دانشگاه مازندران

احتمال ۱

گشتاورها و معیارهای پراکندگی

مدرس: دکتر اصغرزاده نشلی

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

گشتاورها

گشتاور مرتبه k ام X: گشتاور مرتبه k ام X را با نماد μ'_k نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mu'_k = E(X^k)$$

$$\begin{aligned} k &= ۰ \rightarrow \mu'_۰ = E(X^۰) = E(۱) = ۱ \\ k &= ۱ \rightarrow \mu'_۱ = E(X) \\ k &= ۲ \rightarrow \mu'_۲ = E(X^۲) \end{aligned}$$

تذکر: گشتاور مرتبه اول X میانگین توزیع X یا میانگین X نامیده می‌شود و آن را با μ نمایش می‌دهند.

Univiversity of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

گشتاور k ام حول میانگین:

گشتاور kام حول میانگین به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}\mu_k &= E\left[(X-\mu)^k\right]\\ \mu_1 &= E(X-\mu) = E(X) - \mu = 0\\ \mu_2 &= E\left[(X-\mu)^2\right]\end{aligned}$$

واریانس:

واریانس متغیر تصادفی X را با نمادهای $Var(X)$ یا σ_X^2 و یا σ^2 نمایش داده و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنند

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

فرمول محاسباتی واریانس:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = E(X^2) - \mu^2$$

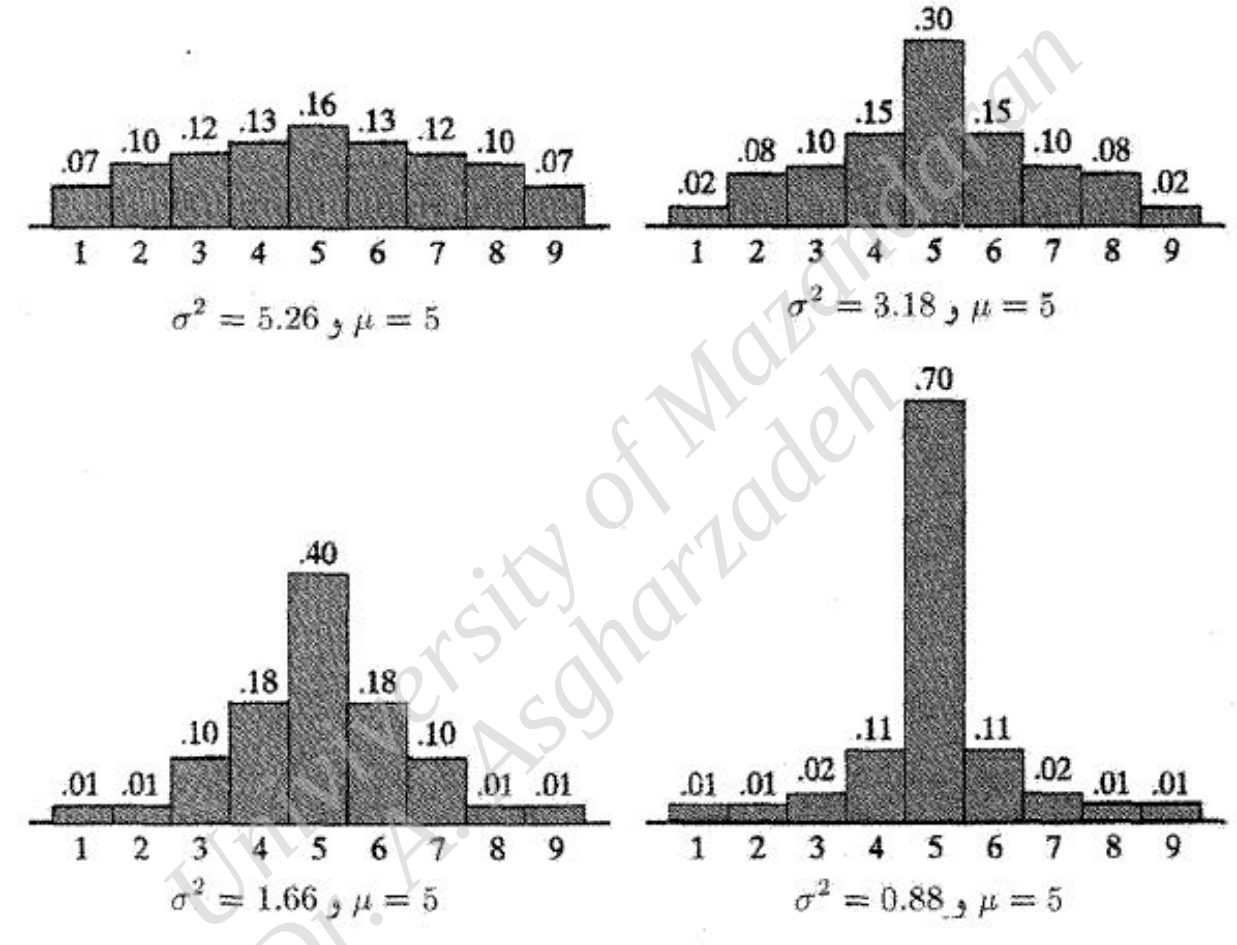
اثبات:

$$\begin{aligned}Var(X) &= E\left[(X-\mu)^2\right] = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2)\\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2\end{aligned}$$

Univiversity of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

شکل زیر نشان می‌دهد که چگونه واریانس، منعکس‌کننده پراکندگی توزیع متغیر تصادفی است. در این شکل یافته‌های توزیع‌های احتمال چهار متغیر تصادفی با میانگین یکسان $\mu = ۵$ و واریانس‌هایی به ترتیب برابر ۵/۲۶، ۳/۱۸، ۱/۶۶ و ۰/۸۸ را نشان داده‌ایم. همانطور که دیده می‌شود، یک مقدار کوچک $\sigma^۲$ این نکته را القا می‌کند که بدست آوردن مقداری نزدیک میانگین محتملتر است، و یک مقدار بزرگ $\sigma^۲$ این نکته را القا می‌کند که بدست آوردن مقداری که نزدیک میانگین نیست احتمال زیادی دارد.

Univiversity of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh



University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

خواص واریانس:

۱) $\mathrm{Var}(aX+b) = a^{۲}\mathrm{Var}(X)$

۲) $b = ۰ \Rightarrow \mathrm{Var}(aX) = a^{۲}\mathrm{Var}(X)$

۳) $a = ۰ \Rightarrow \mathrm{Var}(b) = ۰$

۴) $a = ۱ \Rightarrow \mathrm{Var}(X+b) = \mathrm{Var}(X)$

اثبات:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(aX+b) &= E(aX+b-E(aX+b))^{۲} = E(aX+b-aE(X)-b)^{۲}\\ &= a^{۲}E(X-E(X))^{۲} = a^{۲}\mathrm{Var}(X)\end{aligned}$$

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

انحراف معیار:

جذر مثبت واریانس را انحراف معیار گویند و آن را با نماد σ_X نمایش می‌دهند، به عبارت دیگر

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

توجه کنید انحراف معیار برعکس واریانس به واحد اندازه‌گیری حساس نیست.

Univiversity of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

مثال ۱.

اگر X عددی باشد که در ریختن یک تاس همگن ظاهر می‌شود، واریانس X را محاسبه کنید.

پاسخ: تابع احتمال X به صورت زیر می‌باشد:

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
f(x)	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$

با استفاده از فرمول محاسباتی واریانس داریم

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^۲) - E^۲(X) = E(X^۲) - \mu^۲$$

که در آن

$$E(X) = \sum_{x=۱}^{۶} x \times \frac{۱}{۶} = (۱+۲+۳+۴+۵+۶) \times \frac{۱}{۶} = \frac{۷}{۲}$$

$$E(X^۲) = \sum_{x=۱}^{۶} x^۲ \times \frac{۱}{۶} = (۱^۲ \times \frac{۱}{۶}) + (۲^۲ \times \frac{۱}{۶}) + \ldots + (۶^۲ \times \frac{۱}{۶}) = \frac{۹۱}{۶}$$

