حال برای درک بهتر پارامتر θ ، تابع موج $\langle x'|\theta\rangle$ را بررسی می نمائیم.

$$\langle x'|T(a)|\theta\rangle = \int dx'' \langle x'|T(a)|x''\rangle\langle x''|\theta\rangle =$$

$$= \int dx'' \underbrace{\langle x'|x''+a\rangle}_{\delta(x'-(x''+a))}\langle x''|\theta\rangle =$$

$$= \int dx'' \, \delta(x'-(x''+a)) \langle x''|\theta\rangle =$$

$$= \langle x'-a|\theta\rangle$$

$$\langle x'|T(a)|\theta\rangle = \langle x'-a|\theta\rangle \qquad \mathrm{I}$$

از طرف دیگر: $\langle x'|T(a)|\theta\rangle = \langle x'|T(a)\left|\left(\sum e^{in\theta}|n\rangle\right)\right.$

$$= \langle x'|\left(\sum e^{in\theta}|n+1\rangle\right)$$

$$= e^{-i\theta}\langle x'|\theta\rangle \qquad \mathrm{II}$$

توابع موج در چاه های مختلف به اندازه فازها باهم اختلاف دارند.

$$\mathrm{I},\mathrm{II} \Longrightarrow \boxed{\langle x'-a|\theta\rangle = e^{-i\theta}\langle x'|\theta\rangle} \qquad \mathrm{III}$$

$\Downarrow$

باید حل شود

$$\langle x'-a|\theta\rangle = \langle x'|\theta\rangle e^{-i\theta} \xrightarrow{\text{حل}} \langle x'|\theta\rangle = e^{ikx'} u_k(x')$$

$\theta = ka$ و $u_k(x')$ تابعی تناوبی از a است.

اگر $\theta = ka$ و $u_k(x') = u_k(x'+a)$ باشد آنگاه $\langle x'|\theta\rangle = e^{ikx'} u_k(x')$ جواب معادله III است.

برای بررسی درستی این حل می‌توانید آن را در III قرار دهید و درستی آن را مشاهده کنید.

قضیه بلاخ: موج $|\theta\rangle$ که ویژه‌کت $T(a)$ است را می‌توان به صورت حاصلضرب یک موج تخت $e^{ikx'}$ و یک تابع تناوبی با دوره تناوب a نوشت.

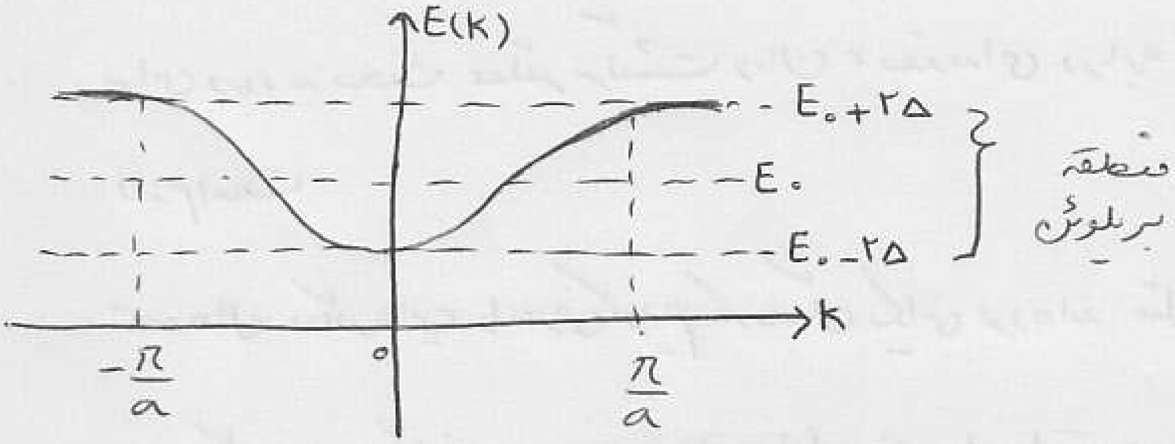
یادآوری: $|\theta\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}|n\rangle$

$$H|\theta\rangle = H\sum e^{in\theta}|n\rangle = (E_0 - 2\Delta\cos\theta)\sum e^{in\theta}|n\rangle$$

$$H|\theta\rangle = (E_0 - 2\Delta\cos\theta)|\theta\rangle$$

تابع موج، یک موج $\langle x'|\theta\rangle = e^{ikx'} u_k(x')$ تخت است که با بردار موج منتشر شونده k مشخص می‌شود و با یک تابع تناوبی همراه است.

وقتی θ از $\pi-$ تا $\pi+$ تغییر می‌کند، بردار موج K از $K=-\frac{\pi}{a}$ تا $K=\frac{\pi}{a}$ تغییر می‌کند



پتانسیل متناوب: ایجاد نوارهای پیوسته انرژی؛ ایجاد گاف انرژی

تبهگنی بی‌نهایت گانه از بین رفته است و یک نوار پیوسته انرژی بین $E_0-2\Delta$ و $E_0+2\Delta$ تشکیل شده است که به آن منطقه بریلوئن گویند.

تا به حال فقط یک ذره را در پتانسیل تناوبی در نظر گرفتیم. اگر تعداد زیادی الکترون تحت پتانسیل تناوبی قرار گیرد، باید به اصل طرد پائولی توجه کنیم. اساسی‌ترین ویژگی‌های فلزات، نیم‌رساناها و نظیر آنها نتایجی از ناوردایی انتقال و اصل طرد پائولی است.

۴-۴ تقارن گسسته برگشت زمان

برای ورود به بحث عملگر برگشت زمان، مقدمه‌ای درباره عملگرهای پاد یکانی لازم است.

تا به حال عملگرهایی را معرفی کردیم که همگی یکانی بوده‌اند مثل پاریته، انتقال و دوران

در عملگرهای یکانی، ضرب‌های داخلی ناوردا باقی می‌مانند:

عملگر یکانی U را در نظر بگیرید $(U^{+}U=1)$

$$\underset{\text{کت اولیه}}{|\alpha\rangle} \xrightarrow{\text{تحت عملگر یکانی } U} U|\alpha\rangle = |\tilde{\alpha}\rangle$$

$$\underset{\text{کت اولیه}}{|\beta\rangle} \longrightarrow U|\beta\rangle = |\tilde{\beta}\rangle$$

$$\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\beta|U^{+}U|\alpha\rangle \underset{UU^{+}=1}{=\!=} \langle\beta|\alpha\rangle$$

تحت عمل U، ضرب داخلی ناوردا مانده است.

حال شرطی را در نظر می‌گیریم که کمتر محدودکننده باشد:

$$\boxed{|\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle| = |\langle\beta|\alpha\rangle|} \xRightarrow{\text{۲ حالت ممکن است}} \begin{cases} \langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle \\ \text{یا} \\ \langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^{*} = \langle\alpha|\beta\rangle \end{cases}$$

مربوط به همان عملگرهای یکانی است.

این حالت جدید است و قابل بررسی می‌باشد

تعریف: عملگر پادیکانی Θ را در نظر بگیرید به طوری که

$$|\alpha\rangle \longrightarrow |\tilde{\alpha}\rangle = \Theta|\alpha\rangle$$

$$|\beta\rangle \longrightarrow |\tilde{\beta}\rangle = \Theta|\beta\rangle$$

عملگر Θ را پادیکانی گوییم اگر

$$\begin{cases} ① & \langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^* = \langle\alpha|\beta\rangle \\ ② & \Theta\left[c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle\right] = c_1^*\,\Theta|\alpha\rangle + c_2^*\,\Theta|\beta\rangle \end{cases}$$

$\leftarrow$ Θ پادخطی است

شرط ② به تنهایی بیانگر عملگر پادخطی Θ است.

شرط ① و ② با هم تعریف عملگر پادیکانی Θ هستند.

حال ادعا می‌کنیم که می‌توان یک عملگر پادیکانی را به صورت زیر بنویسیم:

$$\Theta = UK$$

عملگر یکانی (U)

عملگر مزدوج مختلط (K)

عملگر K هر ضریبی را مزدوج می‌کند

برخی روابط مفید:

$$K(c|\alpha\rangle) = c^* K|\alpha\rangle$$

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$$

$$|\tilde{\alpha}\rangle = K|\alpha\rangle = \sum_{a'} K|a'\rangle \langle a'|\alpha\rangle^*$$

$$= \sum_{a'} \langle a'|\alpha\rangle^* K|a'\rangle$$

$$= \sum_{a'} \langle a'|\alpha\rangle^* |a'\rangle$$

عملگر K روی کت های پایه اثر کند در آن تغییری ایجاد نمی کند ، البته اگر آن ویژه کت ها در فضای نمایش خود نوشته شوند.

در نمایش کت های پایه در فضای نمایش پایه های دیگر ، اثر K روی آنها تغییر می کند.

$$\Theta\left[c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle\right] = UK\left[c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle\right] =$$

$$= c_1^* UK|\alpha\rangle + c_2^* UK|\beta\rangle =$$

$$= c_1^* \Theta|\alpha\rangle + c_2^* \Theta|\beta\rangle$$

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \Theta|\alpha\rangle = UK\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle = \sum_{a'} \langle a'|\alpha\rangle^* UK|a'\rangle =$$

$$= \sum_{a'} \langle a'|\alpha\rangle^* U|a'\rangle = \sum_{a'} \langle \alpha|a'\rangle U|a'\rangle$$

$$|\tilde{\beta}\rangle = \sum_{a'} \langle \beta|a'\rangle U|a'\rangle$$

$$\langle\tilde{\alpha}| = \sum_{a'} \langle a'|\alpha\rangle \langle a'|U^{+}$$

$$\langle\tilde{\beta}| = \sum_{a'} \langle a'|\beta\rangle \langle a'|U^{+}$$

$$\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \sum_{a'}\sum_{a''} \langle a''|\beta\rangle \langle a''|\underbrace{U^{+}U}_{1}|a'\rangle \langle\alpha|a'\rangle$$

$$= \sum_{a'}\sum_{a''} \langle a''|\beta\rangle\, \delta(a''-a')\, \langle\alpha|a'\rangle$$

$$= \sum_{a'} \langle a'|\beta\rangle \langle\alpha|a'\rangle = \sum_{a'} \langle\alpha|a'\rangle\langle a'|\beta\rangle$$

$$= \langle\alpha|\beta\rangle$$

آشنايي با عملگر پادیکانی در مطالعه عملگر برگشت زمان اهمیت دارد.

تا به حال متوجه شده‌ایم که می‌توانیم یک عملگر پادیکانی را از ترکیب یک عملگر یکانی و یک عملگر مزدوج مختلط کننده بنویسیم.

$$\Theta = UK$$

حال به سراغ آشنايي با عملگر برگشت زمان می‌رویم.