همگرایی ها و توزیع های حدی

دانشگاه مازندران

گروه آمار

۱. همگرایی در توزیع یا توزیع حدی

فرض کنید که X_n و X به ترتیب دارای توابع توزیع $F_n(x)$ و $F(x)$ باشد. اگر برای هر x که در آن $F(x)$ پیوسته است، داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

در آن صورت گوییم که X_n دارای توزیع حدی $F(x)$ است.
اصطلاحا گوییم که X_n در توزیع به X همگراست و می نویسیم:

$$X_n \xrightarrow{d} X$$

لذا

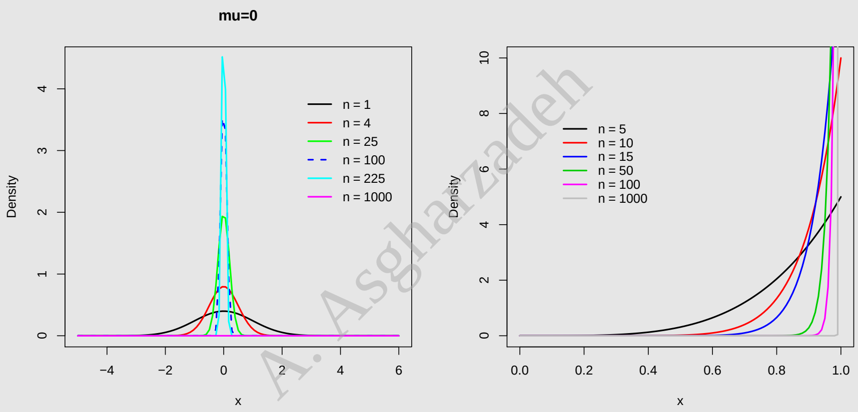
$$X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

برای هر نقطه از پیوستگی F.

مثال ۱. فرض کنید که $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} U(0, 1)$ باشد.
الف) توزیع حدی $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ را به دست آورید.

مثال ۱. فرض کنید که $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} U(0, 1)$ باشد.
الف) توزیع حدی $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ را به دست آورید.
ب) توزیع حدی $Z_n = n(1 - Y_n)$ را بیابید.

مثال ۲. فرض کنید که $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(0, \frac{1}{n})$. توزیع حدی $\bar{X}_n$ را بیابید.



شکل: نمودارهای مربوط به مثال ۱ قسمت الف و مثال ۲

قضیه پیوستگی (تابع مولد گشتاور حدی)

اگر $M_n(t)$ و $M(t)$ به ترتیب توابع مولد گشتاور X_n و X باشد، در آن صورت:

$$\lim_{n\to\infty} M_n(t) = M(t) \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$$

مثال ۳. فرض کنید $X_n \sim b(n,\ p)$ باشد. اگر وقتی $n \to \infty$ و $p \to 0$ به گونه ای که $np = \lambda$، که در آن $\lambda > 0$ مقداری ثابت است، نشان دهید که $X_n \xrightarrow{d} X$ که $X \sim Pois(\lambda)$.

مثال ۴. اگر $Z_n \sim \chi^2_{(n)}$ باشد، توزیع حدی $W_n = \frac{Z_n}{n}$ را بیابید.

قضیه پیوستگی (تابع مولد گشتاور حدی)

اگر $M_n(t)$ و $M(t)$ به ترتیب توابع مولد گشتاور X_n و X باشد، در آن صورت:

$$\lim_{n\to\infty} M_n(t) = M(t) \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$$

مثال ۳. فرض کنید $X_n \sim b(n,\ p)$ باشد. اگر وقتی $n \to \infty$ و $p \to 0$ به گونه ای که $np = \lambda$، که در آن $\lambda > 0$ مقداری ثابت است، نشان دهید که $X_n \xrightarrow{d} X$ که $X \sim Pois(\lambda)$.

مثال ۴. اگر $Z_n \sim \chi^2_{(n)}$ باشد، توزیع حدی $W_n = \frac{Z_n}{n}$ را بیابید.

قضیه حد مرکزی $(Central\ Limit\ Theorem)$

اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه دلخواه با میانگین μ، واریانس σ^2 و تابع مولد گشتاور $M(t)$ باشد در آن صورت توزیع حدی

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

نرمال استاندارد است. یعنی اگر $n \to \infty$،

$$Z_n \xrightarrow{d} Z \sim N(0,\ 1)$$

نتایج.

