



فصل سوم

مشتق و کاربردهای آن

دانشجوی گرامی

با سلام ،

در این فصل قصد داریم با تعریف مشتق، نحوه محاسبه مشتق ، برخی از قضایای مهم مرتبط با آن و کاربردهای آن در مسایل واقعی آشنا شویم.

از آنجا که احتمال دارد اشکالات تاییپی در این جزوه وجود داشته باشد یا نگارش آن داری اشکالاتی باشد. خوشحال خواهیم شد این اشتباهات را به ما انعکاس دهید.

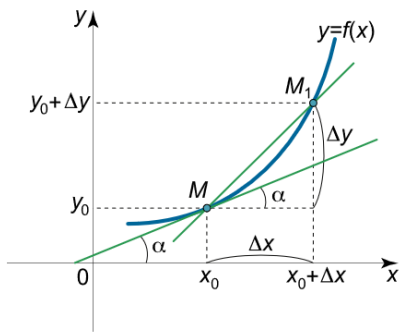
با آرزوی بهترینها

جعفری - منیری

گروه ریاضی دانشگاه مازندران

فروردین 1399





فرض کنید تابع $y = f(x)$ در دست باشد و دو نقطه x_0 و x_1 از قلمرو تابع f را در نظر بگیرید و فرض کنید $M(x_0, f(x_0))$ و $M_1(x_1, f(x_1))$ دو نقطه متناظر با x_0 و $x_1 = x_0 + \Delta x$ روی منحنی $y = f(x)$ باشد نسبت $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ را شیب خط M_1M می نامند

حال اگر نقطه M_1 را تدریجا به نقطه M نزدیک نمائیم ($\Delta x = x_1 - x_0$) تدریجا به صفر نزدیک خواهد شد در وضعیت حدی داریم $\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$. این حد در صورت وجود شیب خط مماس به منحنی $y = f(x)$ در نقطه $M(x_0, f(x_0))$ می باشد که آنرا مشتق تابع f در نقطه x_0 نیز می نامند یعنی: $f'(x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

اگر در آن قرار دهیم $\Delta x = x_1 - x_0$ آنگاه خواهیم داشت:

تعریف: فرض کنیم $y = f(x)$ یک تابع دلخواه و x_0 متعلق به دامنه f باشد، اگر حد $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ وجود داشته باشد می گوییم تابع f در x_0 مشتق پذیر هست و مقدار این حد را مشتق تابع f در $x = x_0$ نامیده و با علامت $f'(x_0)$ نشان می دهیم.

مثال: فرض کنید $f(x) = x^2 + x$ ، مشتق تابع f در $x = 2$ با استفاده از تعریف مشتق بیابید.

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 3 = 5$$

نکته: معمولا برای محاسبه مشتق یک تابع در حالت کلی از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

نکته: معمولا از نمادهای زیر برای نشان دادن مشتق یک تابع استفاده می کنیم:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = D^{(1)}f = Df = D_x f$$

مثال: فرض کنید $f(x) = \sqrt{x}$ ، مشتق این تابع را با استفاده از تعریف مشتق بیابید.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$$

برای محاسبه حد بالا از تکنیکهای رفع ابهام استفاده می کنیم. در اینجا صورت و مخرج را در مزدوج ضرب می کنیم.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال: فرض کنید $f(x) = \sin x$ ، مشتق این تابع را با استفاده از تعریف مشتق بیابید.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin h}{h} = \mathbf{\cos x} \end{aligned}$$

تعریف (مشتق چپ و مشتق راست): تابع f را و $x_0 \in D_f$ در نظر بگیرید. مشتق چپ و راست تابع f در نقطه

$x = x_0$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} f'_+(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} , \\ f'_-(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} . \end{aligned}$$

تذکر: تابع f را در یک نقطه مانند x_0 دارای مشتق هست اگر در این نقطه دارای مشتق راست و مشتق چپ برابر باشد:

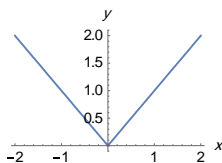
$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$$

نکته: اگر تابع f در نقطه x_0 از بازه (a, b) دارای مشتق باشد، آنگاه در x_0 پیوسته است. زیرا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times (x - x_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x) \times 0 = 0 \end{aligned}$$

یعنی داریم که: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ پس تابع f در x_0 پیوسته است.

اما عکس مطلب بالا در حالت کلی درست نیست. برای مثال تابع $f(x) = |x|$ را در نقطه صفر در نظر بگیرید.



میدانیم که تابع قدر مطلق همواره پیوسته است پس در صفر هم پیوسته است.

اما تابع $f(x) = |x|$ در صفر مشتق پذیر نمی باشد، زیرا:

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

که این یعنی این تابع در نقطه صفر مشتق پذیر نیست.

مثال: تابع $f(x) = |4 - x^2|$ را در نظر بگیرید:

(1) آیا تابع f در نقطه 2 پیوسته است؟

(2) آیا این تابع در نقاط $x = 2$ و $x = -2$ مشتق پذیر است؟

حل: $|4 - x^2| = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

پس :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x \geq 2 \\ 4 - x^2 & -2 < x < 2 \\ x^2 - 4 & x \leq -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 4 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0, \quad f(2) = 0$$

تابع f وقتی $x \rightarrow 2$ دارای حد است. همچنین در این نقطه تابع پیوسته است.

