دانشگاه مازندران

# احتمال ۱

## کوواریانس و ناهمبستگی

مدرس: دکتر اصغرزاده نشلی

A. Asgharzadeh
University of Mazandaran

## کواریانس (Covariance):

اگر $X$ و $Y$ دو متغیر تصادفی با میانگین‌های $\mu_X$ و $\mu_Y$ باشند، آنگاه کواریانس $X$ و $Y$ را با $Cov(X, Y)$ یا $\sigma_{X,Y}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Cov(X, Y) = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$$

فرمول محاسباتی کواریانس:

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] = E\left[XY - \mu_Y X - \mu_X Y + \mu_X\mu_Y\right] \\ &= E(XY) - \mu_Y E(X) - \mu_X E(X) + \mu_X\mu_Y \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

A. Asgharzadeh
University of Mazandaran

## مثال ۱.

با توجه به جدول احتمال توام $X$ و $Y$، کوواریانس $X$ و $Y$ را بیابید.

x

| | | ۰ | ۱ | ۲ | |
|---|---|---|---|---|---|
| y | ۰ | $\frac{۱}{۶}$ | $\frac{۱}{۳}$ | $\frac{۱}{۱۲}$ | $\frac{۷}{۱۲}$ |
| | ۱ | $\frac{۲}{۹}$ | $\frac{۱}{۶}$ | ۰ | $\frac{۷}{۱۸}$ |
| | ۲ | $\frac{۱}{۳۶}$ | ۰ | ۰ | $\frac{۱}{۳۶}$ |
| | | $\frac{۵}{۱۲}$ | $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{۱}{۱۲}$ | |

پاسخ: با استفاده از احتمال‌های توام داریم

$$E(XY) = (۰\times۰\times\frac{۱}{۶})+(۰\times۱\times\frac{۲}{۹})+(۰\times۲\times\frac{۱}{۳۶})+(۱\times۰\times\frac{۱}{۳})+(۱\times۱\times\frac{۱}{۶})+(۲\times۰\times\frac{۱}{۱۲}) = \frac{۱}{۶}$$

و با استفاده از احتمال‌های حاشیه‌ای داریم

$$\begin{aligned} E(X) &= (۰\times\frac{۵}{۱۲})+(۱\times\frac{۱}{۲})+(۲\times\frac{۱}{۱۲}) = \frac{۲}{۳} \\ E(Y) &= (۰\times\frac{۷}{۱۲})+(۱\times\frac{۷}{۱۸})+(۲\times\frac{۱}{۳۶}) = \frac{۴}{۹} \end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که

$$Cov(X, Y) = \frac{۱}{۶} - (\frac{۲}{۳})(\frac{۴}{۹}) = -\frac{۷}{۵۴}$$

A. Asgharzadeh University of Mazandaran

## مثال ۲.

کوواریانس دو متغیر تصادفی را که چگالی توام آن‌ها به صورت زیر است را بیابید.

$$f(x,y)=\begin{cases} ۲ & x>۰,\ y>۰,\ x+y<۱ \\ ۰, & \text{o.w.} \end{cases}$$

A. Asgharzadeh University of Mazandaran

پاسخ: با محاسبه امید ریاضی $XY$، $X$ و $Y$

$$E(XY) = \int_۰^۱\int_۰^{۱-x} ۲xy\,dydx = \frac{۱}{۱۲}$$

$$E(X) = \int_۰^۱\int_۰^{۱-x} ۲x\,dydx = \frac{۱}{۳}$$

$$E(Y) = \int_۰^۱\int_۰^{۱-x} ۲y\,dydx = \frac{۱}{۳}$$

نتیجه می‌شود که

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{۱}{۱۲}-(\frac{۱}{۳})(\frac{۱}{۳})=\frac{-۱}{۳۶}$$

**قضیه ۱:**

اگر $X$ و $Y$ مستقل باشند، آن‌گاه

$$Cov(X, Y) = 0$$

اثبات: با توجه به استقلال $X$ و $Y$ داریم

$$E(XY) = E(X)E(Y) \Rightarrow Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

