵] شکل گرفته‌اند. الگوریتمی که در بخش ۱۰ ۱ برای جایگشتهای $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ داده شد ابتدا در اثر استین‌هاوس[12] [۱۹] ظاهر شده‌است و غالباً الگوریتم تنظیم علامت مجاور نامیده می‌شود. این نتیجه را بعدها، تروتر[13] [۲۰]، و جانسن [۱۱] مستقلاً از نو کشف کردند. روشهای کارای ذخیره‌سازی برای جایگشتها و ساختارهای ترکیبیاتی دیگر به تفصیل در کتاب درسی اثر نوث[14] [۱۲] تجزیه و تحلیل شده‌اند. اثر راین گولت،[15] نیورگلت،[16] و دیو[17] نیز با چنین الگوریتمها و اجراهای کامپیوتری آنها سروکار دارد.

برای آنهایی که مبحث درختهای دوتایی مرتب ریشه‌دار بخش ۵.۱۰ خوش‌آیند بوده است، فصل ۳ اثر آهو[18]، هاپکرافت[19]، و اولمن[20] جالب است. مطالبی اساسی برای مثال مربوط به پشته‌ها در صفحهٔ ۸۶ کتاب درسی اثر ایون [۴] داده شده است. در مقالهٔ مارتین گاردنر [۷] مثالهای زیاد دیگری دیده می‌شود که در آنها اعداد کاتالان ظاهر می‌شوند. ملاحظات محاسباتی در تعیین اعداد کاتالان در مقاله‌ای از کمبل [۳] بررسی شده است. در فصل ۹ اثر هانسبرگر [۹]

1. Gabriel Lamé 2. François Lucas 3. R. V. Jean 4. R. Honsberger
5. N. Finizio 6. G. Ladas 7. W. Feller 8. D. Sherbert 9. S. Goldberg
10. R. Brualdi 11. E. Page 12. H. Steinhaus 13. H. Trotter 14. D. Knuth
15. E. Reingold 16. J. Nievergelt 17. N. Deo 18. A. Aho 19. J. Hopcroft
20. J. Ullman

از ارتباط بین این اعداد و اصل بازتابی (که در تمرین ۳۰ تمرینهای گوناگون فصل ۱ داده شده است) بحث می‌شود.

سرانجام، مطالب مربوط به الگوریتمهای تقسیم و برتری بخش ۶.۱۰ از نمایش منسوب به استانات[1] و مک‌آلیستر[2] در بخش ۳.۵ مرجع [۱۸] مدل‌برداری شده است. فصل ۱۰ کتاب درسی اثر آهو، هاپکرافت، و اولمن [۱] اطلاعاتی بیشتر دربارهٔ این مطلب به‌دست می‌دهد. کاربردی از این مدل در الگوریتم ضرب ماتریسی، در فصل ۱۰ کتاب درسی لیو [۱۳] آمده است.

مراجع

1. Aho, Alfred V., Hopcroft, John E., and Ullman, Jeffrey D. *Data Structures and Algorithms*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1983.
2. Brualdi, Richard A. *Introductory Combinatorics*. New York: Elsevier North-Holland, 1977.
3. Campbell, Douglas M. "The Computation of Catalan Numbers." *Mathematics Magazine* 57, no. 4 (September 1984): pp. 195–208.
4. Even, Shimon. *Graph Algorithms*. Rockville, Md.: Computer Science Press, 1979.
5. Feller, William. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I, 3rd ed. New York: Wiley, 1968.
6. Finizio, N., and Ladas, G. *An Introduction to Differential Equations (with Difference Equations, Fourier Series and Partial Differential Equations)*. Belmont, Calif.: Wadsworth Publishing Company, 1982.
7. Gardner, Martin. "Mathematical Games, Catalan Numbers: An Integer Sequence that Materializes in Unexpected Places." *Scientific American* 234, no. 6 (June 1976): pp. 120–125.
8. Goldberg, Samuel. *Introduction to Difference Equations (with Illustrative Examples from Economics, Psychology, and Sociology)*. New York: Wiley, 1958.
9. Honsberger, Ross. *Mathematical Gems III* (The Dolciani Mathematical Expositions, Number Nine). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1985.
10. Jean, Roger V. "The Fibonacci Sequence." *The UMAP Journal* 5, no. 1 (1984): pp. 23–47.
11. Johnson, Selmer M. "Generation of Permutations by Adjacent Transposition." *Mathematics of Computation* 17 (1963): pp. 282–285.
12. Knuth, Donald E. *The Art of Computer Programming/Volume 3 Sorting and Searching*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1973.
13. Liu, C. L. *Elements of Discrete Mathematics*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1985.
14. Liu, C. L. *Introduction to Combinatorial Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1968.
15. Page, E. S., and Wilson, L. B. *An Introduction to Computational Combinatorics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1979.

---

1. D. F. Stanat 2. D. F. Mc Allister

16. Reingold, E. M., Nievergelt, J., and Deo, N. *Combinatorial Algorithms: Theory and Practice*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1977.
17. Sherbert, Donald R. *Difference Equations with Applications*, UMAP Module 322. Cambridge, Mass.: Birkhauser Boston, 1980.
18. Stanat, Donald F., and McAllister, David F. *Discrete Mathematics in Computer Science*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1977.
19. Steinhaus, Hugo D. *One Hundred Problems in Elementary Mathematics*. New York: Basic Books, 1964.
20. Trotter, H. F. "ACM Algorithm 115—Permutations," *Communications of the ACM* 5 (1962): pp. 434–435.

تمرینهای گوناگون

۱. به‌ازای $n \in \mathbf{Z}^+$ و $n \geq k+1 \geq 1$، درستی فرمول بازگشتی

$$\binom{n}{k+1} = \left(\frac{n-k}{k+1}\right)\binom{n}{k}$$

را برای ضریبهای دو جمله‌ای به‌طور جبری تحقیق کنید.

۲. الف) به‌ازای $n \geq 0$، فرض کنید B_n معرف تعداد افرازهای $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ باشد. برای افرازهای ϕ قرار دهید $B_0 = 1$. تحقیق کنید که به‌ازای همهٔ مقادیر $n \geq 0$

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{n-i} B_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i$$

(اعداد B_i، $i \geq 0$، را که به اریک تمپل بل (۱۸۸۳ـ۱۹۶۰) منسوب‌اند اعداد بل می‌نامند.)

ب) اعداد بل و اعداد نوع اوّل استرلینگ چه ارتباطی با هم دارند؟

۳. فرض می‌کنیم $n, k \in \mathbf{Z}^+$، $p(n,k)$ را تعداد افرازهای n به دقیقاً k جمعوند تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که

$$p(n,k) = p(n-1, k-1) + p(n-k, k)$$

۴. برای تعداد دنباله‌های به درازای n از اعداد به مبنای ۴ (۰، ۱، ۲، ۳) که نمادهای متوالی مشابه ندارند رابطه‌ای بازگشتی بیابید و آن را حل کنید.

۵. به ازای $n \geq 1$، فرض کنید a_n، تعداد راههای نوشتن n به‌صورت مجموع مرتبی از اعداد صحیح مثبت فرد باشد. (مثلاً $a_4 = 3$، زیرا $4 = 1+1+1+1 = 3+1 = 1+3$.) رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید و آن را حل کنید.

۶. به‌ازای $n \geq ۱$، فرض کنید a_n، تعداد nتاییهای (مرتب) $(x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$ باشد که در آنها $x_i \in \{۰, ۱\}$ به‌ازای $۱ \leq i \leq n$، و $x_۱ \leq x_۲ \geq x_۳ \leq x_۴ \geq x_۵ \leq \cdots$. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید و آن را حل کنید.

۷. فرض کنید $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$.

الف) $A^۲$، $A^۳$، و $A^۴$ را حساب کنید.

ب) فرمولی کلی برای A^n، $n \in \mathbf{Z}^+$، حدس بزنید و با روش استقرای ریاضی حدس خود را ثابت کنید.

۸. گیریم $\alpha = (۱ + \sqrt{۵})/۲$ و $\beta = (۱ - \sqrt{۵})/۲$.

الف) تحقیق کنید که $\alpha^۲ = \alpha + ۱$ و $\beta^۲ = \beta + ۱$.

ب) نشان دهید که $F_k = (\alpha^k - \beta^k)/(\alpha - \beta)$، $k \geq ۰$، که در آن، $\{F_k | k \geq ۰\}$ دنبالهٔ فیبوناتچی است.

ج) ثابت کنید که به‌ازای هر $n \geq ۰$، $\sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} F_k = F_{۲n}$.

د) نشان دهید که $\alpha^۳ = ۱ + ۲\alpha$ و $\beta^۳ = ۱ + ۲\beta$.

ه) ثابت کنید که به‌ازای هر $n \geq ۰$، $\sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} ۲^k F_k = F_{۳n}$.

۹. برای $n \in \mathbf{Z}^+$، d_n معرف تعداد پریشیهای $\{۱, ۲, ۳, \cdots, n\}$، به‌صورتی است که در بخش ۳.۸ از آن بحث شد.

الف) اگر $n > ۲$، نشان دهید که d_n در رابطهٔ بازگشتی

$$d_n = (n - ۱)(d_{n-۱} + d_{n-۲}), d_۲ = ۱, d_۱ = ۰$$

صدق می‌کند.

ب) چگونه می‌توان $d_۰$ را تعیین کرد به قسمی که نتیجهٔ قسمت (الف) برای $n \geq ۲$ معتبر باشد؟

ج) نتیجهٔ قسمت (الف) را به‌صورت $d_n - nd_{n-۱} = -[d_{n-۱} - (n - ۱)d_{n-۲}]$ می‌نویسیم. چگونه می‌توان $d_n - nd_{n-۱}$ را برحسب $d_{n-۲}$، $d_{n-۳}$ بیان کرد؟

د) نشان دهید که $d_n - nd_{n-۱} = (-۱)^n$.

ه) فرض کنید $f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} (d_n x^n)/n!$. دو طرف معادلهٔ قسمت (د) را در $x^n/n!$ ضرب و به‌ازای $n \geq ۲$، مجموعیابی کنید و تحقیق نمایید که $f(x) = (e^{-x})/(۱ - x)$ بنابراین

$$d_n = n! \left[۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \cdots + \frac{(-۱)^n}{n!} \right]$$

۱۰. به‌ازای $n \geq 0$ فرض کنید $m = [(n+1)/2]$. ثابت کنید که

$$F_{n+2} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n-k+1}{k}$$

(در صورت تمایل می‌توانید برگردید و نگاهی به مثالهای ۱۵.۹ و ۱۰.۱۰ بیندازید.)

۱۱. به‌ازای $n \geq 0$، n خم بستهٔ محدب در صفحه‌ای رسم می‌کنیم به قسمی که هر خم هر یک از خمهای دیگر را در دقیقاً دو نقطه قطع کند و هیچ سه خمی بر هم منطبق نباشند. اگر a_n معرف تعداد ناحیه‌هایی در صفحه باشد که از این خمها نتیجه می‌شوند، رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید و آن را حل کنید.

۱۲. الف) با رسم دو خط موازی، صفحه‌ای را به سه ناحیه تقسیم می‌کنیم. به‌ازای $n \geq 0$، n خط دیگر به قسمی رسم کنید که هر خط تمام خطهای دیگر، از جمله همان دو خط موازی را که با آنها شروع کردیم قطع کند. هیچ سه خطی از این $n+2$ خط برهم منطبق نیستند. رابطه‌ای بازگشتی برای تعداد ناحیه‌هایی که در این صفحه از این $n+2$ خط حاصل می‌شوند، بیابید و آن را حل کنید.

ب) اگر k خط موازی وجود داشته باشند، $k \geq 2$، به قسمت (الف) پاسخ دهید.

۱۳. در یک مدل جامعه‌ای، احتمال آنکه زن و شوهری n طفل داشته باشند در رابطهٔ بازگشتی $p_n = 0{,}6 p_{n-1}$، $n \geq 1$ صدق می‌کند. (الف) p_n را برحسب p_0 بیابید. (ب) با داشتن رابطهٔ $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$، مقدار p_0 را تعیین کنید.

۱۴. با رعایت برخی شرایط جغرافیایی، به‌جای رابطهٔ بازگشتی تمرین ۱۳، رابطهٔ $p_n = (1/n)p_{n-1}$، $n \geq 1$، را قرار می‌دهیم. مقدار p_n را برحسب p_0 بیابید و p_0 را برای این مدل تعیین کنید.

۱۵. به‌ازای $n \geq 0$، فرض کنید سکه‌ای را $2n$ بار بیندازیم.

الف) اگر a_n تعداد دنباله‌های $2n$ پرتابی باشد که در آنها n شیر و n خط رخ داده‌اند، a_n را برحسب n بیابید.

ب) ثابتهای r، s، و t را به قسمی بیابید که $(r+sx)^t = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

ج) فرض کنید b_n معرف تعداد دنباله‌های $2n$ پرتابی باشد که در آنها برای اولین بار فقط بعد از انجام $2n$ پرتاب تعداد شیرها و خطها برابر شوند. (مثلاً، اگر $n = 3$، آن‌گاه HHHTTT و HHTHTT در b_n به‌حساب می‌آیند ولی HTHHTT و HHTTHT به‌حساب نمی‌آیند.) تعریف کنید $b_0 = 0$ و نشان دهید که به‌ازای همهٔ مقادیر $n \geq 1$

$$a_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

د) فرض کنید $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. نشان دهید که $g(x) = 1 - 1/f(x)$، و سپس آن را نسبت به b_n، $n \geq 1$، حل کنید.

۱۶. (ورشکستگی قمارباز)

الف) A و B با هم بازی می‌کنند. احتمال برد هر یک $\frac{۱}{۲}$ است. حالت برابری وجود ندارد، و بازیها بدین مفهوم مستقل‌اند که هرچند بار A و B بازی کنند احتمال برد هر بازیکن در بازی بعدی باز $\frac{۱}{۲}$ است. پس از هر بازی، بازنده به برنده ۲۵ سنت می‌دهد. اگر A دو دلار و B دو دلار و نیم برای بازی داشته باشند و آن‌قدر با هم بازی کنند تا یکی بی‌پول شود احتمال اینکه A بی‌پول شود چقدر است؟

ب) اگر B خسته بوده و در نتیجه احتمال بردش در هر بازی $\frac{۱}{۴}$ باشد، به قسمت (الف) پاسخ دهید.

۱۷. فرض کنید A و B مجموعه‌هایی هستند با $|A| = m \geq n = |B|$، و $a(m,n)$ تعداد تابعهای پوشا از A به B باشند. نشان دهید که

$$a(m,۱) = ۱$$

و وقتی $m \geq n > ۱$، $a(m,n) = n^m - \sum_{i=۱}^{n-۱} \binom{n}{i} a(m,i)$

۱۸. برای $m, n \in \mathbf{Z}^+$ فرض کنید $f(n,m)$ تعداد افرازهای n باشد که در آنها جمعوندها دنبالهٔ ناصعودی اعداد صحیح مثبت‌اند و هیچ جمعوندی از m تجاوز نمی‌کند. مثلاً برای $n = ۴$ و $m = ۲$ به‌دست می‌آوریم $f(۴,۲) = ۳$، زیرا در این مورد با سه افراز

$$۴ = ۲ + ۲, \quad ۴ = ۲ + ۱ + ۱, \quad ۴ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

سروکار داریم.

الف) تحقیق کنید که به‌ازای همهٔ مقادیر $m, n \in \mathbf{Z}^+$،

$$f(n,m) = f(n-m,m) + f(n,m-۱)$$

ب) برای محاسبهٔ $f(n,m)$ به‌ازای $n, m \in \mathbf{Z}^+$ برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید).

ج) برای محاسبهٔ $p(n)$، تعداد افرازهای هر عدد صحیح مثبت n، برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید).

۱۹. وقتی رقمهای یکان اعداد فیبوناتچی F_n، $n \geq ۰$، را بررسی می‌کنیم متوجه می‌شویم که این رقمها دنباله‌ای تشکیل می‌دهند که بعد از ۶۰ جمله تکرار می‌شود. [این ویژگی را اولین بار ژوزف لویی لاگرانژ (۱۷۳۶ـ۱۸۱۳) کشف کرد.] برای محاسبهٔ این دنبالهٔ ۶۰ رقمی، برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید (یا الگوریتمی تهیه کنید).

پاسخها

فصل ۱ اصول اصلی شمارش

بخشهای ۱.۱ و ۲.۱ـ صفحهٔ ۱۷

۱. الف) ۱۳ ب) ۴۰ ج) اصل جمع در قسمت (الف)؛ اصل ضرب در قسمت (ب).

۳. الف) ۲۸۸ ب) ۲۴ ج) ۸

۵. $۲^۹$

۷. $۴! = ۲۴$

۹. $۲۶ + ۲۶(۳۶) + ۲۶(۳۶)^۲ + \cdots + ۲۶(۳۶)^۷ = \sum_{i=۰}^{۷} ۲۶(۳۶)^i$

۱۱. الف) $۷! = ۵۰۴۰$ ب) $(۴!)(۳!) = ۱۴۴$

ج) $(۵!)(۳!) = ۷۲۰$ د) $۲(۳!)(۴!) = ۲۸۸$

ه) $(۴!)(۳!) = ۱۴۴$

۱۳. الف) $۱۲!/(۳!۲!۲!۲!)$ ب) $۲[۱۱!/(۳!۲!۲!۲!)]$

ج) $[۶!/(۳!۲!)][۷!/(۲!۲!)]$ د) ۱۲۶۰ در قسمت (ج)؛ ۱۶۶۳۲۰ در قسمت (الف).

۱۵. الف) $n = ۱۰$ ب) $n = ۵$ ج) $n = ۵$

۱۷. الف) $(۱۰!)/(۲!۷!) = ۳۶۰$ ب) $(۱۰!)/(۲!۷!) = ۳۶۰$

ج) فرض کنید x، y، و z اعداد حقیقی دلخواه و m، n، و p اعداد صحیح نامنفی باشند. تعداد مسیرهای از (x, y, z) به $(x + m, y + n, z + p)$، همان‌طور که در قسمت (الف) شرح داده شد، برابر است با $(m + n + p)!/(m!n!p!)$.

د) ۲۱۰

۱۹. الف) $۹ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ = ۱۳۶۰۸۰$ ب) ۹×۱۰^۵

(i) (الف) ۶۸۸۸۰ (ب) ۴۵۰۰۰۰

(ii) (الف) ۲۸۵۶۰ (ب) ۱۸۰۰۰۰

(iii) (الف) ۳۳۶۰۰ (ب) ۲۲۵۰۰۰

۲۱. الف) $۲^{۱۰}$ ب) $۳^{۱۰}$ ج) $۴^{۱۰}$؛ $۵^{۱۰}$

۲۳. الف) $۶!$ ب) $۲(۵!) = ۲۴۰$

۲۵. الف) بلوک $۱۶۵۲۲ = ۱۲۸^۲ + ۱۲۸ + ۱۰$؛ ۸۴۵۹۲۶۴ بایت.
ب) بلوک $۲۱۱۳۶۷۴ = ۱۲۸^۳ + ۱۲۸^۲ + ۱۲۸ + ۱۰$؛ ۱۰۸۲۲۰۱۰۸۸ بایت.

بخش ۱.۳ـ صفحهٔ ۳۰

۱. $۱۵ = ۶!/(۲!۴!) = \binom{۶}{۲}$. انتخابهای به اندازهٔ ۲ عبارت‌اند از ab، ac، ad، ae، af، bc، bd، be، bf، cd، ce، cf، de، df، ef.

۳. الف) $۱۲۵۹۷۰ = \binom{۲۰}{۱۲}$ ب) $۴۴۱۰۰ = \binom{۱۰}{۶}\binom{۱۰}{۶}$
ج) $\sum_{i=۱}^{۵} \binom{۱۰}{۱۲-۲i}\binom{۱۰}{۲i}$ د) $\sum_{i=۷}^{۱۰} \binom{۱۰}{i}\binom{۱۰}{۱۲-i}$
ه) $\sum_{i=۸}^{۱۰} \binom{۱۰}{i}\binom{۱۰}{۱۲-i}$.

۵. الف) $۲۸ = \binom{۸}{۲}$ ب) $۷۰ = \binom{۸}{۴}$ ج) $۲۸ = \binom{۸}{۶}$ د) $۳۷ = \binom{۸}{۶} + \binom{۸}{۷} + \binom{۸}{۸}$

۷. الف) ۱۲۰ ب) ۵۶ ج) ۱۱۰

۹. الف) $۳۶۹۶۰۰ = ۱۲!/[(۳!)^۴] = \binom{۱۲}{۳}\binom{۹}{۳}\binom{۶}{۳}\binom{۳}{۳}$
ب) $۲۰۷۹۰۰ = ۱۲!/[(۴!)^۲(۲!)^۲] = \binom{۱۲}{۴}\binom{۸}{۴}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}$

۱۱. $۷۳۵۰ = \binom{۸}{۴}\left(\frac{۷!}{۴!۲!}\right)$

۱۳. الف) $۱۰۵ = \binom{۱۵}{۲}$ ب) $۲۳۰۰ = \binom{۲۵}{۳}$؛ $\binom{۲۵}{۳}$؛ $۱۲۶۵۰ = \binom{۲۵}{۴}$

۱۵. الف) $۲۲۰ = \binom{۱۰}{۱} + \binom{۱۰}{۱}\binom{۹}{۱} + \binom{۱۰}{۳}$ ب) $۷۰۵ = \binom{۱۰}{۱}\binom{۹}{۱} + \binom{۱۰}{۱}\binom{۹}{۲} + \binom{۱۰}{۲} + \binom{۱۰}{۴}$
ج) $۲^{۱۰}\left(\sum_{i=۰}^{۵} \binom{۱۰}{۲i}\right)$

۱۷. الف) $\binom{۱۲}{۹}$ ب) $\binom{۱۲}{۹}(۲^۳)$ ج) $\binom{۱۲}{۹}(۲^۹)(-۳)^۳$

۱۹. الف) $۱۲ = \binom{۴}{۱,۱,۲}$ ب) $۱۲ = \binom{۴}{۰,۱,۱,۲}$
ج) $-۲۴ = \binom{۴}{۱,۱,۲}(۲)(-۱)(-۱)^۲$ د) $-۲۱۶ = \binom{۴}{۱,۱,۲}(-۲)(۳^۲)$
ه) $۱۶۱۲۸۰ = \binom{۸}{۳,۲,۱,۲}(۲^۳)(-۱)^۲(۳)(-۲)^۲$

۲۱.

$$\begin{aligned}
\binom{۲n}{n} + \binom{۲n}{n-۱} &= \frac{(۲n)!}{n!n!} + \frac{(۲n)!}{(n-۱)!(n+۱)!} \\
&= \frac{(۲n)!(n+۱)^۲}{(n+۱)!(n+۱)!} + \frac{(۲n)!(n)(n+۱)}{(n+۱)!(n+۱)!} \\
&= \left(\frac{۱}{۲}\right)\left[\frac{(۲n)!(۲n+۲)(n+۱) + (۲n)!(۲n+۲)n}{(n+۱)!(n+۱)!}\right] \\
&= \left(\frac{۱}{۲}\right)\binom{۲n+۲}{n+۱}
\end{aligned}$$

.۲۳

$$n\binom{m+n}{m} = n\frac{(m+n)!}{m!n!} = \frac{(m+n)!}{m!(n-1)!} = (m+1)\frac{(m+n)!}{(m+1)(m!)(n-1)!}$$
$$= (m+1)\frac{(m+n)!}{(m+1)!(n-1)!} = (m+1)\binom{m+n}{m+1}$$

.۲۵ به بسطهای (الف) $[(1+x)-x]^n$؛ (ب) $[(2+x)-(x+1)]^n$؛ و (ج) $[(2+x)-x]^n$ توجه کنید.

بخش ۱.۴ـصفحهٔ ۳۹

.۱ **الف)** $\binom{14}{10}$ **ب)** $\binom{9}{5}$ **ج)** $\binom{12}{8}$

.۳ $\binom{23}{20}$

.۵ **الف)** 2^5 **ب)** 2^n

.۷ **الف)** $\binom{35}{32}$ **ب)** $\binom{31}{28}$ **ج)** $\binom{11}{8}$ **د)** ۱ **ه)** $\binom{43}{40}$ **و)** $\binom{6}{3}-\binom{31}{28}$

.۹ **الف)** $\binom{14}{5}$ **ب)** $\binom{8}{2}+3\binom{9}{3}+3\binom{10}{4}+\binom{11}{5}$

.۱۱ **الف)** $\binom{7}{4}$ **ب)** $\sum_{i=0}^{3}\binom{9-2i}{7-2i}$

.۱۳ **الف)** $\binom{16}{12}$ **ب)** 5^{12}

.۱۵ **الف)** $\binom{29}{25}(5^3)$

ب) $[4\binom{23}{20}+4^2\binom{18}{15}+4^2\binom{13}{10}+4^3\binom{8}{5}]+[4^2\binom{28}{25}+4\binom{18}{15}+4^2\binom{13}{10}+4^2\binom{8}{5}+4^3]$

.۱۷ **الف)** $\binom{34}{31}\binom{8}{6}$ **ب)** $\binom{34}{31}\binom{5}{3}$

.۱۹ $\binom{23}{4}$

.۲۱ (برای $n=\binom{12}{3}$)، $\sum_{i=1}^{n} i = 24310$.

.۲۳ **الف)** قطعهٔ پاسکال زیر را در نظر می‌گیریم که i، j، k، m، n و sum متغیرهای صحیح‌اند.

```
sum:=0;
For i:=1 to n do
  For j:=1 to i do
    For k:=1 to j do
      For m:=1 to k do
        sum:=sum+1;
```

پس از اجرای قطعه برنامه، مقدار sum برابر است با $\binom{n+3}{4}$، که برابر با تعداد راههای انتخاب i، j، k، m از $\{1,2,3,\ldots,n\}$ با مجازبودن تکرار و $1\le m\le k\le j\le i\le n$ است.

برای هر مقدار i حلقه‌های *For* برای j، k، و m، به تعداد $\binom{i+2}{3}$ اجرای حکم sum := sum+1 حاصل می‌شوند. بنابراین، $\sum_{i=1}^{n}\binom{i+2}{3}=\binom{n+3}{4}$.

ب) در تمرین ۲۲ دیدیم که $\sum_{i=1}^{n} i^2 = (1/6)(n)(n+1)(2n+1)$. از این فرمول در گام ۴ از نتیجه‌گیری زیر استفاده خواهیم کرد.

$$\binom{n+3}{4} = \sum_{i=1}^{n} \binom{i+2}{3} \tag{1}$$

$$(1/4!)(n+3)(n+2)(n+1)(n) = \sum_{i=1}^{n} (1/6)(i+2)(i+1)(i) \tag{2}$$

$$(1/4)(n+3)(n+2)(n+1)(n) = \sum_{i=1}^{n} (i^3 + 3i^2 + 2i) \tag{3}$$

$$(1/4)(n+3)(n+2)(n+1)(n) = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (3)(1/6)(n)(n+1)(2n+1) + (2)(1/2)(n+1)(n) \tag{4}$$

$$(1/4)(n+1)(n)[(n+3)(n+2) - 2(2n+1) - 4] = \sum_{i=1}^{n} i^3 \tag{5}$$

$$(1/4)(n+1)(n)[n^2 + 5n + 6 - 4n - 6] = \sum_{i=1}^{n} i^3 \tag{6}$$

$$(1/4)(n+1)^2 n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3 \tag{7}$$

۲۵. الف) یکی از m شئ همانند را در هر یک از n ظرف متمایز قرار می‌دهیم. $m-n$ شئ همانند باقی می‌مانند که باید در n ظرف متمایز قرار گیرند. این‌کار با تعداد

$$\binom{n+(m-n)-1}{m-n} = \binom{m-1}{m-n} = \binom{m-1}{n-1}$$

توزیع نتیجه می‌شود.

ب) r تا از این اشیاء (همانند) را در هر یک از n ظرف متمایز قرار می‌دهیم. آن‌گاه می‌توانیم $m-rn$ شئ همانند باقیمانده را در n ظرف متمایز به

$$\binom{n+(m-rn)-1}{m-rn} = \binom{m-1+(1-r)n}{m-rn} = \binom{m-1+(1-r)n}{n-1}$$

راه قرار دهیم.

تمرینهای گوناگون-صفحهٔ ۴۶

۱. $\binom{4}{1}\binom{7}{2} + \binom{4}{2}\binom{7}{4} + \binom{4}{3}\binom{7}{6}$

۳. الف) $۳۶ + ۳۶^{۲} + \cdots + ۳۶^{۸} = \sum_{i=۱}^{۸} ۳۶^{i}$

ب) $(۳۶ + ۳۶^{۲} + \cdots + ۳۶^{۶})$

ج) $(۵۱ + ۵۱^{۲} + \cdots + ۵۱^{۸})(۳۶^{۳})$

د) $(۵۱ + ۵۱^{۲} + \cdots + ۵۱^{۸})(۳۶ \times ۳۵ \times ۳۴)$

۵. الف) $۱۰^{۲۵}$ ب) $(۱۰)(۱۱)(۱۲)\ldots(۳۴) = ۳۴!/۹!$ ج) $(۲۵!)\binom{۲۴}{۹}$

۷. الف) $C(۱۲,۸)$ ب) $P(۱۲,۸)$

۹. $[(۷!/۲!)\binom{۶}{۱}](۶)$

۱۱. $(۱/۱۰)[۱۰!/(۴!۳!۳!)]$

۱۳. الف) (i) $\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۲}+\binom{۴}{۴}$ (ii) $\binom{۸}{۴}+\binom{۶}{۲}\binom{۵}{۲}+\binom{۷}{۴}$ (iii) $\binom{۸}{۴}+\binom{۶}{۲}\binom{۵}{۲}+\binom{۷}{۴}-۹$

ب) (i) $\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۳}+\binom{۵}{۳}\binom{۴}{۱}$ (ii) و (iii) $\binom{۵}{۱}\binom{۶}{۳}+\binom{۷}{۳}\binom{۴}{۱}$

۱۵. الف) $(۵)(۹!)$ ب) $(۳)(۸!)$

۱۷. $۱۷ + (۱۰)(۲) + \binom{۶}{۲} + ۵\binom{۳}{۲} + \binom{۵}{۴}$

۱۹. $\binom{۱۶}{۱۲} - ۵\binom{۸}{۴}$

۲۱. $۲\binom{n+r-k-۱}{n-k} + (n+r-k-۱)\binom{n+r-k-۲}{n-k}$

۲۳. $\binom{n}{۰} - \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} - \binom{n}{۳} + \cdots + (-۱)^{n}\binom{n}{n} = (۱ + (-۱))^{n} = ۰$، بنابراین

$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۴} + \cdots = \binom{n}{۱} + \binom{n}{۳} + \binom{n}{۵} + \ldots$

۲۵. الف) $\binom{۹}{۱} + \binom{۱۰}{۳} + \cdots + \binom{۱۶}{۱۵} = \sum_{k=۰}^{۸}\binom{۹+k}{۱+۲k}$ ب) $\sum_{k=۰}^{۹}\binom{۹+k}{۲k}$

ج) $n = ۲k + ۱, k \geq ۰ : \sum_{i=۰}^{k}\binom{k+۱+i}{۱+۲i}$

$n = ۲k, k \geq ۱ : \sum_{i=۰}^{k}\binom{k+i}{۲i}$

۲۷. الف) $\binom{r+(n-r)-۱}{n-r} = \binom{n-۱}{n-r} = \binom{n-۱}{r-۱}$

ب) $\sum_{r=۱}^{n}\binom{n-۱}{r-۱} = \binom{n-۱}{۰} + \binom{n-۱}{۱} + \cdots + \binom{n-۱}{n-۱} = ۲^{n-۱}$

۲۹. الف) $۱۱!/(۷!۴!)$ ب) $[۱۱!/(۷!۴!)] - [۴!/(۲!۲!)][۴!/(۳!۱!)]$

ج) $[۱۱!/(۷!۴!)] + [۱۰!/(۶!۳!۱!)] + [۹!/(۵!۲!۲!)] + [۸!/(۴!۱!۳!)] + [۷!/(۳!۴!)]$

(در قسمت (الف))

$$\{[۱۱!/(۷!۴!)]+[۱۰!/(۶!۳!۱!)]+[۹!/(۵!۲!۲!)]+[۸!/(۴!۱!۳!)]+[۷!/(۳!۴!)]\}$$
$$-[\{[۴!/(۲!۲!)]+[۳!/(۱!۱!۱!)]+[۲!/۲!]\}\times\{[۴!/(۳!۱!)]$$
$$+[۳!/(۲!۱!)]\}]$$

(در قسمت (ب)).