بطور مشابه پیوستگی تابع در $x = -2$ ثابت می شود. حال مشتق پذیری آن را در نقطه $x = -2$ بررسی می کنیم:

$$f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4 - x^2 - 0}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} (2 - x) = 4$$

$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 4 - 0}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x - 2) = -4$$

یعنی تابع f در نقطه $x = -2$ مشتق ندارد به همین ترتیب نشان داده میشود که این تابع در نقطه $x = 2$ هم دارای مشتق نیست.

مثال: مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع f در $x = 2$ مشتق پذیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x < 2 \\ 2x^2 - 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

حل: چون این تابع در نقطه 2 مشتق پذیر است یعنی در این نقطه پیوسته است. پس

شرط پیوستگی $(\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 7, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a + b, f(2) = 7) \Rightarrow 2a + b = 7$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 1 - 7}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x^2 - 4)}{x - 2} = 8$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ax + b - 7}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ax + b - (2a + b)}{x - 2} = a \Rightarrow a = 8$$

$$2a + b = 7 \Rightarrow b = 7 - 2a = 7 - 16 = -9 \Rightarrow b = -9$$

محاسبه جبری مشتقها

برای محاسبه مشتق ترکیب توابع می توانیم از قضایا زیر کمک بگیریم:

قضیه: اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ مشتق پذیر باشند آنگاه داریم:

$$(af)' = af' \quad (\text{الف}) \quad (f \pm g)' = f' \pm g' \quad (\text{ب})$$

$$(fg)' = f'g + g'f \quad (\text{ج}) \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \quad (\text{د})$$

قضیه (قاعده زنجیره ای مشتق): اگر تابع $g(x)$ در نقطه $x = a$ مشتق پذیر باشد و $f(x)$ در $g(a)$ مشتق پذیر باشد آنگاه

$$(f \circ g)'(a) = g'(a)f'(g(a))$$

نکته: در حالت کلی برای مشتق گیری تابع $y(x) = f(g(x))$ از دستور $y'(x) = g'f'(g(x))$ استفاده میکنیم.

مثال: مشتق تابع $y = \sin(x^2 + 3x)$ برابر است با $y' = (2x + 3) \cos(x^2 + 3x)$.

مثال: اگر مشتق $f(x) = x(1-x)(2-x) \cdots (n-x)$ باشد. آنگاه مطلوبست $f'(0)$ ؟

برای حل $g(x) = (1-x)(2-x) \cdots (n-x)$ در نظر میگیریم. پس $f(x) = xg(x)$ حال به کمک قسمت ج قضیه مشتق را محاسبه میکنیم و سپس 0 را جایگذاری میکنیم.

$$f(x) = xg(x) \rightarrow f'(x) = g(x) + xg'(x) \rightarrow f'(0) = g(0) + 0 \times g'(0) = g(0)$$

$$g(0) = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n! \rightarrow f'(x) = n!$$

جدول مشتق بعضی از توابع

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|----------|-------------------|
| x^n | nx^{n-1} |
| e^x | e^x |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\tan x$ | $1 + \tan^2 x$ |
| $\cot x$ | $-(1 + \cot^2 x)$ |
| $\sec x$ | $\sec x \tan x$ |

| $h(u)$ | h' |
|----------|---------------------|
| u^n | $nu'u^{n-1}$ |
| e^u | $u'e^u$ |
| $\sin u$ | $u' \cos u$ |
| $\cos u$ | $-u' \sin u$ |
| $\ln u$ | $\frac{u'}{u}$ |
| $\tan u$ | $u'(1 + \tan^2 u)$ |
| $\cot u$ | $-u'(1 + \cot^2 u)$ |
| $\sec u$ | $u' \sec u \tan u$ |

تعریف (مشتق پذیری در یک بازه): تابع f را در بازه $[a, b]$ مشتق پذیر گوئیم اگر در هر نقطه از (a, b) مشتق داشته باشد و در نقطه a از راست و در نقطه b از چپ مشتق داشته باشد.

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

مشتق گیری از توابع نمایی

برای مشتق گیری از توابع به فرم نمایی یا توابع به فرم $y = f(x)^{g(x)}$ ، از تابع \ln استفاده میکنیم. قبل از بیان نحوه کار بعضی از خواص تابع لگاریتم طبیعی را مرور می‌کنیم:

i) $\ln A^n = n \ln A$, ii) $\ln AB = \ln A + \ln B$, iii) $\ln \frac{A}{B} = \ln A - \ln B$.

از طرفی می‌دانیم مشتق تابع $\ln U(x)$ برابر هست با $\frac{U'(x)}{U(x)}$. اکنون به کمک این اطلاعات به آسانی متوانیم مشتق توابع نمایی و امثالهم را حساب کنیم. برای اینکار ابتدا از طرفین \ln می‌گیریم و سپس مشتق می‌گیریم. به مثالهای زیر دقت کنید.

مثال: مشتق تابع $y = a^x$ را بیابید.

$$y = a^x \xrightarrow{\ln} \ln y = x \ln a \xrightarrow{\text{مشتق میگیریم}} \frac{y'}{y} = \ln a \rightarrow y' = y \ln a \rightarrow y' = a^x \ln a$$

مثال: مشتق تابع $y = u^v$ که در آن u و v توابعی از x هستند را بیابید.

$$y = u^v \xrightarrow{\ln} \ln y = v \ln u \xrightarrow{\text{مشتق میگیریم}} \frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u} \rightarrow y' = y (v' \ln u + v \frac{u'}{u})$$

$$\rightarrow y' = u^v \left(\frac{v'u \ln u + vu'}{u} \right)$$

نکته: از این تکنیک برای مشتق توابعی که به شکل حاصلضرب چندین توابع توان دار هست می‌توانید استفاده کنید.

