## روش محاسبه مستقیم *The Direct Computation Method*

یکی از روشهای حل معادلات انتگرال فردهلم می باشد. از این روش زمانی استفاده میکنیم که هسته(کرنل) انتگرال تباهیده یا جدایی پذیر باشد.

تعریف: هسته انتگرال را جدایی پذیر یا تباهیده گویند هرگاه بتوان آن را بصورت مجموع حاصلضرب دو تابع که هرکدام فقط وابسته به یک متغیر باشد نوشت. بعبارت دیگر $k(x،t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i(t)$.

مثال: توابع $x^2t - t^2x$ ، $x^2 - t^2$ ، $x\, t$ ، $x - t$ همه نمونه هایی از توابع جدایی پذیر هستند.

**بیان روش:**

معادله انتگرال فردهلم مقابل را در نظر بگیرید: $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x،t)\, u(t)dt \qquad (1)$

با فرض جدایی پذیر بودن هسته معادله (۱) را میتوان به فرم زیر نوشت:

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \left( g_i(x) \int_a^b h_i(t)\, u(t)dt \right) \qquad (2)$$

از طرفی واضح هست که $\int_a^b h_i(t)\, u(t)dt$ مقادیر ثابتی خواهند بود. آنها را $\alpha_i$ می نامیم.

$$\alpha_i = \int_a^b h_i(t)\, u(t)dt\,. \qquad 1 \le i \le n \qquad (3)$$

بنابر این رابطه (۲) به شکل زیر در خواهد آمد:

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\alpha_i \qquad (4)$$

اگر مقدار $\alpha_i$ را بدانیم با جانشانی آن در (۴) جواب معادله انتگرال به آسانی حساب خواهد شد.

برای محاسبه $\alpha_i$، (۴) را در معادله (۳) جایگذاری میکنیم. با این کار یک سیستم معادلات جبری حاصل میشود.

با حل آن $\alpha_i$ بدست می آید و بالطبع آن به کمک (۴) جواب معادله انتگرال فردهلم بدست می آید.

**مثال :** $u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 x^2t\, u(t)dt$

دراینجا هسته $k(x،t) = x^2t$ است. با توجه به (۲) آن را به شکل زیر مینویسیم:

$$u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}x^2 \int_0^1 t\, u(t)dt$$

عبارت $\int_0^1 t\, u(t)dt$ را $\alpha$ در نظر میگیریم پس معادله را به شکل زیر بازنویسی میکنیم.

$$u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2$$

برای محاسبه $\alpha$ ، ما $u(x)$ را در رابطه $\alpha = \int_0^1 t\, u(t) dt$ جاگذاری میکنیم .

$$\alpha = \int_0^1 t\,\left(3t + 3t^2 + \frac{1}{2}\alpha t^2\right) dt$$

با حل انتگرال بالا را بدست می اوریم.

$$\alpha = \int_0^1 t\,\left(3t + 3t^2 + \frac{1}{2}\alpha t^2\right) dt = \int_0^1 \ 3t^2 + 3t^3 + \frac{1}{2}\alpha t^3 dt = 1 + \frac{3}{4} + \frac{\alpha}{8} \rightarrow \ \frac{7\alpha}{8} = \frac{7}{4} \rightarrow$$

$$\alpha = 2$$

در نتیجه با جایگذاری $\alpha = 2$ در $u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2$ جواب دقیق معادله مذکور حاصل میشود:

$$u(x) = 3x + 4x^2$$

**تمرین:** جواب انتگرال فردهلم مقابل را به روش مستقیم محاسبه نمایید.

$$u(x) = 11x + 10x^2 + x^3 - \int_0^1 (30xt^2 + 20x^2 t)\ \ u(t)\, dt$$

حل:

$$u(x) = 11x + 10x^2 + x^3 - 30x \int_0^1 t^2\ \ u(t)\, dt - 20x^2 \int_0^1 t\ \ u(t)\, dt$$

$$u(x) = 11x + 10x^2 + x^3 - 30\alpha\ x - 20\ \beta\ x^2$$

که

$$\alpha = \int_0^1 t^2\ \ u(t)\, dt$$

$$\beta = \int_0^1 t\ \ u(t)\, dt$$