کوانتوم پیشرفته ۲

فصل ۴ ـ تقارن در مکانیک کوانتومی

در فصل های گذشته سه عملگر مهم انتقال، تحول زمانی و دوران توضیح داده شده است. در این فصل، سه عملگر گسسته و جدید با عنوان های ۱- پاریته یا وارونی فضا ۲- عملگر انتقال شبکه و ۳- عملگر برگشت زمان تدریس خواهد شد.

اما قبل از ورود به مباحث مربوط به این ۳ عملگر جدید مقدمه‌ای برای بیان ارتباط بین سه مفهوم تقارن، بقاء و تبهگنی گفته می‌شود.

تقارن

تبهگنی ـــــ بقا

ارتباط عمیقی بین این سه مفهوم وجود دارد.

۴ـ۱ـ تقارن، پایستگی، تبهگنی

از فیزیک کلاسیک به یاد داریم که هرگاه در سیستمی تقارن وجود داشته باشد، یک کمیت بقادار (پایسته) وجود خواهد داشت.

فرض کنید سیستمی تحت تأثیر یک تغییر مکان غیر مشخص ناوردا باشد:

اگر $q_i \to q_i + dq_i$ (اگر مختصه i ام q به اندازه dq تغییر کند) و لاگرانژی ناوردا باشد،

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

از معادلات اویلر-لاگرانژ خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)=0 \xrightarrow{\frac{\partial L}{\partial q_i}=0} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0$$

$$\downarrow$$

اگر تعریف کنیم: $P_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

$$\frac{d}{dt}P_i=0$$

$$\downarrow$$

P_i کمیت پایسته (بقادار)

P_i تکانه کانونیک مزدوج با q_i است

ناوردایی لاگرانژی (تقارن) $\longrightarrow$ کمیت بقادار

همچنین، اگر بخواهیم در فرمولبندی هامیلتونی کار کنیم: $H(q_i, P_i)$

در فرمولبندی هامیلتونی تعاریف $\dot{P}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$ و $\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial P_i}$ در اختیار است.

اگر هامیلتونی تحت انتقال مختصات q_i ناوردا باشد، یعنی

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}=0,$$

آنگاه می‌توان با توجه به تعریف های موجود دریافت که:

$$\frac{dP_i}{dt}=\dot{P}_i=0$$

بنابراین از ناوردایی هامیلتونی به کمیت پایسته و بقادار P_i می‌رسیم.

$$\frac{dP_i}{dt} = 0 \longrightarrow P_i = \text{ثابت}$$

ناوردایی هامیلتونی (تقارن) ⟵ کمیت پایستار

حال به مکانیک کوانتومی برمی‌گردیم.

عملگرهای انتقال، دوران و تحول زمانی را با عنوان عملگر تقارن می‌خوانیم.

نکته: اطلاق نام عملگر تقارن لزوماً به معنای وجود تقارن تحت عمل مربوطه نیست.

عملگر تقارن دلخواه است $L = 1 - \frac{i\varepsilon G}{\hbar}$ (G مولد هرمیتی عملگر تقارن L)

(در اینجا L، لاگرانژی نیست)

اگر هامیلتونی H تحت عملگر تقارن دلخواه L ناوردا باشد:

$$L^{+} H L = H$$

$$\downarrow$$

$$HL = LH$$

$$\downarrow$$

$$[L, H] = 0$$

$$\left[1 - \frac{i\varepsilon G}{\hbar}, H\right] = 0$$

$$\underbrace{[1, H]}_{0} - \frac{i\varepsilon}{\hbar}[G, H] = 0$$

$$[G, H] = 0 \longrightarrow \frac{dG}{dt} = 0 \longrightarrow G \text{ ثابت حرکت}$$

مثال:

$$L = T(d\vec{x}) = 1 - \frac{i\,\vec{P}\cdot d\vec{x}}{\hbar}$$ دراینجا عملگر تقارن همان عملگر انتقال است

$$[L, H] = 0 \rightarrow [T(dx), H] = 0 \rightarrow [P, H] = 0 \rightarrow$$ P ثابت حرکت

تکانه خطی ثابت حرکت است

یا P پایسته است

$$L = D(\hat{n}, \phi) = 1 - \frac{i\,J\cdot n\phi}{\hbar}$$

$$[L, H] = 0 \rightarrow [D(\hat{n}, \phi), H] = 0 \rightarrow [J, H] = 0 \rightarrow$$ J ثابت حرکت

ناوردایی هامیلتونی تقارن $\longrightarrow$ وجود کمیت بقادار

بیان دیگر:

فرض کنید سیستم در $t = t_0$، در حالت $|g'\rangle$ باشد که $|g'\rangle$ ویژه کت عملگر G است.

$$G|g'\rangle = g'|g'\rangle$$

در زمان های بعدی، کت حالت تحت تاثیر عملگر تحول زمانی قرار می گیرد:

$$|g', t\rangle = U(t, t_0)|g'\rangle$$

$$G|g', t\rangle = G\,U(t, t_0)|g'\rangle$$

$$G|g', t\rangle = U(t, t_0)\underbrace{G|g'\rangle}_{g'|g'\rangle}$$

$$G\,\underbrace{U(t, t_0)|g'\rangle} = g'\,\underbrace{U(t, t_0)|g'\rangle} \longrightarrow$$ معادله ویژه مقداری $\longrightarrow$

به عبارت دیگر، وقتی یک بار یک کت حالت، ویژه حالت G با ویژه مقدار g باشد،

در همه زمانهای دیگر نیز ویژه‌کت G با همان ویژه مقدار g باقی می‌ماند.

توجه: تا به حال ارتباط بین تقارن و بقا گفته شده است.

تبهگنی — حال می‌خواهیم رابطه بین مفهوم تبهگنی و تقارن را روشن کنیم.

فرض کنید عملگر تقارن L در اختیار باشد و هامیلتونی تحت L ناوردا باشد یعنی

تقارن داشته باشد: $[H, L] = 0$

اگر $|n\rangle$ ویژه‌کت هامیلتونی (ویژه‌کت انرژی) با ویژه مقدار E_n باشد، یعنی

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle$$

می‌توانیم داشته باشیم

$$[H,L]=0 \rightarrow HL=LH \longrightarrow HL|n\rangle = L\underbrace{H|n\rangle}_{E_n|n\rangle} \longrightarrow HL|n\rangle = E_n L|n\rangle$$

معادله ویژه مقداری

$L|n\rangle$ هم ویژه‌کت انرژی با همان ویژه مقدار انرژی E_n است.

اگر $|n\rangle$ و $L|n\rangle$ معرف دو حالت فیزیکی مختلف باشند، آنگاه تبهگنی در سیستم وجود دارد.

مثال: در پتانسیل های مرکزی $V(r)$، داریم:

$$[D(R), H] = 0$$

$$\downarrow$$

$$[J, H] = 0$$

$$\downarrow$$

$$[J^2, H] = 0$$

سه عملگر H و J و J^2 باهم جابه‌جا می‌شوند و ویژه‌کت‌های همزمان (مشترک) دارند.

ویژه‌کت همزمان این سه عملگر را به صورت $|n,J,m\rangle$ نشان می‌دهیم

$$H|n,J,m\rangle = E_n |n,J,m\rangle$$

$$H\,D(R)|n,J,m\rangle = D(R)\,\underbrace{H|n,J,m\rangle}_{E_n|n,J,m\rangle}$$

$$H\,D(R)|n,J,m\rangle = E_n\, D(R)|n,J,m\rangle \longrightarrow$$ معادله ویژه‌مقداری

$|n,J,m\rangle$ و $D(R)|n,J,m\rangle$ هم‌انرژی‌اند.

از طرف دیگر،

$$D(R)|n,J,m\rangle = \sum_{m'} |n,J,m'\rangle \underbrace{\langle n,J,m'|D(R)|n,J,m\rangle}_{D^J_{m'm}(R)}$$

$$= \sum_{m'} D^J_{m'm}(R)\,|n,J,m'\rangle =$$ ترکیب خطی از $(2J+1)$ تا $|n,J,m'\rangle$

برای آنکه $D(R)|n,J,m\rangle$ ویژه‌کت انرژی با ویژه‌مقدار انرژی E_n باشد، لازم است که همه $2J+1$ تا ویژه‌کت $|n,J,m'\rangle$ خودشان باهم دیگر، هم‌انرژی باشند، تبهگنی داریم.

$[D(R),H]=0$ تقارن $\longrightarrow$ تبهگنی

نکته: می‌دانیم $[H,J]=0 \leftarrow [H,J_{\pm}]=0$.

اگر $|n,j,m\rangle$ ای بیابیم که ویژه‌کت هامیلتونی باشد، یعنی اگر $H|n,j,m\rangle = E_n|n,j,m\rangle$

آنگاه با اعمال $J_{\pm}$ روی $|n,j,m\rangle$ می‌توان $2j+1$ تا $|n,j,m\rangle$ هم‌انرژی

پیدا کرد. (تبهگنی دیده می‌شود)

تا به حال، کاملاً آشکار شده است که مفاهیم تقارن، تبهگنی و بقا

دارای ارتباط عمیقی می‌باشند.