فصل ۲ مبانی منطق

بخش ۱.۲ـصفحهٔ ۶۰

۱. جمله‌های (الف)، (ج)، (ه)، (و)، (ز)، (ح)، و (ی) گزاره‌اند. چهار جملهٔ دیگر گزاره نیستند.

۳. الف) اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد،متساوی‌الساقین است.
ب) اگر مثلث ABC متساوی‌الساقین نباشد، متساوی‌الاضلاع نیست.
ج) مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر متساوی‌الزوایا باشد.
د) مثلث ABC متساوی‌الساقین است ولی متساوی‌الاضلاع نیست.
ه) اگر ABC متساوی‌الزوایا باشد، متساوی‌الساقین است.

۵. گزاره‌های (الف)، (ه)، (و)، و (ح) راستگو هستند.

۷. الف) ۳۲ = $۲^۵$ ب) ۲^n

۹. الف) p : ۰؛ r : ۰؛ s : ۰
ب) گزارهٔ s باید ارزش راستی ۱ داشته باشد، امّا گزارهٔ p می‌تواند مثل گزارهٔ r، ارزش راستی ۰ یا ۱ داشته باشد.

۱۱. ۲۷

بخش ۲.۳ـصفحهٔ ۷۴

۱. الف (i)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (p \to r)$
۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

(ii)

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \to r$	$p \to r$	$q \to r$	$(p \to r) \wedge (q \to r)$
۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

(iii)

p	q	r	$q \vee r$	$p \to (q \vee r)$	$p \to q$	$\overline{r} \to (p \to q)$
۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

ب) بنابر قسمت (الف) $\quad [p \to (q \vee r)] \Leftrightarrow [\overline{r} \to (p \to q)]$

بنابر دومین قاعدهٔ جایگذاری و $(p \to q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$ $\quad \Leftrightarrow [\overline{r} \to (\overline{p} \vee q)]$

بنابر اولین قاعدهٔ جایگذاری و $(s \to t) \Leftrightarrow (\overline{t} \to \overline{s})$ $\quad \Leftrightarrow [\overline{(\overline{p} \vee q)} \to \overline{\overline{r}}\,]$

بنابر قانون دمورگن، نقیض مضاعف، و دومین قاعدهٔ جایگذاری $\quad \Leftrightarrow [(\overline{\overline{p}} \wedge \overline{q}) \to r]$

بنابر نقیض مضاعف و دومین قاعدهٔ جایگذاری $\quad \Leftrightarrow [(p \wedge \overline{q}) \to r]$

۴.

۳. **الف)** برای هرگزارهٔ s، $s \vee \overline{s} \Leftrightarrow T$. به‌جای هر مورد s، قرار می‌دهیم $p \vee (q \wedge r)$ و نتیجه از اولین قاعدهٔ جایگذاری حاصل می‌شود.

ب) برای گزاره‌های دلخواه s و t داریم $(s \to t) \Leftrightarrow (\overline{t} \to \overline{s})$. به‌جای هر مورد s قرار می‌دهیم $p \vee q$ و به‌جای هر مورد t قرار می‌دهیم r، و نتیجه پیامدی از اولین قاعدهٔ جایگذاری است.

ج) برای گزاره‌های دلخواه a، b، و c، قانون توزیعپذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$، بیان می‌کند که $a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. نتیجه‌ای که در اینجا داده شده‌است، وقتی اولین قاعدهٔ جایگذاری را با جایگذاریهای زیر به‌کار می‌بریم، یک راستگوست: $[p \vee q) \to r]$ را به‌جای a؛ s را به‌جای b؛ t را به‌جای c می‌گذاریم.

۵. **الف)** خانم K درس خواندن را بر تفریح مقدم می‌دارد، امّا او (هنوز) در درسهایش پیشرفت نکرده است

ب) خانم N تکلیف شب ریاضی خود را انجام نمی‌دهد، یا خانم K درس پیانو خود را تمرین نمی‌کند.

ج) L به مرخصی رفت و نگران سفرش با هواپیما نبود، ولی (باز) به‌او خوش نگذشت.

د) H درس پاسکال خود را نگذرانده‌است و طرح ساختار داده‌ها را تمام نکرده، ولی (باز) در پایان

نیمسال فارغ‌التحصیل شده‌است.

۷. الف)

p	q	$(\overline{p} \vee q) \wedge (p \wedge (p \wedge q))$	$p \wedge q$
۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱

ب) $(\overline{p} \wedge q) \vee (p \vee (p \vee q)) \Leftrightarrow p \vee q$

۹. الف) عکس: اگر چهار ضلعی $ABCD$ مستطیل باشد، آن‌گاه مربع است.
عکس مستوی: اگر چهار ضلعی $ABCD$ مربع نباشد، آن‌گاه مستطیل نیست.
عکس نقیض: اگر چهار ضلعی $ABCD$ مستطیل نباشد، مربع نیست.

ب) عکس: اگر $n^۲$ عدد صحیح زوج باشد، n عدد صحیح زوج است.
عکس مستوی: اگر n عدد صحیح زوج نباشد، $n^۲$ عدد صحیح زوج نیست.
عکس‌نقیض: اگر $n^۲$ عدد صحیح زوج نباشد، n عدد صحیح زوج نیست.

ج) عکس: اگر دو خط متمایز در صفحهٔ xy یک شیب داشته باشند، موازی‌اند.
عکس مستوی: اگر دو خط متمایز در صفحهٔ xy موازی نباشند، آن‌گاه یک شیب ندارند.
عکس نقیض: اگر دو خط متمایز در صفحهٔ xy یک شیب نداشته باشند، آن‌گاه موازی نیستند.

۱۱. الف) $(q \rightarrow r) \vee \overline{p}$ ب) $(\overline{q} \vee r) \vee \overline{p}$

۱۳.

	z	شکل ۱.۲ (الف)	شکل ۱.۲ (ب)
الف)	۲	۲۰	$۱۰ + ۱ = ۱۱$
ب)	۶	۲۰	$۱۰ + ۵ = ۱۵$
ج)	۹	۲۰	$۱۰ + ۸ = ۱۸$
د)	۱۰	۲۰	$۱۰ + ۹ = ۱۹$
ه)	۱۵	۲۰	$۱۰ + ۱۰ = ۲۰$
و)	$n \geq ۱۰$	۲۰	$۱۰ + ۱۰ = ۲۰$

۱۵.

p	q	r	$[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (r \leftrightarrow p)]$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p)]$
۰	۰	۰	۱	۱
۰	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱

۱۷. الف) $(p\uparrow p)$ ب) $(p\uparrow p)\uparrow(q\uparrow q)$ ج) $(p\uparrow q)\uparrow(p\uparrow q)$
د) $p\uparrow(q\uparrow q)$ ه) $(r\uparrow s)\uparrow(r\uparrow s)$، که در آن r نمایندهٔ $p\uparrow(q\uparrow q)$ و s نمایندهٔ $(p\uparrow p)\uparrow q$ است.

۱۹

p	q	$\overline{(p\downarrow q)}$	$(\overline{p}\uparrow\overline{q})$	$\overline{(\overline{p}\uparrow\overline{q})}$	$(\overline{p}\downarrow\overline{q})$
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱

بخش ۳.۲ـ صفحهٔ ۹۳

۱). الف)

p	q	r	$p\to q$	$(p\vee q)$	$(p\vee q)\to r$
۰	۰	۰	۱	۰	۱
۰	۰	۱	۱	۰	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱

اعتبار استدلال از نتیجه‌های سطر آخر حاصل می‌شود. (هفت سطر اول را می‌توان نادیده گرفت.)

ب)

p	q	r	$(p\wedge q)\to r$	$\overline{q}$	$p\to\overline{r}$	$\overline{p}\vee\overline{q}$
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰

اعتبار استدلال از نتیجه‌های سطرهای ۱، ۲، و ۵ جدول حاصل می‌شود. می‌توان نتیجه‌های پنج سطر دیگر را نادیده گرفت.

ج)

p	q	r	$p \to q$	$p \vee r$	$(p \vee r) \to q$
۰	۰	۰	۱	۰	۱
۰	۰	۱	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱

نتیجه‌های دوسطر آخر این جدول، اعتبار استدلال داده شده را ثابت می‌کنند. نتیجه‌های شش سطر اول جدول را می‌توان نادیده گرفت.

۳. الف) اگر p دارای ارزش راستی ۰ باشد، ارزش راستی $p \wedge q$ هم ۰ است.

ب) وقتی $p \vee q$ دارای ارزش راستی ۰ باشد، ارزش راستی p (و ارزش راستی q) ۰ است.

ج) اگر ارزش راستی q برابر ۰ باشد، ارزش راستی $[(p \vee q) \wedge \overline{p}]$، صرفنظر از ارزش راستی p، ۰ است.

د) گزارهٔ $q \vee s$ تنها وقتی دارای ارزش راستی ۰ است که هر دو گزارهٔ q و s ارزش راستی ۰ داشته باشند. در این‌صورت $(p \to q)$ وقتی ارزش راستی ۱ دارد که p دارای ارزش راستی ۰ باشد؛ $(r \to s)$ وقتی ارزش راستی ۱ دارد که r دارای ارزش راستی ۰ باشد. امّا در این‌صورت $(p \vee r)$ باید ارزش راستی ۰ داشته باشد و نه ۱.

ه) ارزش راستی $(\overline{p} \vee \overline{r})$ وقتی ۰ است که p و r هر دو دارای ارزش راستی ۱ باشند. این، اجباراً به q و s ارزش راستی ۱ می‌دهد، برای اینکه $(p \to q)$ و $(r \to s)$ به‌ترتیب ارزش راستی ۱ داشته‌باشند. امّا این به ارزش راستی ۰ برای $(\overline{q} \vee \overline{s})$ منجر می‌شود.

و) تنها وقتی که $[(p \vee r) \to (q \vee r)]$ ارزش راستی ۰ دارد وقتی است که $p : ۱$؛ $r : ۰$ و $q : ۰$. امّا با این شرطها $(p \to q)$ دارای ارزش راستی ۰ است، و نه ۱.

ز) گزارهٔ $[(q \to r) \to (p \to r)]$ تنها برای تخصیص $p : ۱$؛ $q : ۰$؛ و $r : ۰$ دارای ارزش راستی ۰ است. امّا در این‌صورت $(p \to q)$ ارزش راستی ۰ خواهد داشت.

۵.

(۱) و (۲)	فرض	
(۳)	(۱) و (۲)، و قاعدهٔ وضع مقدم	
(۴)	فرض	
(۵)	(۴) و $(q \to \overline{r}) \Leftrightarrow (\overline{\overline{q}} \to \overline{r}) \Leftrightarrow (r \to \overline{q})$	
(۶)	(۳)، (۵) و قاعدهٔ وضع مقدم	
(۷)	فرض	
(۸)	(۶)، (۷) و قاعدهٔ قیاس فاصل	
(۹)	(۸) و قاعدهٔ بسط فاصل	

۷. الف)

(۱)	فرض (نقیض حکم)
(۲)	(۱) و $\overline{(\overline{q} \to s)} \Leftrightarrow \overline{(\overline{\overline{q}} \vee s)} \Leftrightarrow \overline{(q \vee s)} \Leftrightarrow \overline{q} \wedge \overline{s}$
(۳)	(۲) و قاعدهٔ ساده‌سازی ترکیب عطفی
(۴)	فرض
(۵)	(۳)، (۴) و قاعدهٔ قیاس فاصل
(۶)	فرض
(۷)	(۶) و $(p \to q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$
(۸)	(۲) و قاعدهٔ ساده‌سازی ترکیب عطفی
(۹)	(۷)، (۸) و قاعدهٔ قیاس فاصل
(۱۰)	فرض
(۱۱)	(۹)، (۱۰) و قاعدهٔ قیاس فاصل
(۱۲)	(۵)، (۱۱) و قاعدهٔ ترکیب عطفی
(۱۳)	(۱)، (۱۲) و قاعده برای برهان خلف

ب)

(۱)	$p \to q$	فرض
(۲)	$\overline{q} \to \overline{p}$	(۱) و $(p \to q) \Leftrightarrow (\overline{q} \to \overline{p})$
(۳)	$p \vee r$	فرض
(۴)	$\overline{p} \to r$	(۳) و $(p \vee r) \Leftrightarrow (\overline{p} \to r)$
(۵)	$\overline{q} \to r$	(۲)، (۴) و قانون قیاس
(۶)	$\overline{r} \vee s$	فرض
(۷)	$r \to s$	(۶) و $(\overline{r} \vee s) \Leftrightarrow (r \to s)$
(۸)	$\therefore \overline{q} \to s$	(۵)، (۷) و قانون قیاس

ج)

(۱)	$\overline{p} \leftrightarrow q$	فرض
(۲)	$(\overline{p} \to q) \wedge (q \to \overline{p})$	(۱) و $[\overline{p} \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(\overline{p} \to q) \wedge (q \to \overline{p})]$
(۳)	$\overline{p} \to q$	(۲) و قاعدهٔ ساده‌سازی ترکیب عطفی
(۴)	$q \to r$	فرض
(۵)	$\overline{p} \to r$	(۳)، (۴) و قانون قیاس
(۶)	$\overline{r}$	فرض
(۷)	$\therefore p$	(۵)، (۶) و قیاس رفع (قاعدهٔ رفع تالی)

۹. اگر گنگ نباشد آن‌گاه $\sqrt[3]{2} = a/b$، که در آن a و b اعداد صحیح مثبت‌اند و تنها مقسوم‌علیه مشترک مثبت آنها ۱ است. امّا

$$\sqrt[3]{2} = a/b \Rightarrow 2 = a^3/b^3 \Rightarrow a^3 = 2b^3 \Rightarrow a^3 \text{ زوج است} \Rightarrow a \text{ زوج است}$$

لذا برای عدد صحیح مثبت c، باید $a = 2c$. با $a = 2c$ نتیجه می‌شود که $2b^3 = a^3 = 8c^3$ یا $b^3 = 4c^3 = 2(2c^3)$. در نتیجه b^3 زوج است، لذا b نیز زوج است. امّا اینک که a و b هر دو زوج‌اند این واقعیت که تنها مقسوم‌علیه مشترک آنها ۱ است نقض می‌شود. این تناقض از اینجا ناشی شد که ما $\sqrt[3]{2}$ را عددی گویا گرفتیم. پس معلوم می‌شود که $\sqrt[3]{2}$ عددی است گنگ.

۱۱. الف)

R شغل سرپرستی را به‌دست می‌آورد.	p :
R سخت کار می‌کند	q :
R ترفیع می‌گیرد	r :
R ماشین نو می‌خرد	s :

$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \to r \\ r \to s \\ \overline{s} \\ \hline \therefore \overline{p} \vee \overline{q} \end{array}$$

(۱)	$\overline{s}$	فرض
(۲)	$r \to s$	فرض
(۳)	$\overline{r}$	(۱)، (۲)، و قیاس رفع
(۴)	$(p \wedge q) \to r$	فرض
(۵)	$\overline{p \wedge q}$	(۳)، (۴) و قیاس رفع
(۶)	$\therefore \overline{p} \vee \overline{q}$	(۵) و $\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$

ب)

D به مسابقهٔ اتومبیلرانی می‌رود	p :
H عصبانی می‌شود	q :
R تمام شب ورق بازی می‌کند	r :
C عصبانی می‌شود	s :
به V گزارش داده می‌شود	t :

$$
\begin{array}{l}
p \rightarrow q \\
r \rightarrow s \\
(q \vee s) \rightarrow t \\
\overline{t} \\
\hline
\therefore \overline{p} \wedge \overline{r}
\end{array}
$$

(۱)	$\overline{t}$	فرض
(۲)	$(q \vee s) \rightarrow t$	فرض
(۳)	$\overline{(q \vee s)}$	(۱)، (۲) و قیاس رفع
(۴)	$\overline{q} \wedge \overline{s}$	(۳) و $\overline{(q \vee s)} \Leftrightarrow \overline{q} \wedge \overline{s}$
(۵)	$\overline{q}$	(۴) و قاعدهٔ ساده‌سازی ترکیب عطفی
(۶)	$p \rightarrow q$	فرض
(۷)	$\overline{p}$	(۵)، (۶) و قیاس رفع
(۸)	$\overline{s}$	(۴) و قاعدهٔ ساده‌سازی ترکیب عطفی
(۹)	$r \rightarrow s$	فرض
(۱۰)	$\overline{r}$	(۸)، (۹) و قیاس رفع
(۱۱)	$\therefore \overline{p} \wedge \overline{r}$	(۷)، (۱۰) و قاعدهٔ ترکیب عطفی

ج)

N به‌جلسهٔ صبح سه‌شنبه‌اش می‌رود : p

N صبح سه‌شنبه زود از خواب برمی‌خیزد : q

N دوشنبه شب به کنسرت می‌رود : r

N (شب دوشنبه) تا ساعت ۱۱ بعدازظهر به‌خانه نمی‌آید : s

N بعد از کمتر از هفت ساعت خواب به‌سرکار می‌رود : t

$$
\begin{array}{l}
p \rightarrow q \\
r \rightarrow s \\
(s \wedge q) \rightarrow t \\
\overline{t} \\
\hline
\therefore \overline{r} \vee \overline{p}
\end{array}
$$

(۱)	$(s \wedge q) \rightarrow t$	فرض
(۲)	$\overline{t}$	فرض
(۳)	$\overline{(s \wedge q)}$	(۱) و (۲) و قیاس رفع
(۴)	$\overline{s} \vee \overline{q}$	(۳) و $\overline{(s \wedge q)} \Leftrightarrow \overline{s} \vee \overline{q}$
(۵)	$p \rightarrow q$	فرض
(۶)	$r \rightarrow s$	فرض
(۷)	$\therefore \overline{r} \vee \overline{p}$	(۵)، (۶)، (۴) و قاعدهٔ ذوحدین سالبه

د)

p : M در کلاس زبان پاسکال تدریس می‌کند

q : M ترفیع پیدا می‌کند

r : M تعطیلات خود را در این زمستان در هاوایی می‌گذارند

s : M برای تماشای پرندگان به تنسی می‌رود

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \overline{p} \rightarrow s \\ \overline{r} \vee s \\ \hline \therefore \overline{s} \end{array}$$

تخصیصهای ارزش راستی زیر

$$p : ۰ \;; q : ۰ \;; r : ۱; \quad s : ۱$$

مثال نقضی برای معتبربودن استدلال به‌دست می‌دهد. تخصیص ممکن دیگر عبارت است از

$$p : ۱; \quad q : ۱; \quad r : ۱; \quad s : ۱$$

ه)

p : متغیر صحیح N در برنامه مقدار آغازی نمی‌گیرد

q : $N > ۰$ (این واقعاً تا وقتی مقدار N را بررسی می‌کنیم، حکم نیست)

r : مقدار $N^۲ + N$ (بعداً) در طی اجرای برنامه چاپ شده‌است

s : مقدار N را استفاده‌کننده از برنامه در حکم «Read» مشخص کرده‌است

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ s \to p \\ \overline{r} \\ \hline \therefore \overline{s} \end{array}$$

(۱)	$\overline{r}$	فرض
(۲)	$q \to r$	فرض
(۳)	$\overline{q}$	(۱)، (۲) و قیاس رفع
(۴)	$s \to p$	فرض
(۵)	$p \to q$	فرض
(۶)	$s \to q$	(۴)، (۵) و قانون قیاس
(۷)	$\therefore \overline{s}$	(۶)، (۳) و قیاس رفع

و)

p : شانس بارندگی وجود دارد

q : L روسری خود را گم کرده‌است

r : L چمن خانه‌اش را کوتاه نمی‌کند

s : درجهٔ حرارت بالای ۸۰° فارنهایت است

$$\begin{array}{l} (p \vee q) \to r \\ s \to \overline{p} \\ s \wedge \overline{q} \\ \hline \therefore \overline{r} \end{array}$$

تخصیصهای ارزش راستی زیر

$$p : ۰; \quad q : ۰; \quad r : ۱; \quad s : ۱$$

مثال نقضی برای معتبربودن این استدلال به‌دست می‌دهد.

بخش ۴.۲ـ صفحهٔ ۱۱۲

۱. الف) (i) $\exists x q(x)$ (ii) $\forall x[q(x) \to \overline{t(x)}]$

(iii) $\forall x[q(x) \to \overline{t(x)}]$ (iv) $\exists x[q(x) \wedge t(x)]$

(v) $\forall x[(q(x) \wedge r(x)) \to s(x)]$

ب) گزاره‌های (i)، (iv) و (v) راست‌اند. گزاره‌های (ii) و (iii) دروغ‌اند: $x = ۱۰$ مثال نقضی برای هر دو گزاره به‌دست می‌دهد.

ج) (i) اگر x مربع کامل باشد، $x > ۰$.

(ii) اگر x بر ۴ تقسیم‌پذیر باشد، x زوج است.

(iii) اگر x بر ۴ تقسیم‌پذیر باشد، x بر ۵ تقسیم‌پذیر نیست.

(iv) عدد صحیحی وجود دارد که بر ۴ تقسیم‌پذیر است امّا مربع کامل نیست.

(v) اگر x مربع کامل زوجی باشد، x بر ۴ تقسیم‌پذیر است.

د) (i) قرار دهید $x = ۰$ (iii) قرار دهید $x = ۲۰$

۳. الف) (i) راست (ii) دروغ در نظر بگیرید $x = ۳$.

(iii) راست (iv) راست

ب) (i) راست (ii) دروغ x را مساوی ۳ بگیرید.

(iii) راست (iv) راست

ج) (i) راست (ii) راست

(iii) راست (iv) دروغ به‌ازای x برابر ۲ یا ۵، ارزش راستی $p(x)$ برابر با ۱ است، در حالی‌که ارزش راستی $r(x)$ برابر با ۰ است.

۵. الف) $\forall x[\overline{p(x)} \wedge \overline{q(x)}]$ ب) $\exists x[\overline{p(x)} \vee q(x)]$

ج) $\exists x[p(x) \wedge \overline{q(x)}]$ د) $\forall x[(p(x) \vee q(x)) \wedge \overline{r(x)}]$

ه) $\forall x[p(x) \wedge (\overline{q(x)} \vee \overline{r(x)})]$

۷. الف) وقتی گزارهٔ $\exists x[p(x) \vee q(x)]$ راست باشد، حداقل یک عنصر c در عالم سخنی که از پیش توصیف شده‌است وجود دارد که برای آن $p(c) \vee q(c)$ راست است. بنابراین در حداقل یکی از گزاره‌ها، $p(c)$ و $q(c)$ دارای ارزش راستی ۱ است. لذا حداقل یکی از گزاره‌های $\exists x p(x)$

و $\exists x q(x)$ راست است. بنابراین نتیجه می‌شود که $\exists x p(x) \vee \exists x q(x)$ راست است، و

$$\exists x[p(x) \vee q(x)] \Rightarrow \exists x p(x) \vee \exists x q(x)$$

به‌عکس، اگر $\exists x p(x) \vee \exists x q(x)$ راست باشد، آن‌گاه حداقل یکی از $p(a)$ و $q(b)$، برای مقداری از a و b در عالم سخنی که از پیش توصیف شده‌است، ارزش راستی ۱ دارد. بدون اینکه از کلیت مطلب کاسته شود، فرض می‌کنیم این، $p(a)$ باشد. در این‌صورت $p(a) \vee q(a)$ ارزش راستی ۱ دارد، لذا $\exists x[p(x) \vee q(x)]$ گزاره‌ای است راست، و

$$\exists x p(x) \vee \exists x q(x) \Rightarrow \exists x[p(x) \vee q(x)]$$

ب) ابتدا در نظر بگیرید که چه موقع گزارهٔ $\forall x[p(x) \wedge q(x)]$ راست است. این، وقتی رخ می‌دهد که $p(a) \wedge q(a)$، برای هر a از عالم سخنی که از پیش توصیف شده‌است، راست باشد. در این‌صورت $p(a)$ (و همچنین $q(a)$) به‌ازای همهٔ مقادیر aی عالم سخن راست است، لذا گزاره‌های $\forall x p(x)$ و $\forall x q(x)$ راست‌اند. بنابراین، گزارهٔ $\forall x p(x) \wedge \forall x q(x)$ راست است و

$$\forall x[p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow \forall x p(x) \wedge \forall x q(x)$$

به‌عکس فرض کنید که $\forall x p(x) \wedge \forall x q(x)$ گزاره‌ای راست باشد. در این‌صورت $\forall x p(x)$ و $\forall x q(x)$ هر دو راست‌اند. حال فرض کنید c عنصری در عالم سخنی باشد که‌از پیش توصیف شده‌است. پس $p(c)$، $q(c)$، و $p(c) \wedge q(c)$ همگی راست‌اند. و چون c به‌دلخواه انتخاب شده بود، نتیجه می‌شود که گزارهٔ $\forall x[p(x) \wedge q(x)]$ راست است، و

$$\forall x p(x) \wedge \forall x q(x) \Rightarrow \forall x[p(x) \wedge q(x)]$$

۹. **الف)** راست **ب)** دروغ **ج)** راست **د)** راست **ه)** راست **و)** راست

۱۱. **الف)** راست **ب)** دروغ **ج)** دروغ **د)** راست

۱۳. **الف)** (i) $\forall x[x \neq ۰ \rightarrow \exists! y(xy = ۱)]$ (ii) $\forall x \forall y \exists! z(z = x + y)$
(iii) $\forall x \exists! y(y = ۳x + ۷)$

ب) (i) دروغ (ii) راست، **ج)** (i) راست (ii) راست

د) وقتی عالم سخنی که از پیش مشخص شده‌است متشکل از اعداد صحیح ۰، ۱، و ۲ باشد گزارهٔ p راست است. برای عالم سخن متشکل از ۲، ۳، و ۴ گزاره دروغ است.

تمرینهای گوناگون ـ صفحهٔ ۱۱۹

.۱

p	q	r	s	$q \wedge r$	$\overline{s \vee r}$	$\overbrace{[(q \wedge r) \to \overline{(s \vee r)}]}^{t}$	$p \leftrightarrow t$
۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰
۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰
۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰
۰	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۱
۱	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰

.۳ الف)

p	q	r	$q \leftrightarrow r$	$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$	$(p \leftrightarrow q)$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$
۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

ب) تخصیصهای ارزش راستی

$$p:\circ;\quad q:\circ;\quad r:\circ$$

ارزش راستی ۱ را برای $[p \to (q \to r)]$ و ارزش راستی ۰ را برای $[(p \to q) \to r]$ نتیجه می‌دهد. در نتیجه این گزاره‌ها منطقاً هم‌ارز نیستند.

۵. الف) $(\overline{p} \vee \overline{q}) \wedge (F_\circ \vee p) \wedge p$

ب) $(\overline{p} \vee \overline{q}) \wedge (F_\circ \vee p) \wedge p$

$\Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q}) \wedge (p \wedge p)$ $F_\circ \vee p \Leftrightarrow p$

$\Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q}) \wedge p$ قانون خودتوانی $\wedge$

$\Leftrightarrow p \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})$ قانون تعویضپذیری $\wedge$

$\Leftrightarrow (p \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge \overline{q})$ قانون شرکتپذیری $\wedge$ نسبت به $\vee$

$\Leftrightarrow F_\circ \vee (p \wedge \overline{q})$ $p \wedge \overline{p} \Leftrightarrow F_\circ$

$\Leftrightarrow p \wedge \overline{q}$ $F_\circ$ برای $\vee$ همانی است

۷. الف) عکس نقیض ب) عکس مستوی ج) عکس نقیض
د) عکس مستوی ه) عکس مستوی و) عکس نقیض
ز) عکس ح) عکس ط) عکس ی) عکس

۹. الف)

p	q	r	$p \veebar q$	$(p \veebar q) \veebar r$	$q \veebar r$	$p \veebar (q \veebar r)$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۱	۱	۰	۱	۰	۱

از نتایج ستونهای ۵ و ۷ چنین برمی‌آید که $[(p \veebar q) \veebar r] \Leftrightarrow [p \veebar (q \veebar r)]$

ب) گزاره‌های داده شده منطقاً هم‌ارز نیستند. تخصیصهای ارزش راستی

$$p : ۱; \;\; q : ۱; \;\; r : ۱$$

مثال نقضی به‌دست می‌دهند

ج) اگر p، q، r همگی ارزش راستی ۱ داشته باشند، $p \to (q \veebar r)$ نیز راست است، در حالی‌که $(p \to q) \veebar (p \to r)$ دروغ است، لذا این استلزام، یک استلزام منطقی نیست.

د) تنها دو مورد وجود دارند که در آنها $p \to (q \veebar r)$ دروغ است:
(i) $p : ۱$؛ $q : ۱$؛ $r : ۱$؛ و (ii) $p : ۱$؛ $q : ۰$؛ $r : ۰$. در این موارد، $(p \to q) \veebar (p \to r)$ ارزش راستی ۰ دارد. بنابراین، قضیهٔ داده شده استلزامی منطقی است.

۱۱. فرض کنیم این گزاره راست نیست، اعداد صحیح x و y وجود دارند به‌قسمی که $۳x + \sqrt{۲}y = ۰$ و ($x \neq ۰$ یا $y \neq ۰$). اگر $x = ۰$، آن‌گاه $\sqrt{۲}y = ۰ \Rightarrow y = ۰$؛ اگر $y = ۰$، آن‌گاه $۳x = ۰ \Rightarrow x = ۰$. بنابراین $x \neq ۰, y \neq ۰$. امّا در این‌صورت $\sqrt{۲} = -۳x/y$، خارج قسمت اعداد صحیح است، لذا $\sqrt{۲}$ گویاست.

۱۳. این حکم دروغ است. وقتی $x = ۲$، چنین y و zیی وجود ندارند.

فصل ۳ نظریهٔ مجموعه‌ها

بخش ۳.۱ـصفحهٔ ۱۳۱

۱. همه یک مجموعه هستند.

۳. قسمتهای (ب) و (د) نادرست‌اند؛ قسمتهای دیگر درست‌اند.

۵. الف) $\forall x[x \in A \to x \in B] \wedge \exists x[x \in B \wedge x \notin A]$

ب) $\exists x[x \in A \wedge x \notin B] \vee \forall x[x \notin B \vee x \in A]$

یا $\exists x[x \in A \wedge x \notin B] \vee \forall x[x \in B \to x \in A]$

۷. الف) $|A| = ۶$ ب) $|B| = ۷$

ج) اگر B دارای ۲^n زیرمجموعه با عدد اصلی فرد باشد،آن‌گاه $|B| = n + ۱$.

۹. الف) ۳۱ ب) ۳۰ ج) ۲۸

۱۱. فرض کنید $W = \{۱\}$، $X = \{\{۱\}, ۲\}$، و $Y = \{X, ۳\}$

۱۳. ج) اگر $x \in A$، آن‌گاه $A \subseteq B \Rightarrow x \in B$ و $B \subset C \Rightarrow x \in C$. بنابراین، $A \subseteq C$. چون $B \subset C$، لذا $y \in C$ با $y \notin B$ وجود دارد. همچنین، $A \subseteq B$ و $y \notin B \Rightarrow y \notin A$. در نتیجه، $A \subseteq C$ و $y \in C$ با $y \notin A \Rightarrow A \subset C$.

د) چون $A \subset B$، نتیجه می‌شود که $A \subseteq B$. پس، نتیجه از قسمت (ج) حاصل می‌شود.

