نام درس: قابلیت اعتماد (Reliabiblity)

پیش‌نیاز: آمار ریاضی ۱

نوع درس: اختیاری

تعداد واحد: ۳

مدرس: دکتر اصغرزاده نشلی

منابع

[۱] ماکس انگلهارت و لی بین، مقدمه‌ای بر احتمال و آمار ریاضی. ترجمه سیدابوالقاسم بزرگ نیا، حسنعلی آذرنوش و علی مشکانی، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.

[۲] اسدی، م، آشنایی با نظریه قابلیت اعتماد. مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۹۳.

[3] Zacks, Sh, *Introduction to Reliability*, Springer-Verlag New York, 1992.

دانشگاه مازندران

مفاهیم قابلیت اعتماد:

قابلیت اعتماد آماری مجموعه‌ای از فنون مهندسی و آماری است که به مطالعه‌ی خواص تصادفی و برآورد شاخص‌های مختلف طول عمر محصولات و سیستم‌ها می‌پردازد. این شاخه از علم آمار در بالا بردن کیفیت یا قابلیت محصولات نقش مهمی ایفا می‌کند.

تابع قابلیت اعتماد (Reliability function)

اگر T طول عمر یک قطعه یا مؤلفه یا سیستم با تابع چگالی f و تابع توزیع F باشد، تابع قابلیت اعتماد قطعه در زمان t برابر است با

$$R(t) = P(T \geq t)$$

تذکر

$$P(T \geq t) = ۱ - P(T < t) = ۱ - P(T \leq t) \qquad \text{(T پیوسته است)}$$

$$= ۱ - F_T(t) = ۱ - F(t) = \bar{F}(t)$$

$$\Longrightarrow \quad R(t) = \bar{F}(t) = ۱ - F(t)$$

در علوم پزشکی به تابع قابلیت اعتماد، تابع بقا گویند و آن را با $S(t)$ نمایش می‌دهند.

$$S(t) = P(T \geq t) = \bar{F}(t)$$

مثال

فرض کنید T طول عمر یک سیستم الکتریکی بر حسب سال است که تابع چگالی آن به صورت زیر است:

$$f(t) = \frac{2}{(t+1)^3}, \qquad t > 0$$

الف) تابع قابلیت اعتماد T را بدست آورید.

ب) قابلیت اعتماد سیستم در زمان $t = 2$ چقدر است؟ آن را تفسیر کنید.

ج) چقدر احتمال دارد که طول عمر قطعه بین ۶ ماه تا دو سال باشد؟

مثال

فرض کنید طول عمر یک باتری بر حسب سال یک متغیر تصادفی T است که تابع چگالی آن برابر است با

$$f(t) = ۲t\, e^{-t^۲}, \qquad t > ۰.$$

الف) تابع قابلیت اعتماد T را بدست آورید.

ب) قابلیت اعتماد باتری در $t = ۱۸$ ماه چقدر است؟

تابع نرخ خطر (تابع نرخ خرابی): Hazard rate function

اگر متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی T، طول عمر یک سیستم یا قطعه باشد با تابع چگالی طول عمر $f(t)$ و تابع توزیع طول عمر $F(t)$، آنگاه تابع نرخ خرابی (تابع نرخ خطر) آن بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad \text{یا} \quad h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

سؤال: چرا تابع نرخ خرابی گفته می‌شود؟

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{F'(t)}{P(T\geq t)} \\
&= \frac{1}{P(T\geq t)} \lim_{\delta t\to 0} \frac{F(t+\delta t)-F(t)}{\delta t} \qquad (\text{تعریف ریاضی مشتق}) \\
&= \frac{1}{P(T\geq t)} \underbrace{\lim_{\delta t\to 0} \frac{P(t\leq T\leq t+\delta t)}{\delta t}}_{f(t)} = \lim_{\delta t\to 0} \frac{P(t\leq T\leq t+\delta t)}{\delta t\, P(T\geq t)} \\
&= \underbrace{\lim_{\delta t\to 0} \frac{P(t\leq T\leq t+\delta t|T\geq t)}{\delta t}}_{f(t|T\geq t)}
\end{aligned}
$$

لذا برای مقادیر خیلی کوچک δt:

$$h(t) \simeq \frac{P(t\leq T\leq t+\delta t|T\geq t)}{\delta t}$$

$$\Longrightarrow \delta t\, h(t) \simeq P(t\leq T\leq t+\delta t|T\geq t)$$

یعنی احتمال اینکه قطعه یا سیستم در فاصله زمانی $(t,\ t+\delta t)$ از بین برود به شرط آنکه بدانیم تا زمان t کار کرده است (سالم بوده است).

دانشگاه مازندران

- براساس رابطه فوق، تابع $h(t)$ را می‌توان تابع نرخ خرابی لحظه‌ای قطعه یا سیستم در زمان t با فرض اینکه این قطعه یا سیستم تا زمان t سالم بوده است تفسیر کرد.
- تابع نرخ خرابی $h(t)$ را می‌توان به عنوان چگالی شرطی خرابی نیز در نظر گرفت:

$$h(t) = f(t|T \geq t)$$

چند نکته

۱. اگر تابع $h(t)$ بر حسب t صعودی باشد، این بدان معناست که با افزایش زمان، نرخ خرابی قطعه یا سیستم افزایش پیدا می‌کند. بعبارتی با افزایش سن و طول عمر، قطعه خراب شده و از بین می‌رود.

۲. اگر تابع $h(t)$ برحسب t نزولی باشد، این بدان معناست که با افزایش زمان، نرخ خرابی قطعه یا سیستم کاهش پیدا می‌کند. بعبارتی با افزایش سنِ قطعه، عملکرد آن بهتر می‌شود.

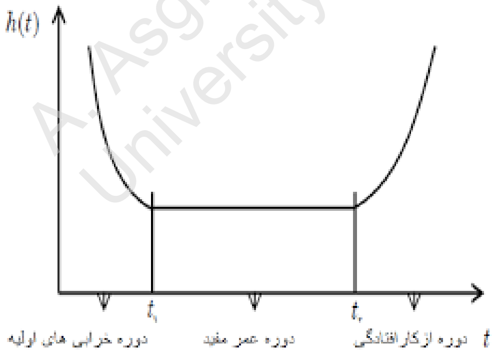
۳. اگر تابع نرخ خطر $h(t)$ ثابت باشد، این بدان معناست که زمان یا سن قطعه تاثیری در نرخ خرابی آن ندارد. بعبارتی نرخ خرابی قطعه‌ای که مدت زمانی کار کرده برابر با نرخ خرابی قطعه نو است.

نرخ خرابی U شکل یا وانی شکل (Bathtub shape)

یک الگوی معروف برای نرخ خرابی در قابلیت اعتماد، نرخ خرابی U شکل یا وانی شکل است که شکل آن در پایین آمده است. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود نرخ خرابی قطعه یا سیستم ابتدا نزولی است که به آن دوره‌ی خرابی اولیه گفته می‌شود. بعد از آن برای یک دوره‌ی زمانی نرخ خرابی ثابت است که به این دوره، دوره‌ی عمر مفید گویند.

بعد از دوره عمر مفید، نرخ خرابی صعود کرده و افزایش پیدا می‌کند که به این دوره، دوره‌ی از کار افتادگی یا پیری سیستم می‌گویند. در دنیای واقعی نرخ خرابی بیشتر محصولات مختلف صنعتی و حتی نرخ مرگ و میر موجودات زنده از الگوی فوق پیروی می‌کند.

نقطه‌های $t_۱$ و $t_۲$ نقاطی هستند که در آن تابع نرخ خطر تغییر می‌کند که به آنها نقاط تغییر گویند.



شکل ۱: الگوی نرخ خرابی وانی شکل

دانشگاه مازندران

مثال

فرض کنید متغیر طول عمر T دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f(t) = (۲t + ۱)\, e^{-(t+t^۲)}, \qquad t > ۰$$

تابع نرخ خرابی را پیدا کرده و درمورد رفتار آن (صعودی یا نزولی بودن آن) بحث کنید.

مثال

فرض کنید متغیر طول عمر T دارای تابع چگالی احتمال زیر است.

$$f(t) = \frac{۳}{(۱ + t)^۴}, \qquad t > ۰$$

تابع نرخ خرابی را بیابید و در مورد رفتار آن بحث کنید.

دانشگاه مازندران

مثال

متغیر تصادفی T دارای توزیع نمایی با تابع چگالی زیر است.

$$f(t) = \frac{۱}{۲} e^{-\frac{t}{۲}}, \qquad t > ۰$$

تابع نرخ خرابی را پیدا کرده و درمورد رفتار آن بحث کنید.

دانشگاه مازندران

قضیه ۱ : (تناظر ۱–۱ بین تابع توزیع و تابع نرخ شکست)

فرض کنید T متغیر تصادفی طول عمر باشد با تابع چگالی f، تابع توزیع F و تابع قابلیت اعتماد R. آنگاه $R(t)$ را برحسب $h(t)$ (تابع نرخ شکست) می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$R(t) = e^{-\int_{\circ}^{t} h(x)\,dx}$$

یا

$$۱ - F(t) = e^{-\int_{\circ}^{t} h(x)\,dx}$$

دانشگاه مازندران

تذکر

$$F(۰) = P(T \leq ۰) = ۰ \qquad \text{(طول عمر مقدار منفی نمی‌گیرد)}$$

تذکر

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه‌ی

$$۱ - F(t) = e^{-\int_۰^t h(x)\,dx}$$

نسبت به t داریم:

$$-f(t) = -h(t)\, e^{-\int_۰^t h(x)\,dx} \implies \boxed{f(t) = h(t)\, e^{-\int_۰^t h(x)\,dx}}$$

مثال

تابع نرخ خرابی یک سیستم رادار بر حسب زمان مقداری ثابت است و به صورت زیر می‌باشد:

$$h(t) = c, \qquad t \geq 0$$

تابع قابلیت اعتماد و تابع توزیع طول عمر این سیستم رادار را پیدا کنید. طول عمر سیستم رادار دارای چه توزیعی است؟

نکته

در توزیع نمایی:

$$\text{نرخ خرابی طول عمر} = \frac{۱}{\text{میانگین طول عمر}}$$

- $f(x;\theta) = \frac{۱}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > ۰,\ \theta > ۰ \implies \text{میانگین} = \theta, \quad \text{نرخ خرابی} = \frac{۱}{\theta}$
- $f(x;\theta) = \theta\, e^{-\theta x},, \quad x > ۰,\ \theta > ۰ \implies \text{میانگین} = \frac{۱}{\theta}, \quad \text{نرخ خرابی} = \theta$

مثال

متغیر تصادفی T دارای تابع نرخ خرابی زیر است:

$$h(t) = ۲t, \qquad t \geq ۰$$

تابع قابلیت اعتماد سیستم و توابع توزیع و چگالی T را بیابید.

یادآوری

توزیع وایبل:

$$F(t;\alpha,\beta) = ۱ - e^{-\alpha t^{\beta}}, \qquad t > ۰,\ \ \alpha > ۰,\ \ \beta > ۰$$

$$f(t;\alpha,\beta) = \alpha\beta\, t^{\beta-۱}\, e^{-\alpha t^{\beta}}, \qquad t > ۰,\ \ \alpha > ۰,\ \ \beta > ۰$$

دانشگاه مازندران

یادآوری

حالات خاص از توزیع وایبل:

الف) اگر $\beta = 1$:

$$F(t;\alpha) = 1 - e^{-\alpha t}, \qquad t > 0, \ \ \alpha > 0$$

$$f(t;\alpha) = \alpha\, e^{-\alpha t}, \qquad t > 0, \ \ \alpha > 0 \qquad \text{(توزیع نمایی)}$$

ب) اگر $\beta = 2$:

$$F(t;\alpha) = 1 - e^{-\alpha t^2}, \qquad t > 0, \ \ \alpha > 0$$

$$f(t;\alpha) = \alpha\, t\, e^{-\alpha t^2}, \qquad t > 0, \ \ \alpha > 0 \qquad \text{(توزیع رایلی)}$$

دانشگاه مازندران

مثال

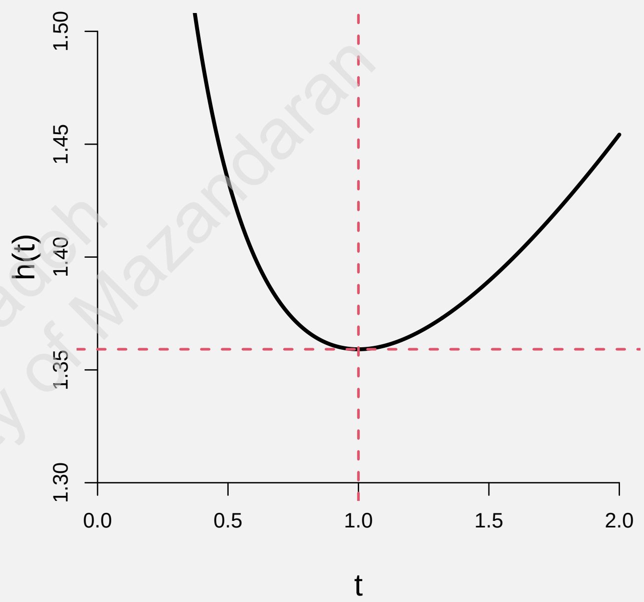
فرض کنید تابع نرخ خطر سیستمی به‌صورت زیر است:

$$h(t) = \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}, \qquad t > 0$$

الف) تابع قابلیت اعتماد سیستم را پیدا کنید.

ب) نشان دهید که تابع نرخ خرابی این سیستم U شکل است.

t	۰		۱		∞
$h'(t)$			۰		
$h(t)$	∞	$\searrow$	$\frac{e}{۲} =$ ۱٫۳۵۹	$\nearrow$	∞



شکل ۲: منحنی $h(t)$

مثال

کاربردی. غالبا شنیده می‌شود که نرخ مرگ و میر افراد معتاد به سیگار در هر سنی دو برابر نرخ مرگ و میر افراد غیر معتاد به سیگار می‌باشد. معنی این عبارت چیست؟

آیا این واقعا بدان معناست که احتمال زنده ماندن یک فرد غیر سیگاری به تعداد سالهای معین ۲ برابر احتمال زنده ماندن یک فرد سیگاری همسن اوست؟

خواص تابع نرخ خرابی

تابع $h(x)$ یک تابع نرخ خرابی است، اگر و تنها اگر داشته باشیم:

الف) $h(x) \geq 0, \quad \forall x \geq 0$

ب) $\int_0^{\infty} h(x)\,dx = \infty$

خواص تابع توزیع:

$$1)\quad F(\infty)\overset{?}{=}1,\qquad F(0)\overset{?}{=}0$$

- $F(\infty)=1-e^{-\int_0^{\infty}h(t)\,dt}=1-e^{-\infty}=1-0=1$
- $F(0)=1-e^{-\int_0^{0}h(t)\,dt}=1-e^{0}=1-1=0$

۲) غیر نزولی بودن $F(x)$ بررسی شود:

$$F'(x)=\underbrace{h(x)}_{\text{طبق خواص h(x) نامنفی}}\ \underbrace{e^{-\int_0^x h(x)\,dt}}_{0\le e\le 1}\ge 0\implies F(x)\nearrow x\quad \text{صعودی}$$

۳) $F(x)$ در هر نقطه دلخواه a حداقل از راست پیوسته است.

$$\lim_{x\to a^+}F(x)=F(a),\qquad \forall a\ge 0$$

دانشگاه مازندران

تابع نرخ خطر (خرابی) تجمعی

تابع نرخ خطر تجمعی را با $H(t)$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(t) = \int_{0}^{t} h(x)\,dx,$$

که در آن $h(.)$ تابع نرخ خطر (خرابی) می‌باشد.

تذکر

$$\begin{aligned}\int_{0}^{t} h(x)\,dx &= \int_{0}^{t} \frac{f(x)}{1-F(x)}\,dx = -\ln[1-F(x)]\Big|_{0}^{t} \\ &= -\ln[1-F(t)] = -\ln R(t) \implies \boxed{H(t) = -\ln R(t)}\end{aligned}$$

دانشگاه مازندران

قضیه ۲

فرض کنید که $T_۱$ و $T_۲$ متغیرهای طول عمر با تابع نرخ خرابی $h_۱$ و $h_۲$ و توابع قابلیت اعتماد $R_۱$ و $R_۲$ باشند. آنگاه برای هر $t > ۰$ داریم:

$$\text{اگر} \quad h_۱(t) \le h_۲(t) \implies R_۱(t) \ge R_۲(t)$$

تفسیر: هرچه نرخ خرابی یک سیستم کمتر باشد می‌توان به آن سیستم اعتماد بیشتری کرد.

میانگین طول عمر

اگر T طول عمر یک قطعه (یا یک سیستم) با تابع چگالی $f(t)$ و تابع توزیع $F(t)$ باشد، در اینصورت میانگین طول عمر یا میانگین تا زمان خرابی این قطعه می‌شود:

$$E(T) = \int_{0}^{\infty} t\, f(t)\, dt$$

قضیه ۳: رابطه بین میانگین طول عمر و تابع قابلیت اعتماد

$$E(T) = \int_{0}^{\infty} [1 - F(t)]\, dt \qquad \text{یا} \qquad E(T) = \int_{0}^{\infty} R(t)\, dt$$

دانشگاه مازندران

مثال

طول عمر یک سیستم الکتریکی برحسب سال یک متغیر تصادفی T می‌باشد که تابع قابلیت اعتماد آن به‌صورت زیر است:

$$R(t) = \frac{1}{(1+t)^2}, \quad t \geq 0$$

میانگین طول عمر سیستم را بیابید.

مثال

طول عمر یک باتری برحسب سال یک متغیر تصادفی T می‌باشد که تابع قابلیت اعتماد آن به‌صورت زیر است:

$$R(t) = e^{-t^2}, \qquad t > 0$$

میانگین طول عمر سیستم را بیابید.

دانشگاه مازندران

مثال

تابع توزیع طول عمر یک قطعه اکتریکی بر حسب ماه به‌صورت زیر است:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{t^{۴}}{۲۵۶} & ۰ < t < ۴ \\ ۱ & t \geq ۴ \end{cases}$$

الف) تابع نرخ خرابی این قطعه را بیابید.

ب) میانگین طول عمر قطعه را تعیین کنید.

ج) قابلیت اعتماد قطعه در زمان $t = ۲$ چقدر است؟

تمرین ۱. اگر قابلیت اعتماد یک سیستم (برحسب ماه) به‌صورت زیر باشد:

$$R(t) = e^{-2t-3t^2}, \qquad t \geq 0$$

الف) تابع نرخ خطر را پیدا کنید.

ب) نرخ خطر سیستم در سن $t = 3$ چقدر است؟

تمرین ۲. فرض کنید تابع نرخ خطر یک سیستم تا سن t_1 (برحسب سال) یک مقدار ثابت h_1 باشد و بعدا به مقدار ثابت h_2 افزایش پیدا می‌کند $(h_2 > h_1)$. یعنی

$$h(t) = \begin{cases} h_1 & 0 \leq t \leq t_1 \\ h_2 & t_1 < t < \infty \end{cases}$$

مطلوب است:

الف) قابلیت اعتماد سیستم یعنی $R(t)$.

ب) قابلیت اعتماد سیستم در سن $\frac{3}{2}t_1$ را بیابید، وقتی که $h_1 = \frac{1}{3}$، $h_2 = \frac{1}{2}$ و $t_1 = 6$.

ج) احتمال اینکه سیستم حداقل ۹ سال عمر کند اما قبل از ۱۰ سال از کار بیفتد چقدر است؟