فصل سوم: توزیع توابعی از متغیرهای تصادفی

دانشگاه مازندران

توابعی از متغیرهای تصادفی: فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ مجموعه ای از متغیرهای تصادفی باشد که توزیع آنها را داریم. در اینجا هدف پیدا کردن توزیع توابعی از متغیرهای تصادفی مانند $Y = g(X_۱, X_۲, \ldots, X_n)$ می باشد. برای این منظور از تکنیک های مختلفی استفاده می شود که عبارتند از:

۱) تکنیک تابع توزیع
۲) تکنیک تبدیل متغیر
۳) تکنیک تابع مولد گشتاور

تکنیک تابع توزیع: فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد که توزیع آن معلوم است. در اینصورت برای پیدا کردن تابع چگالی متغیرهای متغیر تصادفی $Y = g(X)$ ابتدا تابع توزیع Y را پیدا کرده و سپس از آن مشتق می گیریم.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P[g(X) \leq y]$$
$$= \int_A f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$f_Y(y) = \frac{d\,F_Y(y)}{dy}$$

در حالت گسسته:

$$F_Y(y) = \sum_A f(x),$$

$$f_Y(y) = F(y) - F^{-1}(y)$$

که در آن $A = \{x : g(x) \leq y\}$.

مثال ۱. اگر تابع چگالی X به صورت زیر باشد، تابع چگالی $Y = X^۳$ را بیابید.

$$f_X(x) = ۶x(۱ - x); \qquad ۰ < x < ۱$$

مثال ۱. اگر تابع چگالی X به صورت زیر باشد، تابع چگالی $Y = X^{۳}$ را بیابید.

$$f_X(x) = ۶x(۱ - x); \qquad ۰ < x < ۱$$

مثال ۲.

اگر $X \sim U(۰, ۱)$ تابع چگالی متغیر تصادفی $Y = -\ln X$ را بیابید.

مثال ۱. اگر تابع چگالی X به صورت زیر باشد، تابع چگالی $Y = X^۳$ را بیابید.

$$f_X(x) = ۶x(۱-x); \qquad ۰ < x < ۱$$

مثال ۲.

اگر $X \sim U(۰,۱)$ تابع چگالی متغیر تصادفی $Y = -\ln X$ را بیابید.

مثال ۳.

اگر $X \sim U(۰,۱)$ تابع چگالی متغیر تصادفی $Y = -۲\ln X$ را بیابید.

قضیه ۱. ارتباط بین توزیع یکنواخت و نمایی

$$If\ X \sim U(۰, ۱) \Rightarrow -\ln X \sim exp(۱)$$

قضیه ۲. ارتباط بین توزیع یکنواخت و کی–دو

$$If\ X \sim U(۰, ۱) \Rightarrow -۲\ln X \sim \chi^{۲}_{(۲)}$$

مثال ۴. اگر $X \sim Beta(\alpha, ۱)$ با تابع چگالی زیر باشد

$$f_X(x;\alpha) = \alpha\, x^{\alpha-۱}, \qquad ۰ < x < ۱$$

پیدا کنید تابع چگالی

الف) $Y = ۱ - X$

ب) $Z = -\ln X$

ج) $W = -۲\alpha \ln X$

قضیه ۳. ارتباط بین توزیع بتا با خودش

$$If\ X \sim Beta(\alpha, ۱) \Rightarrow ۱ - X \sim Beta(۱, \alpha)$$

قضیه ۴. ارتباط بین توزیع های بتا، نمایی و کی-دو

$$\begin{aligned} If\ X \sim Beta(\alpha, ۱) &\Rightarrow -\ln X \sim exp(\alpha) \\ &\Rightarrow -۲\alpha \ln X \sim \chi^۲_{(۲)} \end{aligned}$$

مثال ۵. اگر $X \sim N(۰, ۱)$ با تابع چگالی زیر باشد

$$f_X(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{x^۲}{۲}}, \qquad -\infty < x < \infty$$