مثال: تابع $y(x) = \frac{(x+2)^3(x^2+1)^{\frac{1}{5}}}{(x^2+4x+1)^3}$ در نظر بگیرید مطلوبست $y'(0)$.

$$y = \frac{(x+2)^3(x^2+1)^{\frac{1}{5}}}{(x^2+4x+1)^3} \xrightarrow{\text{مشتق میگیریم}} \ln y = 3 \ln(x+2) + \frac{1}{5} \ln(x^2+3) - 3 \ln(x^2+4x+1)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x+2} + \frac{2x}{5(x^2+3)} - \frac{3(2x+4)}{x^2+4x+1} \rightarrow y' = y \left(\frac{3}{x+2} + \frac{2x}{5(x^2+3)} - \frac{3(2x+4)}{x^2+4x+1} \right)$$

حال به جای x در رابطه اخیر 0 قرار می‌دهیم $y'(0) = y(0) \left(\frac{3}{2} + 0 - \frac{3 \times 4}{1} \right) = 8 \times \frac{-21}{2} = -84$

مشتق گیری ضمنی :

در توابعی مانند $y = x^7 + 5x^3 + 2x + 4$ ، تابع y بطور مشخص بر حسب x تعریف شده است. اما در توابعی مانند

$x + y^3x^3 + y^2x^4 + 5yx^6 = 4$ گفته می‌شود که y در ضمن x ، تعریف گردیده است برای مشتق گیری این توابع از مشتق گیری ضمنی استفاده می‌کنیم.

فرض کنید تابع $y = f(x)$ به صورت ضمنی $F(x, y) = c$ مطرح شده باشد، که $z = F(x, y)$ تابعی دو متغیره است که نسبت به x مشتق پذیر است. c عددی حقیقی می باشد. در این صورت $y' = -\frac{F_x}{F_y}$ که در آن F_x مشتق تابع

$z = F(x, y)$ نسبت به x با فرض ثابت بودن y و نیز F_y مشتق تابع $z = F(x, y)$ نسبت به y با فرض ثابت بودن x

مثال: فرض کنیم $x + y^3x^3 + y^2x^4 + 5yx^6 = 4$ باشد. مشتق ضمنی این تابع را نسبت به x را بیابید.

در اینجا $x + y^3x^3 + y^2x^4 + 5yx^6 - 4 = 0$ پس

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{1 + 3y^3x^2 + 4y^2x^3 + 30yx^5}{3y^2x^3 + 2yx^4 + 5x^6}$$

اگر نمی‌خواستیم از رابطه بالا استفاده کنیم بصورت زیر عمل می‌کردیم:

$$\Rightarrow 3y^2x^3y' + 3y^3x^2 + 2yx^2y' + 4y^2x^3 + 5x^6y' + 30yx^5 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1 + 3y^3x^2 + 4y^2x^3 + 30yx^5}{3y^2x^3 + 2yx^4 + 5x^6}$$

تمرین: معادله خطوط قائم و مماس بر خم $y^2 - 6x^2 + 4y + 19 = 0$ را در نقطه $A|_1^2$ بیابید.

حل:

$$y' = -\frac{-12x}{2y+4} = \frac{6x}{y+2} \xrightarrow{\text{نقطه } A|_1^2} y' = 4 \text{ شیب خط}$$

$$y - 1 = 4(x - 2) \rightarrow y = 4x - 7 \quad \rightarrow m = 4 \rightarrow m \cdot m' = -1 \rightarrow m' = -\frac{1}{4}$$

$$y - 1 = -\frac{1}{4}(x - 2) \rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

مشتق توابع معکوس:

در این قسمت نحوه محاسبه مشتق تابع معکوس را تشریح خواهیم کرد. فرض کنیم بخواهیم مشتق تابع $y = f^{-1}(x)$ را پیدا کنیم. می‌دانیم اگر $y = f^{-1}(x)$ آنگاه $x = f(y)$ اکنون از طرفین این رابطه نسبت به x مشتق می‌گیریم. پس داریم

$$y = f^{-1}(x) \rightarrow x = f(y) \xrightarrow{\text{مشتق طرفین}} 1 = y' f'(y) \rightarrow y' = \frac{1}{f'(y)}$$

در ادامه سعی می‌کنیم معادل $f'(y)$ را بر حسب x جایگزین کنیم.

مثال: مشتق توابع معکوس $y = \sin^{-1} x$ را بیابید.

$$y = \sin^{-1} x \rightarrow x = \sin y \rightarrow 1 = y' \cos y \rightarrow y' = \frac{1}{\cos y}$$

اکنون کافی هست معادل $\cos y$ را بر حسب x جایگزین کنیم. می‌دانیم $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ از طرفی داشتیم

$x = \sin y$ پس $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$. حال با جانشانی این مقدار در $y' = \frac{1}{\cos y}$ داریم $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. بنا بر این

$$y = \sin^{-1} x \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

تمرین: مشتق توابع معکوس $y = \cos^{-1} x$ ، $y = \tan^{-1} x$ و $y = \sec^{-1} x$ را بیابید.

نکته: اگر تابع $f(x)$ در یک همسایگی نقطه a پیوسته، یک به یک (1-1) و ناصفر باشد. آنگاه تابع $f^{-1}(x)$ در نقطه

$b = f(a)$ یا $a = f^{-1}(b)$ مشتق پذیر بوده و داریم:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

مثال: تابع $f(x) = x^3 + 2x + 5$ موجود هست و $f(-1) = 2$ مطلوبست $(f^{-1})'(2)$.