۱۵. $n = ۲۰$

۱۷. فرض کنید $A = \{x, y, a_1, a_2, \dots, a_n\}$. تعداد زیرمجموعه‌های A با اندازهٔ r برابر است با $\binom{n+2}{r}$. اینها در چهار رده قرار می‌گیرند: (۱) $\binom{n}{r}$ زیرمجموعه که نه شامل xاند و نه شامل y؛ (۲) $\binom{n}{r-1}$ زیرمجموعه که شامل xاند و شامل y نیستند؛ (۳) $\binom{n}{r-1}$ زیرمجموعه که شامل yاند و شامل x نیستند؛ (۴) $\binom{n}{r-2}$ زیرمجموعه که هم شامل xاند و هم شامل y.

بخش ۲.۳ـصفحهٔ ۱۴۵

۱. الف) $\{1, 2, 3, 5\}$ ب) A ج) و د) $\mathscr{U} - \{2\}$

ه) $\{4, 8\}$ و) $\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$ ز) $\emptyset$

ح) $\{2, 4, 8\}$ ط) $\{1, 3, 4, 5, 8\}$

۳. $B = \{a, b, d\}$ یا $B = \{a, b, e\}$

۵. الف) فرض کنید $\mathscr{U} = \{1, 2, 3\}$، $A = \{1\}$، $B = \{2\}$، و $C = \{3\}$. در این‌صورت $A \cap C = B \cap C = \emptyset$ امّا $A \neq B$.

ب) برای $\mathscr{U} = \{1, 2\}$، $A = \{1\}$، $B = \{2\}$، و $C = \mathscr{U}$، داریم $A \cup C = B \cup C$ امّا $A \neq B$.

ج) $x \in A \Rightarrow x \in A \cup C \Rightarrow x \in B \cup C$. پس، $x \in B$ یا $x \in C$. اگر $x \in B$، آن‌گاه $A \subseteq B$. اگر $x \in C$ آن‌گاه $x \in A \cap C = B \cap C$ و $x \in B$. در هر دو مورد، $A \subseteq B$.همچنین $y \in B \Rightarrow y \in B \cup C = A \cup C$، پس $y \in A$ یا $y \in C$. اگر $y \in C$، آن‌گاه $y \in B \cap C = A \cap C$. در هر دو مورد، $y \in A$ و $B \subseteq A$. بنابراین، $A = B$.

د) فرض کنید $x \in A$. دو مورد را در نظر بگیرید:

(۱) $x \in C \Rightarrow x \notin A\Delta C \Rightarrow x \notin B\Delta C \Rightarrow x \in B$

(۲) (زیرا $x \notin C$) $x \notin C \Rightarrow x \in A\Delta C \Rightarrow x \in B\Delta C \Rightarrow x \in B$. در هر دو مورد، $x \in B$، پس $A \subseteq B$. به‌راهی مشابه، نتیجه می‌شود که $B \subseteq A$ و $A = B$

۷. ۷؛ ۱

۹. الف) $\emptyset = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$

ب) $A = A \cup (A \cap B)$

ج) $A \cap B = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$

د) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \mathscr{U})$

۱۱. الف) فرض کنید $\mathscr{U} = \{1, 2, 3\}$، $A = \{1\}$، و $B = \{2\}$. پس، $\{1, 2\} \in \mathscr{P}(A \cup B)$، ولی $\{1, 2\} \notin \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.

ب) $X \in \mathscr{P}(A \cap B) \Leftrightarrow X \subseteq A \cap B \Leftrightarrow X \subseteq A$ و $X \subseteq B \Leftrightarrow X \in \mathscr{P}(A)$ و $X \in \mathscr{P}(B) \Leftrightarrow X \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$، لذا، $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

۱۳. الف) 2^6 ب) 2^n

ج) در جدول عضویت، $A \subseteq B$ اگر ستونهای A و B به‌قسمی باشند که وقتی یک ۱ در ستون A رخ‌می‌دهد، یک ۱ متناظر در ستون B وجود داشته باشد.

د)

A	B	C	$A \cup \overline{B}$	$(A \cap B) \cup \overline{(B \cap C)}$
۰	۰	۰	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱

۱۵. الف) $[-۶, ۹]$ ب) $[-۸, ۱۲]$ ج) $\emptyset$
د) $[-۸, -۶) \cup (۹, ۱۲]$ ه) $[-۱۴, ۲۱]$ و) $[-۲, ۳]$ ز) $\mathbf{R}$ ح) $[-۲, ۳]$
۱۷.

$$x \in A \cup (\cap_{i\in I} B_i) \Leftrightarrow x \in A \text{ یا } (x \in B_i, \forall i \in I) \Leftrightarrow$$
$$\forall i \in I, x \in A \text{ یا } x \in B_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A \cup B_i \Leftrightarrow$$
$$x \in \cap_{i\in I}(A \cup B_i)$$

[اینک از اصل دوگانی نتیجه می‌شود، $A \cap (\cup_{i\in I} B_i) = \cup_{i\in I}(A \cap B_i)$]

بخشهای ۳.۳ و ۴.۳ـصفحهٔ ۱۵۳

۱. الف) $۲۴! + ۲۴! - ۲۲!$ ب) $۲۶! - [۲۴! + ۲۴! - ۲۳!]$
۳. $۹! + ۹! - ۸!$ ۵. الف) $۲/۹$ ب) $۴/۹$
۷. الف) $[۱۳!/(۲!)^۳] - ۳[۱۲!/(۲!)^۲] + ۳(۱۱!/۲!) - ۱۰!$
ب) نتیجهٔ قسمت (الف) را بر $[۱۳!/(۲!)^۳]$ تقسیم کنید.
۹. $Pr(A) = ۱/۳$، $Pr(B) = ۷/۱۵$، $Pr(A \cap B) = ۲/۱۵$، $Pr(A \cup B) = ۲/۳$؛
$Pr(A \cup B) = ۲/۳ = ۱/۳ + ۷/۱۵ - ۲/۱۵ = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$
۱۱. $۳/۲۸$
۱۳. $۲/۳۹$

تمرینهای گوناگون ـ صفحهٔ ۱۵۶

۱. فرض کنید که $(A-B)\subseteq C$ و $x\in A-C$. در این‌صورت $x\in A$ ولی $x\notin C$. اگر $x\notin B$، آن‌گاه $[x\in A\wedge x\notin B]\Rightarrow x\in(A-B)\subseteq C$. پس اینک داریم $x\notin C$ و $x\in C$. این تناقض به‌ما می‌دهد $x\in B$، پس $(A-C)\subseteq B$.

برعکس، اگر $(A-C)\subseteq B$، فرض کنید $y\in A-B$. در این‌صورت $y\in A$، ولی $y\notin B$. اگر $y\notin C$، آن‌گاه $[y\in A\wedge y\notin C]\Rightarrow y\in(A-C)\subseteq B$. این تناقض ــ یعنی $y\notin B$ و $y\in B$ ــ نتیجه می‌دهد $y\in C$، پس $(A-B)\subseteq C$.

۳. **الف)** مجموعه‌های $\mathscr{U}=\{۱,۲,۳\}$، $A=\{۱,۲\}$، $B=\{۱\}$، و $C=\{۲\}$ مثال نقضی به‌دست می‌دهد.

ب) $A=A\cap\mathscr{U}=A\cap(C\cup\overline{C})=(A\cap C)\cup(A\cap\overline{C})=(A\cap C)\cup(A-C)$
$=(B\cap C)\cup(B-C)=(B\cap C)\cup(B\cap\overline{C})=B\cap(C\cup\overline{C})=B\cap\mathscr{U}=B$

ج) تخصیصهای مجموعه‌ای برای قسمت (الف) نیز مثالی نقض برای این وضعیت به‌دست می‌دهد.

د) قرار دهید $\mathscr{U}=\{۱,۲,۳,۴\}$، $A=\{۱,۲,۳\}$، و $B=\{۱\}$. در این‌صورت $|\mathscr{P}(A-B)|=۲^۲=۴$ در حالی‌که $|\mathscr{P}(A)|-|\mathscr{P}(B)|=۶$، لذا نتیجه، به‌صورتی که به‌وسیلهٔ این مثال نقض اثبات شده، غلط است.

۵. **الف)** ۱۲۶ (اگر تیمها اونیفورمهای مختلف پوشیده باشند)؛ ۶۳ (اگر تیمهامتمایز از هم نباشند)
۱۱۲ (اگر تیمها اونیفورمهای مختلف پوشیده باشند)؛ ۵۶ (اگر تیمها متمایز از هم نباشند)
ب) $۲^n-۲$؛ $(۱/۲)(۲^n-۲)$؛ $۲^n-۲-۲n$؛ $(۱/۲)(۲^n-۲-۲n)$.

۷. **الف)** ۱۲۸ **ب)** $|A|=۸$

۹. فرض کنید که $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$ و که $x\in C$. در این‌صورت

$$x\in C\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup C\Rightarrow x\in A\cap(B\cup C)\subseteq A$$

پس $x\in A$، و $C\subseteq A$.

برعکس، فرض کنید که $C\subseteq A$.

(۱) اگر $y\in(A\cap B)\cup C$، آن‌گاه $y\in A\cap B$ یا $y\in C$.

(i) $y\in A\cap B\Rightarrow y\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\Rightarrow y\in A\cap(B\cup C)$

(ii) $y\in C\Rightarrow y\in A$، زیرا $C\subseteq A$. همچنین، $y\in C\Rightarrow y\in B\cup C$.

لذا $y\in A\cap(B\cup C)$. در مورد (i) یا (ii) داریم $y\in A\cap(B\cup C)$، پس $(A\cap B)\cup C\subseteq A\cap(B\cup C)$.

(۲) اینک فرض کنید $z\in A\cap(B\cup C)$.

در این‌صورت

$$z \in A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq (A \cap B) \cup C$$

زیرا $A \cap C \subseteq C$. از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

۱۱. الف) فرض کنید $A \cup B = \mathscr{U}$ و $x \in \overline{A}$. در این‌صورت

$$x \in \overline{A} \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in B$$

زیرا $A \cup B = \mathscr{U}$. در نتیجه، $\overline{A} \subseteq B$.

برعکس، فرض کنید $y \in \mathscr{U}$. اگر $y \in A$، کار تمام است. اگر نه، $y \notin A$، پس $y \in \overline{A} \subseteq B$. در هر وضعیت داریم $y \in A \cup B$، لذا $\mathscr{U} \subseteq A \cup B$. امّا همیشه داریم $A \cup B \subseteq \mathscr{U}$، پس نتیجه می‌شود که $A \cup B = \mathscr{U}$.

ب) اگر $x \in B$ و $A \cap B = \emptyset$، آن‌گاه $x \notin A$. امّا $x \notin A \Rightarrow x \in \overline{A}$، پس $B \subseteq \overline{A}$.

برعکس، اگر $B \subseteq \overline{A}$ و $y \in A \cap B$، آن‌گاه $y \in B$ و $y \in A$. امّا، $y \in B \Rightarrow y \in \overline{A}$، زیرا $B \subseteq \overline{A}$. بنابراین، $y \in A$ و $y \in \overline{A}$، یا $y \in A \cap \overline{A} = \emptyset$ و $A \cap B \subseteq \emptyset$. همیشه داریم $\emptyset \subseteq A \cap B$، پس نتیجه می‌شود که $A \cap B = \emptyset$.

۱۳. الف) $[۰, ۱۴/۳]$ ب) $(۰, ۹/۵]$ ج) $\{۰\}$ د) $\{۰\} \cup (۶, ۱۲]$
ه) $[۰, +\infty)$ و) $(۰, +\infty)$ ز) $\{۰\}$ ح) $\emptyset$

۱۵. الف)

A	B	$A \cap B$
۰	۰	۰
۰	۱	۰
۱	۰	۰
۱	۱	۱

چون $A \subseteq B$، تنها سطرهای ۱، ۲، و ۴ را در نظر می‌گیریم. برای این‌سطرها $A \cap B = A$.

ب)

A	B	C	$A \cap B$	$B \cup C$	$A \cup B \cup C$
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱

چون $A \cap B = A$ و $B \cup C = C$، تنها سطرهای ۱، ۲، ۴، و ۸ را در نظر می‌گیریم. برای این ۴ سطر، $A \cup B \cup C = C$.

ج)

A	B	C	$(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{C})$	$A\cap\overline{C}$
۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۰	۰

چون $A \subseteq B \subseteq C$، تنها سطرهای ۱، ۵، ۷ و ۸ را در نظر می‌گیریم. در اینجا $(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{C}) = A\cap\overline{C}$.

د)

A	B	C	$A\Delta B$	$A\Delta C$	$B\Delta C$
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۰	۱	۱	۰	۱
۱	۱	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۰	۰	۰

وقتی $A\Delta B = C$، سطرهای ۱، ۴، ۶، و ۷ را در نظر می‌گیریم. در این موارد، $A\Delta C = B$ و $B\Delta C = A$.

۱۷. الف) $\binom{r+1}{m}$، $(m \le r+1)$ ب) $\binom{n-k+1}{k}$، $(2k \le n+1)$

۱۹. $2/7$

۲۱. الف) $\binom{19}{16}/\binom{15}{12}$ ب) $\binom{19}{16}/\binom{11}{8}$ ج) $1/\binom{19}{16}$

۲۳. $7^{15} - 3(3^{15}) + 3$

۲۵. $\binom{12}{4}\binom{10}{3}/\binom{22}{7} = 0{,}3483$

۲۷. الف) $\sum_{i=0}^{8} \binom{2i}{i}\binom{i+8}{8-i} = \sum_{i=0}^{8} \frac{(i+8)!}{i!i!(8-i)!}$

ب)

(i) $\binom{12}{6}\binom{14}{2}/\left[\sum_{i=0}^{8} \binom{2i}{i}\binom{i+8}{8-i}\right]$ (ii) $\binom{12}{6}\binom{13}{1}/\left[\sum_{i=0}^{8} \binom{2i}{i}\binom{i+8}{8-i}\right]$

(iii) $\left[\binom{16}{8} + \binom{12}{6}\binom{14}{2} + \binom{8}{4}\binom{12}{4} + \binom{4}{2}\binom{10}{6} + \binom{0}{0}\binom{8}{8}\right] / \left[\sum_{i=0}^{8} \binom{2i}{i}\binom{i+8}{8-i}\right]$

فصل ۴ ویژگیهای اعداد صحیح:استقرای ریاضی

بخش ۴.۱ـصفحهٔ ۱۷۷

۱. ب) چون $(۱)(۲)(۹)/۶ = ۳ \times ۱$، قضیه برای $n = ۱$ درست است. قضیه را برای $n = k$ می‌پذیریم: $(۱ \times ۳) + (۲ \times ۴) + (۳ \times ۵) + \cdots + k(k + ۲) = k(k + ۱)(۲k + ۷)/۶$.
سپس حالتی را در نظر می‌گیریم که برای آن

$$n=k+۱ : [(۱\times ۳)+(۲\times ۴) +\ldots+k(k+۲)]+(k+۱)(k+۳)=[k(k+۱)$$
$$(۲k+۷)/۶] + (k+۱)(k+۳)=[(k+۱)/۶][k(۲k+۷)+۶(k+۳)]=(k + ۱)\times$$
$$(۲k^۲+۱۳k+۱۸)/۶=(k+۱)(k+۲)(۲k+۹)/۶$$

لذا بنابر اصل استقرای متناهی، به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ نتیجه حاصل می‌شود.
ج) $S(n) : \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{i(i+۱)} = \frac{n}{n+۱}$
$S(۱) : \sum_{i=۱}^{۱} \frac{۱}{i(i+۱)} = \frac{۱}{۱(۲)} = \frac{۱}{۱+۱}$، پس $S(۱)$ درست است.
$S(k) : \sum_{i=۱}^{k} \frac{۱}{i(i+۱)} = \frac{k}{k+۱}$ را می‌پذیریم. $S(k + ۱)$ را در نظر می‌گیریم.

$$\sum_{i=۱}^{k+۱} \frac{۱}{i(i+۱)} = \sum_{i=۱}^{k} \frac{۱}{i(i+۱)} + \frac{۱}{(k+۱)(k+۲)} = \frac{k}{(k+۱)} + \frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}$$
$$= [k(k+۲)+۱]/[(k+۱)(k+۲)] = (k+۱)/(k+۲)$$

پس $S(k) \Rightarrow S(k+۱)$ و برای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{Z}^+$، بنابر اصل استقرای متناهی نتیجه حاصل می‌شود.

۳. الف) ۷۶۲۶ ب) ۶۲۷۸۷۴

۵. الف) ۵۰۶ ب) ۱۲۱۴۴

۷. برای $n = ۱۱$، $(۱۱^۲ - ۱۱)/۱۲ = ۹\frac{۱}{۶} > ۹ = ۲ - ۱۱$. قبول می‌کنیم که قضیه برای

$$n = k(\geq ۱۱) : k - ۲ < (k^۲ - k)/۱۲$$

درست است. وقتی $n = k + ۱$

$$k - ۲ < (k^۲ - k)/۱۲ \Rightarrow (k-۲)+۱ < ((k^۲-k)/۱۲)+۱ \Rightarrow$$
$$(k+۱) - ۲ < (k^۲ - k + ۱۲)/۱۲$$

پس برای $k > ۶$، $۲k > ۱۲$، و $k > ۱۲ - k$، لذا

$$(k+۱)-۲<(k^۲+k)/۱۲=[(k+۱)^۲-(k+۱)]/۱۲$$

پس، برای همهٔ مقادیر $n \geq ۱۱$، بنابر اصل استقرای متناهی، نتیجه حاصل می‌شود.

۹. برای $n=۵$، $۲^۵=۳۲>۲۵=۵^۲$. قضیه را برای

$$n=k(\geq ۵):\ \ ۲^k>k^۲$$

می‌پذیریم. برای $k>۳$، $k(k-۲)>۱$ یا $k^۲>۲k+۱$.

$$۲^k>k^۲ \Rightarrow ۲^k+۲^k>k^۲+k^۲ \Rightarrow ۲^{k+۱}>k^۲+k^۲>k^۲+(۲k+۱)=(k+۱)^۲$$

لذا، بنابر اصل استقرای ریاضی، قضیه برای $n \geq ۵$ درست است.

۱۱. $S(k)$ را می‌پذیریم. برای $S(k+۱)$

$$\sum_{i=۱}^{k+۱} i=([k+(۱/۲)]^۲/۲)+(k+۱)=(k^۲+k+(۱/۴)+۲k+۲)/۲=$$
$$[(k+۱)^۲+(k+۱)+(۱/۴)]/۲=[(k+۱)+(۱/۲)]^۲/۲$$

پس، $S(k+۱) \Rightarrow S(k)$. امّا، اولین مقدار k را که برای آن $S(k)$ درست باشد نداریم: برای هر $k \geq ۱$، $\sum_{i=۱}^{k} i=(k)(k+۱)/۲$ و $(k)(k+۱)/۲=[k+(۱/۲)]^۲/۲ \Rightarrow ۰=۱/۴$

۱۳. **الف)** برای $n=۱$

$$[\sin(۲^n\theta)]/(۲^n\sin\theta)=(\sin ۲\theta)/(۲\sin\theta)=(۲\sin\theta\cos\theta)/(۲\sin\theta)=\cos\theta$$

پس قضیه برای این حالت درست است.

قضیه را برای $n=k$ می‌پذیریم.

$$(\cos\theta)(\cos ۲\theta)\ldots(\cos(۲^{k-۱})\theta)=[\sin(۲^k\theta)]/[۲^k\sin\theta]$$

وقتی $n=k+۱$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}(\cos\theta)(\cos ۲\theta)\ldots(\cos(۲^{k-۱}\theta))(\cos(۲^k\theta))&=[\sin(۲^k\theta)\cos(۲^k\theta)]/[۲^k\sin\theta]\\&=[۲\sin(۲^k\theta)\cos(۲^k\theta)]/[۲^{k+۱}\sin\theta]\\&=[\sin ۲(۲^k\theta)]/[۲^{k+۲}\sin\theta]\\&=[\sin(۲^{k+۱}\theta)]/(۲^{k+۱}\sin\theta)\end{aligned}$$

بنابراین، قضیه برای همهٔ مقادیر $n \geq ۱$، با توجه به اصل استقرای ریاضی راست است.
ب) وقتی $n = ۱$، گزاره می‌شود $\cos\theta = (\sin ۲\theta)/(۲\sin\theta)$، که راست است، زیرا $(\sin ۲\theta)/(۲\sin\theta) = (۲\sin\theta\cos\theta)/(۲\sin\theta) = \cos\theta$.
برای $n = k$ راستی گزاره را می‌پذیریم:

$$\cos\theta + \cos ۳\theta + \cos ۵\theta + \cdots + \cos(۲k - ۱)\theta = (\sin ۲k\theta)/(۲\sin\theta)$$

وقتی $n = k + ۱$، داریم

$$(\cos\theta + \cos ۳\theta + \cdots + \cos(۲k - ۱)\theta) + \cos(۲k + ۱)\theta = [(\sin ۲k\theta)/(۲\sin\theta)] + \cos(۲k+۱)\theta = [\sin ۲k\theta + ۲\sin\theta\cos(۲k+۱)\theta]/(۲\sin\theta)$$

برای اثبات این مورد، لازم است نشان دهیم که

$$\sin(۲k + ۲)\theta = [\sin ۲k\theta + ۲\sin\theta\cos(۲k + ۱)\theta]$$

به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\sin(۲k + ۲)\theta &= \sin ۲k\theta\cos ۲\theta + \cos ۲k\theta\sin ۲\theta \\ &= \sin ۲k\theta[۱ - ۲\sin^۲\theta] + ۲\sin\theta\cos\theta\cos ۲k\theta \\ &= \sin ۲k\theta - ۲\sin\theta[\sin\theta\sin ۲k\theta - \cos\theta\cos ۲k\theta] \\ &= \sin ۲k\theta + ۲\sin\theta\cos(۲k + ۱)\theta\end{aligned}$$

اینک نتیجه برای همهٔ مقادیر $n \geq ۱$، به‌وسیلهٔ اصل استقرای متناهی، حاصل می‌شود.
۱۵. فرض کنید $S(n)$ معرف حکم زیر باشد: برای $x, n \in \mathbf{Z}^+$، اگر برنامه به‌بالای حلقهٔ While برسد، آن‌گاه بعد از خروج از حلقه، مقدار متغیر صحیح Asnwer برابر با $x(n!)$ است.
ابتدا $S(۱)$، حکمی برای مورد $n = ۱$، را در نظر می‌گیریم. در اینجا، برنامه (اگر به‌بالای حلقهٔ While برسد) اجرایی از حلقهٔ While را نتیجه خواهد داد: به x مقدار $x(۱!) = x \cdot ۱$ تخصیص داده می‌شود و مقدار n به‌صفر کاهش می‌یابد. با مقدار n برابر ۰، حلقه دوباره اجرا نمی‌شود و مقدار متغیر Answer برابر $x(۱!)$ است. بنابراین $S(۱)$ درست است.
اینک درستی $S(k)$ را می‌پذیریم: برای $x, k \in \mathbf{Z}^+$، اگر برنامه به‌بالای حلقهٔ While برسد، آن‌گاه بعد از خروج از حلقه، مقدار متغیر Answer برابر است با $x(k!)$. برای اثبات درستی

$S(k+1)$، اگر برنامه به بالای حلقهٔ While برسد، آن‌گاه در طول اولین اجرا موارد زیر رخ می‌دهند:

مقداری که به متغیر x تخصیص می‌یابد برابر است با $x(k+1)$.

مقدار n به $k = (k+1) - 1$ کاهش می‌یابد.

امّا، در این‌صورت می‌توانیم فرض استقراء را برای اعداد صحیح $x(k+1)$ و k به‌کار بریم، و بعد از خروج از حلقهٔ While، مقدار متغیر Answer برابر $(x(k+1))(k!) = x(k+1)!$ است.

در نتیجه، $S(n)$ برای همهٔ مقادیر $n \geq 1$ درست است، و درستی این قطعه برنامه را با استفاده از اصل استقرای ریاضی تحقیق کرده‌ایم.

۱۷. الف) (i) برای $n = 2$، $x_1 + x_2$ معرف مجموع معمولی اعداد حقیقی x_1 و x_2 است.

(ii) برای اعداد حقیقی x_1، x_2، ...، x_n، x_{n+1} داریم

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + x_{n+1}$$

که مجموع دو عدد حقیقی $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ و x_{n+1} است.

ب) درستی این قضیه به‌ازای $n = 3$ از قانون شرکت‌پذیری جمع نتیجه می‌شود-چون $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$، ابهامی در نوشتن $x_1 + x_2 + x_3$ وجود ندارد.

با قبول درستی قضیه برای هر $k \geq 3$ و $1 \leq r < k$، مطلب را برای $k+1$ عدد حقیقی بررسی می‌کنیم. به‌دست می‌آوریم که

$$\begin{aligned}
&(x_1 + x_2 + \cdots + x_r) + (x_{r+1} + \cdots + x_k + x_{k+1}) \\
&= (x_1 + x_2 + \cdots + x_r) + [(x_{r+1} + \cdots + x_k) + x_{k+1}] \\
&= [(x_1 + x_2 + \cdots + x_r) + (x_{r+1} + \cdots + x_k)] + x_{k+1} \\
&= (x_1 + x_2 + \cdots + x_r + x_{r+1} + \cdots + x_k) + x_{k+1} \\
&= x_1 + x_2 + \cdots + x_r + x_{r+1} + \cdots + x_k + x_{k+1}
\end{aligned}$$

لذا قضیه برای هر $n \geq 3$ و هر $1 \leq r < n$، بنابر اصل استقرای ریاضی، درست است.

۱۹. فرض کنید $T(n)$ معرف حکم زیر باشد: برای $n \in \mathbf{Z}^+$، $n \geq 2$، و حکمهای p، q_1، q_2، ...، q_n

$$p \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_n) \Leftrightarrow (p \vee q_1) \wedge (p \vee q_2) \wedge \ldots \wedge (p \vee q_n)$$

حکم $T(۲)$ بنابر قانون توزیعپذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$، درست است. با قبول $T(k)$ برای $k \geq ۲$، اینک وضعیت را برای حکمهای p، $q_۱$، $q_۲$، $\ldots$ ، q_k، $q_{k+۱}$ بررسی می‌کنیم. به‌دست می‌آوریم که

$$\begin{aligned}
& p \vee (q_۱ \wedge q_۲ \wedge \ldots \wedge q_k \wedge q_{k+۱}) \\
\Leftrightarrow\ & p \vee [(q_۱ \wedge q_۲ \wedge \ldots \wedge q_k) \wedge q_{k+۱}] \\
\Leftrightarrow\ & [p \vee (q_۱ \wedge q_۲ \wedge \ldots \wedge q_k)] \wedge (p \vee q_{k+۱}) \\
\Leftrightarrow\ & [(p \vee q_۱) \wedge (p \vee q_۲) \wedge \ldots \wedge (p \vee q_k)] \wedge (p \vee q_{k+۱}) \\
\Leftrightarrow\ & (p \vee q_۱) \wedge (p \vee q_۲) \wedge \ldots \wedge (p \vee q_k) \wedge (p \vee q_{k+۱})
\end{aligned}$$

در این‌صورت، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجه می‌شود که حکم $T(n)$ برای $n \geq ۲$ درست است.

۲۱. الف) برای $n = ۲$ درستی قضیهٔ $A \cap (B_۱ \cup B_۲) = (A \cap B_۱) \cup (A \cap B_۲)$ به‌وسیلهٔ قانون توزیعپذیری قانون $\cap$ نسبت به $\cup$ حاصل می‌شود.

با قبول قضیه برای $n = k$، مطلب را برای مجموعه‌های A، $B_۱$، $B_۲$، $\ldots$ ، B_k، $B_{k+۱}$ بررسی می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned}
A \cap (B_۱ \cup B_۲ \cup \ldots \cup B_k \cup B_{k+۱}) &= A \cap [(B_۱ \cup B_۲ \cup \ldots \cup B_k) \cup B_{k+۱}] \\
&= [A \cap (B_۱ \cup B_۲ \cup \ldots \cup B_k)] \cup (A \cap B_{k+۱}) \\
&= [(A \cap B_۱) \cup (A \cap B_۲) \cup \ldots \cup (A \cap B_k)] \cup (A \cap B_{k+۱}) \\
&= (A \cap B_۱) \cup (A \cap B_۲) \cup \ldots \cup (A \cap B_k) \cup (A \cap B_{k+۱})
\end{aligned}$$

ب) (i) اشتراک $A_۱$ و $A_۲$، $A_۱ \cap A_۲$ است.

(ii) اشتراک $A_۱$، $A_۲$، $\ldots$ ، A_n، $A_{n+۱}$ به‌وسیلهٔ

$$A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+۱} = (A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_n) \cap A_{n+۱}$$

که اشتراک دو مجموعهٔ $A_۱ \cap A_۲ \ldots \cap A_n$ و $A_{n+۱}$ است داده می‌شود.

ج) فرض کنید $S(n)$ نمایش حکم مفروض باشد. پس درستی $S(۳)$ از قانون شرکتپذیری $\cap$ نتیجه می‌شود. با قبول درستی $S(k)$ برای $k \geq ۳$، مطلب را برای $k + ۱$ مجموعه درنظر می‌گیریم. در این‌صورت

$$(A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_r) \cap (A_{r+۱} \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+۱})$$

$$=(A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_r) \cap [(A_{r+۱} \cap \ldots \cap A_k) \cap A_{k+۱}]$$
$$=[(A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_r) \cap (A_{r+۱} \cap \ldots \cap A_k)] \cap A_{k+۱}$$
$$=(A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_r \cap A_{r+۱} \cap \ldots \cap A_k) \cap A_{k+۱}$$
$$=A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_r \cap A_{r+۱} \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+۱}$$

و به‌وسیلهٔ اصل استقرای ریاضی، $S(n)$ برای همهٔ مقادیر $n \geq ۳$ و $۱ \leq r < n$ درست است.

د) (i) برای $n = ۲$، نتیجه از قوانین دمورگن حاصل می‌شود. قضیه را برای $n = k \geq ۲$ می‌پذیریم و مطلب را برای $k + ۱$ مجموعهٔ $A_۱$، $A_۲$، ... ، A_k، $A_{k+۱}$ در نظر می‌گیریم. در این‌صورت

$$\overline{A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+۱}}$$
$$= \overline{(A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_k) \cap A_{k+۱}}$$
$$= \overline{(A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_k)} \cup \overline{A_{k+۱}}$$
$$= [\overline{A_۱} \cup \overline{A_۲} \cup \ldots \cup \overline{A_k}] \cup \overline{A_{k+۱}}$$
$$= \overline{A_۱} \cup \overline{A_۲} \cup \ldots \cup \overline{A_k} \cup \overline{A_{k+۱}}$$

و قضیه، بنابر اصل استقرای ریاضی برای همهٔ مقادیر $n \geq ۲$ درست است.

(ii) برهان این قضیه نظیر برهان قسمت (i) است. فقط به‌جای هر مورد $\cap$ مورد $\cup$ را قرار می‌دهیم و برعکس. [می‌توانیم (ii) را از (i) نیز، با توسل به اصل دوگانی، قضیهٔ ۵.۳، به‌دست آوریم.]

ه) فرض کنید $S(n)$ معرف حکمی باشد که داده شده‌است. می‌دانیم که $S(۲)$ بنابر قانون توزیع‌پذیری $\cup$ نسبت به $\cap$ درست است. لذا درستی $S(k)$ را برای $k \geq ۲$ می‌پذیریم و $S(k+۱)$ را برای مجموعه‌های A، $B_۱$، $B_۲$، ... ، B_k، $B_{k+۱}$ بررسی می‌کنیم. به‌دست می‌آوریم که

$$A \cup [B_۱ \cap B_۲ \cap \ldots \cap B_k \cap B_{k+۱}]$$
$$= A \cup [(B_۱ \cap B_۲ \cap \ldots \cap B_k) \cap B_{k+۱}]$$
$$= [A \cup (B_۱ \cap B_۲ \cap \ldots \cap B_k)] \cap (A \cup B_{k+۱})$$
$$= [(A \cup B_۱) \cap (A \cup B_۲) \cap \ldots \cap (A \cup B_k)] \cap (A \cup B_{k+۱})$$
$$= (A \cup B_۱) \cap (A \cup B_۲) \cap \ldots \cap (A \cup B_k) \cap (A \cup B_{k+۱})$$

و لذا $S(n)$ برای همهٔ مقادیر $n \geq ۲$، بنابر اصل استقرای ریاضی، درست است.