پیدا کنید تابع چگالی

۱) $Y = X^۲$

۲) $Z = |X|$

۳) $T = e^X$

قضیه ۵. ارتباط بین توزیع نرمال استاندارد و کی-دو

$$if\ X \sim N(0,1) \Rightarrow X^2 \sim \chi^2_{(1)}$$

تکنیک تابع توزیع در حالت ۲ یا چند متغیره: در حالت ۲ متغیره یا چند متغیره نیز می توان به طور مشابهی تابع چگالی تابعی از متغیرهای تصادفی را پیدا کرد. مثلا برای حالت ۲ متغیره برای پیدا کردن تابع چگالی $Y = g(X_1, X_2)$ داریم :

$$(X_1,\ X_2)\ \sim\ f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$$

$$\begin{aligned} H(y) = P(Y \leq y) &= P[g(X_1, X_2) \leq y] \\ &= \int_A \int f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \end{aligned}$$

که $A = \{(x_1, x_2) : g(x_1, x_2) \leq y\}$.

$$\Rightarrow\ h(y) = \frac{dH(y)}{dy}$$

مثال ۶. فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند با تابع چگالی $f(x) = e^{-x}$ که $x > 0$، می باشند. تابع چگالی Z=X+Y را پیدا کنید.

مثال ۶. فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند با تابع چگالی $f(x) = e^{-x}$ که $x > ۰$، می باشند. تابع چگالی Z=X+Y را پیدا کنید.

تمرین ۱. در مثال قبل پیدا کنید تابع چگالی

۱) W=X−Y
۲) U=XY
۳) $Z = \frac{X}{Y}$

مثال ۷. اگر تابع چگالی توأم X و Y به صورت زیر باشد

$$f(x,y)=\begin{cases} ۴x\,y\,e^{-(x^۲+y^۲)}, & x>۰,\ y>۰ \\ ۰ & o.w \end{cases}$$

و $Z=\sqrt{X^۲+Y^۲}$. پیدا کنید

a) تابع توزیع Z
b) تابع چگالی احتمال Z

تکنیک تبدیل متغیر: فرض کنید X یک متغیر گسسته با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد و $y = u(x)$ یک تابع یک به یک با وارون $x = w(y)$ باشد. در اینصورت تابع احتمال متغیر تصادفی $Y = U(X)$ به صورت زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= P(Y = y) \\ &= P(U(X) = y) \\ &= P(X = w(y)) = f_X(w(y)) \end{aligned}$$

مثال ۸. فرض کنید تابع احتمال X به صورت زیر باشد.

$$f_X(x) = (\frac{۱}{۲})^{x+۱}, \qquad x = ۰, ۱, \ldots$$

تابع احتمال متغیرهای زیر را پیدا کنید.

$$a)\ Y = ۲X \qquad b)\ Z = X^۲$$

مثال ۸. فرض کنید تابع احتمال X به صورت زیر باشد.

$$f_X(x) = (\frac{۱}{۲})^{x+۱}, \qquad x = ۰, ۱, \ldots$$

تابع احتمال متغیرهای زیر را پیدا کنید.

$$a)\ Y = ۲X \qquad b)\ Z = X^۲$$

مثال ۹. اگر X تعداد شیرها در ۴ پرتاب سکه همگن باشد و $Y = \frac{۱}{X+۱}$. تابع چگالی احتمال Y را بیابید.

* در حالتیکه X یک متغیر پیوسته باشد برای پیدا کردن تابع چگالی $Y = U(X)$ از قضیه زیر استفاده می کنیم.

قضیه ۶: فرض کنید X یک متغیر پیوسته با تابع چگالی $f_X(x)$ باشد و $y = u(x)$ یک تابع یک به یک باشد، یعنی یک تابع صعودی یا نزولی با وارون $x = w(y)$ باشد. در اینصورت تابع چگالی Y به صورت زیر به دست می آید.