مطابق دستور بالا داریم

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{3x^2 + 2|_{x=-1}} = \frac{1}{5}$$

مشتق توابع پارامتری: تابع $y = f(x)$ در نظر بگیرید. اگر x و y خود توابعی بر حسب t باشند مثلا $x = \varphi(t)$ و

$y = \psi(t)$. آنگاه برای محاسبه مشتق تابع f نسبت به x از دستور زیر کمک می‌گیریم.

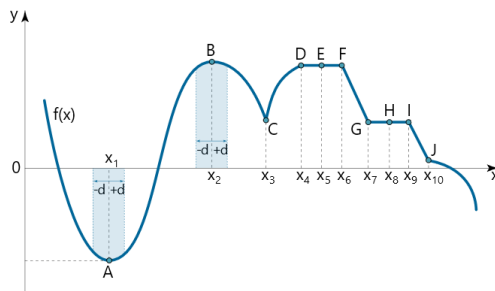
$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

مثال: اگر $x = \sin 2t$ و $y = 2 \sin t$ باشد. آنگاه مطلوبست y' .

$$y' = \frac{(2 \sin t)'}{(\sin 2t)'} = \frac{2 \cos t}{2 \cos 2t} = \frac{\cos t}{\cos 2t}$$

نکته: هر گاه تفاضل دو تابع برابر مقدار ثابتی باشد آنگاه مشتق آن دو تابع برابر هست.

$$f(x) - g(x) = c \rightarrow f'(x) = g'(x)$$



فرض کنید تابع f بر $[a, b]$ تعریف شده باشد:

(1) تابع f در نقطه c دارای min نسبی است اگر $\delta > 0$ ای با

که به ازای هر $x \in (c - \delta, c + \delta)$ داشته باشیم:

$$f(c) \leq f(x)$$

(2) تابع f در نقطه c ، max نسبی دارد اگر $\delta > 0$ ای باشد که به ازای هر $x \in (c - \delta, c + \delta)$ داشته باشیم:

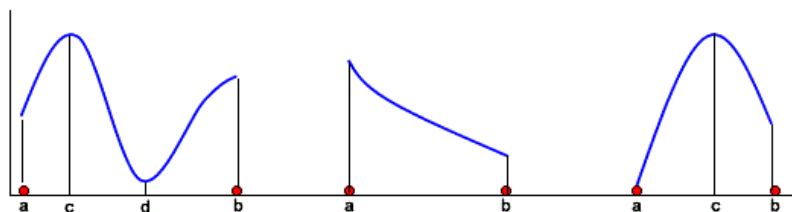
$$f(c) \geq f(x)$$

(3) تابع f در قلمرو خود در نقطه d ، min مطلق دارد اگر به ازای هر x از قلمرو f داشته باشیم $f(d) < f(x)$

(4) تابع f در نقطه s ، max مطلق دارد اگر به ازای هر x از قلمرو تابع داشته باشیم: $f(x) < f(s)$

قضیه مقدار اکسترمم: اگر تابع f در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه f هم دارای max مطلق است و هم دارای min مطلق است.

به عبارت دیگر $f(d) \leq f(x) \leq f(c)$ بطوریکه $\exists c, d \in [a, b]$ در اینجا $f(d)$ مینم مطلق و $f(c)$ ، ماکزیمم مطلق هست.



قضیه ماکزیمم و مینمم نسبی: اگر تابع f در نقاط c دارای ماکزیمم و یا مینمم نسبی باشد آنگاه $f'(c) = 0$.

تعیین ماکزیمم و یا مینمم نسبی با استفاده از مشتق دوم:

قضیه: فرض کنیم مشتق اول و دوم تابع f موجود باشد. اگر نقطه c ریشه تابع $f'(x) = 0$ باشد. آنگاه تابع f در نقطه c دارای ماکزیمم نسبی هست هرگاه $f''(c) \leq 0$ و همچنین تابع f در نقطه c دارای مینمم نسبی هست هرگاه $f''(c) \geq 0$.

مثال: نقاط اکسترمم توابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ و $g(x) = 2 - x^2$ را مشخص کنید.

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 \rightarrow f'(x) = 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1, \quad f''(x) = 2 \rightarrow f''(-1) \geq 0 \rightarrow x = -1 \text{ Min,}$$

$$g(x) = 2 - x^2 \rightarrow g'(x) = -2x = 0 \rightarrow x = 0, \quad f''(x) = -2 \rightarrow f''(0) \leq 0 \rightarrow x = 0 \text{ Max}$$

برای تعیین نقاطی که f در آنها max مطلق و min مطلق دارد به شیوه زیر عمل میکنیم:

(1) نقاط بحرانی تابع f را می یابیم و مقادیر f را در نقاط بحرانی حساب می کنیم.

(2) مقادیر f را در دو نقطه انتهایی (یعنی a, b) محاسبه می کنیم.

(3) کمترین مقدار 1 و 2 را min مطلق تابع و بیشترین مقدار را max مطلق تابع f می نامیم.

تعریف (نقطه بحرانی): نقطه $c \in D_f$ را نقطه بحرانی تابع f گویند هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ تعریف شده نباشد.

مثال: min و max مطلق تابع $f(x) = (x + 1)^{\frac{2}{3}}$ در بازه $[-2, 1]$ را بیابید.