A. Asgharzadeh
University of Mazandaran

**تذکر:** عکس قضیه فوق برقرار نمی‌باشد. یعنی $Cov(X, Y) = 0$ استقلال $X$ و $Y$ را نتیجه نمی‌دهد.

## مثال ۳.

اگر توزیع احتمال توام $X$ و $Y$ به صورت زیر باشد، نشان دهید:

با این‌که دو متغیر تصادفی مستقل نیستند، کواریانس آن‌ها صفر است.

| | | | x | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | -۱ | ۰ | ۱ | |
| | -۱ | $\frac{۱}{۶}$ | $\frac{۱}{۳}$ | $\frac{۱}{۶}$ | $\frac{۲}{۳}$ |
| y | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| | ۱ | $\frac{۱}{۶}$ | ۰ | $\frac{۱}{۶}$ | $\frac{۱}{۳}$ |
| | | $\frac{۱}{۳}$ | $\frac{۱}{۳}$ | $\frac{۱}{۳}$ | |

پاسخ: با استفاده از احتمال‌های حاشیه‌ای داریم

$$
\begin{aligned}
E(X) &= (-۱ \times \frac{۱}{۳}) + (۰ \times \frac{۱}{۳}) + (۱ \times \frac{۱}{۳}) = ۰ \\
E(Y) &= (-۱ \times \frac{۲}{۳}) + (۰ \times ۰) + (۱ \times \frac{۱}{۳}) = \frac{-۱}{۳}
\end{aligned}
$$

و

$$
E(XY) = \left((-۱)(-۱)\frac{۱}{۶}\right) + \left(۰(-۱)\frac{۱}{۳}\right) + \left(۱(-۱)\frac{۱}{۶}\right) + \left((-۱)(۱)\frac{۱}{۶}\right) + \left((۱)(۱)\frac{۱}{۶}\right) = ۰
$$

A. Asgharzadeh University of Mazandaran

مثال ۳.

ادامه پاسخ: بنابراین $Cov(X, Y) = ۰ - ۰(\frac{-۱}{۳}) = ۰$ (کوواریانس صفر است). اما دو متغیر تصادفی مستقل نیستند. برای مثال برای $x = -۱$ و $y = -۱$ داریم

$$f_{X,Y}(-۱, -۱) = \frac{۱}{۶},\ f_X(-۱) = \frac{۱}{۳},\ f_Y(-۱) = \frac{۲}{۳} \quad \Rightarrow f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x).f_Y(y)$$

A. Asgharzadeh
University of Mazandaran

## خواص کواریانس:

۱. $Cov(X, c) = 0$،

۲. $Cov(X, X) = Var(X)$،

۳. کواریانس نسبت به مرکز اندازه‌گیری حساس نیست: $Cov(X + a, Y + b) = Cov(X, Y)$،

۴. کواریانس نسبت به واحدهای اندازه‌گیری حساس است: $Cov(aX, bY) = ab\, Cov(X, Y)$،

۵. $Cov(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} b_j Y_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j Cov(X_i, Y_j)$.

A. Asgharzadeh University of Mazandaran

اثبات خاصیت پنجم:

$$\begin{aligned}
Cov\Big(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} b_j Y_j\Big) &= E\Big[\Big(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i - \sum_{i=1}^{m} a_i \mu_{X,i}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j Y_j - \sum_{j=1}^{n} b_j \mu_{Y,j}\Big)\Big] \\
&= E\Big[\sum_{i=1}^{m} a_i\big(X_i - \mu_{X,i}\big) \sum_{j=1}^{n} b_j\big(Y_j - \mu_{Y,j}\big)\Big] \\
&= E\Big[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \big(X_i - \mu_{X,i}\big)\big(Y_j - \mu_{Y,j}\big)\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j E\big[\big(X_i - \mu_{X,i}\big)\big(Y_j - \mu_{Y,j}\big)\big] \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j Cov\big(X_i, Y_j\big)
\end{aligned}$$