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| \quad or \quad f_Y(y) = f_X(w(y))\,|j|$$

که در آن $\frac{dx}{dy} = w'(y)$ یعنی مشتق متغیر قدیم نسبت به متغیر جدید را با j نمایش داده و آنرا ژاکوبین گویند.

مثال ۱۰. فرض کنید $f_X(x) = e^{-x}, x > 0$. تابع چگالی متغیرهای $Y = 2X + 1$ و $Z = \sqrt{X}$ را پیدا کنید.

مثال ۱۰. فرض کنید $f_X(x) = e^{-x},\ x > ۰$. تابع چگالی متغیرهای $Y = ۲X + ۱$ و $Z = \sqrt{X}$ را پیدا کنید.

تمرین ۲. در مسئله فوق تابع چگالی $T = -\ln X$ را بیابید.

مثال ۱۱. اگر $X \sim U(۰, ۱)$ پیدا کنید چگالی

a) $Y = -\ln X - ۱$

b) $Z = X^۲ - ۲$

تذکر. اگر در قضیه قبل تابع $u(x)$ یک به یک نباشد، داریم:

$$y = u(x) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = w_1(y) \\ x_2 = w_2(y) \end{cases}$$

که در این حالت می توان نشان داد که

$$f(y) = f(x_1)\left|\frac{dx_1}{dy}\right| + f(x_2)\left|\frac{dx_2}{dy}\right|$$

یا

$$f(y) = f(w(y))\,|w_1'(y)| + f(w_2(y))\,|w_2'(y)|$$

تذکر. اگر در قضیه قبل تابع $u(x)$ یک به یک نباشد، داریم:

$$y = u(x) \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 = w_1(y) \\ x_2 = w_2(y) \end{cases}$$

که در این حالت می توان نشان داد که

$$f(y) = f(x_1)\left|\frac{dx_1}{dy}\right| + f(x_2)\left|\frac{dx_2}{dy}\right|$$

یا

$$f(y) = f(w(y))\,|w_1'(y)| + f(w_2(y))\,|w_2'(y)|$$

مثال ۱۲. اگر $X \sim N(0,1)$ تابع چگالی $Y = X^2$ و $T = |X|$ را از تکنیک تبدیل متغیر پیدا کنید.

تکنیک تبدیل متغیر برای بدست آوردن توزیع توأم: فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی گسسته با تابع احتمال توأم $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ باشد و $\begin{cases} y_1 = u_1(x_1,x_2) \\ y_2 = u_2(x_1,x_2) \end{cases} = T$ یک تبدیل یک به یک با وارون $\begin{cases} x_1 = w_1(y_1,y_2) \\ x_2 = w_2(y_1,y_2) \end{cases} = T^{-1}$ ، در این صورت تابع احتمال توأم Y_1 و Y_2 به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$\begin{aligned} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) &= P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) \\ &= P\Big(U_1(X_1,X_2) = y_1, U_2(X_1,X_2) = y_2\Big) \\ &= P\Big(x_1 = w_1(y_1,y_2),\ x_2 = w_2(y_1,y_2)\Big) \\ &= f_{X_1,X_2}\Big(w_1(y_1,y_2), w_2(y_1,y_2)\Big) \end{aligned}$$

مثال ۱۳. اگر تابع احتمال توأم X_1 و X_2 به صورت زیر باشد

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1+x_2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x_1-x_2}, \quad (x_1,x_2) = (0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1).$$

تابع احتمال توأم متغیرهای $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = X_1 - X_2$ را بیابید.

تکنیک تبدیل متغیر برای پیدا کردن تابع چگالی توأم در حالت پیوسته: در حالتیکه متغیرهای X_1 و X_2 پیوسته باشند از قضیه زیر استفاده می کنیم.