۲۳. برای $P(n)=(۱۰۰۰/\sqrt{۵})[((۱+\sqrt{۵})/۲)^{n+۱}-((۱-\sqrt{۵})/۲)^{n+۱}]$، (پس از قراردادن ۱ و ۲ به‌جای n) به‌دست می‌آوریم که $P(۱)=۱۰۰۰$، و $P(۲)=۲۰۰۰$، لذا $P(n)$ به‌ازای $n=۱,۲$ معتبر است.
اعتبار $P(۱)$، $P(۲)$، $\ldots$ ، $P(k-۲)$، $P(k-۱)$ را برای $k\geq ۳$ می‌پذیریم. دراین‌صورت

$$\begin{aligned}P(k)=P(k-۱)+P(k-۲)&=(۱۰۰۰/\sqrt{۵})[((۱+\sqrt{۵})/۲)^{k}-((۱-\sqrt{۵})/۲)^{k}\\&\quad+((۱+\sqrt{۵})/۲)^{k-۱}-((۱-\sqrt{۵})/۲)^{k-۱}]\\&=(۱۰۰۰/\sqrt{۵})[((۱+\sqrt{۵})/۲)^{k-۱}\cdot[۱+((۱+\sqrt{۵})/۲)]\\&\quad-((۱-\sqrt{۵})/۲)^{k-۱}\cdot[۱+((۱-\sqrt{۵})/۲)]]\\&=(۱۰۰۰/\sqrt{۵})[((۱+\sqrt{۵})/۲)^{k-۱}\cdot((۱+\sqrt{۵})/۲)^{۲}\\&\quad-((۱-\sqrt{۵})/۲)^{k-۱}\cdot((۱-\sqrt{۵})/۲)^{۲}]\\&=(۱۰۰۰/\sqrt{۵}[((۱+\sqrt{۵})/۲)^{k+۱}-((۱-\sqrt{۵})/۲)^{k+۱}]\end{aligned}$$

لذا $P(n)$ برای همهٔ مقادیر $n\geq ۱$، بنابر (صورت دیگر) استقرای ریاضی معتبر است.
۲۵. فرض کنید $T=\{n\in \mathbf{Z}^+ | \text{نادرست است} S(n)\}$. $۱\notin T \Leftarrow$ درستی $S(۱)$. اگر $T\neq\emptyset$، آن‌گاه T دارای یک کوچکترین عنصر r است، زیرا $r \subseteq \mathbf{Z}^+$. اما،

$$\text{درستی } S(۱), S(۲), \ldots, S(r-۱) \Rightarrow \text{درستی } S(r)$$

بنابراین $T=\emptyset$ و نتیجه حاصل می‌شود.

بخش ۲.۴ـ صفحهٔ ۱۹۲

۱. ه) اگر $a|x$ و $a|y$، آن‌گاه برای c و dیی متعلق به $\mathbf{Z}$، $x=ac$ و $y=ad$. لذا $z=x-y=a(c-d)$، و $a|z$. برهانهای حالتهای دیگر مشابه با این برهان‌اند.
ز) بنابر استقرای ریاضی از قسمت (و) نتیجه می‌شود.
۳. چون q اوّل است، تنها مقسوم‌علیه‌های مثبت آن ۱ و q هستند. p عددی اول است و $p>۱$؛ بنابراین $p|q \Rightarrow p=q$.
۵. برای همهٔ مقادیر $x,y\in\mathbf{Z}$،

$$[b|a \text{ و } b|(a+۲)] \Rightarrow b|[ax+(a+۲)y]$$

فرض کنید $x=-۱$، $y=۱$. دراین‌صورت $b>۰$ و $b|۲$، لذا b برابر ۱ یا ۲ است.

۷. برای $m, n \geq ۰$، قرار دهید $a = ۲m + ۱$ و $b = ۲n + ۱$. در این‌صورت

$$a^۲ + b^۲ = ۴(m^۲ + m + n^۲ + n) + ۲$$

لذا $۲|(a^۲ + b^۲)$ امّا $۴ \nmid (a^۲ + b^۲)$.

۹.

	پایهٔ ۱۰	پایهٔ ۲	پایهٔ ۱۶
الف)	۲۲	۱۰۱۱۰	۱۶
ب)	۵۲۷	۱۰۰۰۰۰۰۱۱۱۱	۲۰F
ج)	۱۲۳۴	۱۰۰۱۱۰۱۰۰۱۰	۴D۲
د)	۶۹۲۳	۱۱۰۱۱۰۰۰۰۰۱۰۱۱	۱B۰B

۱۱.

	پایهٔ ۲	پایهٔ ۱۰	پایهٔ ۱۶
الف)	۱۱۰۰۱۱۱۰	۲۰۶	CE
ب)	۰۰۱۱۰۰۰۱	۴۹	۳۱
ج)	۱۱۱۱۰۰۰۰	۲۴۰	F۰
د)	۰۱۰۱۰۱۱۱	۸۷	۵۷

۱۳.

	بزرگترین عدد صحیح	کوچکترین عدد صحیح
الف)	$۷ = ۲^۳ - ۱$	$-۸ = -(۲^۳)$
ب)	$۱۲۷ = ۲^۷ - ۱$	$-۱۲۸ = -(۲^۷)$
ج)	$۲^{۱۵} - ۱$	$-(۲^{۱۵})$
د)	$۲^{۳۱} - ۱$	$-(۲^{۳۱})$
ه)	$۲^{n-۱} - ۱$	$-(۲^{n-۱})$

۱۵. $ax = ay \Rightarrow ax - ay = ۰ \Rightarrow a(x - y) = ۰$. در دستگاه اعداد صحیح، اگر $b, c \in \mathbf{Z}$ و $bc = ۰$، آن‌گاه یا $b = ۰$ یا $c = ۰$. چون $a(x - y) = ۰$ و $a \neq ۰$، نتیجه می‌شود که $(x - y) = ۰$ و $x = y$.

۲۳. الف) چون برای هر $t \in \mathbf{Z}^+$، $۲|۱۰^t$، $۲|n$ اگر و تنها اگر $۲|r_۰$.

ب) از این واقعیت نتیجه می‌شود که به‌ازای $t \geq ۲$، $۴|۱۰^t$.

ج) از این واقعیت نتیجه می‌شود که به‌ازای $t \geq ۳$، $۸|۱۰^t$. به‌طور کلی

$$۲^{t+۱}|n \text{، اگر و تنها اگر } ۲^{t+۱}|(r_t \cdot ۱۰^t + \cdots + r_۱ \cdot ۱۰ + r_۰)$$

بخش ۳.۴ـصفحهٔ ۲۰۰

۱. الف) $(۱۸۲۰, ۲۳۱) = ۷ = ۱۸۲۰(۸) + ۲۳۱(-۶۳)$
ب) $(۲۵۹۷, ۱۳۶۹) = ۱ = ۲۵۹۷(۵۳۴) + ۱۳۶۹(-۱۰۱۳)$
ج) $(۴۰۰۱, ۲۶۸۹) = ۱ = ۴۰۰۱(-۱۱۱۷) + ۲۶۸۹(۱۶۶۲)$
د) $(۷۹۸۳, ۷۹۸۲) = ۱ = ۷۹۸۳(۱) + ۷۹۸۲(-۱)$

۳. $(n, n+۱) = ۱; [n, n+۱] = n(n+۱)$

۵. برای x و yیی متعلق به $\mathbf{Z}$، $(a,b) = d \Rightarrow d = ax + by$.
$(a,b) = d \Rightarrow a/d, b/d \in \mathbf{Z}$،
$۱ = (a/d)x + (b/d)y \Rightarrow (a/d, b/d) = ۱$

۷. فرض کنید $(a,b) = h$ و $(b,d) = g$.
$(a,b) = h \Rightarrow [h|a \text{ و } h|b] \Rightarrow h|(a\cdot ۱ + bc) \Rightarrow h|d$
$[h|b \text{ و } h|d] \Rightarrow h|g$
$(b,d) = g \Rightarrow [g|b \text{ و } g|d] \Rightarrow g|(d\cdot ۱ + b(-c)) \Rightarrow g|a$
$[g|b, g|a \text{ و } h = (a,b)] \Rightarrow g|h, h|g, g|h$ ،$g, h \in \mathbf{Z}^+ \Rightarrow g = h$

۹. برای $c \neq ۱۲$، $c \neq ۱۸$ جوابی وجود ندارد. برای $c = ۱۲$، جوابها عبارت‌اند از

$$x = ۱۱۸ - ۱۶۵k,\ y = -۱۰ + ۱۴k,\ k \in \mathbf{Z}$$

برای $c = ۱۸$، جوابها عبارت‌اند از

$$x = ۱۷۷ - ۱۶۵k, y = -۱۵ + ۱۴k, k \in \mathbf{Z}$$

۱۱. برای x و yیی متعلق به $\mathbf{Z}$، $(a,b) = ۱ \Rightarrow ax + by = ۱$. پس $acx + bcy = c$.
$a|acx, a|bcy$ (زیرا $a|bc$) $\Rightarrow a|c$.

۱۳. فرض کنید $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$. اگر $ax + by = c$ دارای جواب $x_۰, y_۰ \in \mathbf{Z}$ باشد، آن‌گاه $ax_۰ + by_۰ = c$، و چون (a,b)، a و b را می‌شمارد، نتیجه می‌شود که $(a,b)|c$. برعکس، فرض کنید $(a,b)|c$. در این‌صورت برای dیی متعلق به $\mathbf{Z}$، $c = (a,b)d$. چون برای s و tیی متعلق به $\mathbf{Z}$، $(a,b) = as + bt$، داریم $a(sd) + b(td) = (a,b)d = c$ یا $ax_۰ + by_۰ = c$ و $ax + by = c$ در $\mathbf{Z}$ دارای جواب است.

بخش ۴.۴ـصفحهٔ ۲۰۴

۱. الف) $۱۱ \cdot ۵^۳ \cdot ۳^۳ \cdot ۲^۲$ ب) $۱۱^۲ \cdot ۷^۲ \cdot ۵^۲ \cdot ۳ \cdot ۲^۴$
ج) $۱۳ \cdot ۱۱ \cdot ۷^۲ \cdot ۵^۳ \cdot ۳^۲$

۳. $۸۲۵=۱۱ \cdot ۵^۲ \cdot ۳=$ ب.م.م، $۴۱۶۲۱۵۸۰۰۰=۱۳ \cdot ۱۱^۲ \cdot ۷^۲ \cdot ۵^۳ \cdot ۳^۳ \cdot ۲^۴=$ ک.م.م

۵. ب) فرض کنید $\log_{۱۰} p = a/b$، که در آن $a, b \in \mathbf{Z}^+$، $(a,b) = ۱$. در این‌صورت $p = ۱۰^{(a/b)}$ یا $p^b = ۱۰^a = ۲^a \cdot ۵^a$، که متناقض با قضیهٔ اساسی حساب است.

۷. اگر $n \in \mathbf{Z}^+$ و n مربع کامل باشد، آن‌گاه $n = p_۱^{e_۱} \cdot p_۲^{e_۲} \cdots p_k^{e_k}$ که در آن p_i اول و e_i عدد صحیح زوج برای هر $۱ \leq i \leq k$ است. بنابراین تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n برابر است با $(e_۱ + ۱)(e_۲ + ۱) \cdots (e_k + ۱)$، که حاصلضربی از اعداد فرد است. لذا تعداد مقسوم‌علیه‌های n فرد است.

برعکس، اگر $n \in \mathbf{Z}^+$ و n و مربع کامل نباشد، آن‌گاه $n = p_۱^{e_۱} p_۲^{e_۲} \cdots p_k^{e_k}$ که در آن، e_i به‌ازای $۱ \leq i \leq k$ فرد، و $(e_i + ۱)$ برای آن i زوج است. چون $(e_۱ + ۱)(e_۲ + ۱) \cdots (e_k + ۱)$ حداقل یک $(e_i + ۱)$ زوج را شامل است، نتیجه می‌شود که تعداد مقسوم‌علیه‌های n زوج است.

۹. $n = ۲ \cdot ۳ \cdot ۵^۲ \cdot ۷^۲ = ۷۳۵۰$.

تمرینهای گوناگون-صفحهٔ ۲۰۶

۱. $a + (a+d) + (a+۲d) + \cdots + (a + (n-۱)d) = na + [(n-۱)nd]/۲$.

برای $n = ۱$، $a = a + ۰$، و در این حالت قضیه درست است. می‌پذیریم که

$$\sum_{i=۱}^{k} [a + (i-۱)d] = ka + [(k-۱)kd]/۲$$

داریم

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{k+۱} [a + (i-۱)d] &= (ka + [(k-۱)kd]/۲) + (a + kd) \\ &= (k+۱)a + [k(k+۱)d]/۲\end{aligned}$$

لذا برای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{Z}^+$، بنابر استقرا، نتیجه حاصل می‌شود.

۳. الف)

n	$n^۲+n+۴۱$	n	$n^۲+n+۴۱$	n	$n^۲+n+۴۱$
۱	۴۳	۴	۶۱	۷	۹۷
۲	۴۷	۵	۷۱	۸	۱۱۳
۳	۵۳	۶	۸۳	۹	۱۳۱

ب) برای $n = ۳۹$، $n^۲ + n + ۴۱ = ۱۶۰۱$ که اوّل است. امّا برای $n = ۴۰$، $n^۲+n+۴۱=(۴۱)^۲$، پس $S(۴۰) \not\Rightarrow S(۳۹)$.

۵. برای $n = ۱$، $\sum_{i=۱}^{۱} i^۴ = ۱ = [(۱)(۲)(۳)(۵)]/۳۰$، لذا برای این مورد، فرمول درست است. اینک می‌پذیریم که قضیه برای $n = k$ درست است، یعنی

$$\sum_{i=۱}^{k} i^۴ = [k(k+۱)(۲k+۱)(۳k^۲+۳k-۱)]/۳۰$$

وقتی $n = k + ۱$، داریم

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{k+۱} i^۴ &= [k(k+۱)(۲k+۱)(۳k^۲+۳k-۱)]/۳۰ + (k+۱)^۴\\ &= [(k+۱)/۳۰][k(۲k+۱)(۳k^۲+۳k-۱) + ۳۰(k+۱)^۳]\\ &= [(k+۱)/۳۰][۶k^۴ + ۳۹k^۳ + ۹۱k^۲ + ۸۹k + ۳۰]\\ &= [(k+۱)/۳۰][(k+۲)(۲k+۳)(۳k^۲+۹k+۵)]\\ &= [(k+۱)/۳۰][(k+۲)(۲(k+۱)+۱)(۳(k+۱)^۲+۳(k+۱)-۱)]\end{aligned}$$

پس درستی قضیه برای $n = k + ۱$ از درستی قضیه برای $n = k$ حاصل می‌شود. بنابراین به‌ازای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{Z}^+$، بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجه حاصل می‌شود.

۷. الف) برای $n = ۰$، $۳ = ۱ + ۲ = ۱ + ۲^{۲n+۱}$، لذا قضیه برای این مورد اول درست است. با قبول اینکه برای $n = k \in \mathbf{N}$، ۳ عدد $۲^{۲k+۱} + ۱$ را می‌شمارد، مورد $n = k + ۱$ را بررسی می‌کنیم. چون $۲^{۲(k+۱)+۱} + ۱ = ۲^{۲k+۳} + ۱ = ۴(۲^{۲k+۱}) + ۱ = ۴(۲^{۲k+۱} + ۱) - ۳$ و ۳ هر دو عدد $۲^{۲k+۱} + ۱$ و ۳ را می‌شمارد نتیجه می‌شود که ۳ عدد $۲^{۲(k+۱)+۱} + ۱$ را می‌شمارد. بنابراین، نتیجه وقتی برای $n = k$ درست باشد برای $n = k + ۱$ نیز درست است. لذا بنابر اصل استقرای متناهی نتیجه برای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{N}$ حاصل می‌شود.

ب) وقتی $n = ۰$، $۹ = (۰ + ۲)^۳ + (۰ + ۱)^۳ + ۰^۳$، لذا گزاره در این مورد درست است. درستی قضیه را وقتی $n = k \geq ۰$ می‌پذیریم و قضیه را برای $n = k + ۱$ بررسی می‌کنیم. به‌دست می‌آوریم که

$$\begin{aligned}(k+۱)^۳+(k+۲)^۳+(k+۳)^۳ &= (k+۱)^۳+(k+۲)^۳+[k^۳+۹k^۲+۲۷k+۲۷]\\ &= [k^۳+(k+۱)^۳+(k+۲)^۳]+[۹(k^۲+۳k+۳)]\end{aligned}$$

که در آن، اولین جمعوند، به‌دلیل فرض استقراء بر ۹ تقسیم‌پذیر است. بنابراین، چون قضیه برای $n = ۰$ درست است، و چون درست بودن برای $n = k(\geq ۰)$ درستی برای $n = k + ۱$ را نتیجه می‌دهد، لذا از اصل استقرای ریاضی نتیجه می‌شود که حکم برای همهٔ اعداد صحیح

$n \geq ۰$ درست است.

ج) اگر $n = ۰$، $(n^۷/۷) + (n^۳/۳) + (۱۱n/۲۱) = ۰$ که عددی صحیح است. لذا حکم برای این مورد اول درست است. با قبول اینکه حکم برای $n = k \geq ۰$ درست است، داریم $(k^۷/۷) + (k^۳/۳) + (۱۱k/۲۱) \in \mathbf{Z}$. و اینک به‌مورد $n = k + ۱$ برمی‌گردیم. در این مورد داریم

$$((k+۱)^۷/۷ + (k+۱)^۳/۳ + ۱۱(k+۱)/۲۱) = [(k^۷/۷) + (k^۳/۳) + (۱۱k/۲۱)]$$
$$+ [(۷k^۶ + ۲۱k^۵ + ۳۵k^۴ + ۳۵k^۳ + ۲۱k^۲ + ۷k)/۷] + [(۳k^۲ + ۳k)/۳]$$
$$+ [(۱/۷) + (۱/۳) + (۱۱/۲۱)]$$

که بنابر فرض استقرا اولین‌جمعوند عددی صحیح است و جمعوند دوم و سوّم نیز به‌دلیل اینکه صورتشان بر مخرجشان تقسیم‌پذیر است اعدادی صحیح‌اند. لذا درستی حکم به‌ازای $n = k + ۱$ بستگی به این دارد که آخرین جمعوند عددی صحیح باشد یا نباشد. امّا این جمعوند عددی صحیح است، زیرا $(۱/۷)+(۱/۳)+(۱۱/۲۱) = (۳+۷+۱۱)/۲۱ = ۱ \in \mathbf{Z}$.
بنابراین، قضیه برای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{N}$، بنابر اصل استقرای ریاضی، درست است.

۹. برای $n = ۲$ به‌دست می‌آوریم که $۴^۲ = ۱۶ > ۶\binom{۴}{۲} > ۴ = ۲^۲$، لذا در این مورد اوّل، حکم درست است. با قبول درستی قضیه برای $n = k \geq ۲$، یعنی $۴^k > \binom{۲k}{k} > ۲^k$، اینک بررسی می‌کنیم که برای $n = k + ۱$ چه رخ می‌دهد. در اینجا به‌دست می‌آوریم که

$$\binom{۲(k+۱)}{k+۱} = \binom{۲k+۲}{k+۱} = \left[\frac{(۲k+۲)(۲k+۱)}{(k+۱)(k+۱)}\right]\binom{۲k}{k}$$
$$= ۲[(۲k+۱)/(k+۱)]\binom{۲k}{k} > ۲[(۲k+۱)/(k+۱)]۲^k > ۲^{k+۱}$$

زیرا $(۲k+۱)/(k+۱) = [(k+۱)+k]/(k+۱) > ۱$. به‌علاوه $[(k+۱)+k]/(k+۱) < ۲$، لذا

$$\binom{۲k+۲}{k+۱} = ۲[(۲k+۱)/(k+۱)]\binom{۲k}{k} < (۲)(۲)\binom{۲k}{k} < ۴^{k+۱}$$

بنابراین، قضیه برای همهٔ مقادیر $n \geq ۲$، بنابر اصل استقرای ریاضی درست است.

۱۱. الف) ابتدا مشاهده می‌کنیم که حکم برای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{Z}^+$، $۶۴ \le n \le ۶۸$ درست است. این، از محاسبات زیر نتیجه می‌شود

$$۶۴ = ۲(۱۷) + ۶(۵) \qquad ۶۵ = ۱۳(۵) \qquad ۶۶ = ۳(۱۷) + ۳(۵)$$
$$۶۷ = ۱(۱۷) + ۱۰(۵) \qquad ۶۸ = ۴(۱۷)$$

اینک می‌پذیریم که قضیه برای همهٔ مقادیر n، $۶۸ \le n \le k$ درست است و عدد صحیح $k + ۱$ را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت $k + ۱ = (k - ۴) + ۵$ و چون $۶۴ \le k - ۴ < k$، می‌توانیم به‌ازای $a, b \in \mathbf{N}$ بنویسیم $k - ۴ = a(۱۷) + b(۵)$. در نتیجه $k + ۱ = a(۱۷) + (b + ۱)(۵)$ و قضیه به‌ازای همهٔ مقادیر $n \ge ۶۴$، بنابر صورت دیگر اصل استقرای ریاضی، حاصل می‌شود.
ب) برهان این قسمت، مشابه برهان قسمت (الف) است. برای نشان دادن درستی قضیه به‌ازای $۱۰۸ \le n \le ۱۱۷$، محاسبات زیر لازم‌اند.

$$۱۰۸ = ۶(۱۳) + ۳(۱۰) \qquad ۱۰۹ = ۳(۱۳) + ۷(۱۰) \qquad ۱۱۰ = ۱۱(۱۰)$$
$$۱۱۱ = ۷(۱۳) + ۲(۱۰) \qquad ۱۱۲ = ۴(۱۳) + ۶(۱۰) \qquad ۱۱۳ = ۱(۱۳) + ۱۰(۱۰)$$
$$۱۱۴ = ۸(۱۳) + ۱(۱۰) \qquad ۱۱۵ = ۵(۱۳) + ۵(۱۰) \qquad ۱۱۶ = ۲(۱۳) + ۹(۱۰)$$
$$۱۱۷ = ۹(۱۳)$$

۱۳. الف)

$$\begin{aligned} r &= r_۰ + r_۱ \cdot ۱۰ + r_۲ \cdot ۱۰^۲ + \cdots + r_n \cdot ۱۰^n \\ &= r_۰ + r_۱(۹) + r_۱ + r_۲(۹۹) + r_۲ + \cdots + r_n(\underbrace{۹۹\cdots۹۹}_{n \text{ تا } ۹}) + r_n \\ &= [۹r_۱ + ۹۹r_۲ + \cdots + (۹۹\cdots۹)r_n] + (r_۰ + r_۱ + r_۲ + \cdots + r_n) \end{aligned}$$

لذا $۹|r$ اگر و تنها اگر $۹|(r_۰ + r_۱ + r_۲ + \cdots + r_n)$
ج) $۳|t$ برای (x برابر با ۱، ۴، یا ۷)؛ $۹|t$ برای $x = ۷$.
۱۵. الف) $\binom{۱۳}{۹}$ ب) $\binom{۸}{۴}$ ج) $\binom{۱۱}{۷}$ برای قسمت (الف)؛ $\binom{۷}{۳}$ برای قسمت (ب)
۱۷. الف) ۱، ۴، ۹ ب) ۱، ۴، ۹، ۱۶ ...، k که در آن k بزرگترین عدد مربع کوچکتر از n یا برابر با n است.

فصل ۵ رابطه‌ها و تابعها

بخش ۱.۵ـصفحهٔ ۲۱۵

.۱

$$A \times B = \{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۲),(۴,۲),(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵),(۴,۵)\}$$

$$B \times A = \{(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴)\}$$

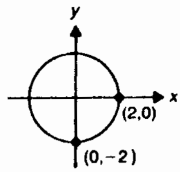
$$A \cup (B \times C) = \{۱,۲,۳,۴,(۲,۳),(۲,۴),(۲,۷),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۷)\}$$

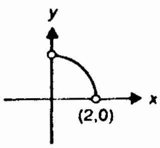
$$\begin{aligned}(A \cup B) \times C = \{&(۱,۳),(۲,۳),(۳,۳),(۴,۳),(۵,۳),(۱,۴),(۲,۴),(۳,۴),\\ &(۴,۴),(۵,۴),(۱,۷),(۲,۷),(۳,۷),(۴,۷),(۵,۷)\}\\ = {}&(A \times C) \cup (B \times C)\end{aligned}$$

.۳ الف) ۹ ب) $۲^۹$ ج) $۲^۹$ د) $۲^۷$ ه) $\binom{۹}{۵}$ و) $\binom{۹}{۹}+\binom{۹}{۸}+\binom{۹}{۷}$

.۵ $\mathscr{R} = \{(۲,۱۰),(۲,۱۲),(۲,۱۴),(۳,۱۲),(۴,۱۲),(۵,۱۰),(۶,۱۲),(۷,۱۴)\}$

.۷ $(\mathscr{U} = \mathbf{R})$ $\qquad$ $(\mathscr{U} = \mathbf{R}^+)$





.۹ ب) از قسمت (الف)، بنابر دوگانی، نتیجه می‌شود.

ج) $x \in A \cap B$ $\Leftrightarrow$ $(x,y) \in (A \cap B) \times C$ و $(x \in A$ و $x \in B)$ $\Leftrightarrow$ $y \in C$ و $(x \in A$ و $y \in C)$ $\Leftrightarrow$ $y \in C$ و $(x,y) \in A \times C$ $\Leftrightarrow$ $(x \in B$ و $y \in C)$ و $(x,y) \in B \times C \Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$

د) از قسمت (ج)، بنابر دوگانی، نتیجه می‌شود.

.۱۱ $x \in A$ $\Leftrightarrow$ $(x,y) \in A \times (B - C)$ و $x \in A$ $\Leftrightarrow$ $y \in B - C$ و $(x \in A$ و $y \in B)$ $\Leftrightarrow$ $(y \in B$ و $y \notin C)$ و $(x,y) \in A \times B$ $\Leftrightarrow$ $(x \in A$ و $y \notin C)$ و $(x,y) \notin A \times C \Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) - (A \times C)$

بخش ۲.۵ـصفحهٔ ۲۲۱

۱. الف) تابع. $\{۷, ۸, ۱۱, ۱۶, ۲۳, \cdots\} =$ برد ب) رابطه، نه تابع
ج) تابع. $\mathbf{R} =$ برد. د) وَ ه) رابطه، نه تابع
۳. الف)

$$\{(۱,x),(۲,x),(۳,x),(۴,x),\}(۱) \qquad \{(۱,y),(۲,y),(۳,y),(۴,y)\}\ (۲)$$

$$\{(۱,z),(۲,z),(۳,z),(۴,z)\}(۳) \qquad \{(۱,x),(۲,y),(۳,x),(۴,y)\ \}\ (۴)$$

$$\{(۱,x),(۲,y),(۳,z),(۴,x)\}(۵)$$

ب) $۳^۴$ ج) ۰ د) $۴^۳$ ه) ۲۴ و) $۳^۳$ ز) $۳^۲$ ح) $۳^۲$
۵. الف) یک‌به‌یک؛ برد، مجموعهٔ تمام اعداد صحیح فرد است.
ب) یک‌به‌یک؛ برد $\mathbf{Q}$ است.
ج) یک‌به‌یک نیست؛ برد عبارت است از $\{n^۳ - n | n \in \mathbf{Z}\} = \{۰, \pm۶, \pm۲۴, \pm۶۰, \cdots\}$
د) یک‌به‌یک؛ برد، $(۰, +\infty)$ است.
ه) یک‌به‌یک؛ برد، $[-۱, ۱]$ است.
و) یک‌به‌یک نیست؛ برد، $[۰, ۱]$ است.
۷. $۴^۲$
۹. الف)

$$f(A_۱ \cup A_۲) = \{y \in B | y = f(x), x \in A_۱ \cup A_۲\}$$

$$= \{y \in B | y = f(x), x \in A_۱ \text{ یا } x \in A_۲\}$$

$$= \{y \in B | y = f(x), x \in A_۱\} \cup \{y \in B | y = f(x), x \in A_۲\}$$

$$= f(A_۱) \cup f(A_۲)$$

ج) بنابر قسمت (ب)، $f(A_۱ \cap A_۲) \subseteq f(A_۱) \cap f(A_۲)$. برعکس

$$y \in f(A_۱) \cap f(A_۲) \Rightarrow y = f(x_۱) = f(x_۲)$$

برای $x_۱ \in A_۱$ و $x_۲ \in A_۲ \Rightarrow y = f(x_۱)$ و

$$x_۱ = x_۲ (\text{چون } f \text{ یک‌به‌یک است}) \Rightarrow y \in f(A_۱ \cap A_۲)$$

لذا

$$f \text{ یک‌به‌یک} \Rightarrow f(A_۱ \cap A_۲) = f(A_۱) \cap f(A_۲)$$

۱۱. الف) $f(a_{ij}) = ۱۲(i-۱)+j$ ب) $f(a_{ij}) = ۱۰(i-۱)+j$
ج) $f(a_{ij}) = ۷(i-۱)+j$

۱۳. الف) (i) $f(a_{ij}) = n(i-۱)+(k-۱)+j$
(ii) $g(a_{ij}) = m(j-۱)+(k-۱)+i$
ب) $k+(mn-۱) \leq r$

بخش ۵.۳ـ صفحهٔ ۲۲۸

۱. الف) $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، $B=\{v,w,x,y,z\}$، $f=\{(۱,v),(۲,v),(۳,w),(۴,x)\}$
ب) برای همان A و Bی قسمت (الف)، $f=\{(۱,v),(۲,x),(۳,z),(۴,y)\}$
ج) $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، $B=\{w,x,y,z\}$، $f=\{(۱,w),(۲,w),(۳,x),(۴,y),(۵,z)\}$
د) $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، $B=\{w,x,y,z\}$، $f=\{(۱,w),(۲,x),(۳,y),(۴,z)\}$

۳. (الف)، (ب)، (ج)، و (و) یک‌به‌یک و پوشا هستند.
د) نه یک‌به‌یک و نه پوشا؛ برد $=[۰,+\infty)$.
ه) نه یک‌به‌یک و نه پوشا؛ برد $=[-\frac{۱}{۴},+\infty)$

۵. (برای حالت $n=۵$ و $m=۳$):

$$\sum_{k=۰}^{۵}(-۱)^k\binom{۵}{۵-k}(۵-k)^۳ = (-۱)^۰\binom{۵}{۵}۵^۳+(-۱)^۱\binom{۵}{۴}۴^۳+(-۱)^۲\binom{۵}{۳}۳^۳$$
$$+(-۱)^۳\binom{۵}{۲}۲^۳+(-۱)^۴\binom{۵}{۱}۱^۳+(-۱)^۵\binom{۵}{۰}۰^۳$$
$$=۱۲۵-۵(۶۴)+۱۰(۲۷)-۱۰(۸)+۵=۰$$

۷. برای هر $r \in \mathbf{R}$ حداقل aیی متعلق به $\mathbf{R}$ وجود دارد به‌قسمی که $a^۵-۲a^۲+a-r=۰$، زیرا چندجمله‌ای $x^۵-۲x^۲+x-r$ درجهٔ فرد و ضرایب حقیقی دارد. بنابراین f پوشاست. امّا، $f(۱)=۰=f(۰)$، پس f یک‌به‌یک نیست.

۹.

$m \backslash n$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۹	۱	۲۵۵	۳۰۲۵	۷۷۷۰	۶۹۵۱	۲۶۴۶	۴۶۲	۳۶	۱	
۱۰	۱	۵۱۱	۹۳۳۰	۳۴۱۰۵	۴۲۵۲۵	۲۲۸۲۷	۵۸۸۰	۷۵۰	۴۵	۱

بخش ۵.۴ـ صفحهٔ ۲۳۵

۱. (الف)، (ب) و (د) تعویضپذیر و شرکتپذیرند؛ (ج) نه تعویضپذیر است و نه شرکتپذیر.