حل: تابع f بر $[-2, 1]$ پیوسته است. پس قضیه مقدار اکسترمم قابل استفاده است. داریم:

$$f'(x) = \frac{2}{3} \frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}$$

پس تابع f دارای تنها یک نقطه بحرانی -1 می باشد.

$$f(-2) = \sqrt[3]{(-2+1)^2} = 1, \quad f(1) = \sqrt[3]{(1+1)^2} = \sqrt[3]{4}, \quad f(-1) = \sqrt[3]{(-1+1)^2} = 0$$

تابع f در -1 min مطلق دارد که صفر است و در 1 max مطلق دارد که $\sqrt[3]{4}$ می باشد.

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ را در بازه $[0,1]$ بیابید؟

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \rightarrow x = 0$$

از طرفی تابع $f'(c)$ در ± 1 تعریف شده نیست اما $-1 \in D_f$ پس نقاط بحرانی تابع فوق عبارتند از $x = 1$ و $x = 0$

مثال: نقاط بحرانی تابع $h(x) = x^{\frac{6}{5}} - 12x^{\frac{1}{5}}$ را بیابید.

$$h'(x) = \frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}} - \frac{12}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{5}}} \left[\frac{6}{5}x - \frac{12}{5} \right] \quad \text{حل}$$

پس تابع h در $x = 0$ مشتق ندارد. بنابر این 0 یک نقطه بحرانی تابع h است.

$$h'(x) = 0 \Rightarrow \frac{0}{5}x - \frac{12}{5} = 0 \Rightarrow x = 2$$

پس مجموعه $\{0,2\}$ نقاط بحرانی تابع h می باشد.

تمرین: مطلوب است تعیین نقاط بحرانی توابع $f(x) = \sin^3 8x$ و $h(x) = \sin 2x \cos 2x$

مثالهی بیشتر <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/Calcl/CriticalPoints.aspx>

حالتهایی که تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ مشتق پذیر نمی باشد:

$$f'(x) = \infty \quad -1$$

$$f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0) \quad -2 \quad \text{مشتق چپ و راست موجود ولی برابر نیست}$$

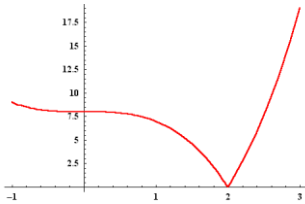
-3 تابع $f(x)$ در یک همسایگی نقطه x_0 تعریف شده باشد ولی پیوسته نباشد.

-4 تابع $f(x)$ در یک همسایگی نقطه x_0 تعریف شده نباشد.

در حالت دوم 2 دو تعریف زیر را داریم:

تعریف (نقطه زاویه دار (corner point): هر گاه مشتق چپ و راست موجود باشند ولی برابر نباشد آنگاه تابع $f(x)$ در نقطه x_0 دارای دو مماس هست. در این حالت به نقطه x_0 نقطه زاویه دار تابع $f(x)$ گویند.

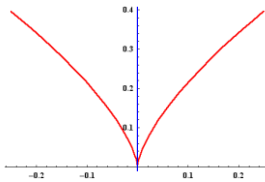
تعریف (نقطه بازگشت (cusp point): هر گاه مشتق چپ و راست بی نهایت (مختلف علامه) باشند، آنگاه تابع $f(x)$ در نقطه x_0 دارای مماس موازی محور y ها هست. در این حالت به نقطه x_0 نقطه بازگشت تابع $f(x)$ گویند.



مثال: نقطه $x = 2$ نقطه زاویه دار تابع $f(x) = |x^3 - 8|$ می باشد.

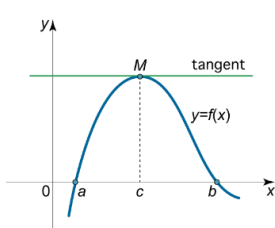
$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 8 & x \geq 2 \\ 8 - x^3 & x < 2 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \geq 2 \\ -3x^2 & x < 2 \end{cases}$$

چون $f'_+(2) \neq f'_-(2)$ پس این تابع در نقطه $x = 2$ مشتق ندارد. از طرفی $f'_+(2) = 12$ و $f'_-(2) = -12$ به نقطه $x = 2$ نقطه زاویه دار یا گوشه گویند.



مثال: نقطه $x = 0$ نقطه بازگشت تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ می باشد.

$$f'(x) = \frac{2}{3} \frac{1}{x^{1/3}} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty$$



قضیه رُل (یا رول) فرض کنید که Rolle's Theorem

1- تابع f در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد.

2- تابع f در بازه باز (a, b) مشتق پذیر باشد.

3- اگر $f(a) = f(b)$ آنگاه $\exists c \in (a, b)$ هست که $f'(c) = 0$.

بعبارت دیگر اگر تابع f در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته و در بازه باز (a, b) مشتق پذیر باشد آنگاه حداقل یک نقطه مانند c در بازه a, b وجود دارد که مشتق f در آن صفر هست، یعنی مماس بر منحنی در نقطه $(c, f(c))$ دارای شیب صفر است (مماس در نقطه $(c, f(c))$ موازی با محور x ها است).

نکته: استفاده مهمی که میشل رُل از قضیه خود کرد آن بود که نشان داد بین هر دو ریشه یک چند جمله ای یک ریشه مشتق آن وجود دارد. (Michel Rolle was a French mathematician)

مثال: نشان دهید که معادله $x^3 + 2x + k = 0$ نمی تواند بیش از یک ریشه حقیقی داشته باشد (k عدد ثابت است).

حل: فرض می کنیم معادله بالا دارای بیش از یک ریشه باشد (فرض خلف) و $x_1 \neq x_2$ دو ریشه متفاوت آن باشند و $x_2 > x_1$. تابع $f(x) = x^3 + 2x + k$ را در نظر میگیریم.