قضیه ۷: اگر X_1 و X_2 پیوسته با تابع چگالی توأم $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ باشند و $\begin{cases} y_1 = u_1(x_1, x_2) \\ y_2 = u_2(x_1, x_2) \end{cases}$ یک تبدیل یک به یک با وارون $\begin{cases} x_1 = w_1(y_1, y_2) \\ x_2 = w_2(y_1, y_2) \end{cases}$ باشند، در اینصورت تابع چگالی توأم $Y_1 = U_1(X_1, X_2)$ و $Y_2 = U_1(X_1, X_2)$ به صورت زیر محاسبه می شود.

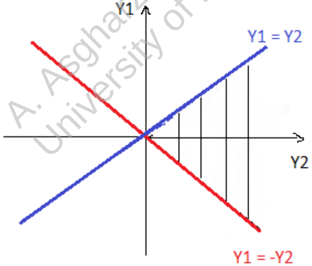
$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}(x_1, x_2).\ |j|$$

که در آن $j = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$.

مثال ۱۴. اگر چگالی توأم X_1 و X_2 به صورت زیر باشد

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = e^{-x_1-x_2}, \quad x_1 > 0,\ x_2 > 0$$

تابع چگالی توأم متغیرهای $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = X_1 - X_2$ را بیابید. آیا Y_1 و Y_2 مستقل اند؟



مثال ۱۵. اگر چگالی توأم $X_۱$ و $X_۲$ به صورت زیر باشد

$$f_{X_۱,X_۲}(x_۱,x_۲)=۱\ , \qquad ۰<x_۱<۱,\ \ ۰<x_۲<۱.$$

با استفاده از تکنیک تبدیل متغیر، تابع چگالی $Y=\frac{X_۱}{X_۲}$ را بیابید.

تکنیک تابع مولد گشتاور: فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ مجموعه ای از متغیرهای تصادفی مستقل باشد که تابع مولد گشتاور آنها موجود و شناخته شده است (مانند تابع مولد گشتاور در توزیع های نرمال، پواسن، دوجمله ای و ...). فرض کنید متغیر تصادفی Y یک ترکیب خطی از متغیرهای $X_1, X_2, \ldots, X_n$ باشد، مانند

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

که $a_1, \ldots, a_n$ مقادیر ثابتی اند. در این حالت ساده ترین روش برای پیدا کردن توزیع متغیر تصادفی Y، تکنیک تابع مولد گشتاور می باشد. این تکنیک مبتنی بر دو قضیه زیر است.

قضیه ۸

تابع مولد گشتاور مجموع متغیرهای تصادفی مستقل برابر با حاصلضرب توابع مولد گشتاور آنهاست یعنی

$$M_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = M_{X_1}(t).M_{X_2}(t)\ldots M_{X_n}(t)$$

قضیه ۸

تابع مولد گشتاور مجموع متغیرهای تصادفی مستقل برابر با حاصلضرب توابع مولد گشتاور آنهاست یعنی

$$M_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = M_{X_1}(t).M_{X_2}(t)\ldots M_{X_n}(t)$$

قضیه ۹ (قضیه یکتایی)

بین تابع چگالی (تابع توزیع) هر متغیر تصادفی و تابع مولد گشتاور آنها، یک رابطه منحصر بفردی برقرار است بدین معنی که

$$M_{X_1}(t) = M_{X_2}(t) \Leftrightarrow X_1 \overset{d}{=} X_2$$

که در آن نماد d به معنای هم توزیع بودن X_1 و X_2 می باشد.

مروری بر تابع مولد گشتاور برخی توزیعهای مهم

توزیع پواسن:

$$if\ X \sim P(\lambda) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = Var(X) = \lambda \\ M_X(t) = e^{\lambda(e^t - ۱)} \end{cases}$$

توزیع دوجمله ای:

$$if\ X \sim b(n,p) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = np \\ Var(X) = npq \\ M_X(t) = (q + pe^t)^n \end{cases}$$

توزیع نرمال:

$$if\ X \sim N(\mu, \sigma^۲) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = \mu \\ Var(X) = \sigma^۲ \\ M_X(t) = e^{\mu t + \frac{۱}{۲}\sigma^۲ t^۲} \end{cases}$$

مثال ۱۶. اگر X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل باشند که هرکدام دارای توزیع پواسن با پارامتر λ اند، توزیع متغیر تصادفی $Y = X_1 + X_2$ را بیابید.