بنابراین

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{۹۱}{۶} - \frac{۴۹}{۴} = \frac{۳۵}{۲}$$

Univiversity of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

نامساوی مارکوف:

اگر X میک تغیر تصادفی با میانگین $E(X)$ باشد، آن‌گاه برای هر مقدار مثبت a داریم

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

اثبات: برای حالت پیوسته اثبات می‌شود. برای حالت گسسته کافی است بجای انتگرال، $\sum$ قرار دهید.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{0}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_{0}^{a} x f_X(x)\, dx + \int_{a}^{\infty} x f_X(x)\, dx \\ &\geq \int_{a}^{\infty} x f_X(x)\, dx \geq \int_{a}^{\infty} a f_X(x)\, dx = a \int_{a}^{\infty} f_X(x)\, dx = aP(X \geq a) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(X) \geq aP(X \geq a) \Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

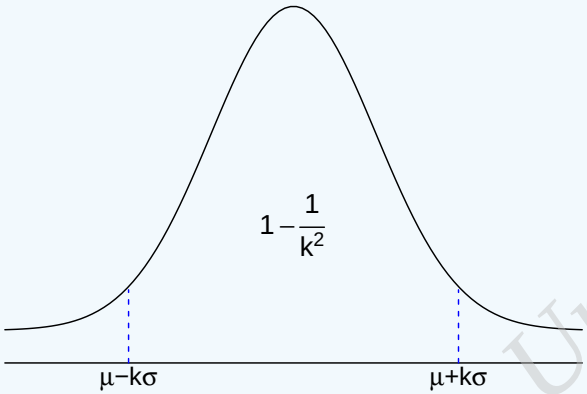
نامساوی چبیشف:

اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، آن‌گاه برای هر مقدار مثبت k داریم

$$P\left(|X-\mu| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2}, \qquad \text{کران بالا}$$

$$P\left(|X-\mu| < k\sigma\right) \geq 1-\frac{1}{k^2}, \qquad \text{کران پایین}$$

بر اساس شکل، نامساوی دوم بیانگر این است که احتمال این‌که متغیر تصادفی X درون فاصله‌ای قرار گیرد که از μ به اندازه $k\sigma$ انحراف داشته باشد، حداقل $1-\frac{1}{k^2}$ می باشد.



اثبات: با استفاده از نامساوی مارکف داریم

$$\begin{aligned} P\left(|X-\mu| \geq k\sigma\right) &= P\left((X-\mu)^2 \geq k^2\sigma^2\right) \\ &\leq \frac{E(X-\mu)^2}{k^2\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

Univiversity of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

مثال ۲.

اگر تابع چگالی X به صورت زیر باشد،

$$f_X(x) = ۳x^۲, \quad ۰ < x < ۱$$

الف) با استفاده از نامساوی چبیشف یک کران پایین برای $P(\frac{۱}{۲} < X < ۱)$ بیابید.

ب) کران فوق را با مقدار دقیق این احتمال مقایسه کنید.

پاسخ: الف)

$$\mu = E(X) = \int_۰^۱ ۳x^۳ dx = \frac{۳}{۴}x^۴\Big|_۰^۱ = \frac{۳}{۴}$$

$$E(X^۲) = \int_۰^۱ ۳x^۴ dx = \frac{۳}{۵}x^۵\Big|_۰^۱ = \frac{۳}{۵}$$

$$\sigma^۲ = E(X^۲) - E^۲(X) = \frac{۳}{۵} - \frac{۹}{۱۶} = \frac{۳}{۸۰} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{۳}{۸۰}}$$

$$P(\frac{۱}{۲} < X < ۱) = P(\frac{۱}{۲} - \mu < X - \mu < ۱ - \mu) = P(\frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۴} < X - \mu < ۱ - \frac{۳}{۴})$$

$$= P(\frac{-۱}{۴} < X - \mu < \frac{۱}{۴}) = P(|X - \mu| < \frac{۱}{۴})$$

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

ادامه مثال ۲.