۱.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} N(0,\ 1)$$

۲. برای n های بزرگ

$$\bar{X}_n \simeq N(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}), \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \simeq N(n\mu,\ n\sigma^2)$$

مثال ۵. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $U(0,\ 1)$ باشد و $Y_n =$

نتایج.

۱.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} N(0,\ 1)$$

۲. برای n های بزرگ

$$\bar{X}_n \simeq N(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}), \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \simeq N(n\mu,\ n\sigma^2)$$

مثال ۵. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $U(0,\ 1)$ باشد و $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. توزیع تقریبی Y_n را پیدا کنید.

مثال ۶. اگر $X_1,\ldots,X_{100} \overset{iid}{\sim} Exp(1)$ پیدا کنید احتمال های تقریبی

الف) $P(\sum_{i=1}^{100} X_i > 110)$

ب) $P(101 < \bar{X} < 102)$

همگرایی در احتمال

فرض کنید که دنباله $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ از متغیرهای تصادفی و متغیر تصادفی X در یک فضای احتمال تعریف شده باشند. گوییم X_n در احتمال به X همگراست و می نویسیم:

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \epsilon) = 1, \qquad \forall \epsilon > 0$$

یا

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$$

مثال ۷. (قانون ضعیف اعداد بزرگ) اگر $\bar{X}_n$ میانگین یک نمونه n تایی از جامعه ای با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲ < \infty$ (متناهی) باشد. نشان دهید که:

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

مثال ۸. اگر $X_۱, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu,\ \sigma^۲)$ در آن صورت نشان دهید که:

مثال ۷. (قانون ضعیف اعداد بزرگ) اگر $\bar{X}_n$ میانگین یک نمونه n تایی از جامعه ای با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲ < \infty$ (متناهی) باشد. نشان دهید که:

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

مثال ۸. اگر $X_۱, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu,\ \sigma^۲)$ در آن صورت نشان دهید که:

$$S^۲ \xrightarrow{P} \sigma^۲$$

(با شرط $E(X^۴) < \infty$)

تذکر. در حالت کلی همگرایی در احتمال قوی تر از همگرایی در توزیع است یعنی

$$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$$

$$\not\Leftarrow$$

تذکر. در حالت کلی همگرایی در احتمال قوی تر از همگرایی در توزیع است یعنی

$$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$$
$$\nLeftarrow$$

حالت خاص

اگر $P(X=c)=1$ باشد در آن صورت:

$$X_n \xrightarrow{P} X \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{d} X$$

بعبارت دیگر اگر متغیرهای تصادفی X ثابت باشد در آن صورت همگرایی در احتمال و همگرایی در توزیع معادل اند.

همگرایی تقریبا حتمی یا همگرایی با احتمال یک:

گوییم X_n با احتمال یک یا بطور تقریبا حتمی به X همگراست و می نویسیم:

$$X_n \overset{w.p}{\to} X \qquad (w.p \simeq \ with\ probability\ one)$$

یا

$$X_n \overset{a.s}{\to} X \qquad (a.s \simeq \ almost\ surely)$$

هرگاه داشته باشیم:

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = ۱$$

به عبارت دیگر مجموعه نقاط واگرایی دارای احتمال صفر باشد. یعنی

$$P\Big(\{w \in S \ : \ X_n(w) \ \to \ X(w)\}\Big) = ۱$$

یا

$$P\Big(\{w \in S \ : \ X_n(w) \ \nrightarrow \ X(w)\}\Big) = ۰$$

ارتباط بین همگرایی ها:

$$X_n \stackrel{a.s}{\rightarrow} X \Rightarrow X_n \stackrel{P}{\rightarrow} X \Rightarrow X_n \stackrel{d}{\rightarrow} X$$

$$\text{(نه لزوما)} \not\Leftarrow \quad \text{(نه لزوما)} \not\Leftarrow$$

چند قضیه درباره همگرایی ها

قضیه ۱.