مثال ۱۶. اگر $X_۱$ و $X_۲$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند که هرکدام دارای توزیع پواسن با پارامتر λ اند، توزیع متغیر تصادفی $Y = X_۱ + X_۲$ را بیابید.

تذکر. می توان نشان داد که

$$\begin{cases} X_۱, \ldots, X_n \quad \text{مستقل} \\ X_i \sim Pois(\lambda_i), \quad i = ۱, \ldots, n \end{cases} \Rightarrow Y = \sum_{i=۱}^{n} X_i \sim Pois(\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i)$$

توزیع پواسن دارای خاصیت جمع پذیری است.

در حالت خاص اگر $\lambda_۱ = \lambda_۲ = \cdots = \lambda_n = \lambda$ آنگاه

$$Y = \sum_{i=۱}^{n} X_i \sim Pois(n\lambda)$$

مثال ۱۷. اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مستقل و $X_i \sim b(1, p)$، $i = 1, \ldots, n$ باشد، توزیع متغیر تصادفی $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ را بیابید.

مثال ۱۷. اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مستقل و $X_i \sim b(1, p)$ $i = 1, \ldots, n,$ باشد، توزیع متغیر تصادفی $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ را بیابید.

مثال ۱۸. اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند و $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$، برای $i = 1, \ldots, n$ توزیع متغیر تصادفی $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ را بیابید.

مثال ۱۷. اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مستقل و $X_i \sim b(1, p)$ $i = 1, \ldots, n,$ باشد، توزیع متغیر تصادفی $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ را بیابید.

مثال ۱۸. اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند و $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$، برای $i = 1, \ldots, n$ توزیع متغیر تصادفی $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ را بیابید.

نتیجه.

$$\begin{cases} X_1, \ldots, X_n \ \text{مستقل} \\ X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \quad i = 1, \ldots, n \end{cases} \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$$

توزیع نرمال دارای خاصیت جمع پذیری است.

تذکر. می توان نشان داد هر ترکیب خطی از متغیرهای مستقل نرمال یک متغیر تصادفی نرمال است. بدین معنی که اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ مستقل باشند و $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$، برای $i = 1, \dots, n$ آنگاه

$$T = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2)$$

حالت خاص

۱) اگر $a_1 = \dots = a_n = 1$ آنگاه $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$.

۲) اگر $a_1 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$ آنگاه $\bar{X} \sim N(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i, \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$.

۳) اگر $a_1 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$ و $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = \mu$ و $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_n^2 = \sigma$ آنگاه

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

مثال ۱۹. اگر $X_1, \ldots, X_n$ مستقل و $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$ برای $i = 1, \ldots, n$ آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta).$$

حالت خاص.

$$1)\quad \begin{cases} X_1, \ldots, X_n \ \text{مستقل} \\ X_i \sim \Gamma(\alpha, \beta) \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n\alpha, \beta)$$

$$2)\quad \begin{cases} X_1, \ldots, X_n \ \text{مستقل} \\ X_i \sim \chi^2_{(r_i)} \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{(\sum_{i=1}^{n} r_i)}$$

لذا توزیع کی-دو دارای خاصیت جمع پذیری است.

قضیه ۱۰: ارتباط بین توزیع گاما و کی-دو

$$If \quad X \sim \; \Gamma(\alpha,\, \beta) \quad \Rightarrow \; \frac{۲X}{\beta} \sim \; \chi^{۲}_{(۲\alpha)}$$

قضیه ۱۱: ارتباط بین توزیع نرمال و کی-دو

$$If \quad X_۱, \ldots, X_n \sim \; N(\mu, \sigma^۲)$$

$$۱) \quad \frac{X_i - \mu}{\sigma} \; \sim \; N(۰, ۱), \; i = ۱, \ldots, n$$

$$۲) \quad \sum_{i=۱}^{n} \frac{(X_i - \mu)^۲}{\sigma^۲} \sim \; \chi^۲_{(n)}$$

$$۳) \quad \frac{n(\bar{X} - \mu)^۲}{\sigma^۲} \; \sim \; \chi^۲_{(۱)}$$

مسأله ۱. اگر $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای مستقل باشند که هرکدام دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(۰, ۱)$ می باشند. تابع چگالی $Y = X_۱ + X_۲$ را بیابید.

مسأله ۲. فرض کنید چگالی X به صورت زیر باشد.

$$f_X(x) = \frac{x}{۱۲}, \qquad ۱ < x < ۵$$

تابع چگالی متغیرهای زیر را پیدا کنید.

$a)$ $Y = ۲X - ۳$

$b)$ $Z = \sqrt{X}$

$c)$ $T = X^۲ - ۱$

مسأله ۳. اگر X دارای تابع چگالی $f_X(x)$ باشد، در هریک از حالات زیر با استفاده از روش تابع توزیع، توزیع متغیر تصادفی Y را به دست آورید.

$$i)\quad f_X(x) = ۲x\,e^{-x^۲}, \qquad x > ۰, \qquad Y = X^۲$$

$$ii)\quad f_X(x) = \frac{۱}{\theta}\,e^{-\frac{x}{\theta}}, \qquad x > ۰,\ \theta > ۰, \qquad Y = \ln X$$

مسأله ۴. فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع زیر باشد

$$f_X(x) = ۱, \qquad ۰ < x < ۱$$

تابع توزیع و تابع چگالی متغیرهای تصادفی زیر را پیدا کنید.

$a)$ $Y = \max(X_۱,\ X_۲)$

$b)$ $Z = \min(X_۱,\ X_۲)$

$c)$ $T = \dfrac{X_۱}{X_۲}$

$d)$ $W = X_۱ X_۲$

مسأله ۴. فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع زیر باشد

$$f_X(x) = ۱, \qquad ۰ < x < ۱$$

تابع توزیع و تابع چگالی متغیرهای تصادفی زیر را پیدا کنید.

$a)\ Y = \max(X_۱,\ X_۲)$ $\qquad$ $b)\ Z = \min(X_۱,\ X_۲)$

$c)\ T = \dfrac{X_۱}{X_۲}$ $\qquad$ $d)\ W = X_۱ X_۲$

نکته.

$$\max(a,\ b) \leq c \quad \leftrightarrow \quad a \leq c,\ \ b \leq c$$
$$\min(a,\ b) \geq c \quad \leftrightarrow \quad a \geq c,\ \ b \geq c.$$

مسأله ۵. اگر $X_۱$ و $X_۲$ مستقل و هریک دارای چگالی $f(x) = e^{-x},\ x > ۰$ باشد. چگالی توأم متغیرهای $Y_۱ = X_۱ + X_۲$ و $Y_۲ = \frac{X_۱}{X_۱+X_۲}$ را بیابید و نشان دهید که $Y_۱$ و $Y_۲$ مستقل اند.

مسأله ۶. فرض کنید تابع چگالی توأم $(X_۱, X_۲)$ به صورت زیر باشد. تابع چگالی متغیر تصادفی $Y = X_۱ + X_۲$ را به دست آورید.

$$f_{X_۱,X_۲}(x_۱, x_۲) = \frac{۱}{\theta_۱\theta_۲} e^{-\frac{x_۱}{\theta} - \frac{x_۲}{\theta}}, \quad x_۱,\ x_۲ > ۰,\ \ \theta_۱,\ \theta_۲ > ۰$$