A. Asgharzadeh
University of Mazandaran

**مثال ۴.**

کواریانس زیر را محاسبه کنید.

$$Cov(a_1X_1 + a_2X_2, b_1Y_1 + b_2Y_2)$$

پاسخ:

$$\begin{aligned} Cov(a_1X_1 + a_2X_2, b_1Y_1 + b_2Y_2) &= a_1b_1Cov(X_1, Y_1) + a_1b_2Cov(X_1, Y_2) \\ &+ a_2b_1Cov(X_2, Y_1) + a_2b_2Cov(X_2, Y_2) \end{aligned}$$

**قضیه ۲:**

اگر $X$ و $Y$ دو متغیر تصادفی باشند، داریم

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2Cov(X, Y)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} Var(X+Y) &= E[(X+Y)^2] - E^2[(X+Y)] \\ &= E[X^2 + Y^2 + 2XY] - E^2(X) - E^2(Y) - 2E(X)E(Y) \\ &= E(X^2) - E^2(X) + E(Y^2) - E^2(Y) + 2[E(XY) - E(X)E(Y)] \\ &= Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y) \end{aligned}$$

A. Asgharzadeh University of Mazandaran

**قضیه ۳:**

متغیر تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_n$ را در نظر بگیرید، آن‌گاه

$$Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) &= E\Big[(\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i)^2\Big] = E\Big[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)\Big]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} E(X_i - \mu_i)^2 + 2\sum\sum_{i<j} E\Big[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\Big] \end{aligned}$$

A. Asgharzadeh University of Mazandaran

**فرمول کلی:**

$$Var(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + 2\sum\sum_{i<j} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

نکته:

$$\left(\sum_{i=۱}^{n} a_i\right)^۲ = \sum_{i=۱}^{n} a_i^۲ + ۲\sum\sum_{i<j} a_i a_j$$

در حالتی‌که $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ مستقل باشند، داریم

$$Var\left(\sum_{i=۱}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=۱}^{n} a_i^۲ Var(X_i)$$

A. Asgharzadeh
University of Mazandaran

**مثال ۵.**

اگر متغیرهای تصادفی $X$، $Y$ و $Z$ دارای میانگین‌های $\mu_X = ۲$، $\mu_Y = -۳$، $\mu_Z = ۴$، واریانس‌های $\sigma_X^۲ = ۱$، $\sigma_Y^۲ = ۵$، $\sigma_Z^۲ = ۲$ و کوواریانس‌های $Cov(X, Y) = -۲$، $Cov(X, Z) = -۱$، $Cov(Y, Z) = ۱$ باشند، میانگین و واریانس $W = ۳X - Y + ۲Z$ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$E(W) = E(۳X - Y + ۲Z) = ۳E(X) - E(Y) + ۲E(Z) = ۳(۲) - (-۳) + ۲(۴) = ۱۷$$

و

$$\begin{aligned} Var(W) &= Var(۳X - Y + ۲Z) \\ &= ۹Var(X) + Var(Y) + ۴Var(Z) - ۶Cov(X, Y) + ۱۲Cov(X, Z) \\ &\quad - ۴Cov(Y, Z) \\ &= ۹(۱) + ۵ + ۴(۲) - ۶(-۲) + ۱۲(-۱) - ۴(۱) = ۱۸ \end{aligned}$$

A. Asgharzadeh
University of Mazandaran

## مثال ۶.

اگر متغیرهای تصادفی $X$، $Y$ و $Z$ دارای میانگین‌های $\mu_X = 3,\ \mu_Y = 5,\ \mu_Z = 2$، واریانس‌های $\sigma_X^2 = 8$ ،$\sigma_Y^2 = 12$ ،$\sigma_Z^2 = 18$ و کوواریانس‌های $Cov(X, Y) = 1,\ Cov(X, Z) = -3,\ Cov(Y, Z) = 2$ باشند، مطلوبست کوواریانس $U = X + 4Y + 2Z$ و $V = 3X - Y - Z$.