تابع f بر $[x_2, x_1]$ پیوسته است و همچنین این تابع در فاصله $[x_2, x_1]$ مشتق پذیر است. از طرفی $f(x_1) = 0$ و $f(x_2) = 0$ پس بنا به قضیه رل باید $c \in (x_1, x_2)$ ای باشد که $f'(c) = 0$ یعنی $3c^2 + 2 = 0$ که هرگز چنین نمی شود و یک تناقض است. بالطبع فرض دارا بودن بیش از یک ریشه نادرست بوده و f حد اکثر دارای یک ریشه می باشد.

مثال: نشان دهید معادله $4x^5 + 3x^3 + 3x - 2 = 0$ دقیقا دارای یک ریشه است.

حل: قرار می دهیم $f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 3x - 2$. داریم: $f(0) = -2 < 0$, $f(1) = 8 > 0$

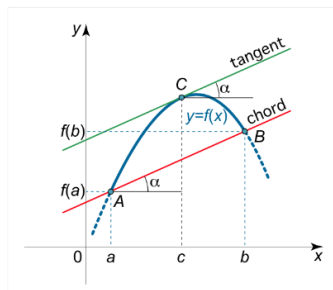
چون $f(0) < k = 0 < f(1)$ پس $t \in (0, 1)$ ای بنا به قضیه مقدار میانی یا **قضیه بولزانو** هست که $f(t) = k = 0$ پس تابع f در $(0, 1)$ ریشه دارد. اگر تابع f در $(0, 1)$ دارای بیش از یک ریشه باشد (فرض خلف) و $x_1 \neq x_2$ دو تا از آنها باشند و $x_1 < x_2$ فرض می شود تابع f بر $[x_1, x_2]$ پیوسته و بر (x_1, x_2) مشتق پذیر باشد و $f(x_1) = f(x_2)$. بنا به قضیه رل، بایستی $t \in (0, 1)$ ای باشد که $f'(t) = 0$ یعنی $20t^4 + 9t^2 + 3 = 0$ که این امر غیر ممکن است. پس فرض خلف باطل و معادله بیش از یک ریشه ندارد. بنا بر این معادله بالا دقیقا یک ریشه دارد.

مثال: فرض کنید دو تابع f و g بر $[a, b]$ مشتق پذیر باشند و $f(b) = g(b)$ و $f(a) = g(a)$ ثابت کنید c ای وجود دارد که $c \in (a, b)$ بطوری که $f'(c) = g'(c)$.

حل: تابع جدید h را تعریف می کنیم: $h(x) = f(x) - g(x)$. به وضوح تابع h بر (a, b) پیوسته و مشتق پذیر می باشد (زیرا f و g هم پیوسته و هم مشتق پذیرند) و مقدار h در a یعنی $h(a)$ برابر است با: $h(a) = f(a) - g(a) = 0$ و به همین ترتیب: $h(b) = f(b) - g(b) = 0$ پس بنا بر قضیه رل، $\exists c \in (a, b)$ هست که $h'(c) = 0$ یعنی

$$f'(c) - g'(c) = 0 \rightarrow f'(c) = g'(c)$$

قضیه مقدار میانگین (لاگرانژ): Mean Value Theorem یا Lagrange's Mean Value Theorem



فرض کنید f یک تابع حقیقی بر $[a, b]$ باشد و

الف) f بر $[a, b]$ پیوسته باشد

ب) f بر (a, b) مشتق پذیر باشد

آنگاه $\exists c \in (a, b)$ ای است که:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

اثبات: برای اثبات تابع h را بصورت زیر تعریف میکنیم.

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$$

با توجه به تعریف h و اینکه طبق فرض قضیه تابع $f(x)$ پیوسته و مشتق پذیرند پس تابع h پیوسته و مشتق پذیرند. از طرفی $h(a) = h(b)$ پس شرایط قضیه رل برقرار هست بنابراین داریم:

$$\exists c \in (a, b) \quad h'(c) = 0 \rightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

نکته: این قضیه توسط ریاضیدان هندی باسکارا Bhaskara قبلا کشف شده بود.

مثال: برای هر دو عدد حقیقی x_1 و x_2 نشان دهید که $|\sin x_2 - \sin x_1| \leq |x_2 - x_1|$.

حل: تابع $f(x) = \sin x$ را $f(x) = \sin x$ در نظر میگیریم. واضح هست که این تابع در بازه (x_1, x_2) پیوسته و مشتق پذیر هست. بنابراین شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار هست. پس

$$\exists c \in (x_1, x_2) \xrightarrow{MVT} f'(c) = \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} = \cos c,$$

حال از طرفین رابطه بالا قدر مطلق میگیریم (می دانیم که $|\cos c| \leq 1$) پس

$$\left| \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} \right| = |\cos c| \leq 1 \quad \rightarrow \quad |\sin x_2 - \sin x_1| \leq |x_2 - x_1|$$

مثال: فرض کنید $f'(x) = 0 \forall x \in [a, b]$. نشان دهید که $f(x)$ در بازه $[a, b]$ یک تابع ثابت است.

فرض کنید $f(x)$ در $[a, b]$ ثابت نباشد پس مثلا x_2, x_1 در بازه $[a, b]$ موجودند بطوریکه $f(x_1) \neq f(x_2)$ (مثلا فرض میکنیم $x_2 < x_1$) تابع f بر (x_2, x_1) پیوسته و مشتق پذیر است بنا به قضیه مقدار میانگین، $c \in (x_2, x_1)$ موجود است بطوری که

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

چون $f'(c) = 0$ داریم $0 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. بنابراین می دانیم که سمت راست مخالف صفر است که یک تناقض می باشد. بنابراین این تابع f بر $[a, b]$ ثابت است.