اگر $c \xrightarrow{P} X_n$ و $g(x)$ در c پیوسته باشد، آن گاه

$$g(X_n) \xrightarrow{P} g(c)$$

نتایج.

$$\text{اگر}\quad X_n \xrightarrow{P} c, \quad Y_n \xrightarrow{P} d \quad \text{آن گاه} \Rightarrow$$

۱) $\sqrt{X_n} \xrightarrow{P} \sqrt{c}, \quad P(X_n \geq ۰) = ۱, \quad c \geq ۰$

۲) $\dfrac{۱}{X_n} \xrightarrow{P} \dfrac{۱}{c}, \quad P(X_n \neq ۰) = ۱, \quad c \neq ۰$

۳) $\dfrac{X_n}{c} \xrightarrow{P} ۱, \quad c \neq ۰$

۴) $X_n + Y_n \xrightarrow{P} c + d$

۵) $X_n Y_n \xrightarrow{P} c\, d$

قضیه ۲: (قانون قوی اعداد بزرگ)

اگر X_1 و X_2 و ... دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با $\mu = \mathbb{E}(X_i)$ $i = 1, 2, \ldots$ باشد، آنگاه

$$\bar{X}_n \xrightarrow{a.s} \mu$$

قضیه ۳: قضیه اسلاتسکی

اگر $Y_n \xrightarrow{d} Y$ و $X_n \xrightarrow{P} c$ آن گاه:

۱) $\dfrac{Y_n}{X_n} \xrightarrow{d} \dfrac{Y}{c}$

۲) $X_n Y_n \xrightarrow{d} cY$

۳) $X_n + Y_n \xrightarrow{d} c + Y$

قضیه ۳: قضیه اسلاتسکی

اگر $Y_n \xrightarrow{d} Y$ و $X_n \xrightarrow{P} c$ آن گاه:

$$۱)\ \frac{Y_n}{X_n} \xrightarrow{d} \frac{Y}{c}$$

$$۲)\ X_n Y_n \xrightarrow{d} cY$$

$$۳)\ X_n + Y_n \xrightarrow{d} c + Y$$

مثال ۸. اگر $X_۱, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Bin(۱, p)$ باشد نشان دهید که:

$$\frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{\hat{P}(۱-\hat{P})}{p}}} \xrightarrow{d} N(۰, ۱)$$

مسأله ۱. اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(0, \frac{1}{n})$ نشان دهید که: $Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ دارای توزیع حدی نیست.

تذکر. توزیع حدی ممکن است تباه شده یا یک توزیع معمولی باشد و نیز ممکن است توزیع حدی موجود نباشد.

مسأله ۲. فرض کنید $\bar{X}_n$ میانگین یک نمونه n تایی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد، توزیع حدی $\bar{X}_n$ را بیابید.

مسأله ۳. اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} f(x)$ که

$$f(x) = e^{-(x-\theta)}, \quad x > \theta,$$

و $Y_1 = \min(X_1, \ldots, X_n)$، توزیع حدی $Z_n = n(Y_1 - \theta)$ را بیابید.

مسأله ۴. فرض کنید که Y_n بزرگترین آماره ترتیبی یک نمونه تصادفی n تایی از یک توزیع پیوسته با تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی $f(x) = F'(x)$ باشد. توزیع حدی $Z_n = n[1 - F(Y_n)]$ را بیابید.

مسأله ۵. فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\to} b(1,\ p)$ که در آن p مقدار ثابت است. توزیع حدی $\bar{X}_n$ را بیابید.

مسأله ۶. در مسأله ۵ فرض کنید $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. اگر Z_n فرم استاندارد شده Y_n باشد یعنی:

$$Z_n = \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

از بسط مک لورن e^x نشان دهید که:

الف)

$$M_{Z_n}(t) = [1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{b(n)}{n}]^n$$

که $\lim_{n\to\infty} b(n) = 0$.

ب) $Z_n \xrightarrow{d} Z$ که $Z \sim N(0, 1)$.

راهنمایی.

$$\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{a}{n}\right)^{nb}=e^{ab}$$

$$\lim_{n\to\infty}[۱+\frac{a}{n}+\frac{b(n)}{n}]^{nb}=e^{ab}$$

اگر $n\to\infty$ $b(n)\xrightarrow{a.s}\circ$.

مسأله ۷. اگر $\chi^{۲}(n)\sim X_n$ باشد،از قضیه پیوستگی و مشابه مسأله ۶ نشان دهید که

$$Z_n=\frac{X_n-n}{\sqrt{۲n}}\xrightarrow{d}Z$$

که $Z\sim N(\circ,\ ۱)$.

مسأله ۸. فرض کنید $X_n \sim \Gamma(۱, n)$ و $Z_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{n}}$. نشان دهید که:

$$Z_n \xrightarrow{d} N(۰, ۱).$$

آیا این نتیجه از قضیه حد مرکزی نیز حاصل خواهد شد؟ اگر بلی چگونه؟