پاسخ:

$$
\begin{aligned}
Cov(U, V) &= Cov(X + 4Y + 2Z, 3X - Y - Z) \\
&= 3Var(X) - Cov(X, Y) - Cov(X, Z) + 12Cov(Y, X) - 4Var(Y) \\
&\quad - 4Cov(Y, Z) + 6Cov(Z, X) - 2Cov(Z, Y) - 2Var(Z) \\
&= 3Var(X) - 4Var(Y) - 2Var(Z) + 11Cov(X, Y) \\
&\quad + 5Cov(X, Z) - 6Cov(Y, Z) \\
&= 3(8) - 4(12) - 2(18) + 11(1) + 5(-3) - 6(2) = -76
\end{aligned}
$$

A. Asgharzadeh
University of Mazandaran

## ضریب همبستگی

ضریب همبستگی بین دو متغیر $X$ و $Y$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

A. Asgharzadeh
University of Mazandaran

## خواص ضریب همبستگی

۱. ضریب همبستگی نسبت به واحد اندازه‌گیری و مبدا اندازه‌گیری حساس نمی‌باشد به عبارت دیگر

$$\rho(aX + b, cY + d) = \pm\rho(X, Y)$$

۲. $-۱ \leq \rho \leq ۱$

۳. با احتمال ۱، رابطه خطی $Y = aX + b$ بین $X$ و $Y$ برقرار است، اگر و تنها اگر $\rho(X, Y) = \pm۱$. برای $\rho(X, Y) = ۱$ شیب خط $a > ۰$ و برای $\rho(X, Y) = -۱$، شیب خط $a < ۰$ است.

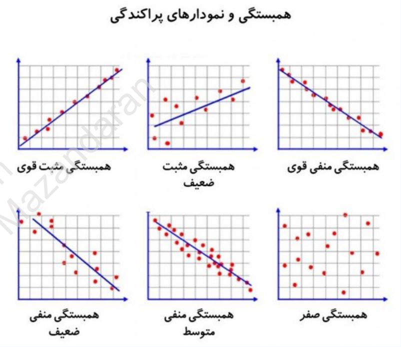
ضریب همبستگی همواره عددی بین ۱ و ۱− است. این ضریب دو بخش دارد: مقدار عددی و علامت. مقدار عددی نشان می‌دهد چقدر رابطه خطی بین دو متغیر قدرتمند است. علامت نشان می‌دهد جهت این رابطه مثبت است یا منفی.

اگر ضریب همبستگی مثبت باشد، به این مفهوم است که افزایش در مقادیر یک متغیر با افزایش در مقادیر متغیر دیگر همراه است. همین‌طور کاهش در مقادیر یک متغیر با کاهش در مقادیر متغیر دیگر همراه است. در این حالت اگر نمودار پراکندگی دو متغیر رسم شود، می‌توان خطی با شیب مثبت را از بین نقاط برازش داد (شکل-۱). به همین ترتیب اگر ضریب همبستگی منفی باشد، می‌توان خطی با شیب منفی را از بین نقاط برازش داد (شکل-۱).

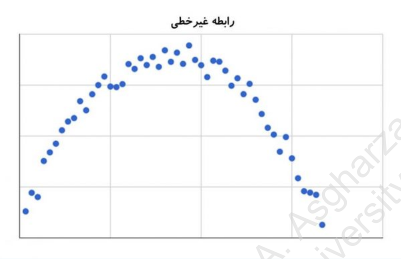
هرچه مقدار مطلق ضریب همبستگی (صرف نظر از علامت) به ۱ نزدیک باشد، نشان می‌دهد شدت رابطه خطی بین دو متغیر قوی‌تر است. در مقابل ضریب همبستگی نزدیک صفر نشان می‌دهد که رابطه خطی بسیار ضعیفی بین متغیرهای $X$ و $Y$ برقرار است. در این حالت اگر نمودار پراکندگی دو متغیر رسم شود، این‌طور به نظر می‌رسد نقاط به شکل تصادفی در صفحه رسم شده‌اند (شکل-۱).

اگر بین دو متغیر رابطه غیرخطی برقرار باشد، همچنان این امکان وجود دارد ضریب همبستگی نزدیک صفر باشد که نشان‌دهنده نبود رابطه خطی بین دو آن است (شکل-۲). به همین دلیل در هنگام تحلیل بهتر است نمودار پراکندگی بین متغیرها رسم شود تا به وجود این روابط پی برد.

A. Asgharzadeh
University of Mazandaran




(آ) شکل ۱.




(ب) شکل ۲.

A. Asgharzadeh
University of Mazandaran

اثبات: ۱.

$$\rho\left(aX+b,\, cY+d\right) = \frac{Cov\left(aX+b,\, cY+d\right)}{\sqrt{Var\left(aX+b\right) Var\left(cY+d\right)}}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} Cov\left(aX+b,\, cY+d\right) &= ac\, Cov\left(X,\, Y\right) \\ Var\left(aX+b\right) &= a^{۲}\, Var\left(X\right) \\ Var\left(cY+d\right) &= c^{۲}\, Var\left(Y\right) \end{aligned}$$

A. Asgharzadeh
University of Mazandaran

بنابراین

$$\begin{aligned} \rho\left(aX+b,\, cY+d\right) &= \frac{ac\, Cov\left(X,\, Y\right)}{|a||c|\sqrt{Var\left(X\right) Var\left(Y\right)}} = \frac{ac}{|ac|}\rho\left(X,\, Y\right) \\ &= \begin{cases} \rho\left(X,\, Y\right), & ac > ۰ \\ -\rho\left(X,\, Y\right), & ac < ۰ \end{cases} \end{aligned}$$

۲. متغیر تصادفی $W$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$W = \frac{X}{\sigma_X} - \rho \frac{Y}{\sigma_Y}$$

با توجه به رابطه $Var(W) \geq ۰$، داریم

$$\begin{aligned}
۰ \leq Var(\frac{X}{\sigma_X} - \rho\frac{Y}{\sigma_Y}) &= Var(\frac{X}{\sigma_X}) + Var(\rho\frac{Y}{\sigma_Y}) - ۲Cov(\frac{X}{\sigma_X}, \rho\frac{Y}{\sigma_Y}) \\
&= \frac{Var(X)}{\sigma_X^۲} + \rho^۲\frac{Var(Y)}{\sigma_Y^۲} - ۲\frac{\rho}{\sigma_X\sigma_Y}Cov(X, Y) \\
&= ۱ + \rho^۲ - ۲\rho^۲
\end{aligned}$$

و لذا

$$۱ + \rho^۲ - ۲\rho^۲ = ۱ - \rho^۲ \geq ۰ \Rightarrow \rho^۲ \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq \rho \leq ۱$$

A. Asgharzadeh
University of Mazandaran

۳. با توجه به اثبات خاصیت ۲، اگر $\rho^{۲} = ۱$، آن‌گاه $Var(W) = ۰$ و لذا

$$\rho = \pm ۱ \Leftrightarrow \rho^{۲} = ۱ \Leftrightarrow Var(W) = ۰ \Leftrightarrow P(W = \mu_W) = ۱$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{X}{\sigma_X} - \rho\frac{Y}{\sigma_Y} = \frac{\mu_X}{\sigma_X} - \rho\frac{\mu_Y}{\sigma_Y}\right) = ۱$$

$$\Leftrightarrow P\left(Y = -\frac{\sigma_Y}{\rho}\left[\frac{\mu_X}{\sigma_X} - \rho\frac{\mu_Y}{\sigma_Y} - \frac{X}{\sigma_X}\right]\right) = ۱$$

$$\Leftrightarrow P\left(Y = \frac{-\sigma_Y\mu_X}{\rho\sigma_X} + \mu_Y + \frac{\sigma_Y}{\rho\sigma_X}X\right) = ۱$$

$$\Leftrightarrow P\left(Y = \frac{-\sigma_Y^{۲}}{\sigma_{XY}}\mu_X + \mu_Y + \frac{\sigma_Y}{\rho\sigma_X}X\right) = ۱$$

که با در نظر گرفتن $a = \frac{\sigma_Y}{\rho\sigma_X}$ و $b = \frac{-\sigma_Y^{۲}}{\sigma_{XY}}\mu_X + \mu_Y$ ، اثبات کامل می‌شود. همچنین با توجه به مثبت بودن $\sigma_X$ و $\sigma_Y$، اگر $\rho = ۱$ آن‌گاه $a > ۰$ و اگر $\rho = -۱$، آن‌گاه $a < ۰$ می‌باشد.

Ali Asgharzadeh
University of Mazandaran

**مثال ۷.**

اگر $Y$ به صورت: الف) $Y = X + ۱$ ب) $Y = -X + ۱$ تعریف شود، ضریب همبستگی $X$ و $Y$ را به دست آورید.

پاسخ: الف) با توجه به مقدار $a = ۱ > ۰$، بنابراین $\rho = ۱$ می‌باشد.

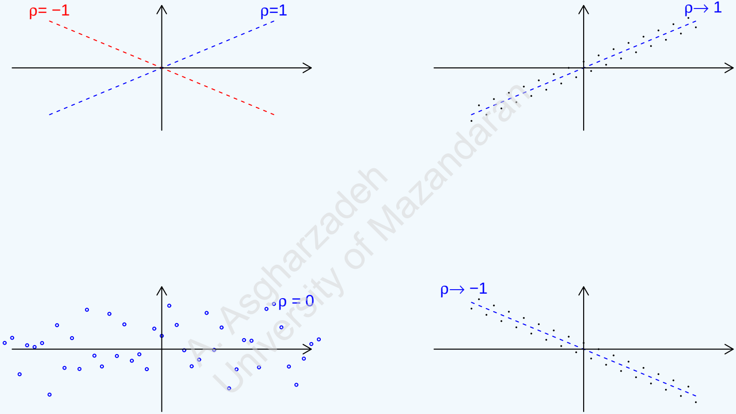
ب) با توجه به مقدار $a = -۱ < ۰$، بنابراین $\rho = -۱$ می‌باشد.

A. Asgharzadeh University of Mazandaran

## ناهمبستگی:

دو متغیر تصادفی $X$ و $Y$ را ناهمبسته می‌گوییم، هرگاه $\rho(X, Y) = ۰$ یا $Cov(X, Y) = ۰$.

در این حالت، هیچ رابطه کامل خطی بین $X$ و $Y$ وجود ندارد.




A. Asgharzadeh
University of Mazandaran

**قضیه ۴:**

اگر $X$ و $Y$ مستقل باشند، آنگاه $X$ و $Y$ ناهمبسته‌اند. اما عکس آن لزوما برقرار نیست.

اثبات: با توجه به مستقل بودن $X$ و $Y$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = ۰$$

A. Asgharzadeh University of Mazandaran

**مثال ۸.**

فرض کنید $۰ < x < y < ۱ \quad f(x, y) = ۶x,$، مطلوبست:

الف) کواریانس $X$ و $Y$ ب) $\rho(X, Y)$ ج) $Cov(۳X + Y, Y + ۲)$

## مثال ۸.

پاسخ: الف)

$$f_X(x) = \int_x^۱ f(x,y)dy = \int_x^۱ ۶x dy = ۶x(۱-x)$$

$$f_Y(y) = \int_۰^y f(x,y)dx = \int_۰^y ۶x dx = ۳y^۲$$

$$E(X) = \int_۰^۱ x f_X(x) = \int_۰^۱ ۶x^۲(۱-x)dx = (۲x^۳ - \frac{۳}{۲}x^۴)\Big|_۰^۱ = ۲ - \frac{۳}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$E(Y) = \int_۰^۱ y f_Y(y)dy = \int_۰^۱ ۳y^۳ dy = \frac{۳}{۴}y^۴\Big|_۰^۱ = \frac{۳}{۴}$$

$$E(XY) = \int_۰^۱\int_x^۱ xyf(x,y)dydx = \int_۰^۱\int_x^۱ ۶x^۲ydydx = \int_۰^۱ ۳x^۲(۱-x^۲)dx = (x^۳ - \frac{۳}{۵}x^۵)\Big|_۰^۱ = \frac{۲}{۵}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{۲}{۵} - \frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۴}) = \frac{۱}{۴۰}$$

A. Asgharzadeh University of Mazandaran

## ادامه مثال ۸

ب)

$$\begin{aligned} E(X^{۲}) &= \int_{۰}^{۱} x^{۲} f_X(x) = \int_{۰}^{۱} ۶x^{۳}(۱-x)dx = \left(\frac{۳}{۲}x^{۴} - \frac{۶}{۵}x^{۵}\right)\Big|_{۰}^{۱} = \frac{۳}{۱۰} \\ E(Y^{۲}) &= \int_{۰}^{۱} y^{۲} f_Y(y)dy = \int_{۰}^{۱} ۳y^{۴}dy = \frac{۳}{۵}y^{۵}\Big|_{۰}^{۱} = \frac{۳}{۵} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^{۲}) - E^{۲}(X) = \frac{۳}{۱۰} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲۰} \\ Var(Y) &= E(Y^{۲}) - E^{۲}(Y) = \frac{۳}{۵} - \frac{۹}{۱۶} = \frac{۳}{۸۰} \end{aligned}$$

$$\rho(X, Y) = \frac{Co(X, Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}} = \frac{\frac{۱}{۴۰}}{\sqrt{\frac{۱}{۲۰}\left(\frac{۳}{۸۰}\right)}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

ج)

$$\begin{aligned} Cov(۳X+Y, Y+۲) &= Cov(۳X+Y, Y) = ۳Cov(X, Y) + Var(Y) \\ &= \frac{۳}{۴۰} + \frac{۳}{۸۰} = \frac{۹}{۸۰} \end{aligned}$$

Asgharzadeh University of Mazandaran

**مسأله ۱.** اگر $X$ و $Y$ دارای توزیع احتمال توأم $f(x, y) = \frac{۱}{۴}$ به ازای $x = -۳$، $y = -۵$، $x = -۱$، $y = -۱$، $x = ۱$، $y = ۱$، $x = ۳$، $y = ۵$ باشند، $Cov(X, Y)$ را پیدا کنید.

**مسأله ۲.** اگر توزیع توأم $X$ و $Y$ به‌صورت زیر باشد:

| | x: -۱ | x: ۰ | x: ۱ |
|---|---|---|---|
| y: ۰ | $\frac{۱}{۶}$ | ۰ | $\frac{۱}{۱۲}$ |
| y: ۱ | $\frac{۱}{۴}$ | ۰ | $\frac{۱}{۲}$ |

نشان دهید

الف) $Cov(X, Y) = ۰$

ب) دو متغیر تصادفی مستقل نیستند.

**مسأله ۳.** اگر $Var(X_۱) = ۵$، $Var(X_۲) = ۴$، $Var(X_۳) = ۷$ و $Cov(X_۱, X_۲)$، $Cov(X_۱, X_۳) = -۲$ و $X_۲$ و $X_۳$ مستقل باشند، کوواریانس $Y_۱ = X_۱ - ۲X_۲ + ۳X_۳$ و $Y_۲ = -۲X_۱ + ۳X_۲ + ۴X_۳$ را پیدا کنید.

**مسأله ۴.** در ظرفی ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و یک مهره قرمز داریم. از این ظرف چشم بسته ۴ مهره با هم بیرون می‌آوریم. فرض کنید $X$ تعداد مهره‌های سفید و $Y$ تعداد مهره‌های سیاه در این نمونه‌ی ۴ تایی باشد. $\rho(X, Y)$ را پیدا کنید.

A. Asgharzadeh
University of Mazandaran