مثال: فرض کنید $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ بر $[-\pi, \pi]$. نشان دهید به ازای هر x از $[-\pi, \pi]$ داریم $f(x) = 1$.

$$f'(x) = 2\sin x \cos x - 2\cos x \sin x = 0 \quad \Leftarrow \quad \text{حل:}$$

یعنی به ازای هر x داریم که $f'(x) = 0$. پس بنا به مثال قبل، تابع بر $[-\pi, \pi]$ یک تابع ثابت است. حال داریم:

$$f(0) = \sin^2 0 + \cos^2 0 = 1 \Rightarrow f(x) = 1$$

بنابر این $f(x) = 1$ به ازای هر x از $[-\pi, \pi]$

تمرین 1: اگر تابع f زوج باشد آنگاه f' فرد است و بالعکس یعنی اگر f' فرد باشد آنگاه f زوج است.

تمرین 2: نشان دهید به ازای هر $a, b \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ داریم $|\tan a - \tan b| \leq 4|a - b|$.

تمرین 3: نشان دهید به ازای هر a, b با فرض $a < b$ داریم $\frac{b-a}{1+b^2} \leq |\tan^{-1} b - \tan^{-1} a| \leq \frac{b-a}{1+a^2}$

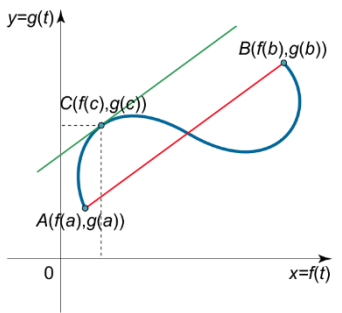
تمرین 4: تابع f دارای خاصیت $f'(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ و $f(0) = 0$ $\forall x \in (0, x)$ هست نشان دهید $0 < f(x) < x$

قضیه کوشی: Cauchy's mean-value Theorem

اگر تابع $f(x)$ و $g(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته و در فاصله (a, b) مشتق پذیر باشد.

آنگاه حداقل یک نقطه مانند C وجود دارد بطوریکه

$$\exists c \in (a, b) \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$



اثبات: برای اثبات تابع h را بصورت زیر تعریف میکنیم.

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

با توجه به تعریف h و اینکه طبق فرض قضیه توابع $f(x)$ و $g(x)$ پیوسته و مشتق پذیرند پس تابع h پیوسته و مشتق پذیرند.

از طرفی $h(a) = h(b) = 0$ پس شرایط قضیه رل برقرار هست بنابر این داریم

$$\exists c \in (a, b) \quad h'(c) = 0 \rightarrow f'(c) - 0 - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0 \rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

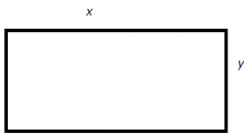
نکته: قاعده هویپیتال یا قضیه هویپیتال برگرفته از این قضیه می باشد.

کاربردهای دیگری از مشتق

خط مشی کلی برای حل مسایل min و max

- 1- شکل رسم می کنیم و حروف مناسبی برای ثابتها و متغیرها انتخاب می کنیم.
- 2- معادله ای برای کمیتی که می خواهیم max یا min بیابیم می نویسم.
- 3- نقاط بحرانی و نقاط انتهایی را آزمایش می کنیم.

مثال: سیمی به طول 10 سانتی متر در اختیار ماست می خواهیم با آن مستطیلی به



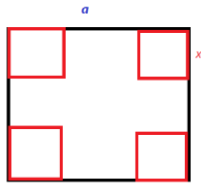
طول x و عرض y درست کنیم. x و y را طوری بیابید که مساحت مستطیل max گردد.

$$\max \quad s = xy$$

$$2(x + y) = 10 \rightarrow y = 5 - x \rightarrow s = x(5 - x) = 5x - x^2 \rightarrow s' = 5 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

پس $y = 5 - x \rightarrow y = \frac{5}{2}$ در نتیجه $s = \frac{25}{4} = 6.25 \text{ cm}^2$

مثال: ورق حلبی مربع شکلی که هر ضلع آن a سانتیمتر می باشد. می خواهیم با آن



یک جعبه روباز بسازیم. از گوشه های آن مربع هایی به ضلع x را جدا می کنیم،

لبه ها را خم می کنیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم مکعب ماکزیمم باشد.

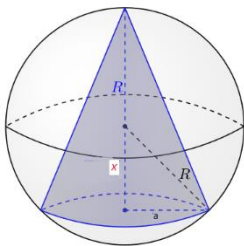
حجم جعبه: مساحت قاعده \times ارتفاع

$$v(x) = (a - 2x)^2 x \rightarrow v' = -4(a - 2x)x + (a - 2x)^2 = 0$$

$$v'(x) = a^2 - 8ax + 12x^2 = 0 \rightarrow x = \frac{a}{2} \text{ و } x = \frac{a}{6}$$

$$v\left(\frac{a}{2}\right) = 0, v\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}$$

مثال: حجم بزرگترین مخروط قائمی را که بتوان در یک کره به شعاع R محاط کرد



را پیدا کنید. می دانیم حجم مخروط = (مساحت قاعده \times ارتفاع) $\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{3} \pi a^2 (R + x) = \frac{1}{3} \pi (R^2 - x^2)(R + x)$$

$$v(x) = \frac{1}{3}\pi(R-x)(R+x)^2 \Rightarrow v'(x) = -\frac{1}{3}\pi(R+x)^2 + \frac{2}{3}\pi(R-x)(R+x):$$

$$\Rightarrow v'(x) = \frac{1}{3}\pi(R+x)[-R-x+2R-2x] = \frac{1}{3}\pi(R+x)(R-3x)$$

از $v'(x)$ داریم که $x = \frac{R}{3}$ پس تابع $v(x)$ تنها دارای یک نقطه بحرانی $x = \frac{R}{3}$ می باشد.

$$v''(x) = \frac{1}{3}\pi(R-3x) - \pi(R+x) = \frac{1}{3}\pi(R-3x-3R-3x) = \frac{1}{3}[-2R-6x]$$

$$\Rightarrow v''\left(\frac{R}{3}\right) = \frac{\pi}{3}[-2R-2R] = -\frac{4}{3}\pi R < 0,$$

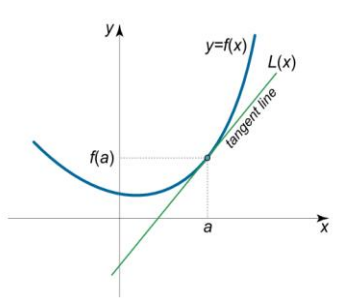
پس $v(x)$ در $x = \frac{R}{3}$ دارای max نسبی است و چون تنها دارای یک max نسبی است. پس دارای max مطلق نیز می باشد.
بنابراین:

$$v\left(\frac{R}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - \frac{R^2}{9}\right)\left(\frac{4}{3}R\right) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{8}{9}R^2\right)\left(\frac{4}{3}R\right) = \frac{32}{81}\pi R^3$$

خطی سازی و دیفرانسیل

به کمک رابطه $f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ می توانیم بنویسیم:

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$$



تقریب خطی Linear Approximation

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

مثال: به کمک جذر 9 مقدار تقریبی $\sqrt{9.1}$ را پیدا کنید.

حل: در اینجا $f(x) = \sqrt{x}$ در نظر می گیریم و $a = 9$ پس داریم:

$$f(x) = \sqrt{x} \approx \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}}(x-9) \rightarrow \sqrt{9.1} = 3 + \frac{0.1}{6} = 3.01$$

مثال: تقریب خطی تابع $f(x) = \ln x$ در نزدیکی نقطه $x = 1$ پیدا کنید.

با توجه به فرمول گفته شده $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \rightarrow L(x) = 0 + (x-1) = x-1$

پس تقریب خطی تابع $f(x) = \ln x$ در نزدیکی نقطه $x = 1$ به صورت $\ln x \approx x - 1$ خواهد بود.

تمرین: نشان دهید مقدار تقریبی $(a > 0)$ $\sqrt[n]{a^n + 1} \approx a + \frac{h}{n a^{n-1}}$ سپس به کمک آن مقدار تقریبی $\sqrt[8]{250}$ را بیابید. (راهنمایی $f(x) = \sqrt[n]{x}$)

تعریف: فرض کنید $y = f(x)$ در $x = x_0$ مشتق پذیر باشد، در این صورت می‌گوییم تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = x_0$ دیفرانسیل پذیر هست و دیفرانسیل آن در نقطه $x = x_0$ را بصورت تعریف می‌کنیم.

$$dy = f'(x)dx$$

مثال: صفحه فلزی دایره شکلی به شعاع r بر اثر حرارت شعاع آن به اندازه dr تغییر کرده است. میزان تغییرات مساحت آن را محاسبه کنید.

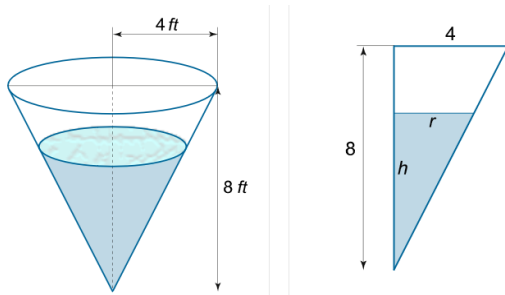
می‌دانیم مساحت دایره $S = \pi r^2$ حال برای محاسبه تغییرات مساحت دیفرانسیل آن را حساب می‌کنیم $ds = 2\pi r dr$.

مثال: یک مخزن به شکل مخروط وارون شده با سرعت 2 فوت

مکعب در ثانیه تخلیه می‌گردد. ارتفاع مخروط 8 فوت و شعاع

آن 4 فوت هست. سرعت پائین آمدن آب (تغییر سطح آب) وقتی

که عمق آب 6 فوت می‌باشد را بیابید.



$$\frac{h_1}{h} = \frac{r_1}{r} \Rightarrow \frac{8}{h} = \frac{4}{r} \Rightarrow 4h = 8r \Rightarrow r = \frac{h}{2}$$

$$v = \frac{\pi h^3}{12} \quad \leftarrow \frac{r=h}{2} \quad v = \frac{\pi r^2 h}{3} \quad \leftarrow \text{حجم مخروط}$$

$$dh = ? \quad , \quad h = 6 \quad , \quad dv = 2 \quad \leftarrow \text{از طرفی داریم}$$

$$v = \frac{\pi h^3}{12} \Rightarrow dv = \frac{\pi h^2}{4} dh \Rightarrow 2 = \frac{\pi 36 dh}{4}$$

$$\Rightarrow 2 = 9\pi dh \Rightarrow dh = \frac{2}{9\pi}$$

ارتفاع در هر دقیقه $\frac{2}{9\pi}$ فوت بر ثانیه پائین می‌آید (وقتی که ارتفاع آب 6 فوت است).