۳. الف) $n^{(n^۲-۱)}$ ب) $(n^n)(n^{(n^۲-n-۲)/۲})$

۵. $f(z_۱, z_۲) = z_۲$ زیرا $z_۱$ عنصر همانی برای f است.

۷. الف) $\pi_A(D) = [۰, +\infty)$ $\quad \pi_B(D) = \mathbf{R}$

ب) $\pi_A(D) = \mathbf{R}$ $\quad \pi_B(D) = [-۱, ۱]$

ج) $\pi_A(D) = [-۱, ۱]$ $\quad \pi_B(D) = [-۱, ۱]$

۹. الف) ۵ ب) $A_۵ \ A_۴ \ A_۳$ ج) $A_۱, A_۲$

$A_۵$	$A_۴$	$A_۳$
۶	۲۵	۲۵
۴	۲	۲۵
۲۰	۴۰	۶۰
۱۰	۴۰	۲۵

بخش ۵.۵ـ صفحهٔ ۲۴۰

۱. کبوترها جورابها هستند و لانه‌های کبوترها رنگها.

۳. الف) ۷ ب) ۱۳ ج) $۶(n-۱)+۱$

۵. $۲۶^۲ + ۱ = ۶۷۷$

۷. الف) برای هر $x \in \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۳۰۰\}$ می‌نویسیم $x = ۲^n \times m$، که در آن $n \geq ۰$ و $(۲, m) = ۱$. برای $m : ۱, ۳, ۵, \ldots, ۲۹۹$، ۱۵۰ امکان وجود دارد. وقتی ۱۵۱ عدد از $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۳۰۰\}$ انتخاب می‌کنیم، باید دو عدد به‌صورت $x = ۲^s \cdot m$، $y = ۲^t \cdot m$ وجود داشته باشند. اگر $x < y$، آن‌گاه $x|y$؛ در غیر این‌صورت $y < x$ و $y|x$.

ب) اگر $n+۱$ عدد صحیح از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۲n\}$ انتخاب شوند، آن‌گاه باید دو عدد صحیح x و y در این انتخاب وجود داشته باشند که $x|y$ یا $y|x$.

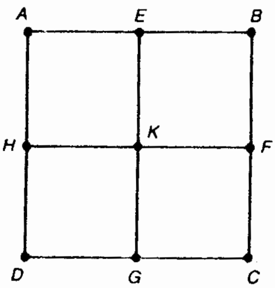
۹. الف) در اینجا کبوترها اعداد صحیح $۱, ۲, ۳, \ldots, ۲۵$ و لانه‌های کبوترها ۱۳ مجموعهٔ $\{۱, ۲۵\}$، $\{۲, ۲۴\}$، …، $\{۱۱, ۱۵\}$، $\{۱۲, ۱۴\}$، $\{۱۳\}$ هستند. در انتخاب ۱۴ عدد صحیح، عنصرها را در حداقل یک زیرمجموعه‌ی دو عنصری به‌دست می‌آوریم که مجموع آنها ۲۶ می‌شود.

ب) اگر برای n صحیح و مثبت $S = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۲n+۱\}$، آن‌گاه هر زیرمجموعهٔ به‌اندازهٔ $n+۲$ از S باید شامل دو عنصر باشد که مجموع آنها $۲n+۲$ است.

۱۱. الف) برای هر $t \in \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰۰\}$، $۱ \leq \sqrt{t} \leq ۱۰$. وقتی ۱۱ عنصر از $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰۰\}$ انتخاب می‌کنیم باید دو عنصر ــ مثلاً x و yــ وجود داشته باشند که برای آنها $\lfloor\sqrt{x}\rfloor = \lfloor\sqrt{y}\rfloor$ به‌قسمی که $۰ < |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < ۱$.

ب) فرض کنید $n \in \mathbf{Z}^+$. اگر $n + ۱$ عنصر از $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n^۲\}$ انتخاب شوند، آن‌گاه دو عنصر ــ مثلاً x و yــ وجود دارند که $۰ < |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < ۱$.

۱۳. درون مربع را به چهار مربع مساوی کوچکتر مطابق شکل، تقسیم کنید. طول قطر هر مربع کوچک برابر $۱/\sqrt{۲}$ است. فرض کنید ناحیهٔ $R_۱$، درون مربع $AEKH$، همراه با نقاط روی پاره‌خط EK، بجز نقطه‌ی E، باشد. ناحیهٔ $R_۲$، درون مربع $EBFK$ همراه با نقاط روی پاره‌خط FK، بجز نقاط F و K است. ناحیه‌های $R_۳$ و $R_۴$ به‌صورتی مشابه تعریف می‌شوند. در این‌صورت اگر پنج نقطه در درون مربع $ABCD$ انتخاب شوند، حداقل دوتای آنها به‌ازای $۱ \leq i \leq ۴$ در R_i هستند و این نقاط به‌فاصلهٔ $۱/\sqrt{۲}$ (واحد) از یکدیگر قرار دارند.



۱۵. با شرکت دادن چهار دانش‌آموز در هر پیشامد(جمعاً ۳۲ دانش‌آموز) شروع می‌کنیم. اگر ۶ دانش‌آموز دیگر را در یکی از این پیشامدها شرکت دهیم، از ۳۸ دانش‌آموز استفاده می‌شود. اینک همین‌کار را برای پیشامد دوّم انجام می‌دهیم. اینجا ۴۴ دانش‌آموز شرکت داده شدند؛ دو پیشامد هر یک ۱۰ دانش‌آموز دارد، و شش پیشامد دیگر هر یک ۴ دانش‌آموز دارد. وقتی آخرین دانش‌آموز را شرکت می‌دهیم، سومین پیشامد ۵ دانش‌آموز یا بیشتر برای آموزش خواهد داشت.

۱۷. الف) چون $|S| \geq ۳$، x و yیی متعلق به S وجود دارند که x و y هر دو زوج یا هر دو فردند. در هر دو حالت $x + y$ زوج است.

ب) $۵ = ۲^۲ + ۱$ ج) $|S| \geq ۹ = ۲^۳ + ۱$

د) برای $n \in \mathbf{Z}^+$ فرض کنید $S = \{(a_۱, a_۲, \ldots, a_n) | a_i \in \mathbf{Z}^+, ۱ \leq i \leq n\}$. اگر $|S| \geq ۲^n + ۱$، آن‌گاه S شامل دو nـتایی مرتب $(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$، $(y_۱, y_۲, \ldots, y_n)$ است به‌قسمی که $x_i + y_i$ به‌ازای همهٔ مقادیر $۱ \leq i \leq n$ زوج است.

ه) ۵، مثل قسمت (ب)

بخش ۶.۵ـ صفحهٔ ۲۵۴

۱. h پوشاست $\Leftrightarrow$ به‌ازای همهٔ مقادیر $b \in B$، $d \in D$، عناصری چون $a \in A$، $c \in C$ وجود دارند با $h(a, c) = (b, d)$ $\Leftrightarrow$ به‌ازای همهٔ مقادیر $b \in B$، $d \in D$، عناصری چون $a \in A$، $c \in C$ وجود دارند با $f(a) = b$، $g(c) = d$ $\Leftrightarrow$ f, g پوشا هستند. h یک‌به‌یک است $\Leftrightarrow$ [برای همهٔ مقادیر $a, a_۱ \in A$، $c, c_۱ \in C$، $h(a, c) = h(a_۱, c_۱) \Leftarrow a = a_۱$، $c = c_۱$] $\Leftrightarrow$ [به‌ازای جمیع مقادیر $a, a_۱ \in A$ و $c, c_۱ \in C$، $f(a_۱) = f(a) \Leftarrow a = a_۱$ و

$g(c) = g(c_۱) \Leftarrow c = c_۱] \Leftrightarrow f$ و g یک‌به‌یک‌اند.

.۳

$$g^۲(A) = g(T \cap (S \cup A)) = T \cap (S \cup [T \cap (S \cup A)])$$
$$= T \cap [(S \cup T) \cap (S \cup (S \cup A))] = T \cap [(S \cup T) \cap (S \cup A)]$$
$$= [T \cap (S \cup T)] \cap (S \cup A) = T \cap (S \cup A) = g(A)$$

.۵ $a = ۳$، $b = -۱$؛ $a = -۳$، $b = ۲$

.۷ الف) $۷! - ۶! = ۴۳۲۰$

ب) $n! - (n-۱)! = (n-۱)(n-۱)!$

.۹ الف)

$$(b,a) \in (\mathscr{R}_۱ \cup \mathscr{R}_۲)^c \Leftrightarrow (a,b) \in \mathscr{R}_۱ \cup \mathscr{R}_۲ \Leftrightarrow (a,b) \in \mathscr{R}_۱$$
یا $(a,b) \in \mathscr{R}_۲ \Leftrightarrow (b,a) \in \mathscr{R}_۱^c$

یا $(b,a) \in \mathscr{R}_۲^c \Leftrightarrow (b,a) \in \mathscr{R}_۱^c \cup \mathscr{R}_۲^c$

ب)

$$(b,a) \in (\mathscr{R}_۱ \cap \mathscr{R}_۲)^c \Leftrightarrow (a,b) \in \mathscr{R}_۱ \cap \mathscr{R}_۲ \Leftrightarrow (a,b) \in \mathscr{R}_۱$$
و $(a,b) \in \mathscr{R}_۲ \Leftrightarrow (b,a) \in \mathscr{R}_۱^c$

و $(b,a) \in \mathscr{R}_۲^c \Leftrightarrow (b,a) \in \mathscr{R}_۱^c \cap \mathscr{R}_۲^c$

ج) $(a,b) \in (\mathscr{R}_۱^c)^c \Leftrightarrow (b,a) \in (\mathscr{R}_۱^c) \Leftrightarrow (a,b) \in \mathscr{R}_۱$

.۱۱ الف) $f^{-۱}(x) = (۱/۲)(\ln x - ۵)$

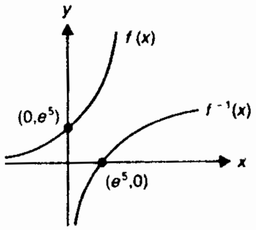
ب) برای $x \in \mathbf{R}^+$،

$$(f \circ f^{-۱})(x) = f((۱/۲)(\ln x - ۵)) = e^{۲((۱/۲)(\ln x - ۵)) + ۵} = e^{\ln x - ۵ + ۵} = e^{\ln x} = x$$

برای $x \in \mathbf{R}$،

$$(f^{-۱} \circ f)(x) = f^{-۱}(e^{۲x+۵}) = (۱/۲)[\ln(e^{۲x+۵}) - ۵] = (۱/۲)[۲x + ۵ - ۵] = x$$

ج)



۱۳. f و g وارونپذیر ⇐ هر یک از f و g یک‌به‌یک و پوشاست ⇐ $f \circ g$ یک‌به‌یک و پوشاست ⇐ $g \circ f$ وارونپذیر است. چون $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = 1_C$ و $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = 1_A$، $f^{-1} \circ g^{-1}$ وارون $g \circ f$ است. با توجه به یکتایی وارونها، $f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$.

۱۵. الف) $[0, 2)$ ب) $[-1, 2)$ ج) $[0, 1)$ د) $[0, 2)$

ه) $[-1, 2)$ و) $[0, 2)$ ز) $[-1, 3)$، ح) $[-1, 0) \cup [2, 4)$

۱۷. الف) $a \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow f(a) \in B_1 \cap B_2 \Leftrightarrow f(a) \in B_1$ و $f(a) \in B_2 \Leftrightarrow a \in f^{-1}(B_1)$ و $a \in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow a \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

ج) $a \in f^{-1}\overline{(B_1)} \Leftrightarrow f(a) \in \overline{B_1} \Leftrightarrow f(a) \notin B_1 \Leftrightarrow a \notin f^{-1}(B_1) \Leftrightarrow a \in \overline{f^{-1}(B_1)}$

۱۹. الف) (i) $f(x) = 2x$ (ii) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$

ب) نه. مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ متناهی نیست.

بخش ۷.۵ـ صفحهٔ ۲۶۰

۱. الف) $f \in O(n)$ ب) $f \in O(1)$ ج) $f \in O(n^3)$

د) $f \in O(n^2)$ ه) $f \in O(n^3)$ و) $f \in O(n^2)$ ز) $f \in O(n^2)$

۳. الف) برای همهٔ مقادیر $n \in \mathbf{Z}^+$، $0 \le \log_2 n < n$. پس، در تعریف ۲۲.۵، قرار می‌دهیم $k = 1$ و $m = 200$. در این‌صورت

$$|f(n)| = 100 \log_2 n = 200(\frac{1}{2} \log_2 n) < 200(\frac{1}{2} n) = 200|g(n)|$$

پس $f \in O(g)$.

ب) برای $n = 6$، $2^{2n} - 1000 = 2^{12} - 1000 = 4096 - 1000 = 3096 > 64 = 2^n$.

با قبول اینکه به‌ازای $n = k \ge 6$، $2^k < 2^{2k} - 1000$، به‌دست می‌آوریم که

$$2 < 2^2 \Rightarrow 2(2^k) < 2^2(2^{2k} - 1000) < 2^2 2^{2k} - 1000$$

یا $1000 - 2^{k+1} < 2^{2(k+1)}$، لذا به‌ازای همهٔ مقادیر $n \geq 6$، $f(n) < g(n)$. بنابراین، با $k = 6$ و $m = 1$ در تعریف ۲۲.۵، به‌دست می‌آوریم که برای $n \geq k$، $|f(n)| \leq m|g(n)|$ و $f \in O(g)$.

ج) برای همهٔ مقادیر $n \geq 4$، $n^2 \leq 2^n$. (یک برهان رسمی برای این مطلب را می‌توان به‌وسیلهٔ استقرای ریاضی عرضه کرد.) لذا در تعریف ۲۲.۵ قرار می‌دهیم $k = 4$ و $m = 3$. پس، برای $n \geq k$،

$$|f(n)| = 3n^2 \leq 3(2^n) < 3(2^n + 2n) = m|g(n)|$$

و $f \in O(g)$.

۵. برای اینکه نشان دهیم $f \in O(g)$، در تعریف ۲۲.۵، قرار می‌دهیم $k = 1$ و $m = 4$. پس برای هر $n \geq k$،

$$|f(n)| = n^2 + n \leq n^2 + n^2 = 2n^2 \leq 2n^3 = 4((1/2)n^3) = 4|g(n)|$$

و f مغلوب g است. برای اینکه نشان دهیم $g \notin O(f)$، اندیشه‌ای را که در مثال ۵۱.۵ داده شده دنبال می‌کنیم، یعنی

$$\forall m \in \mathbf{R}^+ \forall k \in \mathbf{Z}^+ \exists n \in \mathbf{Z}^+ [(n \geq k) \wedge (|g(n)| > m|f(n)|)]$$

بنابراین مقادیر m و k هرچه باشند، انتخاب می‌کنیم $n > \max\{4m, k\}$. در این‌صورت

$$|g(n)| = (\frac{1}{2})n^3 > (\frac{1}{2})(4m)n^2 = m(2n^2) \geq m(n^2 + n) = m|f(n)|$$

لذا $g \notin O(f)$.

۷. برای همهٔ مقادیر $n \geq 1$، $\log_2 n \leq n$، پس در تعریف ۲۲.۵، با $k = 1$ و $m = 1$ داریم $|g(n)| = \log_2 n \leq n = m.n = m|f(n)|$. بنابراین $g \in O(f)$. برای اینکه نشان دهیم $f \notin O(g)$، ابتدا مشاهده می‌کنیم که $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log_2 n} = +\infty$. (این مطلب را می‌توان با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال در حسابان ثابت کرد.) چون $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log_2 n} = +\infty$، به‌دست می‌آوریم که برای هر $m \in \mathbf{R}^+$ و $k \in \mathbf{Z}^+$، n ی متعلق به $\mathbf{Z}^+$ وجود دارد به‌قسمی که $\frac{n}{\log_2 n} > m$، یا $|f(n)| = n > m \log_2 n = m|g(n)|$. بنابراین $f \notin O(g)$.

۹. چون $f \in O(g)$، لذا مقادیری مانند $m \in \mathbf{R}^+$ و $k \in \mathbf{Z}^+$ می‌توان یافت به‌قسمی که برای همهٔ مقادیر $n \geq k$، $|f(n)| \leq m|g(n)|$. امّا در این‌صورت برای همهٔ مقادیر $n \geq k$، $|f(n)| \leq [m/|c|]|cg(n)|$، لذا $f \in O(cg)$.

بخش ۸.۵ـ صفحهٔ ۲۷۰

۱. الف) $f\in O(n^2)$ ب) $f\in O(n^3)$ ج) $f\in O(n^2)$، د) $f\in O(\log_2 n)$، ه) $f\in O(n\log_2 n)$

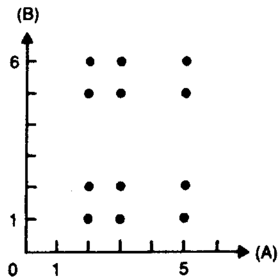
۳. الف) $f_3\in O(n^2)$ ب) $f_3\in O(\log_2 n)$ ج) $f_3\in O(n^2)$ د) $f_3\in O(n^2)$ ه) $f_3\in O(2^n)$

تمرینهای گوناگون ـ صفحهٔ ۲۷۵

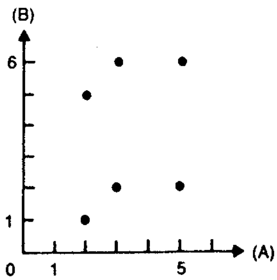
۱. الف) $(a,b)\in A\times B\Rightarrow a\in A, b\in B\Rightarrow a\in C, b\in D$، زیرا $A\subseteq C$ و $B\subseteq D\Rightarrow (a,b)\in C\times D$.

ب) اگر A یا B مجموعهٔ تهی باشد، لزومی به‌درستی قضیه نیست. مثلاً، فرض کنید $A=\{1,2\}$، $B=\emptyset$، $C=\{1\}$، و $D=\{1\}$؛ دراین‌صورت $A\times B=\emptyset\subseteq C\times D$ امّا $A\nsubseteq C$. اگر نه A تهی باشد و نه B، فرض کنید $a\in A$، $b\in B$. دراین‌صورت $(a,b)\in A\times B\subseteq C\times D\Rightarrow a\in C, b\in D$. بنابراین $A\subseteq C$ و $B\subseteq D$.

۳. الف)



ب)



ج) $2^{12}-4^3$

۵. الف) $(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)\Leftrightarrow x\in A\cap B$، $y\in C\cap D\Leftrightarrow (x\in A, y\in C)$ و $(x\in B, y\in D)\Leftrightarrow (x,y)\in A\times C$ و $(x,y)\in B\times D\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$

ب) $(x,y)\in(A\cup B)\times(C\cup D)\Leftrightarrow x\in A\cup B$، $y\in C\cup D\Leftrightarrow (x\in A$ یا $x\in B)$ و $(y\in C$ یا $y\in D)\Leftrightarrow (x\in A$ و $y\in C)$ یا $(x\in B$ و $y\in D)$ یا $(x\in A$ و $y\in D)$ یا $(x\in B$ و $y\in C)\Leftrightarrow ((x,y)\in A\times C)$ یا $((x,y)\in B\times D)$ یا $((x,y)\in A\times D)$ یا $((x,y)\in B\times C)\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times C)\cup(B\times D)\cup(A\times D)\cup(B\times C)$

۷. $A(2,3)=9$

۹. الف) $(7!)/[2(7^5)]$

۱۱. برای $1\le i\le 10$، فرض می‌کنیم x_i تعداد نامه‌هایی باشد که در روز i ماشین شده‌اند. در این‌صورت $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_8+x_9+x_{10}=84$، یا $x_3+\cdots+x_8=54$. فرض می‌کنیم که $x_1+x_2+x_3<25$، $x_2+x_3+x_4<25$، ...، $x_8+x_9+x_{10}<25$.

در این‌صورت

$$x_۱ + ۲x_۲ + ۳(x_۳ + \cdots + x_۸) + ۲x_۹ + x_{۱۰} < ۸(۲۵) = ۲۰۰$$

یا $۳(x_۳ + \cdots + x_۸) < ۱۶۰$. بنابراین به تناقض زیر می‌رسیم

$$۵۴ = x_۳ + \cdots + x_۸ < \frac{۱۶۰}{۳} = ۵۳\frac{۱}{۳}$$

۱۳. برای اینکه $\prod_{k=۱}^{n}(k - i_k)$ فرد باشد، برای همهٔ مقادیر $۱ \leq k \leq n$، باید $(k - i_k)$ فرد باشد، یعنی یکی از دو عدد k و i_k باید زوج باشد و دیگری فرد. چون n فرد است، $n = ۲m + ۱$ و در مجموعهٔ اعداد ۱، ۲، . . . ، n، m عدد صحیح زوج و $m + ۱$ عدد صحیح فرد وجود دارند. فرض کنید ۱، ۳، ۵، . . . ، n کبوترها و $i_۱$، $i_۳$، $i_۵$، . . . ، i_n لانه‌های کبوترها باشند. حداکثر m تا از لانه‌های کبوترها می‌توانند اعداد صحیح زوج باشند، لذا برای حداقل یک k از $k = ۱, ۳, ۵, \ldots, n$، $(k - i_k)$ باید زوج باشد. در نتیجه، $\prod_{k=۱}^{n}(k - i_k)$ زوج است.

۱۵. فرض کنید n شئ متمایز، $x_۱$، $x_۲$، . . . ، x_n داده‌شده‌باشند. x_n را در ظرفی قرار می‌دهیم. اینک دو ظرف متمایز وجود دارند. برای هر یک از $x_۱$، $x_۲$، . . . ، $x_{n-۱}$ دو انتخاب وجود دارد و این، $۲^{n-۱}$ توزیع به‌دست می‌دهد. در میان این توزیعها، توزیعی وجود دارد که برای آن $x_۱$، $x_۲$، . . . ، $x_{n-۱}$ در ظرفِ شامل x_n هستند، لذا این توزیع را حذف می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم $S(n, ۲) = ۲^{n-۱} - ۱$.

۱۷. الف) و ب) $m!S(n, m)$

۱۹. قرار می‌دهیم $m = ۱$. برای $n = ۱$ قضیه درست است. فرض کنید $f \circ f^k = f^k \circ f$ و $f \circ f^{k+۱}$ را در نظر می‌گیریم

$$f \circ f^{k+۱} = f \circ (f \circ f^k) = f \circ (f^k \circ f) = (f \circ f^k) \circ f = f^{k+۱} \circ f$$

بنابراین به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $f \circ f^n = f^n \circ f$. اینک فرض‌کنید برای $t \geq ۱$، $f^t \circ f^n = f^n \circ f^t$. در این‌صورت

$$\begin{aligned} f^{t+۱} \circ f^n &= (f \circ f^t) \circ f^n = f \circ (f^t \circ f^n) = f \circ (f^n \circ f^t) = (f \circ f^n) \circ f^t \\ &= (f^n \circ f) \circ f^t = f^n \circ (f \circ f^t) = f^n \circ f^{t+۱} \end{aligned}$$

لذا برای هر $m, n \in \mathbf{Z}^+$، $f^m \circ f^n = f^n \circ f^m$.

۲۱. هر $n \in \mathbf{Z}^+$ که n فرد باشد.
۲۳.

$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (زیرا f صعودی است) $\Rightarrow g(f(x)) < g(f(y))$ (زیرا g صعودی است)

بنابراین $g \circ f$ صعودی است.
۲۵.

$f \circ g = \{(x,z),(y,y),(z,x)\}; g \circ f = \{(x,x),(y,z),(z,y)\};$
$f^{-1} = \{(x,z),(y,x),(z,y)\};$
$g^{-1} = \{(x,y),(y,x),(z,z)\}; (g \circ f)^{-1} = \{(x,x),(y,z),(z,y)\} = f^{-1} \circ g^{-1};$
$g^{-1} \circ f^{-1} = \{(x,z),(y,y),(z,x)\}$

۲۷. الف) ۴ ب) ۱۰
۲۹. الف)

$$a \in A \Rightarrow f(a) \in f(A) \Rightarrow a \in f^{-1}(f(A))$$

اگر f یک‌به‌یک باشد، $A = f^{-1}(f(A))$.
ب) برای مقداری چون $a \in f^{-1}(B) \Rightarrow b = f(a)$، که در آن $f(A) \in B \Rightarrow b \in B$، داریم

$$b \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow b = f(a)$$

اگر f پوشا باشد، $B = f(f^{-1}(B))$.
۳۱. الف) $(\pi \circ \sigma)(x) = (\sigma \circ \pi)(x) = x$
ب) $(n \geq ۲)$ $\pi^n(x) = x - n; \sigma^n(x) = x + n$
ج) $(n \geq ۲)$ $\pi^{-n}(x) = x + n; \sigma^{-n}(x) = x - n$
۳۳.

الف) $\tau(n) = (e_۱ + ۱)(e_۲ + ۱) \cdots (e_k + ۱)$
ب) $k = ۲ : \tau(۲) = \tau(۳) = \tau(۵) = ۲ \quad k = ۳ : \tau(۲^۲) = \tau(۳^۲) = \tau(۵^۲) = ۳$
$k = ۴ : \tau(۶) = \tau(۸) = \tau(۱۰) = ۴ \quad k = ۵ : \tau(۲^۴) = \tau(۳^۴) = \tau(۵^۴) = ۵$
$k = ۶ : \tau(۱۲) = \tau(۱۸) = \tau(۲۰) = ۶$

ج) برای هر $k > ۱$ و هر عدد اول p، $\tau^{-۱}(p^{k-۱}) = k$.

.۳۵ الف) $۴!S(۸, ۴)$ ب) $m!S(n, m)$

.۳۷ الف) قرار می‌دهیم $m = ۱$ و $k = ۱$. در این‌صورت برای هر $n \geq k$،

$$|f(n)| \leq ۲ < ۳ \leq |g(n)| = m|g(n)|$$

بنابراین $f \in O(g)$.

ب) قرار می‌دهیم $m = ۴$ و $k = ۱$. در این‌صورت برای هر $n \geq k$،

$$|g(n)| \leq ۴ = ۴ \cdot ۱ \leq ۴|f(n)| = m|f(n)|$$

بنابراین $g \in O(f)$.

.۳۹ ابتدا توجه کنید که اگر $\log_a n = r$، آن‌گاه $n = a^r$ و

$$\log_b n = \log_b(a^r) = r \log_b a = (\log_b a)(\log_a n)$$

اینک قرار می‌دهیم $m = (\log_b a)$ و $k = ۱$. در این‌صورت به‌ازای هر $n \geq k$،

$$|g(n)| = \log_b n = (\log_b a)(\log_a n) = m|f(n)|$$

بنابراین، $g \in O(f)$. سرانجام، با $m = (\log_b a)^{-۱} = \log_a b$ و $k = ۱$، به‌دست می‌آوریم که برای هر $n \geq k$،

$$|f(n)| = \log_a n = (\log_a b)(\log_b n) = m|g(n)|$$

بنابراین، $f \in O(g)$.

فصل ۶ زبانها: ماشینهای متناهی‌ـحالت

بخش ۶.۱ـصفحهٔ ۲۹۲

.۱ الف) ۲۵؛ ۱۲۵ ب) ۳۹۰۶

.۳ ۱۲

.۵ ۷۸۰

۷. فرض کنید Σ، الفبایی با $\emptyset \neq A \subseteq \sum^*$ باشد. اگر $|A| = ۱$ و $x \in A$، آن‌گاه $xx = x$، زیرا $A^۲ = A$. امّا

$$\|xx\| = ۲\|x\| = \|x\| \Rightarrow \|x\| = ۰ \Rightarrow x = \lambda$$

اگر $|A| > ۱$، فرض کنید $x \in A$ که در آن $\|x\| > ۰$ امّا $\|x\|$ مینیمال است. پس، برای $y, z \in A$، $x \in A^۲ \Rightarrow x = yz$. چون $\|x\| = \|y\| + \|z\|$، اگر $\|y\|, \|z\| > ۰$، آن‌گاه یکی از مقادیر y و z با درازای کوچکتر از $\|x\|$، در A است. در نتیجه یکی از مقادیر $\|y\|$ یا $\|z\|$ برابر ۰ است، پس $\lambda \in A$.

۹. الف) $x \in AC \Rightarrow x = ac$ به‌ازای یک $a \in A$ و یک $c \in C$. بنابراین $x \in BD$، زیرا، $A \subseteq B$، $C \subseteq D$.

ب) اگر $A\emptyset \neq \emptyset$، فرض کنید $x \in A\emptyset$. برای $y \in A$، $z \in \emptyset$، $x \in A\emptyset \Rightarrow x = yz$. امّا $z \in \emptyset$ غیرممکن است. بنابراین $A\emptyset = \emptyset$. [به‌روشی مشابه، $\emptyset A = \emptyset$].

۱۱. اگر $A = A^۲$، آن‌گاه با استقرای ریاضی نتیجه می‌شود که برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$، $A = A^n$. بنابراین $A = A^+$. طبق تمرین ۷، $A = A^۲ \Rightarrow \lambda \in A$. لذا $A = A^*$.

۱۳. بنابر تعریف ۱۱.۶، $AB = \{ab | a \in A, b \in B\}$، و چون می‌توانیم به‌ازای $a_۱, a_۲ \in A$، $a_۱ \neq a_۲$، و $b_۱, b_۲ \in B$، $b_۱ \neq b_۲$ داشته باشیم $a_۱b_۱ = a_۲b_۲$، نتیجه می‌شود که $|AB| \leq |A \times B| = |A||B|$.

۱۵.

الف)
$$x \in A(\cup_{i\in I} B_i) \Leftrightarrow x = ab, \exists a \in A \exists b \in \cup_{i\in I} B_i \Leftrightarrow$$
$$x = ab, a \in A, b \in B_i, \exists i \in I \Leftrightarrow x \in AB_i, \exists i \in I \Leftrightarrow$$
$$x \in \cup_{i\in I} AB_i$$

ب)
$$y \in (\cup_{i\in I})A \Leftrightarrow y = dc, \exists d \in \cup_{i\in I} B_i, \exists c \in A \Leftrightarrow$$
$$y = dc, d \in B_i, \exists i \in I, c \in A \Leftrightarrow y \in B_i A, \exists i \in I \Leftrightarrow$$
$$y \in \cup_{i\in I} B_i A$$

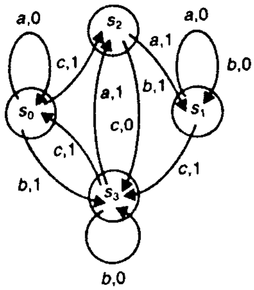
بخش ۲.۶ـ صفحهٔ ۳۰۱

۱. الف) ۱۰۱۰۱۰۰؛ $s_۱$

ب) ۰۰۰۰۰۰۰۰؛ $s_۱$

ج) ۰۰۰۰۰۰۰۱۰۰؛ $s_۰$

۳. الف) ۰۱۰۱۱۰ ب)



۵. الف) ۰۱۰۰۰۰؛ $s_۲$

ب) ۱۰۰۰۰۰ ($s_۱$)؛ $s_۲$

۰۰۰۰۰۰ ($s_۲$)؛ $s_۲$

۱۱۰۰۱۰ ($s_۳$)؛ $s_۲$

ج)

	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
$s_۰$	$s_۰$	$s_۱$	۰	۰
$s_۱$	$s_۱$	$s_۲$	۱	۱
$s_۲$	$s_۲$	$s_۲$	۰	۰
$s_۳$	$s_۰$	$s_۳$	۰	۱
$s_۴$	$s_۲$	$s_۳$	۰	۱

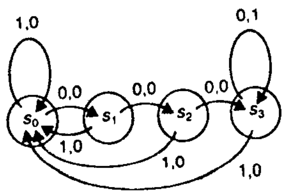
د) $s_۱$

ه) (یکتا) $x = ۱۰۱$

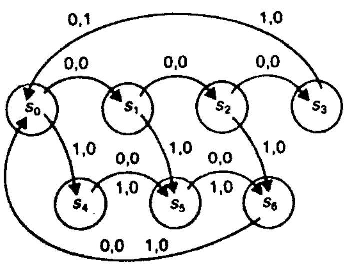
۷. الف) (i)۱۵ (ii)$۳^{۱۵}$ (iii)$۲^{۱۵}$ ب) $۶^{۱۵}$

بخش ۶.۳ـ صفحهٔ ۳۱۲

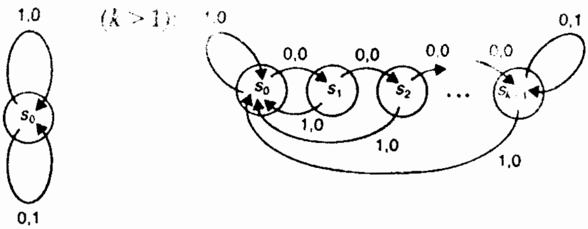
۱. الف)



ب)



۳. $(k = ۱)$ $(k > ۱)$



۷. الف) حالتهای گذرا $s_۰$ و $s_۱$ هستند. حالت $s_۳$ یک حالت چاه است. $\{s_۱, s_۲, s_۳, s_۴, s_۵\}$، $\{s_۴\}$، و $\{s_۲, s_۳, s_۵\}$ (با قیدهای متناظر مربوط به تابع داده شدهٔ ν) زیرماشینهایی را تشکیل می‌دهند. زیرماشینهای قویاً همبند، $\{s_۴\}$ و $\{s_۲, s_۳, s_۵\}$اند.
ب) حالتهای $s_۲$ و $s_۳$ گذرا هستند. تنها حالتی که چاه است، $s_۴$ است. مجموعهٔ $\{s_۰, s_۱, s_۳, s_۴\}$ حالتهایی را برای زیر ماشین به‌دست می‌دهد؛ $\{s_۰, s_۱\}$ و $\{s_۴\}$ زیر ماشینهای قویاً همبند را به‌دست می‌دهند.
ج) در اینجا حالتهای گذرا وجود ندارند. حالت $s_۶$ یک حالت چاه است. سه زیرماشین وجود دارند: $\{s_۲, s_۳, s_۴, s_۵, s_۶\}$، $\{s_۳, s_۴, s_۵, s_۶\}$ و $\{s_۶\}$. تنها زیرماشین قویاً همبند، $\{s_۶\}$ است.

تمرینهای گوناگون-صفحهٔ ۳۱۵

۱. الف) درست ب) درست ج) درست د) غلط ه) درست
و) درست ز) درست ح) درست ط) غلط ی) درست

۳. فرض کنید $x \in \Sigma$ و $A = \{x\}$. لذا $A^۲ = \{xx\}$ و $(A^۲)^* = \{\lambda, x^۲, x^۴, \cdots\}$، $A^* = \{\lambda, x, x^۲, x^۳, \cdots\}$ و $(A^*)^۲ = A^*$. بنابراین $(A^۲)^* \neq (A^*)^۲$.

۵.

$$\mathscr{O}_{۰۲} = \{۱, ۰۰\}^*\{۰\}$$

$$\mathscr{O}_{۲۲} = \{۰\}\{۱, ۰۰\}^*\{۰\}$$

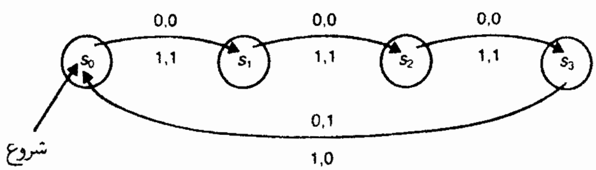
$$\mathscr{O}_{۱۱} = \emptyset$$

$$\mathscr{O}_{۰۰} = \{۱, ۰۰\}^* - \{\lambda\}$$

$$\mathscr{O}_{۱۰} = \{۱\}\{۱, ۰۰\}^* \cup \{۱۰\}\{۱, ۰۰\}^*$$

۹. ۱۱۱۰ و ۱۱۱۱ هر دو دنباله‌های تغییر حالت از $s_۰$ به $s_۵$ هستند.

.۱۱



.۱۳ فرض کنید که چنین ماشینی را بتوان ساخت و این ماشین برای $n \in \mathbf{Z}^+$، دارای n حالت باشد. برای رشتهٔ ورودی 0^n1^{n+1}، می‌خواهیم خروجی $0^{2n}1$ باشد. امّا، وقتی ۱ ها در این رشتهٔ ورودی پردازش شوند، $(n+1)$ حالت s_1، s_2، . . . ، s_n، s_{n+1} از تابع ν را به‌دست می‌دهند. در نتیجه، بنابر اصل لانهٔ کبوتر دو حالت s_i، s_j، وجود دارند که در آنها $i < j$، ولی $s_i = s_j$. در نتیجه، اگر $j - i$ حالتِ s_{i+1}، s_{i+2}، . . . ، s_j و ۱ هایی را که ورودیهای متناظر آنها هستند برداریم، درمی‌یابیم که ماشین، دنبالهٔ $0^n1^{n+1-(j-i)}$ را، که در آن $n + 1 - (j - i) \leq n$، تشخیص می‌دهد. امّا $0^n1^{n+1-(j-i)} \notin A$.

.۱۵ الف)

	ν		ω	
	0	1	0	1
(s_0, s_3)	(s_0, s_4)	(s_1, s_3)	1	1
(s_0, s_4)	(s_0, s_3),	(s_1, s_4)	0	1
(s_1, s_3)	(s_1, s_3)	(s_2, s_3)	1	1
(s_1, s_4)	(s_1, s_4)	(s_2, s_4)	1	1
(s_2, s_3)	(s_2, s_3)	(s_0, s_4)	1	1
(s_2, s_4)	(s_2, s_4)	(s_0, s_3)	1	0

ب) $\omega(1101) = 1111$؛ M_1 در حالت s_0 است و M_2 در حالت s_4.

فصل ۷ رابطه‌ها: بار دیگر دربارهٔ رابطه‌ها

بخش ۱.۷ـصفحهٔ ۳۲۶

.۱ الف) $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\}$

ب) $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2)\}$ ج) $\{(1,1), (2,2), (1,2), (2,1)\}$

.۳ الف) فرض کنید $f_1, f_2, f_3 \in \mathscr{F}$ با $f_1(n) = n+1$ و $f_2(n) = 5n$، و $f_3(n) = 4n + 1/n$.

ب) فرض کنید $g_1, g_2, g_3 \in \mathscr{F}$ با $g_1(n) = 3$، $g_2(n) = 1/n$، و $g_3(n) = \sin n$.

.۵ الف) بازتابی، پادمتقارن، ترایا ب) ترایا

ج) بازتابی، متقارن، ترایا د) متقارن

ه) (زوج)ـبازتابی، متقارن، ترایا؛ (فرد)ـمتقارن

و) (زوج)ـبازتابی، متقارن، ترایا؛ (فرد)ـمتقارن
ز) متقارن ح) بازتابی، متقارن
ط) بازتابی، ترایا
۷. الف) برای هر $x \in A$، $(x,x) \in \mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2$، لذا $(x,x) \in \mathscr{R}_1 \cap \mathscr{R}_2$ و $\mathscr{R}_1 \cap \mathscr{R}_2$ بازتابی است.
ب) (i) $(x,y)\in\mathscr{R}_1 \cap \mathscr{R}_2 \Rightarrow (x,y)\in\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2 \Rightarrow (y,x)\in\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2 \Rightarrow (y,x)\in\mathscr{R}_1 \cap \mathscr{R}_2$
و $\mathscr{R}_1 \cap \mathscr{R}_2$ متقارن است.
(ii) $(x,y),(y,x) \in \mathscr{R}_1 \cap \mathscr{R}_2 \Rightarrow (x,y),(y,x) \in \mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2$. بنابر پادمتقارنی $\mathscr{R}_1$(یا $\mathscr{R}_2$)، $x = y$ و $\mathscr{R}_1 \cap \mathscr{R}_2$ پادمتقارن است.

(iii)
$$(x,y),(y,z) \in \mathscr{R}_1 \cap \mathscr{R}_2 \Rightarrow (x,y),(y,z) \in \mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2 \Rightarrow$$
$$(x,z) \in \mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2 \ (\text{ویژگی ترایایی}) \ \Rightarrow (x,z) \in \mathscr{R}_1 \cap \mathscr{R}_2,$$

بنابراین، $\mathscr{R}_1 \cap \mathscr{R}_2$ تراياست.
۹. الف) درست ب) غلط: فرض کنید $A = \{1,2\}$ و $\mathscr{R} = \{(1,2),(2,1)\}$.
ج) (i) بازتابی: درست.
(ii) متقارن: غلط. فرض‌کنید $A = \{1,2\}$، $\mathscr{R}_1 = \{(1,1)\}$ و $\mathscr{R}_2 = \{(1,1),(1,2)\}$
(iii) پادمتقارن و ترایا: غلط. فرض کنید $A = \{1,2\}$، $\mathscr{R}_1 = \{(1,2)\}$، و

$$\mathscr{R}_2 = \{(1,2),(2,1)\}$$

د) (i) بازتابی: غلط. فرض‌کنید $A = \{1,2\}$، $\mathscr{R}_1 = \{(1,1)\}$ و $\mathscr{R}_2 = \{(1,1),(2,2)\}$.
(ii) متقارن: غلط. فرض کنید $A=\{1,2\}$، $\mathscr{R}_1=\{(1,2)\}$ و $\mathscr{R}_2=\{(1,2),(2,1)\}$.
(iii) پادمتقارن: درست
(iv) ترایا: غلط. فرض کنید $A = \{1,2\}$، $\mathscr{R}_1 = \{(1,2),(2,1)\}$، و

$$\mathscr{R}_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

ه) درست.
۱۱. ممکن است یک عنصر $a \in A$ وجود داشته باشد، به قسمی که برای هر $b \in B$، نه (a,b) متعلق به $\mathscr{R}$ باشد و نه (b,a).
۱۳. تعداد عناصری در A که به‌صورت (a,b)، $a \neq b$ هستند برابر با $r - n$ است. چون $\mathscr{R}$ متقارن است، $r - n$ زوج است.

بخش ۲.۷ـصفحهٔ ۳۴۰

۱. $\mathscr{R}\circ\mathscr{S}=\{(۱,۳),(۱,۴)\}$؛ $\mathscr{S}\circ\mathscr{R}=\{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۴)\}$؛
$\mathscr{R}^۲=\mathscr{R}^۳=\{(۱,۴),(۲,۴),(۴,۴)\}$؛ $\mathscr{S}^۲=\mathscr{S}^۳=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴)\}$

۳.

$$(a,d)\in(\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲)\circ\mathscr{R}_۳\Rightarrow(a,c)\in\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲,(c,d)\in\mathscr{R}_۳ \text{ و } \exists c\in C\Rightarrow$$

$$(a,b)\in\mathscr{R}_۱,(b,c)\in\mathscr{R}_۲,(c,d)\in\mathscr{R}_۳,\exists b\in B,c\in C\Rightarrow$$

$$(a,b)\in\mathscr{R}_۱,(b,d)\in\mathscr{R}_۲\circ\mathscr{R}_۳\Rightarrow(a,d)\in\mathscr{R}_۱\circ(\mathscr{R}_۲\circ\mathscr{R}_۳)$$

و

$$(\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲)\circ\mathscr{R}_۳\subseteq\mathscr{R}_۱\circ(\mathscr{R}_۲\circ\mathscr{R}_۳)$$

۵. این مطلب از اصل لانهٔ کبوتر نتیجه می‌شود. در اینجا کبوترها، $۲^{n^۲}+۱$ عدد صحیح بین ۰ و $۲^{n^۲}$ و خود $۲^{n^۲}$ هستند، و لانه‌ها $۲^{n^۲}$ رابطه روی A هستند.

۷. $۲^{۲۱}$

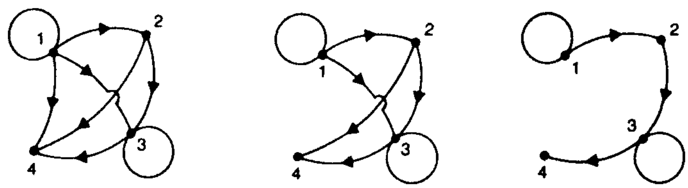
۹. درایهٔ iامین سطر و jامین ستون $M(\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲)$ را در نظر بگیرید. اگر این درایه ۱ باشد، آن‌گاه $b_k\in B$، $۱\le k\le n$، وجود دارد که $(a_i,b_k)\in\mathscr{R}_۱$ و $(b_k,c_j)\in\mathscr{R}_۲$. در نتیجه، درایهٔ iامین سطر و kامین ستون $M(\mathscr{R}_۱)$ برابر ۱ است، و درایهٔ kامین سطر و jامین ستون $M(\mathscr{R}_۲)$ برابر ۱ است. این به پیدا شدن عدد ۱ در iامین سطر و jامین ستون حاصلضرب $M(\mathscr{R}_۱).M(\mathscr{R}_۲)$ منجر می‌شود.

ممکن است درایهٔ سطر i و ستون jی $M(\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲)$ برابر ۰ باشد، در این‌صورت برای هر b_k، $۱\le k\le n$، یا $(a_i,b_k)\notin\mathscr{R}_۱$ و یا $(b_k,c_j)\notin\mathscr{R}_۲$. این، به‌معنای آن است که در ماتریسهای $M(\mathscr{R}_۱)$، $M(\mathscr{R}_۲)$، اگر درایهٔ iامین سطر و kامین ستون $M(\mathscr{R}_۱)$ برابر ۱ باشد، آن‌گاه درایهٔ kامین سطر و jامین ستون $M(\mathscr{R}_۲)$ برابر ۰ است. بنابراین، درایهٔ iامین سطر و jامین ستون $M(\mathscr{R}_۱).M(\mathscr{R}_۲)$ برابر ۰ خواهد شد.

۱۱. **د)** فرض کنید s_{xy} درایهٔ سطر (x) و ستون (y) از M باشد. در این‌صورت، s_{yx}، در سطر (x) و ستون (y) از M^{tr} ظاهر می‌شود.

$$\mathscr{R} \text{ پادمتقارن بودن } \Leftrightarrow(s_{xy}=s_{yx}=۱\Rightarrow x=y)\Leftrightarrow M\cap M^{\text{tr}}\le I_n$$

۱۳. $\mathscr{R}$ $\qquad$ $\mathscr{R}^{2}$ $\qquad$ $\mathscr{R}^{4}$ و $\mathscr{R}^{3}$



۱۵. الف) 2^{25} ب) 2^{15}

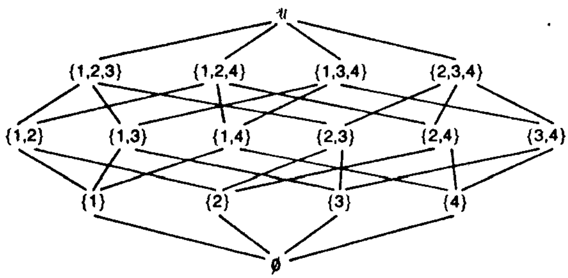
۱۷. الف)

$$\mathscr{R}_{1}: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathscr{R}_{2}: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ب) رابطهٔ هم‌ارزی $\mathscr{R}$ روی مجموعهٔ متناهی A داده شده‌است، عنصرهای A را به‌قسمی فهرست می‌کنیم که عنصرهای یک خانهٔ افراز (بخش ۴.۷ را ببینید) مجاور باشند. لذا، ماتریس رابطه‌ای حاصل دارای بلوکهای مربعی از ۱ها در طول قطر اصلی خواهد بود (از سمت چپ در قسمت بالای ماتریس به پایین در سمت راست.)

بخش ۳.۷ـ صفحهٔ ۳۵۳

۱.



۳. برای هر $a \in A$، $b \in B$ داریم $a\mathscr{R}_{1}a$ و $b\mathscr{R}_{2}b$، لذا $(a,b)\mathscr{R}(a,b)$ و $\mathscr{R}$ بازتابی است.

$$(a,b)\mathscr{R}(c,d), (c,d)\mathscr{R}(a,b) \Rightarrow a\mathscr{R}_{1}c, c\mathscr{R}_{1}a$$

و

$$b\mathscr{R}_2 d, d\mathscr{R}_2 b \Rightarrow a = c, b = d \Rightarrow (a,b) = (c,d)$$

بنابراین، $\mathscr{R}$ پادمتقارن است.

$$(a,b)\mathscr{R}(c,d), (c,d)\mathscr{R}(e,f) \Rightarrow a\mathscr{R}_1 c, c\mathscr{R}_1 e$$

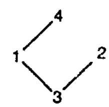
و

$$b\mathscr{R}_2 d, d\mathscr{R}_2 f \Rightarrow a\mathscr{R}_1 e, b\mathscr{R}_2 f \Rightarrow (a,b)\mathscr{R}(e,f)$$

و از اینجا نتیجه می‌شود که $\mathscr{R}$ ترایاست.

۵. $\emptyset < \{1\} < \{2\} < \{3\} < \{1,2\} < \{1,3\} < \{2,3\} < \{1,2,3\}$ (امکانهای دیگری نیز وجود دارند.)

۷. الف) ب) $3 < 2 < 1 < 4$ یا $3 < 1 < 2 < 4$ ج) ۲



۱۱. فرض کنید x، y هر دو کوچکترین کران بالا باشند. در این‌صورت $x\mathscr{R}y$، زیرا y کران بالا و x کوچکترین کران بالاست. همچنین، $y\mathscr{R}x$

$$\text{پادمتقارن بودن}\ \mathscr{R} \Rightarrow x = y$$

(برهان برای بزرگترین کران پایین نیز همین‌طور است)

۱۳. فرض کنید $\mathscr{U} = \{1,2\}$، $A = \mathscr{P}(\mathscr{U})$، و $\mathscr{R}$ رابطهٔ شمول باشد. در این‌صورت $(A, \mathscr{R})$ مجموعهٔ جزئی مرتب است ولی یک ترتیب کلی نیست. فرض کنید $B = \{\emptyset, \{1\}\}$، در این‌صورت $(B \times B) \cap \mathscr{R}$ ترتیبی کلی است.

۱۵. $n + \binom{n}{2}$

۱۷. الف) n عنصر A در طول یک خط قائم مرتب شده‌اند. زیرا اگر $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

که در آن $a_۱\mathscr{R}a_۲\mathscr{R}a_۳\mathscr{R}\dots\mathscr{R}a_n$، آن‌گاه نمودار را می‌توان به‌صورت زیر رسم کرد

ب) $n!$

۱۹.	کوچکترین کران بالا (lub)	بزرگترین کران پایین (glb)
الف)	$\{۱,۲\}$	$\emptyset$
ب)	$\{۱,۲,۳\}$	$\emptyset$
ج)	$\{۱,۲\}$	$\emptyset$
د)	$\{۱,۲,۳\}$	$\{۱\}$
ه)	$\{۱,۲,۳\}$	$\emptyset$
و)	$\{۱,۲,۳\}$	$\emptyset$

۲۱. **الف)** غلط. فرض کنید $\mathscr{U}=\{۱,۲\}$، $A=\mathscr{P}(\mathscr{U})$ و $\mathscr{R}$ رابطهٔ شمول باشد. در این‌صورت $(A,\mathscr{R})$ یک مشبکه است که برای هر $S,T\in A$، $\text{lub}\{S,T\}=S\cup T$ و $\text{glb}\{S,T\}=S\cap T$. امّا $\{۱\}$ و $\{۲\}$ وابسته نیستند، بنابراین، $(A,\mathscr{R})$ ترتیب کلی نیست.
ب) اگر $(A,\mathscr{R})$ ترتیبی کلی باشد، آن‌گاه برای هر $x,y\in A$، $x\mathscr{R}y$ یا $y\mathscr{R}x$. برای $x\mathscr{R}y$، $\text{lub}\{x,y\}=y$ و $\text{glb}\{x,y\}=x$. در نتیجه، $(A,\mathscr{R})$ مشبکه است.

۲۳. **الف)** a **ب)** a **ج)** c **د)** e **ه)** z **و)** e **ز)** v. $(A,\mathscr{R})$ مشبکه‌ای است که z بزرگترین عنصر (و تنها ماکسیمال) آن است و a کوچکترین عنصر (و تنها مینیمال) آن.

بخش ۴.۷ـ صفحهٔ ۳۶۰

۱. $\mathscr{R}=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۳,۴)(۴,۳),(۴,۴),(۵,۵)\}$

۳. $\mathscr{R}$ ترایا نیست زیرا $۱\mathscr{R}۲$ و $۲\mathscr{R}۳$ امّا $۱\not\mathscr{R}۳$.

۵. **الف)** برای هر $(x,y)\in A$، $(x,y)\mathscr{R}(x,y)\Rightarrow x+y=x+y$.

$$(x_۱,y_۱)\mathscr{R}(x_۲,y_۲)\Rightarrow x_۱+y_۱=x_۲+y_۲$$

$$\Rightarrow x_۲+y_۲=x_۱+y_۱\Rightarrow (x_۲,y_۲)\mathscr{R}(x_۱,y_۱)$$

$$(x_۱,y_۱)\mathscr{R}(x_۲,y_۲),(x_۲,y_۲)\mathscr{R}(x_۳,y_۳)$$

$$\Rightarrow x_۱ + y_۱ = x_۲ + y_۲, x_۲ + y_۲ = x_۳ + y_۳$$

بنابراین، $x_۱ + y_۱ = x_۳ + y_۳$ و $(x_۱, y_۱)\mathscr{R}(x_۳, y_۳)$. چون $\mathscr{R}$ بازتابی، متقارن، و ترایاست، یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

ب)

$$[(۱,۳)] = \{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)\}$$
$$[(۲,۴)] = \{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\}$$
$$[(۱,۱)] = \{(۱,۱)\}$$

ج)

$$\begin{aligned} A =&\{(۱,۱)\} \cup \{(۱,۲),(۲,۱)\} \cup \{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)\} \cup \\ &\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)\} \cup \\ &\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱\} \cup \{(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳)(۵,۲)\} \cup \\ &\{(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳)\} \cup \{(۴,۵),(۵,۴)\} \cup \{(۵,۵)\} \end{aligned}$$

۷. الف) برای هر $X \subseteq A$، $B \cap X = B \cap X$، لذا، $X\mathscr{R}X$ و $\mathscr{R}$ بازتابی است. اگر $X, Y \subseteq A$، آن‌گاه

$$X\mathscr{R}Y \Rightarrow X \cap B = Y \cap B \Rightarrow Y \cap B = X \cap B \Rightarrow Y\mathscr{R}X$$

بنابراین، $\mathscr{R}$ متقارن است. و سرانجام، اگر $W, X, Y \subseteq A$ با $W\mathscr{R}X$ و $X\mathscr{R}Y$، آن‌گاه $W \cap B = X \cap B$ و $X \cap B = Y \cap B$. لذا $W \cap B = Y \cap B$، پس، $W\mathscr{R}Y$ و $\mathscr{R}$ ترایاست. در نتیجه $\mathscr{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathscr{P}(A)$ است.

ب) $\{\emptyset, \{۳\}\} \cup \{\{۱\}, \{۱,۳\}\} \cup \{\{۲\}, \{۲,۳\}\} \cup \{\{۱,۲\}, \{۱,۲,۳\}\}$

ج) $[X] = \{\{(۱,۳\}, \{۱,۳,۴\}, \{۱,۳,۵\}, \{۱,۳,۴,۵\}\}$

د) ۸ رده ــ یکی برای هر زیرمجموعهٔ B

۹. ۳۰۰

۱۱. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ افرازی از مجموعهٔ A باشد. $\mathscr{R}$ را به‌وسیلهٔ $x\mathscr{R}y$ روی A تعریف می‌کنیم اگر برای یک $i \in I$، داشته باشیم $x, y \in A_i$. برای هر $x \in A$، برای iیی متعلق به I،

$x, x \in A_i$، لذا $x\mathscr{R}x$ و $\mathscr{R}$ بازتابی است.

$$x\mathscr{R}y \Rightarrow x, y \in A_i, I \text{ برای } i\text{یی متعلق به } \Rightarrow y, x \in A_i, I \text{ برای } i\text{یی متعلق به}$$
$$\Rightarrow y\mathscr{R}x$$

بنابراین، $\mathscr{R}$ متقارن است. اگر $x\mathscr{R}y$ و $y\mathscr{R}z$، آن‌گاه برای $i, j \in I$، $x, y \in A_i$ و $y, z \in A_j$. چون $A_i \cap A_j$، بنابر قضیهٔ ۶.۷ (ج)، شامل y است، نتیجه می‌شود که $A_i = A_j$، پس $i = j$. بنابراین $x, z \in A_i$، لذا $x\mathscr{R}z$ و $\mathscr{R}$ تراياست.

بخش ۵.۷ـ صفحهٔ ۳۷۰

۱. **الف)** s_2 و s_5 هم‌ارزند. **ب)** s_2 و s_5 هم‌ارزند.
ج) s_2 و s_7 هم‌ارزند؛ s_3 و s_4 هم‌ارزند.

۳. **الف)** s_1 و s_7 هم‌ارزند؛ s_4 و s_5 هم‌ارزند.
ب) (i) ۰۰۰۰
(iii) ۰
(iii) ۰۰

$M:$	ν		ω	
	۰	۱	۰	۱
s_1	s_4	s_1	۱	۰
s_2	s_1	s_2	۱	۰
s_3	s_6	s_1	۱	۰
s_4	s_3	s_4	۰	۰
s_6	s_2	s_1	۱	۰

تمرینهای گوناگون ـ صفحهٔ ۳۷۳

۱. **الف)** غلط. فرض‌کنید $A = \{1, 2\}$، $I = \{1, 2\}$، $\mathscr{R}_1 = \{(1, 1)\}$، و $\mathscr{R}_2 = \{(2, 2)\}$. در این‌صورت $\cup_{i \in I}\mathscr{R}_i$ بازتابی است، امّا $\mathscr{R}_1$ و $\mathscr{R}_2$ هیچکدام بازتابی نیستند. امّا برعکس، اگر برای هر $i \in I$ (در واقع برای حداقل یکی) $\mathscr{R}_i$ بازتابی باشد، آن‌گاه $\cup_{i \in I}\mathscr{R}_i$ بازتابی است.

ب) درست. (بازتابی بودن $\cap_{i \in I}\mathscr{R}_i$) $\Leftrightarrow$ (برای هر $a \in A$، $((a, a) \in \cap_{i \in I}\mathscr{R}_i$) $\Leftrightarrow$ (برای هر $a \in A$ $i \in I$، $((a, a) \in \mathscr{R}_i$) $\Leftrightarrow$ (برای هر $i \in I$، $\mathscr{R}_i$ بازتابی است).

۳. {برای bیی متعلق به A، $(a, b) \in \mathscr{R}_2, (b, c) \in \mathscr{R}_1\} \Rightarrow (a, c) \in \mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1$. با $\mathscr{R}_1$ و $\mathscr{R}_2$ی متقارن، $(b, a) \in \mathscr{R}_2$، $(c, b) \in \mathscr{R}_1$، پس $(c, a) \in \mathscr{R}_1 \circ \mathscr{R}_2 \subseteq \mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1$.

{برای $d\in A$، $(c,d)\in\mathscr{R}_۲,(d,a)\in\mathscr{R}_۱$} $(c,a)\in\mathscr{R}_۲\circ\mathscr{R}_۱\Rightarrow$. پس، بنابر تقارن، $(d,c)\in\mathscr{R}_۲$، $(a,d)\in\mathscr{R}_۱$، و $(a,c)\in\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲$، بنابراین، $\mathscr{R}_۲\circ\mathscr{R}_۱\subseteq\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲$ و نتیجه حاصل می‌شود.

.۵

$$(c,a)\in(\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲)^c\Leftrightarrow(a,c)\in\mathscr{R}_۱\circ\mathscr{R}_۲\Leftrightarrow(a,b)\in\mathscr{R}_۱,(b,c)\in\mathscr{R}_۲(\text{برای } b\in B)$$
$$\Leftrightarrow(b,a)\in\mathscr{R}_۱^c,(c,b)\in\mathscr{R}_۲^c,(\text{برای } b\in B)\Leftrightarrow(c,a)\in\mathscr{R}_۲^c\circ\mathscr{R}_۱^c$$

.۷ فرض کنید $\mathscr{U}=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $A=\mathscr{P}(\mathscr{U})-\{\mathscr{U},\emptyset\}$. تحت رابطهٔ شمول، A مجموعهٔ جزئی مرتب با پنج عنصر مینیمال $\{x\}$، $۱\le x\le ۵$ است، امّا بدون کوچکترین عنصر. همچنین، A دارای پنج عنصر ماکسیمال ـــپنج زیرمجموعهٔ $\mathscr{U}$ با اندازهٔ ۴ـــ است، امّا بدون بزرگترین عنصر.

.۹ $n=۱۰$

.۱۱ **الف)** برای هر $f\in\mathscr{F}$، به‌ازای هر $n\ge ۱$، $|f(n)|\le ۱|f(n)|$، بنابراین $f\mathscr{R}f$ و $\mathscr{R}$ بازتابی است. ثانیاً اگر $f,g\in\mathscr{F}$، آن‌گاه

$$f\mathscr{R}g\Rightarrow(f\in O(g),g\in O(f))\Rightarrow(g\in O(f)\text{ و } f\in O(g))\Rightarrow g\mathscr{R}f$$

پس $\mathscr{R}$ متقارن است. سرانجام، فرض کنید $f,g,h\in\mathscr{F}$ با $f\mathscr{R}g$، $g\mathscr{R}f$، $g\mathscr{R}h$، و $h\mathscr{R}g$. در این‌صورت $m_۱,m_۲\in\mathbf{R}^+$ و $k_۱,k_۲\in\mathbf{Z}^+$ وجود دارند به‌قسمی که برای هر $n\ge k_۱$، $|f(n)|\le m_۱|g(n)|$ و برای هر $n\ge k_۲$، $|g(n)|\le m_۲|h(n)|$. در نتیجه، برای هر $n\ge\max\{k_۱,k_۲\}$ داریم $|f(n)|\le m_۱|g(n)|\le m_۱m_۲|h(n)|$، پس $f\in O(h)$. و به‌روشی مشابه، ثابت می‌شود $h\in O(f)$. بنابراین، $f\mathscr{R}h$ و $\mathscr{R}$ ترایاست.

ب) برای هر $f\in\mathscr{F}$، f مغلوب خودش هست، پس $[f]\mathscr{S}[f]$ و $\mathscr{S}$ بازتابی است. ثانیاً اگر $[g],[h]\in\mathscr{F}'$ با $[g]\mathscr{S}[h]$ و $[h]\mathscr{S}[g]$، آن‌گاه نظیر قسمت (الف)، $g\mathscr{R}h$، و $[h]=[g]$. در نتیجه، $\mathscr{S}$ پادمتقارن است. سرانجام، اگر $[f],[g],[h]\in\mathscr{F}'$ با $[f]\mathscr{S}[g]$ و $[g]\mathscr{S}[h]$، آن‌گاه f مغلوب g و g مغلوب h می‌شود. بنابراین، مثل قسمت (الف)، f مغلوب h و $[f]\mathscr{S}[h]$ است که $\mathscr{S}$ را ترایا می‌کنند.

ج) فرض کنید $f,f_۱,f_۲\in\mathscr{F}$ با $f(n)=n$، $f_۱(n)=n+۳$، و $f_۲(n)=۲-n$. پس $(f_۱+f_۲)(n)=۵$ و $f_۱+f_۲\notin[f]$، زیرا f مغلوب $f_۱+f_۲$ نیست.

.۱۳ نه. $S=\{q\in Q|۰<q<\sqrt{۲}\}$ را در نظر می‌گیریم.

۱۵.

$$M(\mathscr{R}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۷.

الف)

شاخص فهرست		فهرست مجاورت	
۱	۱	۲	۱
۲	۲	۳	۲
۳	۳	۱	۳
۵	۴	۴	۴
۶	۵	۵	۵
۸	۶	۳	۶
		۵	۷

ب)

شاخص فهرست		فهرست مجاورت	
۱	۱	۲	۱
۲	۲	۳	۲
۳	۳	۱	۳
۴	۴	۵	۴
۵	۵	۴	۵
۶	۶		

ج)

شاخص فهرست		فهرست مجاورت	
۱	۱	۲	۱
۲	۲	۳	۲
۳	۳	۱	۳
۶	۴	۴	۴
۷	۵	۵	۵
۸	۶	۱	۶
		۴	۷

۱۹. ب) خانه‌های افراز، مؤلفه‌های همبند G هستند.

۲۱. یک ترتیب ممکن عبارت است از ۱۰، ۳، ۸، ۶، ۷، ۹، ۱، ۴، ۵، ۲، که برنامهٔ ۱۰، اوّل اجرا می‌شود و برنامهٔ ۲ آخر.

۲۳. الف) $|A| = ۲^۵ = ۳۲$.

ج) شش ردهٔ هم‌ارزی وجود دارند—یکی برای هر یک از وزنهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵. تعداد عنصرها در هر ردهٔ هم‌ارزی به‌صورت زیر است:

وزن ۰، $\binom{5}{0}$؛ وزن ۱، $\binom{5}{1}$، وزن ۲، $\binom{5}{2}$؛ وزن ۳، $\binom{5}{3}$؛ وزن ۴، $\binom{5}{4}$؛ وزن ۵، $\binom{5}{5}$.

د) به‌جای ۵، مقدار n، $n \in \mathbf{Z}^+$، را قرار می‌دهیم. در این‌صورت، $n+1$ ردهٔ هم‌ارزی —یکی برای هریک از وزنهای ۰، ۱، ۲، ...، n— وجود دارند. اگر $0 \le k \le n$، آن‌گاه، $\binom{n}{k}$ عنصر A در ردهٔ هم‌ارزی برای وزن k هستند.

۲۵. $4^n - 2(3^n) + 2^n$

۲۷. الف) (i) $B\mathscr{R}A\mathscr{R}C$؛ (ii) $B\mathscr{R}C\mathscr{R}F$

$B\mathscr{R}A\mathscr{R}C\mathscr{R}F$ یک زنجیر ماکسیمال است. شش زنجیر ماکسیمال از این گونه وجود دارند.

ب) در اینجا $11\mathscr{R}385$ زنجیر ماکسیمالی به‌درازای ۲ است، در حالی‌که $2\mathscr{R}6\mathscr{R}12$ زنجیر ماکسیمال به‌درازای ۳ است. درازای درازترین زنجیر برای این مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب ۳ است.

ج) (i) $\emptyset \subseteq \{1\} \subseteq \{1,2\} \subseteq \{1,2,3\} \subseteq \mathscr{U}$

(ii) $\emptyset \subseteq \{2\} \subseteq \{2,3\} \subseteq \{1,2,3\} \subseteq \mathscr{U}$

$24 = 4!$ زنجیر ماکسیمال از این نوع وجود دارند.

د) $n!$

۲۹. فرض کنید $a_1\mathscr{R}a_2\mathscr{R}\ldots\mathscr{R}a_{n-1}\mathscr{R}a_n$ درازترین زنجیر (ماکسیمال) در $(A,\mathscr{R})$ باشد. در این‌صورت a_n یک عنصر ماکسیمال در $(A,\mathscr{R})$ است و $a_1\mathscr{R}a_2\mathscr{R}\ldots\mathscr{R}a_{n-1}$ زنجیر ماکسیمال در $(B,\mathscr{R}')$ است. بنابراین، درازای درازترین زنجیر در $(B,\mathscr{R}')$ حداقل $n-1$ است. اگر زنجیر $b_1\mathscr{R}'b_2\mathscr{R}'\ldots\mathscr{R}'b_n$ در $(B,\mathscr{R}')$ به‌درازای n وجود داشته باشد، آن‌گاه این زنجیر، زنجیری به‌درازای n در $(A,\mathscr{R})$ نیز هست. امّا در این صورت باید b_n عنصر ماکسیمال $(A,\mathscr{R})$ باشد، و این با $b_n \in B$ متناقض است.

۳۱. اگر $n = 1$، آن‌گاه برای هر $x, y \in A$، اگر $x \neq y$ آن‌گاه $x \not\mathscr{R} y$ و $y \not\mathscr{R} x$. بنابراین، $(A,\mathscr{R})$ یک پادزنجیر است، و نتیجه حاصل می‌شود. اینک فرض کنید نتیجه برای $n = k \geq 1$ درست باشد، و $(A,\mathscr{R})$ مجموعهٔ جزئی‌ـمرتبی باشد که برای آن، درازای درازترین زنجیر $k+1$ است. اگر M مجموعهٔ همهٔ عناصر ماکسیمال در $(A,\mathscr{R})$ باشد، آن‌گاه $M \neq \emptyset$ و M در $(A,\mathscr{R})$ یک پادزنجیر است. همچنین بنابر تمرین ۲۹ بالا، برای $\mathscr{R}' = ((A-M)\times(A-M))\cap\mathscr{R}$، $(A-M,\mathscr{R}')$ مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب است که درازای درازترین زنجیر آن برابر k است. لذا، به‌موجب فرض استقرا، $A - M = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$ افرازی به k پادزنجیر است. در نتیجه، $A = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k \cup M$ افرازی به $k+1$ پادزنجیر است.

فصل ۸ اصل شمول و طرد

بخش ۱.۸ـصفحهٔ ۳۹۳

۱. الف) ۵۳۴ ب) ۴۵۸ ج) ۷۶

۳. الف) $\binom{22}{19}$ ب) $\binom{22}{19} - 2\binom{14}{11} + 6\binom{6}{3}$

ج) $\binom{16}{13} - [2\binom{10}{7} + \binom{9}{6} + \binom{11}{8}] + [10 + 2\binom{5}{2}]$

۵. $\binom{37}{31} - \binom{7}{1}\binom{27}{21} + \binom{7}{2}\binom{17}{11} - \binom{7}{3}\binom{7}{1}$

۷. $26! - [3(23!) + 24!] + (20! + 21!)$

۹. الف) 2^{n-1} ب) $2^{n-1}(p-1)$

۱۱. الف) ۱۶۰۰ ب) ۴۳۹۹

۱۳. $[۶^۸ - \binom{۶}{۱}۵^۸ + \binom{۶}{۲}۴^۸ - \binom{۶}{۳}۳^۸ + \binom{۶}{۲}۲^۸ - \binom{۶}{۱}]/۶^۸$

۱۵. $۹!/[(۳!)^۳] - ۳[۷!/[(۳!)^۲]] + ۳(۵!/۳!) - ۳!$

۱۷. نه

۱۹. اگر عدد n بر عدد اول p تقسیم‌پذیر باشد، اجرای حلقه‌ی Wihle هر مورد p را عاد می‌کند. اولین حلقه به‌ازای $p = ۲$ است، حلقهٔ بعدی به‌ازای $p = ۳$، و سومین حلقه برای اعداد اول $p > ۳$ است.

وقتی با اعداد اول کار می‌کنیم، به‌محض اینکه از $p = ۵$ بگذریم، معنی ندارد که اعداد صحیح زوج را به‌عنوان نامزدهای اعداد اول بررسی کنیم.

بخش ۲.۸ـ صفحهٔ ۳۹۹

۱. $E_۰ = ۷۶۸$؛ $E_۱ = ۲۰۵$؛ $E_۲ = ۴۰$؛ $E_۳ = ۱۰$؛ $E_۴ = ۰$؛ $E_۵ = ۱$؛ $\sum_{i=۰}^{۵} E_i = ۱۰۲۴ = N$.

۳. الف)

$$[۱۴!/(۲!)^۵] - \binom{۵}{۱}[۱۳!/(۲!)^۴] + \binom{۵}{۲}[۱۲!/(۲!)^۳]$$
$$- \binom{۵}{۳}[۱۱!/(۲!)^۲] + \binom{۵}{۴}[۱۰!/۲!] - \binom{۵}{۵}[۹!]$$

ب) $E_۲ = \binom{۵}{۲}[۱۲!/(۲!)^۳] - \binom{۳}{۱}\binom{۵}{۳}[۱۱!/(۲!)^۲] + \binom{۴}{۲}\binom{۵}{۴}[۱۰!/۲!] - \binom{۵}{۳}\binom{۵}{۵}[۹!]$

ج) $L_۳ = \binom{۵}{۳}[۱۱!/(۲!)^۲] - \binom{۳}{۲}\binom{۵}{۴}[۱۰!/۲!] + \binom{۴}{۱}\binom{۵}{۵}[۹!]$

۵. الف) $۷! - d_۷$ $\quad (d_۷ \doteq (۷!)e^{-۱})$ ب) $d_{۲۶} \doteq (۲۶!)e^{-۱}$

۷. الف) $[\sum_{i=۰}^{۳}(-۱)^i\binom{۴}{i}\binom{۵۲-۱۳i}{۱۳}][\binom{۵۲}{۱۳}]$

ب) $[\sum_{i=۱}^{۳}(-۱)^{i+۱}(i)\binom{۴}{i}\binom{۵۲-۱۳i}{۱۳}]/\binom{۵۲}{۱۳}$

ج) $[\binom{۴}{۲}\binom{۲۶}{۱۳} - ۳\binom{۴}{۳}\binom{۱۳}{۱۳}]/\binom{۵۲}{۱۳}$

بخش ۳.۸ـ صفحهٔ ۴۰۲

۱. $۱۰! - \binom{۵}{۱}۹! + \binom{۵}{۲}۸! - \binom{۵}{۳}۷! + \binom{۵}{۴}۶! - \binom{۵}{۵}۵!$

۳. $(۱۰!)d_{۱۰} \doteq (۱۰!)^۲(e^{-۱})$

۵. الف) $(d_{۱۰})^۲ \doteq (۱۰!)^۲e^{-۲}$

ب) $\sum_{i=۰}^{۱۰}(-۱)^i\binom{۱۰}{i}[(۱۰-i)!]^۲$

۷. $\binom{n}{۰}(n-۱)! - \binom{n}{۱}(n-۲)! + \binom{n}{۲}(n-۳)! - \cdots + (-۱)^{n-۱}\binom{n}{n-۱}(۰!) + (-۱)^n\binom{n}{n}$

بخشهای ۴.۸ و ۵.۸ـصفحهٔ ۴۱۱

۳. الف)

$$\binom{۸}{۰}+\binom{۸}{۱}۸x+\binom{۸}{۲}(۸\cdot ۷)x^{۲}+\binom{۸}{۳}(۸\cdot ۷\cdot ۶)x^{۳}$$
$$+\binom{۸}{۴}(۸\cdot ۷\cdot ۶\cdot ۵)x^{۴}+\cdots+\binom{۸}{۸}(۸!)x^{۸}=\sum_{i=۰}^{۸}\binom{۸}{i}P(۸,i)x^{i}$$

ب) $\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}P(n,i)x^{i}$

۵. الف) (i) $(۱+۲x)^{۳}$ (ii) $۱+۸x+۱۴x^{۲}+۴x^{۳}$

(iii) $۱+۹x+۲۵x^{۲}+۲۱x^{۳}$ (iv) $۱+۸x+۱۶x^{۲}+۷x^{۳}$

ب) اگر صفحهٔ C شامل n پله باشد، و هر پله k بلوک داشته باشد، آن‌گاه $r(C,x)=(۱+kx)^{n}$

۷. $۵!-۸(۴!)+۲۱(۳!)-۲۰(۲!)+۶(۱!)=۲۰$

۹. الف) ۲۰ ب) ۳/۱۰ ج) ۳/۵

۱۱. $(۶!/۲!)-۹(۵!/۲!)+۲۷(۴!/۲!)-۳۱(۳!/۲!)+۱۲=۶۳$

تمرینهای گوناگونـصفحهٔ ۴۱۴

۱. ۱۳۴

۳. $\phi(۱۷)=\phi(۳۲)=\phi(۴۸)=۱۶$

۵. $\Sigma_{i=۰}^{۷}(-۱)^{i}\binom{۸}{i}(۸-i)!$

۷. $۹!-\binom{۵}{۱}(۲)(۸!)+\binom{۵}{۲}(۲^{۲})(۷!)-\binom{۵}{۳}(۲^{۳})(۶!)+\binom{۵}{۴}(۲^{۴})(۵!)-\binom{۵}{۵}(۲^{۵})(۴!)$

۹. بگیرید $T=(۱۳!)/(۲!)^{۵}$

الف) $\left(\left[\binom{۵}{۳}(۱۰!)/(۲!)^{۲}\right]-\left[\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۴}(۹!)/(۲!)\right]+\left[\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۵}(۸!)\right]\right)/T$

ب) $[T-(E_{۴}+E_{۵})]/T$

که در آن، $E_{۴}=\left[\binom{۵}{۴}(۹!)/(۲!)\right]-\left[\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۵}(۸!)\right]$ و $E_{۵}=\binom{۵}{۵}(۸!)$

۱۱. $[۱۶!/(۴!)^{۴}]-\binom{۴}{۱}[۱۳!/(۴!)^{۳}]+\binom{۴}{۲}[۱۰!/(۴!)^{۲}]-\binom{۴}{۳}(۷!/۴!)+(۴!)$.

۱۳. الف) $\binom{n-m}{r-m}$

فصل ۹ توابع مولد

بخش ۱.۹ـصفحهٔ ۴۲۰

۱. الف) ضریب $x^{۲۰}$ در $(۱+x+x^{۲}+\cdots+x^{۷})^{۴}$

ب) ضریب $x^{۲۰}$ در $(۱+x^{۲}+x^{۴}+\cdots+x^{۲۰})^{۲}(۱+x+x^{۲}+\cdots+x^{۲۰})^{۲}$ یا در
$(۱+x+x^{۲}+\cdots)^{۲}(۱+x^{۲}+x^{۴}+\cdots)^{۲}$

ج) ضریب $x^{۳۰}$ در $(x^۲ + x^۳ + x^۴)(x^۳ + x^۴ + \cdots + x^۸)^۴$

د) ضریب $x^{۳۰}$ در

$$(۱ + x + x^۲ + \cdots + x^{۳۰})^۳(۱ + x^۲ + x^۴ + \cdots + x^{۳۰}) \cdot (x + x^۳ + x^۵ + \cdots + x^{۲۹})$$

یا در

$$(۱ + x + x^۲ + \cdots)^۳(۱ + x^۲ + x^۴ + \cdots)(x + x^۳ + x^۵ + \cdots)$$

۳. **الف)** ضریب $x^{۱۰}$ در $(۱ + x + x^۲ + x^۳ + \cdots)^۶$

ب) ضریب x^r در $(۱ + x + x^۲ + x^۳ + \cdots)^n$

۵. پاسخ، ضریب $x^{۳۱}$ در تابع مولد

$$(۱ + x + x^۲ + x^۳ + \cdots)^۳(۱ + x + x^۲ + \cdots + x^{۱۰})$$

است.

بخش ۹.۲ـصفحهٔ ۴۳۳

۱. **الف)** $(۱ + x)^۸$ **ب)** $۸(۱ + x)^۷$ **ج)** $(۱ + x)^{-۱}$

د) $x^۳/(۱ - x)$ **ه)** $۶x^۳/(۱ + x)$ **و)** $(۱ - x^۲)^{-۱}$

ز) $(۱ - ۲x)^{-۱}$ **ح)** $x^۲/(۱ - ax)$

۳ **الف)** $g(x) = f(x) - a_۳x^۳ + ۳x^۳ = f(x) + (۳ - a_۳)x^۳$

ب) $g(x) = f(x) + (۳ - a_۳)x^۳ + (۷ - a_۷)x^۷$

ج) $g(x) = ۲f(x) + (۱ - ۲a_۱)x + (۳ - ۲a_۳)x^۳$

د) $g(x) = ۲f(x) + [۵/(۱ - x)] + (۱ - ۲a_۱ - ۵)x$
$\quad + (۳ - ۲a_۳ - ۵)x^۳ + (۷ - ۲a_۷ - ۵)x^۷$

۵. **الف)** $\binom{۲۱}{۷}$ **ب)** $\binom{n+۶}{۷}$

۷. $\binom{۱۴}{۱۰} - ۵\binom{۹}{۵} + \binom{۵}{۲}$

۹. **الف)** ۰ **ب)** $\binom{۱۴}{۱۲} - ۵\binom{۱۶}{۱۴}$

ج) $\binom{۱۸}{۱۵} + ۴\binom{۱۷}{۱۴} + ۶\binom{۱۶}{۱۳} + ۴\binom{۱۵}{۱۲} + \binom{۱۴}{۱۱}$

۱۱. $\binom{۹۹}{۹۶} - ۴\binom{۶۴}{۶۱} + ۶\binom{۲۹}{۲۶}$

۱۳. $\left[\binom{۲۹}{۱۸} - \binom{۱۲}{۱}\binom{۲۳}{۱۲} + \binom{۱۲}{۲}\binom{۱۷}{۶} - \binom{۱۲}{۳}\right] / (۶^{۱۲})$

۱۵. $(۱/۸)[۱ + (-۱)^n] + (۱/۴)\binom{n+۱}{n} + (۱/۲)\binom{n+۲}{n}$

۱۷.
$$(1-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6)^{-1} = [1-(x+x^2+\cdots+x^6)]^{-1}$$
$$=1+(x+x^2+\cdots+x^6)+(x+x^2+\cdots+x^6)^2+(x+x^2+\cdots+x^6)^3+\cdots$$

ریختن اول تاس ریختن دوم تاس ریختن سوم تاس

که در آن ۱، مربوط به حالتی است که تاس ریخته نمی‌شود.

۱۹. $a=1$، $b=-2$، $k=-1/5$

۲۱. الف) تفاضلها ۲، ۳، ۲، ۷، و ۰ هستند که مجموع آنها ۱۴ است.
ب) $\{3,5,8,15\}$ ج) $\{1+a, 1+a+b, 1+a+b+c, 1+a+b+c+d\}$

۲۳.
$$\begin{aligned}c_k &= \Sigma_{i=0}^{k} i(k-i)^2 = k^2\Sigma_{i=0}^{k} i - 2k\Sigma_{i=0}^{k} i^2 + \Sigma_{i=0}^{k} i^3\\ &= (k^2)[k(k+1)/2] - 2k[k(k+1)(2k+1)/6] + [k^2(k+1)^2/4]\\ &= (1/12)(k^2)(k^2-1)\end{aligned}$$

بخش ۳.۹ـصفحهٔ ۴۳۹

۱. ۵؛ ۴ + ۱؛ ۳ + ۲؛ ۳ + ۱ + ۱؛ ۲ + ۲ + ۱؛ ۲ + ۱ + ۱ + ۱؛ ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱. ۷؛ ۶ + ۱؛ ۵ + ۲؛ ۵ + ۱ + ۱؛ ۴ + ۳؛ ۴ + ۲ + ۱؛ ۴ + ۱ + ۱ + ۱؛ ۳ + ۳ + ۱؛ ۳ + ۲ + ۲؛ ۳ + ۲ + ۱ + ۱؛ ۳ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱؛ ۲ + ۲ + ۲ + ۱؛ ۲ + ۲ + ۱ + ۱ + ۱؛ ۲ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱؛ ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱.

۳. تعداد افرازهای ۶ به ۱ها، ۲ها، و ۳ها برابر با ۷ است.

۵. الف) و ب)

$$(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(1+x^4+x^8+\cdots)(1+x^6+x^{12}=\cdots)\cdots$$
$$=\Pi_{i=1}^{x}\frac{1}{1-x^{2i}}$$

۷. فرض کنید $f(x)$ تابع مولد تعداد آن افرازهای $n\in\mathbf{Z}^+$ است که در آنها هیچ جمعوندی بیش از دوبار ظاهر نمی‌شود. در این صورت

$$f(x)=\Pi_{i=1}^{\infty}(1+x^i+x^{2i})$$

فرض کنید $g(x)$ تابع مولد تعداد آن افرازهای n باشد که در آنها هیچ جمعوندی بر ۳ تقسیم‌پذیر نیست. در اینجا

$$g(x)=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^4}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^7}\cdots$$

اما

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x+x^2)(1+x^2+x^4)(1+x^3+x^6)(1+x^4+x^8)\cdots \\ &= \frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^9}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^{12}}{1-x^4}\cdots \\ &= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^4}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^7}\cdots \\ &= g(x) \end{aligned}$$

.۹

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{99})(1+x^5+x^{10}+\cdots+x^{95})(1+x^{10}+\cdots+x^{90})\times$$
$$(1+x^{25}+x^{50}+x^{75})(1+x^{50})$$

۱۱. این از تناظر یک به یک بین آن نمودارهای فررکه جمعوند (سطر)های آن بیش از m نیست و نمودارهای ترانهاده (نمودارهای فرر) که m جمعوند (سطر) دارند حاصل می‌شود.

بخش ۴.۹ـصفحهٔ ۴۴۴

۱. الف) e^{-x} ب) e^{2x} ج) e^{-ax} د) e^{a^2x}
ه) ae^{a^2x} و) xe^{2x}

۳. الف) $g(x)=f(x)+[(3-a_3)/3!]x^3$
ب) $g(x)=f(x)+[(-1-a_3)/3!]x^3=e^{5x}-[126x^3/(3!)]$
ج) $g(x)=2f(x)+[2-2a_1]x+[(4-2a_2)/2!]x^2$
د) $g(x)=2f(x)+3e^x+[2-2a_1-3]x+[(4-2a_2-3)/2!]x^2+[(8-2a_3-3)/3!]x^3$

۵. الف) $(1+x)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)^2$

ب) $(1+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)^2$

ج) $(1+x)^3\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)^4$

۷. پاسخ، ضریب $\frac{x^{25}}{25!}$ در $\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{10}}{10!}\right)^4$ است.

۹. الف) $(1/2)[3^{20}+1]/(3^{20})$ ب) $(1/4)[3^{20}+3]/(3^{20})$ ج) $(1/2)[3^{20}-1]/(3^{20})$
د) $(1/2)[3^{20}-1]/(3^{20})$ ه) $(1/2)[3^{20}+1]/(3^{20})$

۱۱. الف) $\left(\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\cdots\right)^۴\left(\frac{x^۵}{۵!}+\frac{x^۶}{۶!}+\cdots\right)$
ب)

$$\left(x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\cdots\right)^۳\left[(x)\left(\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۴}{۴!}+\frac{x^۵}{۵!}\right)+\left(\frac{x^۲}{۲!}\right)\left(\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۴}{۴!}+\frac{x^۵}{۵!}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{x^۳}{۳!}\right)\left(\frac{x^۴}{۴!}+\frac{x^۵}{۵!}\right)+\left(\frac{x^۴}{۴!}\right)\left(\frac{x^۵}{۵!}\right)\right]$$

بخش ۵.۹ـ صفحهٔ ۴۴۸

۳. $a_۰$، $a_۱-a_۰$، $a_۱$، $a_۲-a_۱$، $a_۲$، $a_۳-a_۲$، ...
۵. $f(x)=[e^x/(۱-x)]$

تمرینهای گوناگون ـ صفحهٔ ۴۵۱

۱. الف) $۶/(۱-x)+۱/(۱-x)^۲$ ب) $۱/(۱-ax)$ ج) $۱/[۱-(۱+a)x]$
د) $۱/(۱-x)+۱/(۱-ax)$
۵. $\left[\binom{۱۵}{۱۲}-\binom{۴}{۱}\binom{۹}{۶}+\binom{۴}{۲}\right]^۲$
۷. فرض کنید $f(x)$ تابع مولد تعداد افرازهایی از $n\in\mathbf{Z}^+$ باشد که در آنها هیچ جمعوند زوجی تکرار نشود (یک جمعوند فرد ممکن است تکرار شود یا نشود). در این صورت

$$f(x)=(۱+x+x^۲+x^۳+\cdots)(۱+x^۲)(۱+x^۳+x^۶+x^۹+\cdots)(۱+x^۴)\cdots$$
$$=\frac{۱}{۱-x}\cdot(۱+x^۲)\cdot\frac{۱}{۱-x^۳}\cdot(۱+x^۴)\cdot\frac{۱}{۱-x^۵}\cdots$$

فرض کنید $g(x)$ تابع مولد تعداد افرازهایی از $n\in\mathbf{Z}^+$ باشد که در آنها هیچ جمعوندی بیش از سه بار تکرار نمی‌شود. در این صورت

$$\begin{aligned}g(x)&=(۱+x+x^۲+x^۳)(۱+x^۲+x^۴+x^۶)(۱+x^۳+x^۶+x^۹)\cdots\\&=[(۱+x)(۱+x^۲)][(۱+x^۲)(۱+x^۴)][(۱+x^۳)(۱+x^۶)]\cdots\\&=[(۱-x^۲)/(۱-x)](۱+x^۲)[(۱-x^۴)/(۱-x^۲)](۱+x^۴)\times\\&\quad[(۱-x^۶)/(۱-x^۳)](۱+x^۶)\cdots\\&=(۱/(۱-x))(۱+x^۲)(۱/(۱-x^۳))(۱+x^۴)(۱/(۱-x^۵))(۱+x^۶)\cdots=f(x)\end{aligned}$$

۹. $۴^{۱۰} - \binom{۴}{۱}(۱۰)(۳^۹) + \binom{۴}{۲}(۱۰)(۹)(۲^۸) - \binom{۴}{۳}(۱۰)(۹)(۸)$

۱۱. الف) ۱، ۵، (۷) (۵)، (۹) (۷) (۵)، (۱۱) (۹) (۷) (۵)، ... ب) $a = ۴$، $b = -\frac{۷}{۴}$

۱۳. الف) $\binom{۱۹}{۸}$ ب) $\binom{۱۹}{۸}/\binom{۹}{۴}^۲$

فصل ۱۰ رابطه‌های بازگشتی

بخش ۱.۱۰ـ صفحهٔ ۴۶۴

۱. الف) $a_n = ۵a_{n-۱}, n \geq ۱, a_۰ = ۲$ ب) $a_n = -۳a_{n-۱}, n \geq ۱, a_۰ = ۶$

ج) $a_n = (۱/۳)a_{n-۱}, n \geq ۱, a_۰ = ۱$

د) $a_n = (۲/۵)a_{n-۱}, n \geq ۱, a_۰ = ۷$

۳. $c = \pm(۳/۷)$

۵. ۱۴۱ ماه

۷. $۳(۷)^{۱۰/۳}$

۹. الف) ۱۴۵ ب) ۴۵

۱۱. الف) ۲۱۳۴۵ ب) ۵۲۱۴۳، ۵۴۱۳۴ ج) ۲۱۵۳۴، ۲۱۳۵۴، ۲۱۳۴۵

د) ۲۱۵۴۳ در یکصد و سیزدهمین، ۳۵۴۲۱ در شصت و هفتمین، و ۳۱۵۲۴ در چهل و سومین جا.

۱۳. ب) می‌پذیریم که نوع شیوهٔ «جور کردن حبابی» در قسمت (الف) به‌کار رفته است، بدترین حالت پیچیدگی حالت $O(n^۲)$ است.

بخش ۲.۱۰ـ صفحهٔ ۴۷۷

۱. الف) $a_n = (۳/۷)(-۱)^n + (۴/۷)(۶)^n, n \geq ۰$

ب) $a_n = ۴(۱/۲)^n - ۲(۵)^n, n \geq ۰$

ج) $a_n = ۴ + ۳(-۱/۳)^n, n \geq ۰$

د) $a_n = ۳\sin(n\pi/۲), n \geq ۰$

هـ) $a_n = ۲^n[\cos(n\pi/۲) + (۱/۲)\sin(n\pi/۲)], n \geq ۰$ و) $a_n = (۵ - n)۳^n, n \geq ۰$

ز) $a_n = (\sqrt{۲})^n[\cos(۳\pi n/۴) + ۴\sin(۳\pi n/۴)], n \geq ۰$

ح) $a_n = ۳(۵)^n, n \geq ۰$

ط) $a_n = (-۲/۳)^n(۱ - ۷n), n \geq ۰$

ی) $a_n = [(-۵ + ۶n)/۹](-۱)^n + (۱۴/۹)(۲^n), n \geq ۰$

۳. $a_n = (۱/۱۰)[۷^n - (-۳)^n], n \geq ۰$

۵. الف)

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_2 - F_0\\
F_3 &= F_4 - f_2\\
F_5 &= F_6 - F_4\\
&\vdots\\
F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2}
\end{aligned}$$

$$\overline{F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n} - F_0 = F_{2n}}$$

ب)

$$\begin{aligned}
F_2 &= F_3 - F_1\\
F_4 &= F_5 - F_3\\
F_6 &= F_7 - F_5\\
&\vdots\\
F_{2n} &= F_{2n+1} - F_{2n-1}
\end{aligned}$$

$$\overline{F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - F_1}$$

$$F_0 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1 (F_0 = 0; F_1 = 1)$$

ج)

$$\begin{aligned}
F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} &= F_{2n}\\
F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} &= F_{2n+1} - 1
\end{aligned}$$

$$\overline{F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots + F_{2n-1} - F_{2n} = (F_{2n} - F_{2n+1}) + 1 = -F_{2n-1} + 1}$$

۷. $a_n = (1/\sqrt{5})[((1 + \sqrt{5})/2)^{n+1} - ((1 - \sqrt{5})/2)^{n+1}], n \geq 0$

۹.

$$a_n = [(5+\sqrt{21})/(2\sqrt{12})][(3+\sqrt{21})/2]^n - [(5-\sqrt{21})/(2\sqrt{21})][(3-\sqrt{21})/2]^n$$

۱۱. $x_n = 4(2^n) - 3, n \geq 0$

۱۳. $a_n = \sqrt{51(4^n) - 35}, n \geq 0$

۱۵. چون $(F_۲, F_۱) = ۱ = (F_۱, F_۰)$، $n \geq ۲$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$F_۳ = F_۲ + F_۱ (= ۱)$$
$$F_۴ = F_۳ + F_۲$$
$$F_۵ = F_۴ + F_۳$$
$$\vdots$$
$$F_{n+۱} = F_n + F_{n-۱}$$

اگر این معادلات را به‌ترتیب عکس در نظر بگیریم، گامهای الگوریتم اقلیدسی را برای محاسبهٔ $(F_{n+۱}, F_n)$ که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $F_{n+۱}$ و F_n، $n \geq ۲$، است خواهیم داشت. چون آخرین ماندهٔ غیر صفر، $F_۱ = ۱$، نتیجه می‌شود که به‌ازای همهٔ مقادیر $n \geq ۲$، $(F_{n+۱}, F_n) = ۱$.