از طرفی

$$k\sigma = \frac{۱}{۴} \Rightarrow k\sqrt{\frac{۳}{۸۰}} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{۵}{۳}}$$

$$P(|X-\mu| < \frac{۱}{۴}) \geq ۱ - \frac{۱}{\frac{۵}{۳}} = \frac{۲}{۵}$$

بنابراین

$$P(\frac{۱}{۲} < X < ۱) \geq \frac{۲}{۵}$$

ب)

$$P(\frac{۱}{۲} < X < ۱) = \int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} ۳x^۲ dx = x^۳\Big|_{\frac{۱}{۲}}^{۱} = ۱ - \frac{۱}{۸} = \frac{۷}{۸}$$

Univiversity of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

مثال ۳.

برای متغیر گسسته X فرض کنید:

x	-۲	۰	۲
$f(x)$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$

مطلوبست مقدار دقیق و محاسبه کران $P(|X| \geq ۱)$.

پاسخ:

$$P(|X| \geq ۱) = P(X \geq ۱) + P(X \leq -۱) = P(X = ۲) + P(X = -۲) = \frac{۲}{۸}$$

با استفاده از نامساوی مارکف داریم

$\lvert x\rvert$	۰	۲
$f(x)$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$

$$P(|X| \geq ۱) \leq \frac{E(|X|)}{۱} = E(|X|) = (۲ \times \frac{۱}{۴}) + (۰ \times \frac{۳}{۴}) = \frac{۱}{۲}$$

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

مسأله ۱. متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی زیر است.

$$f(x) = \frac{۱}{۲}, \qquad -۱ < x < ۱$$

$Var(X)$ و $Var(۲X - ۳)$ را محاسبه کنید.

مسأله ۲. در مسأله ۱ کران بالایی برای $P(|X| > \frac{۳}{۴})$ پیدا کنید.

مسأله ۳. اگر واریانس X برابر با صفر باشد $(Var(X) = ۰)$، ثابت کنید $P(X = \mu_X) = ۱$.

مسأله ۴. در قضیه چبیشف، وقتی احتمال اینکه متغیر تصادفی X مقداری بین $\mu - k\sigma$ و $\mu + k\sigma$ اختیار کند

الف) حداقل ۰/۹۵

ب) حداقل ۰/۹۹

است، مقدار k چه خواهد بود؟

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

مسأله ۵. مدت زمان لازم برای تحویل غذا به یک مشتری (دقیقه) در کافه‌ای متغیری تصادفی است که تابع چگالی احتمال آن به‌صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{۱}{۴} e^{-\frac{x}{۴}}, \qquad x > ۰$$

الف) واریانس این متغیر تصادفی را بیابید.

ب) چقدر احتمال دارد یک مشتری بیش از ۵ دقیقه برای تحویل غذا منتظر بماند؟

مسأله ۶. نمره‌هایی را که دانشجویان یک مدرسه عالی در امتحان زبان می‌گیرند می‌توان به‌عنوان متغیری تصادفی با میانگین $\mu = ۴۱$ در نظر گرفت. کران بالایی برای احتمال آنکه دانشجویی نمره‌ای برابر ۶۵ یا بیشتر بگیرد پیدا کنید.

مسأله ۷. تعداد گواهی‌های ازدواج را که در شهری معین در طول ماه معینی صادر شده است می‌توان به‌صورت متغیری تصادفی با $\mu = ۱۲۴$ و $\sigma = ۷/۵$ درنظر گرفت. بنا بر قضیه چبیشف، با چه احتمالی می‌توان ادعا کرد که تعدادی بین ۶۴ و ۱۸۴ گواهی ازدواج در طول ماه مزبور در این شهر صادر شده است؟

مسأله ۸. با مراجعه به مسأله ۵ اگر قضیه چبیشف را با $k = ۱/۵$ به‌کار بریم، درباره‌ی مدت زمانی که برای تحویل غذای یک مشتری در کافه صرف می‌شود چه حکمی می‌توان کرد؟ احتمال متناظر چقدر است؟

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh