صفحه ۳۱

اثبات: باتوجه به قضیه ۲.۷ و با فرض اینکه $x\in K$، همسایگی از x مانند W_x وجود دارد، بطوریکه برای بعضی از $1\le i\le n$، $\overline{W_x}\subset V_i$. چون K مجموعه فشرده‌ای است نقاط $x_1, x_2, \dots, x_m$ از K وجود دارد، بطوریکه

$$K\subset W_{x_1}\cup W_{x_2}\cup\cdots\cup W_{x_m}$$

حال H_i را برابر اتحاد $\overline{W_{x_j}}$ هایی می‌گیریم که در V_i قرار دارند. بنابراین H_i فشرده است. زیرا هر یک از $\overline{W_{x_j}}$ فشرده هستند. باتوجه به لم اوریسون ۲.۱۲، می‌توان توابع g_i را بدست آورد که $H_i \prec g_i \prec V_i$. تعریف می‌کنیم

$$h_1=g_1,\quad h_2=(1-g_1)g_2,\ \dots,\ h_n=(1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_{n-1})g_n.$$

چون هر یک از $0\le g_i\le 1$، پس $0\le h_i\le 1$ و بدلیل اینکه g_iها، تکیه‌گاه آنها در V_i قرار دارد و این تکیه‌گاه فشرده است، بنابراین h_i نیز دارای تکیه‌گاه فشرده در V_i است. زیرا اگر g به بستار $\{x;\ h_i(x)\neq 0\}$ تعلق داشته باشد، بدان معنی است که به بستار مجموعه $\{x;\ g_i(x)\neq 0\}$ تعلق دارد، یعنی $g\in V_i$. می‌توان با استقراء نتیجه گرفت که

$$h_1+h_2+\cdots+h_n=1-(1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_n)$$

حال باتوجه به اینکه $K\subset H_1\cup H_2\cup\cdots\cup H_n$، بنابراین برای هر $x\in K$، $1\le i\le n$ هست که $x\in H_i$ پس $g_i(x)=1$ و در نتیجه $h_1(x)+h_2(x)+\cdots+h_n(x)=1$، پس حکم قضیه ثابت می‌شود.

قضیه بعدی تحت عنوان قضیه نمایش ریس (Riesz) قضیه مهمی است و فرآیند اثبات آن هم طولانی است، به جهت اهمیت آن فقط به ارائه صورت قضیه می‌پردازیم.

قضیه ۲.۱۴. فرض کنید X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده و Λ تابعک خطی مثبت بر فضای $C_c(X)$ باشند. دراین صورت یک σ-جبر $\mathfrak{M}$ شامل تمام مجموعه‌های برل در X و بعلاوه یک اندازه مثبت و یکتای μ موجود می‌باشند و روابط زیر را هم داریم

a) برای هر $f\in C_c(X)$، $\Lambda f=\int_X f\,d\mu$،

b) برای هر زیرمجموعه فشرده K از X، $\mu(K)<\infty$،

c) برای هر $E\in\mathfrak{M}$ داریم

$$\mu(E)=\inf\{\mu(V);\ E\subset V,\ V\ \text{باز است}\}\qquad(1)$$

(d) برای هر E باز و یا هر E از $\mathfrak{M}$ که $\mu(E)<\infty$، داریم

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) ;\ K\subset E ,\ \text{فشرده } K\} \qquad (۲)$$

(e) برای هر $E\in\mathfrak{M}$ که $\mu(E)=0$ و برای هر $A\subset E$ داریم $\mu(A)=0$ و $A\in\mathfrak{M}$.

خاصیتهای c و d مربوط به منظم بودن اندازه می‌باشد که در قسمتهای بعد توضیح آن ارائه می‌شود. بند e نیز نشان می‌دهد، که جبر $\mathfrak{M}$، μ-کامل است.

منظم بودن اندازه‌های بُرل

۱۵.۲ تعریف منظم بودن.

هرگاه μ یک اندازه مثبت بُرل برای σ-جبر از مجموعه‌های بُرل در یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف X باشد و زیر مجموعه $E\subset X$ یک مجموعه بُرل فرض شود، گوییم E منظم خارجی است هرگاه E خاصیت (c) در قضیه نمایش ریس را داشته باشد و اگر E در شرایط قسمت (d) در قضیه فوق را صدق کند گوییم E منظم داخلی است.

هرگاه برای هر زیر مجموعه بُرل خاصیت منظم بودن داخلی و خارجی را داشته باشیم در اینصورت گوییم اندازه مثبت بُرل μ خاصیت منظم بودن را دارا می‌باشد یعنی μ منظم است.

تعریف ۱۶.۲. یک مجموعه E از یک فضای توپولوژی را σ-فشرده می‌نامیم، اگر E اجتماع شمارائی از مجموعه‌های فشرده باشد. و یک مجموعه E از یک فضای اندازه (نسبت به اندازه μ) یک σ-محدود است، هرگاه E اجتماع شمارائی از مجموعه‌ E_i های باشد که $\mu(E_i)<\infty$.

به عنوان مثال می‌دانیم که مجموعه‌های فشرده، دارای اندازه متناهی هستند (قسمت (b) قضیه قبل) پس هر مجموعه σ-فشرده، می‌تواند یک مجموعه σ-محدود باشد.

قضیه زیر نیز درمورد منظم بودن ارائه شده و بدون اثبات خواهد بود. (اثبات آن در کتاب آنالیز حقیقی و مختلط رودین ترجمه دلیل)

قضیه ۱۷.۲. فرض کنید X یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف σ-فشرده باشد. اگر $\mathfrak{M}$ و μ توصیف شده در قضیه ۱۴.۲ باشند در اینصورت داریم:

(a) اگر $E\in\mathfrak{M}$ و $\epsilon>0$ فرض شود، در اینصورت مجموعه بسته F و باز V هستند که $F\subset E\subset V$ و $\mu(V-F)<\epsilon$.

(b) μ اندازه بُرل منظم است.

(۲) اگر $E\in\mathfrak{M}$، در این صورت مجموعه‌های A و B چنان موجود هستند که A یک F_σ و B یک G_δ است که $A\subset E\subset B$ و $\mu(B-A)=0$،

در قضیه زیر راه ساده‌تری برای منظم بودن تمام اندازه‌های برل مثبت بر X ارائه می‌شود

قضیه ۲.۱۸. فرض کنید X یک فضای موضعاً فشرده هاسدورف که هر مجموعه باز آن خاصیت σ-فشردگی را دارا است. حال فرض کنید λ یک اندازه برل مثبت روی X است که برای هر مجموعه فشرده K، داریم $\lambda(K)<\infty$. در این صورت λ منظم است.

اثبات. فرض کنید $\Lambda f=\int_X f\,d\lambda$ برای $f\in C_c(X)$. چون فرض شده که برای هر مجموعه فشرده K، $\lambda(K)<\infty$، پس Λ یک تابعک خطی مثبت روی $C_c(X)$ است. پس با توجه به قضیه ۲.۱۷ اندازه μ یک اندازه منظم خواهد بود و برای هر $f\in C_c(X)$ داریم

$$\int_X f\,d\lambda=\int_X f\,d\mu \qquad (3)$$

حال می‌خواهیم نشان دهیم $\mu=\lambda$ که از این طریق ثابت می‌گردد λ منظم هست و حکم حاصل می‌گردد. برای این موضوع فرض کنید V یک مجموعه باز در X باشد، در این صورت $V=\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i$ که K_iها مجموعه‌های فشرده هستند. بوسیله لم ۲.۱۲ (لم اوریسون) می‌توانیم f_i های از $C_c(X)$ داشته باشیم که $K_i\prec f_i\prec V$. فرض کنید

$$g_n=\max(f_1,f_2,\dots,f_n)$$

در این صورت چون هر یک از f_i ها در V دارای تکیه‌گاه فشرده می‌باشند، پس g_n نیز چنین هست. اگر $x\in V$، در این صورت x متعلق به یکی از K_i ها است. چون $f_i(x)=1$ پس $g_n(x)=1$ برای n های به قدر کافی بزرگ حاصل می‌شود. یعنی $\lim_{n\to\infty}g_n=\chi_V$. با استفاده از قضیه یکنوای لبگ

$$\lambda(V)=\int_X\chi_V\,d\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_X g_n\,d\lambda\underset{\text{طبق رابطه (3)}}{=}\lim_{n\to\infty}\int_X g_n\,d\mu=\mu(V) \qquad (4)$$

حال E را مجموعه برل در X باشد. طبق قضیه ۲.۱۷ برای هر $\varepsilon>0$ مجموعه‌های بسته F و باز V موجود هستند بطوری که $F\subset E\subset V$ و $\mu(V-F)<\varepsilon$. و چون $V-F$ مجموعه باز هست، پس $\lambda(V-F)<\varepsilon$. روابط زیر را داریم

$$\mu(V)\le\mu(F)+\varepsilon\le\mu(E)+\varepsilon\Rightarrow\lambda(V)\le\lambda(E)+\varepsilon$$

$$\Rightarrow\lambda(E)\le\lambda(V)\le\mu(E)+\varepsilon\Rightarrow\lambda(E)-\mu(E)<\varepsilon$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که $-\varepsilon<\lambda(E)-\mu(E)$. در نتیجه $|\lambda(E)-\mu(E)|<\varepsilon$ و چون ε دلخواه است پس $\mu=\lambda$

۱۹.۲ فضای اقلیدسی و اندازه لبگ

Euclidean Spaces and Lebesgue Measure

تا این قسمت همه بحث ها و قضیه ها که در فضای توپولوژی ها کردیم موضعاً فشرده بود. ولی در این بخش می خواهیم مطالب را با فضای اقلیدسی R^k لینک کنیم. البته می دانیم که این فضا یک فضای توپولوژی ها سدوف موضعاً فشرده با متر معمولی است. ابتدا تعاریفی که لازم هست در این بخش آورده شود، توضیح می دهیم. فضای اقلیدسی R^k، مجموعه نقاطی مانند $x=(x_1,\dots,x_k)$ است، بطوریکه همه x_i ها حقیقی هستند. اعمال جبری زیر را داریم

$$x=(x_1,x_2,\dots,x_k)\ ,\quad y=(y_1,y_2,\dots,y_k)$$

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_k+y_k)\ ,\quad \alpha x=(\alpha x_1,\dots,\alpha x_k)$$

که α یک اسکالر می باشد R^k یک فضای برداری روی میدان اسکالر R است و ضرب زیر را داریم

ضرب داخلی $\quad x\cdot y=\sum x_i y_i\ ,\quad |x|=(x\cdot x)^{1/2}$

و نامساوی شوارتز $|x\cdot y|\le |x||y|$ و نامساوی مثلث زیر را داریم

$$|x-z|\le |x-y|+|y-z|\ ,\quad \forall x,y,z\in R^k$$

با متر $d(x,y)=|x-y|$، می توان برای R^k فضای متریک ساخت. که در واقع متر معمولی است. اگر $x\in R^k$، $E\subset R^k$، انتقال E بوسیله عنصر x را با مجموعه $E+x=\{y+x, x\in E\}$ تعریف می کنیم، مجموعه $w=\{x\ ,\ a_i<x_i<b_i, i=1,\dots,k\}$ را یک حجره k بعدی گفته می شود البته نامساوی اکید را با $\le$ تعویض کنیم نیز به همین نام است. حجم این حجره را با عبارت زیر تعریف می کنیم

$$vol(W)=\prod_{i=1}^{k}(b_i-a_i)\qquad (1)$$

قضیه زیر را بدون اثبات در خصوص (1) و اندازه لبگ ارائه می دهیم.

قضیه ۲۰.۲ یک اندازه مثبت و کامل m بر یک جبر $\mathfrak{M}$ از R^k وجود دارد که دارای خاصیتهای زیر می باشد

(a) برای هر حجره k بعدی w داریم $vol(W)=m(W)$،

(b) σ-جبر $\mathfrak{M}$ شامل مجموعه های برل در R^k است و $E\in\mathfrak{M}$ اگر و تنها اگر مجموعه های A و B

که بترتیب F_σ و G_δ هستند وجود دارند، بطوریکه $A\subset E\subset B$ ، $m(B-A)=0$ و

همچنین اندازه m یک اندازه منظم است.

(c) اندازه m نسبت به انتقال پایا است یعنی برای هر $E\in\mathfrak{M}$ و برای هر $x\in R^k$، داریم $m(E+x)=m(E)$،

(d) اگر اندازه μ یک اندازه پایا مثبت بورل دیگری روی R^k باشد که برای هر زیرمجموعه فشرده K، $\mu(K)<\infty$ گردد، در این صورت عدد ثابت c چنان وجود دارد که $\mu(E)=c\,m(E)$ برای هر مجموعه بورل $E\subset R^k$.

تذکر: اعضای σ-جبر $\mathfrak{M}$ را زیرمجموعه های اندازه پذیر لبگ می نامیم و اندازه m را اندازه لبگ روی R^k نام دارد و آن را با m_k نیز نشان می دهند.

(e) برای هر تبدیل خطی T از R^k به R^k (T عملگر است) متناظر آن عدد $\Delta(T)$ نظیر می شود بطوریکه برای هر $E\in\mathfrak{M}$،

$$m(T(E))=\Delta(T)\,m(E)$$

بویژه اینکه اگر T دورانی باشد، داریم $m(T(E))=m(E)$.

تذکر: اگر $T:R^k\to R^k$، توصیف می کنیم $\Delta(T)=|\det T|$ که در اینجا $\det T$ یعنی دترمینان ماتریس T است.

تبصره ۲۱.۲ هرگاه m اندازه لبگ روی R^k باشد، مرسوم است که به جای $L^1(m)$ عبارت $L^1(R^k)$ بنویسیم.

هرگاه $k=1$ و I مجموعه ای به صورت (a,b) یا $[a,b]$ و یا به صورت $(a,b]$ باشد و فرض کنیم $f\in L^1(I)$، بدین معنی است $\int_I f\,dm$ متناهی است و معمولاً مرسوم هست که به جای این انتگرال از علامت $\int_a^b f(x)\,dx$ قرار دهیم. چون اندازه لبگ تک نقطه ای برابر صفر هست، هر سه انتگرال از لحاظ مقدار تفاوتی ندارند.

هرگاه Q به عنوان گروه جمعی از اعداد گویا در نظر گرفته شود، گوئیم دو عدد حقیقی x و y با هم هم ارز هستند و با علامت $x\sim y$ نشان می دهیم، هرگاه $y-x\in Q$. این رابطه یک رابطه هم ارزی است و هر کلاس هم ارزی یک هم مجموعه از Q در R است.

$$\forall x\in R;\quad Q+x=\{y+x;\ y\in Q\}$$

حال فرض کنید E یک مجموعه باشد، بطوریکه دقیقاً شامل یک نقطه از هر هم مجموعه های Q در R باشد

با این مجموعه، هر مجموعه $E+r=\{x+r;\ x\in E\}$ دارای دو خاصیت زیر است.

۱) هرگاه $x\in R$ آنگاه برای بعضی از $r\in Q$، داریم $x\in E+r$،

۲) اگر r و s اعداد گویای متفاوتی باشند، آنگاه $(E+r)\cap(E+s)=\emptyset$.

برای اثبات رابطه اول، برای هر $x\in R$ یک $y\in E$ را در نظر می‌گیریم که $x\sim y$،
یعنی $r=x-y\in Q$، یعنی $x=y+r\in E+r$.

برای اثبات رابطه دوم، فرض کنید $x\in(E+r)\cap(E+s)$. این بدان معنی است که $y,z\in E$ هست که $x=y+r=z+s$، پس $x-r\in E$ و $x-s\in E$. این بدان معنی است که $x-r, x-s\in Q+x$. این موضوع با تعریف E در تناقض است.

قضیه زیر نشان می‌دهد که هر زیرمجموعه‌های R^1 ممکن است اندازه‌پذیر لبگ نباشند.

قضیه ۲.۲۳. اگر $A\subset R^1$ و هر زیرمجموعه A اندازه‌پذیر لبگ باشد آنگاه $m(A)=0$.

اثبات. فرض کنید $t\in Q$ و $A_t=A\cap(E+t)$. طبق فرض قضیه می‌دانیم A_t زیرمجموعه اندازه‌پذیر لبگ است. اگر زیرمجموعه K را زیرمجموعه فشرده از A_t فرض کنیم. و مجموعه H را به صورت زیر تعریف کنیم

$$H=\bigcup_{r\in Q\cap[0,1]} K+r. \qquad (2)$$

در این صورت به دلیل کراندار $K\subset R$، مجموعه H نیز کراندار است. یعنی $m(H)<\infty$. چون $K\subset E+t$ است. در این صورت می‌توان نشان داد که برای $r\in Q\cap[0,1]$ مجموعه‌های $K+r$، مجموعه‌های مجزا هستند، زیرا اگر $t_1,t_2\in Q\cap[0,1]$، در نتیجه

$$(K+t_1)\cap(K+t_2)\subset[(E+t)+t_1]\cap[(E+t)+t_2]=\emptyset$$

بنابراین از رابطه (۲) داریم

$$m(H)=\sum_{r\in Q\cap[0,1]} m(K+r).$$

بنابراین به دلیل پایا بودن اندازه لبگ m داریم $m(H)=\sum_{r\in Q\cap[0,1]} m(K)$. پس سمت چپ مقدار معلوم می‌باشد، پس سمت راست نیز متناهی خواهد بود. بنابراین در صورتی سمت راست مقدار مشخص است که $0=m(K)$ باشد. این موضوع نشان می‌دهد که لازم است $0=m(A_t)$ چون $t\in Q$ دلخواه است بنابراین $m(A)$ برابر مجموع $m(A_t)$ است، پس $0=m(A)$

به فضای کلی موضعاً فشرده و هاسدورف X برمی‌گردیم. می‌دانیم که نقش توابع پیوسته در مطالعه و ساختن اندازه برل و اندازه لبگ، نقش برجسته‌ای است. منطقی است که بین توابع پیوسته از یک سو و توابع اندازه‌پذیر روابط جالبی وجود داشته باشد. یکی از این روابط مهم در قضیه زیر نمایان است.

قضیه لوسین ۲.۲۴. فرض کنید f تابع اندازه‌پذیر مختلط مقدار بر X است که برای هر A ای که $\mu(A)<\infty$، و $x\notin A$، داریم $f(x)=0$. آنگاه برای $\epsilon>0$ عنصر $g\in C_c(X)$ وجود دارد بطوریکه

$$\mu(\{x;\ f(x)\neq g(x)\})<\epsilon$$

بعلاوه می‌توانیم طوری آن را قرار دهیم که $\sup_{x\in X}|g(x)|\leq \sup_{x\in X}|f(x)|$.

این قضیه که از اهمیت بالائی برخوردار هست، بدون اثبات در اینجا آورده‌ایم.

نتیجه قضیه لوسین. فرض کنید شرایط قضیه لوسین برقرار باشد و اینکه $|f|\leq 1$. در این صورت دنباله‌ای مانند $\{g_n\}$ از فضای $C_c(X)$ وجود دارد که $|g_n|\leq 1$ و

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} g_n(x),\qquad a.e \text{ on } X.$$

اثبات. در قضیه قبل با توجه به شرایط داده شده، برای هر $\epsilon>0$ تابع $g\in C_c(X)$ را با شرایط داده شده، داشتیم. حال برای هر $n\in N$، فرض کنید $\epsilon=\frac{1}{n}$، بنابراین متناظر آن تابع $g_n\in C_c(X)$ وجود دارد، بطوریکه $|g_n|\leq 1$ و

$$\mu(\{x;\ f(x)\neq g_n(x)\})<2^{-n}.$$

حال اگر $E_n=\{x;\ f(x)\neq g_n(x)\}$، بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)<1$. در نتیجه طبق قضیه ۱.۴۱ تقریباً هر $x\in X$ در حداکثر تعداد متناهی از E_nها وجود دارند. پس اگر n به قدر کافی بزرگ باشد داریم که $f(x)=g_n(x)$، یعنی $\lim_{n\to\infty} g_n(x)=f(x)$ برای تقریباً هر $x\in X$.

در قضیه زیر برخلاف تقریب توابع اندازه‌پذیر، می‌خواهیم تقریبی از انتگرال ارائه دهیم.

قضیه ۲.۲۵ (ویتالی - کاراتئودوری (The Vitali-Caratheodory

فرض کنید $f\in L^1(\mu)$ و حقیقی مقدار باشد و $\epsilon>0$ را فرض کنید. در این صورت توابع u و v روی X چنان وجود دارد که $u\leq f\leq v$ و u نیم‌پیوسته بالا است و v نیم‌پیوسته پایین هستند. تابع u از بالا کراندار و تابع v از پایین کراندار هستند و داریم

$$\int_X (v-u)\,d\mu<\epsilon.$$

اثبات: ابتدا فرض کنید $f \geq 0$ و f محدود با صفر نباشد. چون f بدلیل اندازه‌پذیرش حد نقطه‌وار دنباله‌های صعودی S_n است. پس f حد مجموع توابع ساده $t_n = S_n - S_{n-1}$ خواهد بود. بنابراین تابع f براساس مجموعه‌های اندازه‌پذیر E_n ها تنظیم می‌شود

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{E_i}(x)$$

حال با $\varepsilon > 0$ داده شده، عدد N ای چنین وجود دارد، بطوریکه $\sum_{N+1}^{\infty} c_i \mu(E_i) < \frac{\varepsilon}{2}$.

زیرا داریم $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(E_i) = \int_X f d\mu$، بدلیل $f \in L^1(\mu)$، یک سری همگراست.

پس برای همه i ها، $\mu(E_i) < \infty$. در این حالت می‌توان بیان کرد که مجموعه‌های فشرده K_i و مجموعه‌های باز V_i وجود دارند، بطوریکه

$$K_i \subset E_i \subset V_i$$

بطوریکه $\mu(V_i - K_i) < \frac{2^{-i-1}}{c_i} \varepsilon$.

حال توابع u و v را توصیف می‌کنیم.

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{V_i} \quad , \quad u = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{K_i}$$

طبق نکاتی که در قسمت توابع نیم پیوسته ارائه کردیم می‌توان نشان داد که u نیم پیوسته بالا و v نیم پیوسته پایین و $u \leq f \leq v$،

$$v - u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{V_i} - \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{K_i} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i (\chi_{V_i} - \chi_{K_i}) + \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i \chi_{K_i}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} c_i (\chi_{V_i} - \chi_{K_i}) + \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i \chi_{E_i}$$

بنابراین داریم

$$\int_X (v-u)\, d\mu \leq \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(V_i - K_i) + \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i \mu(E_i)$$

$$< \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i-1} \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

بنابراین برای توابع $f \geq 0$ ثابت گردید. اگر تابع حقیقی باشد، پس $f = f^+ - f^-$. می‌توان طبق روال اثبات توابع u_1 و v_1 برای f^+ و u_2 و v_2 برای f^- ارائه داد و فرض کرد $u = u_1 - v_2$ و $v = v_1 - u_2$ که u و v به ترتیب نیم پیوسته بالا و نیم پیوسته پایین هستند می‌توان نشان داد که

$$u \leq f \leq v, \qquad \int_X (v-u)\, d\mu < \varepsilon$$

فصل سوم

فضاهای L^p

بسیاری از نامساویهای مشترک و عمومی در آنالیز بر پایه مفاهیم محدب قرار دارند. مفاهیم تحدب در این بخش به عنوان یادآوری می باشد.

تعریف ۳.۱. یک تابع φ که بر بازه (a,b) تعریف می شود بطوریکه $-\infty \le a < b \le \infty$. این تابع را درصورتی محدب می نامیم، هرگاه برای هر $a<x<b$ و هر $a<y<b$ و $0\le\lambda\le1$، نامساوی زیر برقرار باشد.

$$\varphi((1-\lambda)x+\lambda y) \le (1-\lambda)\varphi(x)+\lambda\varphi(y). \quad (1)$$

به عبارت هندسی آنکه $x<t<y$، در این صورت لازم است نقطه $(t,\varphi(t))$ زیر یا روی خط واصل دو نقطه $(x,\varphi(x))$ و $(y,\varphi(y))$ باشد. همچنین نامساوی زیر را داریم

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \le \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}, \quad a<s<t<u<b. \quad (2)$$

براساس قضیه مقدار میانگین برای مشتق و در نظر گرفتن (۲) می توان نشان داد که تابع حقیقی مقدار و مشتق پذیر φ بر فاصله (a,b) محدب است اگر و فقط اگر تابع مشتق φ' تابع صعودی یکنوا باشد. برای مثال تابع نمایی روی $(-\infty,\infty)$ تابع محدب است. قضیه زیر را بدون اثبات می پذیریم.

قضیه ۳.۲. اگر تابع φ بر (a,b) محدب باشد، در این صورت φ بر این بازه پیوسته است.

نکته. توجه شود که در قضیه فوق بازه تعریف باید باز باشد. اگر چنین نباشد، ممکن است نتیجه قضیه برقرار نگردد. به عنوان مثال تابع φ را بر $[0,1]$ به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,1)\\ 1 & x=1.\end{cases}$$

این تابع در خاصیت (۱) صدق می کند، یعنی محدب است ولی پیوسته نیست.

قضیه ۳.۳. (نامساوی ینسن Jensen's Ineq.) فرض کنیم μ یک اندازه مثبت روی σ-جبر $\mathfrak{M}$ از مجموعه Ω باشد، بطوریکه $\mu(\Omega)=1$. اگر f تابع حقیقی در $L^1(\mu)$ و برای هر $x\in\Omega$، نامساوی $a<f(x)<b$ را داشته باشیم و اگر φ روی (a,b) محدب فرض شود آنگاه داریم

$$\varphi\left(\int_\Omega f\,d\mu\right) \le \int_\Omega (\varphi\circ f)\,d\mu \quad (3)$$

برهان. قرار دهید $t=\int_\Omega f\,d\mu$ آنگاه $a<t<b$ است زیرا

$$a<f(x)<b \Rightarrow \int_\Omega a\,d\mu < \int_\Omega f\,d\mu < \int_\Omega b\,d\mu \Rightarrow a\mu(\Omega)<t<b\mu(\Omega)$$

و چون فرض شده $\mu(\Omega)=1$ است، لذا می‌توان نتیجه گرفت که $a<t<b$.

هرگاه فرض کنیم مقدار سوپرمم کسر $\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}$ بر بازه $a<s<t$ برابر β گردد، در این صورت این مقدار نمی‌تواند با توجه به رابطه (۲) برای $u\in(t,b)$ از کسر $\frac{\varphi(u)-\varphi(s)}{u-t}$ بزرگتر باشد، پس

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}\leqslant\beta\leqslant\frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}, \quad u\in(t,b),\ s\in(a,t)$$

$$\varphi(s)\geqslant\varphi(t)+\beta(s-t),\ \forall s\in(a,t), \quad \varphi(u)\geqslant\varphi(t)+\beta(u-t),\ u\in(t,b)$$

از این دو عبارت می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $x\in\Omega$، در هر دو عبارت مقدار $f(x)$ قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\varphi(f(x))-\varphi(t)-\beta(f(x)-t)\geqslant 0 \tag{۴}$$

چون تابع φ پیوسته فرض شد، بنابر قضیه 1.7 (b)، تابع $\varphi\circ f$ اندازه‌پذیر می‌باشد. اگر از طرفین (۴) انتگرال نسبت به اندازه μ بگیریم، داریم

$$\int_\Omega\varphi(f(x))\,d\mu\geqslant\int_\Omega\varphi(t)\,d\mu+\int_\Omega\beta(f(x)-t)\,d\mu$$

در این عبارت مقادیر t، β و $\varphi(t)$ ثابت هستند، پس داریم

$$\int_\Omega(\varphi\circ f)(x)\,d\mu\geqslant\varphi(t)+\beta\left(\int_\Omega f\,d\mu-t\right)$$

چون $t=\int_\Omega f\,d\mu$، داریم

$$\int_\Omega(\varphi\circ f)(x)\,d\mu\geqslant\varphi\left(\int_\Omega f\,d\mu\right)+\beta(0)$$

بنابراین حکم ثابت می‌گردد.

برای مثال فرض کنید $\varphi(x)=e^x$، این تابع محدب است و بنابر قضیه قبل داریم

$$\exp\left(\int_\Omega f\,d\mu\right)\leqslant\int_\Omega e^f\,d\mu \tag{۵}$$

اگر فرض کنید Ω یک مجموعه متناهی و شامل نقاط P_1، P_2، ...، P_n باشد و اگر فرض کنیم برای $i=1,2,\dots,n$، $\mu(\{P_i\})=\frac{1}{n}$ و $f(P_i)=x_i$، در این صورت رابطه (۵) بصورت زیر خواهد