بخش ۳.۱۰ـ صفحهٔ ۴۸۶

۱. الف) $a_n = (n+۱)^۲, n \geq ۰$ ب) $a_n = ۳ + n(n-۱)^۲, n \geq ۰$

ج) $a_n = ۶(۲^n) - ۵, n \geq ۰$ د) $a_n = ۲^n + n(۲^{n-۱}), n \geq ۰$

۳. الف) $a_n = a_{n-۱} + n, n \geq ۱, a_۰ = ۱$ $a_n = ۱ + [n(n+۱)]/۲, n \geq ۰$

ب) $b_n = b_{n-۱} + ۲, n \geq ۲, b_۱ = ۲$ $b_n = ۲n, n \geq ۱, b_۰ = ۱$

۵. الف) $a_n = (۳/۴)(-۱)^n - (۴/۵)(-۲)^n + (۱/۲۰)(۳)^n, n \geq ۰$

ب) $a_n = (۲/۹)(-۲)^n - (۵/۶)(n)(-۲)^n + (۷/۹), n \geq ۰$

ج) $a_n = (-۵۵/۵۴)n(-۲)^n + (n^۲/۹) - (۴n/۲۷), n \geq ۰$

د) $a_n = (۵/۴) - (۱/۴)(-۱)^n - (۱/۲)\sin(n\pi/۲)$

۷. $a_n = A + B_n + Cn^۲ - (۳/۴)n^۳ + (۵/۲۴)n^۴$

۹. $p = \$۱۱۷٫۶۸$

۱۱. الف) $a_n = [(۳/۴)(۳)^n - ۵(۲)^n + (۷n/۲) + (۲۱/۴)]^{۱/۲}, n \geq ۰$

ب) $a_n = (۱/۲)[(-۱)^n + ۱]n!, n \geq ۰$

ج) $a_n = ۲, n \geq ۰$

بخش ۴.۱۰ـ صفحهٔ ۴۹۴

۱. الف) $a_n = (۱/۲)[۱ + ۳^n], n \geq ۰$

ب) $a_n = ۱ + [n(n-۱)(۲n-۱)]/۶, n \geq ۰$

ج) $a_n = ۲^n, n \geq ۰$

د) $a_n = [n^۳ - ۳n^۲ + ۸n + ۶]/۶$

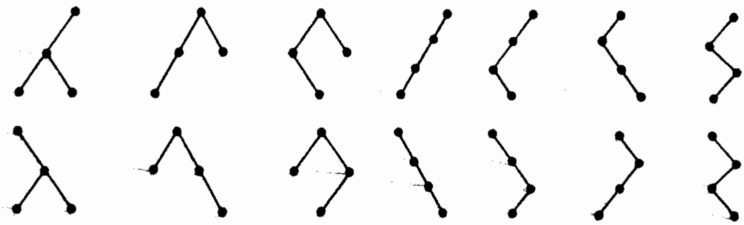
۳. الف) $a_n = ۲^n(۱ - ۲n), b_n = n(۲^{n+۱}), n \geq ۰$

ب) $a_n = (-۳/۴) + (۱/۲)(n + ۱) + (۱/۴)(۳^n)$

$b_n = (۳/۴) + (۱/۲)(n + ۱) - (۱/۴)(۳^n), n \geq ۰$

بخش ۱۰.۵ـ صفحهٔ ۵۰۲

۱. $b_۴ = (۸!)/[(۵!)(۴!)] = ۱۴$



۳.

$$\binom{۲n-۱}{n} - \binom{۲n-۱}{n-۲} = \left[\frac{(۲n-۱)!}{n!(n-۱)!}\right] - \left[\frac{(۲n-۱)!}{(n-۲)!(n+۱)!}\right]$$

$$= \left[\frac{(۲n-۱)!(n+۱)}{(n+۱)!(n-۱)!}\right] - \left[\frac{(۲n-۱)!(n-۱)}{(n-۱)!(n+۱)!}\right]$$

$$= \left[\frac{(۲n-۱)!}{(n+۱)!(n-۱)!}\right][(n+۱) - (n-۱)]$$

$$= \frac{(۲n-۱)!(۲)}{(n+۱)!(n-۱)!} = \frac{(۲n-۱)!(۲n)}{(n+۱)!n!} = \frac{(۲n)!}{(n+۱)(n!)(n!)}$$

$$= \frac{۱}{(n+۱)}\binom{۲n}{n}$$

۵. الف)

$$b_{n+۱} = \left(\frac{۱}{n+۲}\right)\binom{۲n+۲}{n+۱} = \left(\frac{۱}{n+۲}\right)\left[\frac{(۲n+۲)!}{(n+۱)!(n+۱)!}\right]$$

$$= \frac{(۲n+۲)(۲n+۱)(۲n)!}{(n+۲)(n+۱)^۲(n!)^۲} = \frac{۲(۲n+۱)}{(n+۲)} \cdot \frac{(۲n)!}{(n+۱)(n!)^۲}$$

$$= \frac{۲(۲n+۱)}{(n+۲)}\left[\frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n}\right]$$

$$= \frac{۲(۲n+۱)}{(n+۲)} b_n$$

بخش ۱۰.۶ـ صفحهٔ ۵۱۴

۱. الف) $f(n) = (۵/۳)(۴n^{\log_۳ ۴} - ۱)$ و $f \in O(n^{\log_۳ ۴})$ برای $n \in \{۳^i | i \in \mathbf{N}\}$.
ب) $f(n) = ۷(\log_۵ n + ۱)$ و $f \in O(\log_۵ n)$ برای $n \in \{۵^i | i \in \mathbf{N}\}$
ج) $f(n) = (۳/۷)(۸n^۳ - ۱)$ و $f \in O(n^۳)$ برای $n \in \{۲^i | i \in \mathbf{N}\}$
۳. الف) $f \in O(\log_b n)$ بر $\{b^k | k \in \mathbf{N}\}$
ب) $f \in O(n^{\log_b a})$ بر $\{b^k | k \in \mathbf{N}\}$
۵. الف) $f(۱) = ۰ \quad f(n) = ۲f(n/۲) + ۱$
با توجه به تمرین ۲(ب)، $f(n) = n - ۱$.
ب) معادلهٔ $f(n) = f(n/۲) + (n/۲)$ به‌صورت زیر حاصل می‌شود: در دور اول $n/۲$ بازی انجام گرفته‌اند. پس $n/۲$ از بازیکنان باقی مانده‌اند، لذا برای تعیین برنده به $f(n/۲)$ بازی دیگر نیاز است.
۷. $O(۱)$
۹. الف)

$$\begin{aligned}
f(n) &\le af(n/b) + cn \\
af(n/b) &\le a^۲ f(n/b^۲) + ac(n/b) \\
a^۲ f(n/b^۲) &\le a^۳ f(n/b^۳) + a^۲ c(n/b^۲) \\
a^۳ f(n/b^۳) &\le a^۴ f(n/b^۴) + a^۳ c(n/b^۳) \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
a^{k-۱} f(n/b^{k-۱}) &\le a^k f(n/b^k) + a^{k-۱} c(n/b^{k-۱})
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
f(n) &\le a^k f(n/b^k) + cn[۱ + (a/b) + (a/b)^۲ + \cdots + (a/b)^{k-۱}] \\
&= a^k f(۱) + cn[۱ + (a/b) + (a/b)^۲ + \cdots + (a/b)^{k-۱}]
\end{aligned}$$

زیرا $n = b^k$. چون $f(۱) \le c$ و $(n/b^k) = ۱$، داریم

$$\begin{aligned}
f(n) &\le cn[۱ + (a/b) + (a/b)^۲ + \cdots + (a/b)^{k-۱} + (a/b)^k] \\
&= (cn)\Sigma_{i=۰}^{k} (a/b)^i
\end{aligned}$$

ب) وقتی $a = b$، $(cn)(k+۱) = f(n) \le (cn)\Sigma_{i=۰}^{k} ۱^i$، که در آن $n = b^k$، یا $k = \log_b n$. بنابراین، $f(n) \le (cn)(\log_b n + ۱)$، پس برای هر پایهٔ بزرگتر از یک، $f \in O(n \log_b n) = O(n \log n)$.

ج) برای $a \neq b$

$$\begin{aligned} cn\Sigma_{i=0}^{k}(a/b)^i &= cn\left[\frac{1-(a/b)^{k+1}}{1-(a/b)}\right] \\ &= (c)(b^k)\left[\frac{1-(a/b)^{k+1}}{1-(a/b)}\right] = c\left[\frac{b^k-(a^{k+1}/b)}{1-(a/b)}\right] \\ &= c\left[\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{b-a}\right] = c\left[\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}\right] \end{aligned}$$

د) با توجه به قسمت (ج)

$$f(n) \leq (c/(a-b))[a^{k+1}-b^{k+1}] = (ca/(a-b))a^k - (cb/(a-b))b^k$$

اما $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$ و $b^k = n$، پس

$$f(n) \leq (ca/(a-b))n\log_b a - (cb/(a-b))n$$

(i) وقتی $a < b$، آنگاه $\log_b a < 1$، و $f \in O(n)$ بر $\mathbf{Z}^+$.

(ii) وقتی $a > b$، آنگاه $\log_b a > 1$ و $f \in O(n\log_b a)$ بر $\mathbf{Z}^+$.

تمرینهای گوناگون_صفحهٔ ۵۲۱

۱. $\binom{n}{k}\left(\frac{n-k}{k+1}\right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)}{(k+1)} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \binom{n}{k+1}$

۳. دو حالت را باید در نظر گرفت. حالت ۱ (۱ یک جمعوند است): در اینجا، $p(n-1, k-1)$ راه برای افراز $n-1$ به دقیقاً $k-1$ جمعوند وجود دارند. حالت ۲ (۱ یک جمعوند نیست): در اینجا هر جمعوند $s_1, s_2, \ldots s_k > 1$. به‌ازای $1 \leq i \leq k$، قرار می‌دهیم $t_i = s_i - 1 \geq 1$. در این صورت $t_1, t_2, \cdots, t_k$ افرازی از $n-k$ به دقیقاً k جمعوند به‌دست می‌دهند. این حالتها فراگیر و مجزا هستند، لذا بنابر اصل جمع

$$p(n,k) = p(n-1, k-1) + p(n-k, k)$$

۵. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$، به‌ازای $n \geq 3$، $a_1 = a_2 = 1$، $a_n = F_n$، nامین عدد فیبوناتچی است.

۷. الف)

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۲&۱\\۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{۳}&F_{۲}\\F_{۲}&F_{۱}\end{bmatrix},A^{۳}=\begin{bmatrix}۳&۲\\۲&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{۴}&F_{۳}\\F_{۳}&F_{۲}\end{bmatrix},$$
$$A^{۴}=\begin{bmatrix}۵&۳\\۳&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{۵}&F_{۴}\\F_{۴}&F_{۳}\end{bmatrix}$$

ب) حدس: برای $n\in\mathbf{Z}^+$، $A^n=\begin{bmatrix}F_{n+۱}&F_n\\F_n&F_{n-۱}\end{bmatrix}$، که در آن F_n معرف nامین عدد فیبوناتچی است.

برهان: برای $n=۱$، $A=A^{۱}=\begin{bmatrix}۱&۱\\۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{۲}&F_{۱}\\F_{۱}&F_{۰}\end{bmatrix}$ ، لذا در این حالت نتیجه درست است. فرض کنید که نتیجه برای $n=k\geq۱$ درست باشد. یعنی $A^k=\begin{bmatrix}F_{k+۱}&F_k\\F_k&F_{k-۱}\end{bmatrix}$. برای $n=k+۱$،

$$A^n=A^{k+۱}=A^k\cdot A=\begin{bmatrix}F_{k+۱}&F_k\\F_k&F_{k-۱}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱\\۱&۰\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}F_{k+۱}+F_k&F_{k+۱}\\F_k+F_{k-۱}&F_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{k+۲}&F_{k+۱}\\F_{k+۱}&F_k\end{bmatrix}$$

حاصل آنکه، بنابر اصل استقرای ریاضی، قضیه برای همهٔ مقادیر $n\in\mathbf{Z}^+$ درست است.

۹. الف) برای هر پریشی، ۱ در موضع i قرار می‌گیرد که $۲\leq i\leq n$. پس، دو حالت رخ می‌دهد. حالت ۱ (i در موضع ۱ است): در اینجا $n-۲$ عدد صحیح دیگر به $d_{n-۲}$ راه پریش می‌شوند. با $n-۱$ انتخاب برای i، $(n-۱)d_{n-۲}$ تا از این پریشیها حاصل می‌شوند. حالت ۲ (i در موضع ۱ (یا موضع i) نیست): در اینجا ۱ را به‌عنوان موضع طبیعی جدید i در نظر می‌گیریم، لذا $n-۱$ عنصر برای پریش شدن وجود دارند. با $n-۱$ انتخاب برای i، دارای $(n-۱)d_{n-۱}$ پریشی هستیم. چون دو حالت فراگیر و مجزا هستند، از اصل جمع، قضیه حاصل می‌شود.

ب) $d_{۰}=۱$ ج) $d_n-nd_{n-۱}=d_{n-۲}-(n-۲)d_{n-۳}$

۱۱. $a_n=n^{۲}-n+۲,n\geq۱;a_{۰}=۱$

۱۳. الف) $p_n=(۰٫۶)^np_{۰},n\geq۰$ ب) $p_{۰}=۲/۵$

۱۵. الف) $a_n=\binom{۲n}{n},n\geq۰$ ب) $r=۱,s=-۴,t=-۱/۲$

د) $b_n=(۱/(۲n-۱))\binom{۲n}{n},n\geq۱;b_{۰}=۰$

۱۷. وقتی $|B| = n = 1$ و $|A| = m$، $f : A \to B$، که در آن به‌ازای همهٔ مقادیر $a \in A$، $f(a) = b$ و $B = \{b\}$ تنها تابع پوشا از A به B است. بنابراین، $a(m, 1) = 1$.
به‌ازای $m \geq n > 1$،

$$\text{تعداد کل تابعهای} B \quad n^m = f : A \to B$$

اگر $1 \leq i \leq n - 1$، آن‌گاه تعداد $\binom{n}{i}a(m,i)$ تابع پوشای g با حوزهٔ A و برد زیرمجموعه‌ای از B به‌اندازهٔ i وجود دارند. به‌علاوه، هر تابع $h : A \to B$ که پوشا نباشد در میان این تابعهای g قرار دارد. در نتیجه

$$a(m,n) = n^m - \Sigma_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}a(m,i)$$

واژه‌نامه

آرایش دوری	circular arrangement
ادات پایه‌ای	basic connectives
استقرای مضاعف	double induction
استلزام	implication
اصل خوشترتیبی	well-ordering principle
اصل دوگانی	principle of duality
اصل شمول و طرد	principle of inclusion and exclusion
اصل لانهٔ کبوتر	pigeonhole principle
مت : اصل حجره‌ها	
افراز	partition
افزایشگر دودویی نوبتی	serial binary adder
الگوریتم تقسیم	division algorithm
الگوریتم تقسیم و برتری	divide-and conquer algorithm
الگوریسم	algorism
بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک	greatest common divisor
پادزنجیر	antichain
پالایش	refinement
پریشی	derangement
پیچیدگی بدترین حالت	worst-case complexity
پیچیدگی بهترین حالت	best case complexity
پیچیدگی حالت متوسط	average-case complexity
پیشنگاره	preimage
پیشوند سره	proper suffix

recursive function	تابع بازگشتی
trunc function	تابع برش
surjective function	تابع پوشا
syn: onto function	
complexity function	تابع پیچیدگی
output function	تابع خروجی
access function	تابع دستیابی
bijective function	تابع دوسو
ceiling function	تابع سقف
floor function	تابع کف
composite function	تابع مرکب
characteristic function	تابع مشخصه
generating function	تابع مولّد
invertible function	تابع وارونپذیر
identity function	تابع همانی
monotone increasing function	تابع یکنوا صعودی
successor	تالی
reducible	تحویلپذیر
partial order	ترتیب جزئی
conjunction	ترکیب عطفی
disjunction	ترکیب فصلی
contradiction	تناقض
cardinality of a set	توان مجموعه
	مت : عدد اصلی مجموعه
permutation	جایگشت
algebra of propositions	جبر گزاره‌ها
algebra of switching circuits	جبرمدارهای راه‌گزینی
truth table	جدول ارزش
transition table	جدول تغییر حالت
state table	جدول حالت
membership table	جدول عضویت
binary search	جستجوی دوتایی
bubble sort	جورکردن حبابی

cross product	حاصلضرب برداری
	مت : حاصلضرب دکارتی یا (خارجی)
internal states	حالتهای درونی
angular momentum	حرکت زاویه‌ای
arithmetica integra	حساب اعداد صحیح
domain	حوزه
codomain	حوزهٔ تمام
overflow error	خطای سرریز
binary tree	درخت دوتایی
AND gate	دریچهٔ و
octal system	دستگاه هشت هشتی
transfer sequence	دنبالهٔ تغییر حالت
syn: transfer sequence	
directed cycle	دور سودار
dual of a statement	دوگان یک گزاره
duality	دوگانی
terminating vertex	رأس پایانی
isolated vertex	رأس تنها
adjacent vertices	رأسهای مجاور
reflexive relation	رابطهٔ بازتابی
recurrence relation	رابطهٔ بازگشتی
antisymmetric relation	رابطهٔ پادمتقارن
transitive relation	رابطهٔ ترایا
binary relation	رابطهٔ دوتایی
equivalence relation	رابطهٔ هم‌ارزی
equivalence classes	رده‌های هم‌ارزی
string	رشته
empty string	رشتهٔ تهی
flowchart	روند نما
superset	زبر مجموعه
chain	زنجیر
maximal chain	زنجیر ماکسیمال
submachine	زیر ماشین

زیرصفحه‌های مجزا	disjoint subboards
سور	quantifier
سور عمومی	universal quantifier
سور وجودی	existential quantifier
شمارش	enumeration
عالم سخن	universe
عدد اصلی ← توان مجموعه	
عدد فامی	chromatic number
عکس	converse
عکس مستوی	inverse
عکس نقیض	contrapositive
عمل یکتایی	unary operation
عنصر همانی	identity element
غلبهٔ تابعی	function dominance
فضای نمونه‌ای	sample space
فهرست مجاورت	adjacency list
قاعدهٔ رفع تالی ← قیاس رفع	
قاعدهٔ وضع مقدم	modus ponens
مت : قیاس استثنایی	syn: rule of detachment
قانون متمم دوگانه	double complement law
قانون نقیض مضاعف	double negation law
قانونهای جذب	absorption laws
قانونهای حذف	concellation laws
قانونهای خود توانی	idempotent laws
قانونهای شرکت‌پذیری	ascociative laws
قانونهای عکس	inverse laws
قیاس	syllogism
قیاس استثنایی ← قاعدهٔ وضع مقدم	
قیاس ذوحدین سالبه	destructive dilemma
قیاس رفع	modus tollens
مت : قاعدهٔ رفع تالی	

قیاس‌ذوحدین موجبه	constructive dilemma
گراف بی‌طوقه	loop free graph
گراف چندگانه	multigraph
گراف سودار	digraph syn: directed graph
گراف کامل	complete graph
گراف ناهمبند	disconnected graph
گزارهٔ مسوّر	quantified statement
ماتریس مجاورت	adjacency matrix
مثال نقض	counterexample
مجموعهٔ اندیسگذار	index set
مجموعهٔ جزئی‌ـمرتب	poset syn: partially order set
مجموعهٔ شمارا	countable set
مجموعهٔ ناشمارا	uncountable set
مسیر	path
مشبکه	lattice
مضرب مشترک	common multiple
معادلهٔ تفاضلی	difference equation
منشأ یال	source of an edge
نتیجه	conclusion
نظریهٔ بهینه سازی	optimization theory
نقطهٔ مشبکه‌ای	lattice point
نقیض	negation
نگاره	image
نگاشت	mapping
نمادگذاری میانوند	infix notation
نمودار هاسه	Hasse diagram
وارون جمعی	additive inverse
یال	edge
یای شمول	inclusive or

فهرست راهنما

نمادها

منطق:

p, q	گزاره‌ها
$\overline{p}$	نقیض (گزارهٔ) p: چنین نیست که p
$p \wedge q$	ترکیب عطفی p, q: p و q
$p \vee q$	ترکیب فصلی p, q: p یا q
$p \to q$	استلزام q بر اثر p : p مستلزم q است
$p \leftrightarrow q$	هم‌ارزی p و q: p اگر و تنها اگر q
iff	اگر و تنها اگر
$p \Rightarrow q$	استلزام منطقی
$p \Leftrightarrow q$	هم‌ارزی منطقی
$T.$	راستگو
$F.$	تناقض
$\forall x$	برای همهٔ مقادیر x (سور عمومی)
$\exists x$	برای مقداری از x (سور وجودی)

نظریهٔ مجموعه‌ها:

$x \in A$	عنصر x عضوی از مجموعهٔ A است
$x \notin A$	عنصر x عضو مجموعه A نیست
$\mathscr{U}$	مجموعهٔ عام
$A \subseteq B, B \supseteq A$	A زیرمجموعهٔ B است
$A \subset B, B \supset A$	A مجموعهٔ سرهٔ B است
$A \nsubseteq B$	A زیرمجموعهٔ B نیست
$A \not\subset B$	A زیرمجموعهٔ سرهٔ B نیست
$\|A\|$	عدد اصلی، یا اندازهٔ مجموعهٔ A، یعنی، تعداد عناصر A

	$\emptyset = \{\}$	مجموعهٔ تهی یا مجموعهٔ صفر
	$\mathscr{P}(A)$	مجموعهٔ توانی A، یعنی گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A
	$A \cap B$	اشتراک مجموعه‌های A و B: $\{x \mid x \in A$ و $x \in B\}$
	$A \cup B$	اجتماع مجموعه‌های A و B: $\{x \mid x \in A$ یا $x \in B\}$
	$A \Delta B$	تفاضل متقارن مجموعه‌های A و B: $\{x \mid x \in A$ یا $x \in B,$ اما $x \notin A \cap B\}$
	$\overline{A}$	متمم مجموعهٔ A: $\{x \mid x \in \mathscr{U}$ و $x \notin A\}$
	$A - B$	متمم (نسبی) مجموعهٔ B در مجموعهٔ A: $\{x \mid x \in A$ و $x \notin B\}$
	$\cup_{i \in I} A_i$	{برای حداقل یک $i \in I$، $\{x \mid x \in A_i$}، که در آن I یک مجموعهٔ اندیس است.
	$\cap_{i \in I} A_i$	{برای هر $i \in I$، $\{x \mid x \in A_i$}، که در آن I یک مجموعهٔ اندیس است.
اعداد:	$a \mid b$	عدد a عدد b را می‌شمارد، $a, b \in \mathbf{Z}$، $a \neq 0$
	$a \nmid b$	عدد a عدد b را نمی‌شمارد، $a, b \in \mathbf{Z}$، $a \neq 0$
	(a, b)	بزرگترین مقسوم علیه مشترک (g.c.d) اعداد صحیح a و b
	$[a, b]$	کوچکترین مضرب مشترک (l.c.m) اعداد صحیح a و b
	$\Phi(n)$	تابع فی اویلر برای $n \in \mathbf{Z}^+$
	$\lfloor x \rfloor$	بزرگترین عدد صحیح نابزرگتر از عدد حقیقی x
	$\lceil x \rceil$	کوچکترین عدد صحیح ناکوچکتر از عدد حقیقی x
	$a \equiv b (\mathrm{mod}\, n)$	a به پیمانهٔ n با b همنهشت است.
رابطه‌ها:	$A \times B$	حاصلضرب داخلی یا دکارتی A و B
	$\mathscr{R} \subseteq A \times B$	$\mathscr{R}$ رابطه‌ای از A به B است
	$a \mathscr{R} b; (a, b) \in \mathscr{R}$	a با b رابطهٔ $\mathscr{R}$ دارد
	$a \not\mathscr{R} b; (a, b) \notin \mathscr{R}$	a با b رابطهٔ $\mathscr{R}$ ندارد
	$\mathscr{R}^c$	وارون رابطهٔ $\mathscr{R}$: $(a, b) \in \mathscr{R}$، اگر و تنها اگر $(b, a) \in \mathscr{R}^c$
	$\mathscr{R} \circ \mathscr{S}$	رابطهٔ ترکیب $\mathscr{R} \subseteq A \times B$ و $\mathscr{S} \subseteq B \times C$: $(a, c) \in \mathscr{R} \circ \mathscr{S}$ اگر برای مقداری از $b \in B$، $(a, b) \in \mathscr{R}$، و $(b, c) \in \mathscr{S}$
	$\mathrm{lub}\{a, b\}$	کوچکترین کران بالای a و b
	$\mathrm{glb}\{a, b\}$	بزرگترین کران پایین a و b
	$[a]$	ردهٔ هم‌ارزی عنصر a (نسبت به یک رابطهٔ هم‌ارزی $\mathscr{R}$ روی مجموعهٔ A): $\{x \in A \mid x \mathscr{R} a\}$
تابعها:	$f : A \to B$	f تابعی از A به B است
	$f(A_1)$	برای $f : A \to B$ و $A_1 \subseteq A$، $f(A_1)$ نگارهٔ A_1 تحت f است، یعنی $\{f(a) \mid a \in A_1\}$

	$f(A)$	برای $f : A \to B$، $f(A)$ برد f است.
	$f : A \times A \to A$	f یک عمل دوتایی روی A است.
	$۱_A : A \to A$	تابع همانی روی A: برای هر $a \in A$، $۱_A(a) = a$.
	$f\|_{A_۱}$	تحدید $f : A \to B$ به $A_۱ \subseteq A$
	$g \circ f$	ترکیب دو تابع $f : A \to B$، $g : B \to C$
	$f^{-۱}$	وارون تابع f
	$f^{-۱}(B_۱)$	پیشنگارهٔ $B_۱ \subseteq B$ بهازای $f : A \to B$
	$f \in O(g)$	f اُوی بزرگ g است؛ f از مرتبهٔ g است
جبر رشته‌ها:	$\mathbf{\Sigma}$	مجموعه‌ای متناهی از نمادها که یک الفبا خوانده می‌شود
	λ	رشتهٔ تهی
	$\|\|x\|\|$	درازای رشتهٔ x
	$\mathbf{\Sigma}^n$	$\{x_۱ x_۲ \dots x_n \| x_i \in \mathbf{\Sigma}\}, n \in \mathbf{Z}^+$
	$\mathbf{\Sigma}^۰$	$\{\lambda\}$
	$\mathbf{\Sigma}^+$	$\bigcup_{n \in \mathbf{Z}^+} \mathbf{\Sigma}^n$: مجموعهٔ همهٔ رشته‌هایی به درازای مثبت
	$\mathbf{\Sigma}^*$	$\bigcup_{n \geq ۰} \mathbf{\Sigma}^n$ ؛ مجموعهٔ همهٔ رشته‌های متناهی
	$A \subseteq \mathbf{\Sigma}^*$	A یک زبان است
	AB	الحاق زبانهای $A, B \subseteq \mathbf{\Sigma}^*$: $\{ab \| a \in A, b \in B\}$
	A^n	$\{a_۱ a_۲ \dots a_n \| a_i \in A \subseteq \mathbf{\Sigma}^*\}, n \in \mathbf{Z}^+$
	$A^۰$	$\{\lambda\}$
	A^+	$\bigcup_{n \in \mathbf{Z}^+} A^n$
	A^*	$\bigcup_{n \geq ۰} A^n$: بستار کلینِ زبان A
	$M = (S, \mathscr{I}, \mathscr{O}, \nu, \omega)$	یک ماشین متناهی حالت M با حالتهای درونی S، الفبای ورودی $\mathscr{I}$، الفبای خروجی $\mathscr{O}$، تابع حالت بعدی $\nu : S \times \mathscr{I} \to S$ و تابع خروجی $\omega : S \times \mathscr{I} \to \mathscr{O}$.
مجموعه‌های خاص اعداد:		
	$\mathbf{Z}$	مجموعهٔ اعداد صحیح: $\{۰, ۱, -۱, ۲, -۲, ۳, -۳, \dots\}$
	$\mathbf{N}$	مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی یا اعداد طبیعی: $\{۰, ۱, ۲, ۳, \dots\}$
	$\mathbf{Z}^+$	مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت: $\{۱, ۲, ۳, \dots\} = \{x \in \mathbf{Z} \| x > ۰\}$
	$\mathbf{Q}$	مجموعهٔ اعداد گویا: $\{a/b \| a, b \in \mathbf{Z}, b \neq ۰\}$
	$\mathbf{Q}^+$	مجموعهٔ اعداد مثبت گویا
	$\mathbf{Q}^*$	مجموعهٔ اعداد گویای غیر صفر

	$\mathbf{R}$	مجموعهٔ اعداد حقیقی
	$\mathbf{R}^+$	مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت
	$\mathbf{R}^*$	مجموعهٔ اعداد حقیقی غیر صفر
	$\mathbf{C}$	مجموعهٔ اعداد مختلط: $\{x+yi\|x,y\in\mathbf{R}, i^2=-1\}$
	$\mathbf{C}^*$	مجموعهٔ اعداد مختلط غیر صفر
	$\mathbf{Z}_n$	$\{0,1,2,\ldots,n-1\}, n\in\mathbf{Z}^+$
	$[a,b]$	بازهٔ بستهٔ از a تا b: $\{x\in\mathbf{R}\|a\le x\le b\}$
	(a,b)	بازهٔ باز از a تا b: $\{x\in\mathbf{R}\|a< x< b\}$
	$[a,b)$	بازهٔ نیمباز از a تا b: $\{x\in\mathbf{R}\|a\le x< b\}$
	$(a,b]$	بازهٔ نیمباز از a تا b: $\{x\in\mathbf{R}\|a< x\le b\}$
ساختارهای جبری:	$(\mathbf{R},+,\cdot)$	R حلقه‌ای با عملهای دوتایی $+$ و $\cdot$
	$\mathbf{R}[x]$	حلقهٔ چندجمله‌ایها روی حلقهٔ R
	$(G,\circ)$	G گروهی تحت عمل دوتایی $\circ$
	S_n	گروه متقارن n نمادی
	aH	هممجموعهٔ چپ زیرگروه H (در گروه G): $\{ah\|h\in H\}$
	$(\mathscr{B},+,\cdot,^-,0,1)$	جبر بولی $\mathscr{B}$ با عملهای دوتایی $+$ و $\cdot$، عمل یکتایی $^-$، و عنصرهای همانی 0 (برای $+$) و 1 (برای $\cdot$)
نظریهٔ گراف:	$G=(V,E)$	G گرافی با مجموعهٔ رأسهای V و مجموعهٔ یالهای E
	K_n	گراف کامل n رأسی
	$\overline{G}$	گراف کامل G
	$\deg(v)$	درجهٔ رأس v (درگراف بی‌سوی G)
	$\deg^+(v)$	درجهٔ خروجی رأس v (درگراف سودار G)
	$\deg^-(v)$	درجهٔ درونی رأس v (درگراف سودار G)
	$\kappa(G)$	تعداد مؤلفه‌های همبند گراف G
	$K_{m,n}$	گراف دوبخشی کامل بر $V=V_1\cup V_2$ که در آن $V_1\cap V_2=\emptyset$، $\|V_1\|=m$، $\|V_2\|=n$
	$\beta(G)$	عدد استقلال G
	$\chi(G)$	عدد فامی G
	$P(G,\lambda)$	چندجمله‌ای فامی G
	$\gamma(G)$	عدد غلبهٔ G
	$L(G)$	خط گراف G
	$T=(V,E)$	T درختی با مجموعهٔ رأسهای V و مجموعهٔ یالهای E است
	$N=(V,E)$	N یک شبکه (ترابری) با مجموعهٔ رأسهای V و مجموعهٔ یالهای E

فرمولها

$n!$ فاکتوریل n : $0! = 1$؛ $n! = n(n-1)\cdots(3)(2)(1)$، $n \in \mathbf{Z}^+$

$P(n,r)$ تعداد جایگشتهای n شیئ، هربار r تا، $0 \le r \le n$، $[p(n,r) = n!/(n-r)!]$

$C(n,r)$ تعداد ترکیبها یا انتخابهای n شیئ هربار r تا، $0 \le r \le n$، $[C(n,r) = n!/[r!(n-r)!]]$

$\binom{n+r-1}{r}$ تعداد ترکیبها یا انتخابهای n شیئ هربار r تا، با مجازبودن تکرارها $(r \ge 0)$

قضیهٔ دوجملهای:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^0y^n + \binom{n}{1}x^1y^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}x^ny^0 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}, \qquad n \ge r \ge 1$$

$$S(m,n) = (1/n!)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$$

عدد استرلینگ از نوع دوم. $S(m,n)$ تعداد راههای توزیع m شیئ متمایز بین n ظرف همانند است که هیچ ظرفی خالی نماند.

$$\binom{-n}{r} = (-1)^r\binom{n+r-1}{r}, \qquad n, r \in \mathbf{Z}^+$$

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$: $f(x)$ تابع مولد (معمولی) برای دنبالهٔ $a_0, a_1, a_2, \cdots$ است.

برای $a \in \mathbf{R}$، $m, n \in \mathbf{Z}^+$

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

$$(1+ax)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}ax + \binom{n}{2}a^2x^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^nx^n$$

$$(1+x^m)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} + \cdots + \binom{n}{n}x^{nm}$$

$$(1-x^{n+1})/(1-x) = 1+x+x^2+\cdots+x^n$$

$$1/(1-x) = 1+x+x^2+x^3+\cdots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

$$1/(1-x)^n = \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}(-x) + \binom{-n}{2}(-x)^2 + \binom{-n}{3}(-x)^3 + \cdots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i}(-x)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} x^i$$

$g(x) = a_0 + a_1(x/1!) + a_2(x^2/2!) + a_3(x^3/3!) + \cdots$:$g(x)$ تابع مولدنمایی برای دنبالهٔ $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$ است.

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)(e^x+e^{-x}) = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)(e^x-e^{-x}) = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$