قضیه ۱. ۳۵ هرگاه $[A]$ و $[B]$ ماتریسهای $n\times n$ باشند، آنگاه

$$\det([B][A]) = \det[B]\det[A]. \tag{۳}$$

اثبات. هرگاه $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ستونهای $[A]$ باشند، تعریف

$$[A] = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

علامت $\det([B][A]) = \Delta_B[A]$ را توجیه می‌کنیم. بنابراین ستونهای ماتریس $[B][A]$ بردارهای $Bu_1, Bu_2, \ldots, Bu_n$ هستند. پس

$$\Delta_B(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det(Bu_1, Bu_2, \ldots, Bu_n)$$

با توجه به مؤلفه‌های ماتریس $[A]$ تعریف $a(i,j)$، داریم $u_j = \sum_{i=1}^{n} a(i,j)e_i$. بنابراین داریم

$$\Delta_B[A] = \Delta_B\left(\sum_{i=1}^{n} a(i,1)e_i, u_2, \ldots, u_n\right) = \sum_{i=1}^{n} a(i,1)\Delta_B(e_i, u_2, \ldots, u_n).$$

با تکرار این عمل روی $u_2, \ldots, u_n$ داریم

$$\Delta_B[A] = \sum a(i_1,1)a(i_2,2)\cdots a(i_n,n)\Delta_B(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}), \tag{۴}$$

این مجموع روی تمام n تاییهای مرتب $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ که $1 \le i_r \le n$، گرفته می‌شود. با جابجایی در ستونهای $(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})$ داریم

$$\Delta_B(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) = s(i_1, i_2, \ldots, i_n)\Delta_B(e_1, \ldots, e_n) \tag{۵}$$

چون می‌دانیم $[B][I] = [B]$، پس

$$\Delta_B[I] = \Delta_B(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \det[B] \tag{۶}$$

با جایگذاری (۶) در (۵) و سپس جایگذاری (۵) در (۴)، بدست می‌آوریم

$$\det([B][A]) = \left\{\sum a(i_1,1)\cdots a(i_n,n)s(i_1, \ldots, i_n)\right\}\det[B]$$

می‌دانیم که طبق تعریف داخل دو ابرو برابر $\det[A]$ است. پس قضیه ثابت می‌گردد.

قضیه ۱. ۳۶. عملگر خطی A بر R^n معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر $\det[A] \neq 0$.

اثبات. هرگاه A معکوس‌پذیر باشد، طبق قضیه ۱.۳۵ داریم

$$\det[A]\det[A^{-1}] = \det[AA^{-1}] = \det[I] = 1$$

پس $\det[A] \neq 0$. برعکس هرگاه A معکوس‌پذیر نباشد، ستون‌های $a_1, a_2, \ldots, a_n$ از ماتریس $[A]$ نامستقل است. در این صورت یکی از ستون‌های آن مثلاً a_k هست که در ترکیب زیر برای اسکالرهای c_j صدق می‌کند،

$$a_k + \sum_{j \neq k} c_j a_j = 0 \tag{7}$$

براساس قضیه ۱.۳۴، اگر a_k را با ستون $a_k + c_j a_j$ عوض کنیم، در دترمینان تغییری صورت نمی‌گیرد. با تکرار این عمل برای همه jهای مخالف k، می‌توان a_k را با سمت چپ (7)، یعنی با صفر عوض کنیم، در دترمینان تغییر بوجود نمی‌آید. و ما می‌دانیم دترمینان یک ماتریس با داشتن یک ستون برابر صفر، برابر صفر خواهد شد. پس $\det[A] = 0$. بنابراین حکم حاصل می‌شود.

در تبصره زیر می‌خواهیم نشان دهیم که اگر در یک ماتریس بخواهیم مؤلفه‌های آن را مانند قسمت ۱.۹ براساس پایه‌های فضای R^n بدست آوریم، طبیعی است که برای هر پایه در نظر گرفته، مؤلفه‌های خاص خودش را خواهیم داشت. پس اگر پایه متعارف $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ را برای R^n در نظر بگیریم و نمایش ماتریسی $[A]$ در این حالت داشته باشیم، اگر پایه را عوض کنیم و فرض کنیم $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ پایه دیگری از R^n باشد، نمایش ماتریسی آن را با علامت $[A]_u$ در نظر خواهیم گرفت. یعنی فرض کنید $[A] = [a_{ij}]$ و $[A]_u = [\alpha_{ij}]$.

یعنی

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \,, \qquad Au_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i \tag{8}$$

البته از جبر خطی داریم که می‌توان ماتریس تبدیل پایه‌های مختلف را بدست آورد. یعنی می‌توان فرض کرد که ماتریس B تبدیل دو پایه داده شده نسبت به هم باشند یعنی برای هر j، $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i = Be_j = u_j$. به عبارتی نمایش ماتریسی B با مؤلفه‌های b_{ij} است. هرگاه در (8) به جای u_k مقدار Be_k قرار دهیم

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} Be_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \Big(\sum_{i=1}^{n} b_{ik} e_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} b_{ik} \alpha_{kj} \Big) e_i \tag{9}$$

با توجه به رابطهٔ داده در (۸) و جایگزینی u_j با Be_j، داریم

$$Au_j = ABe_j = A\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj} e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} Ae_k$$

مجدداً به جای Ae_k از رابطهٔ اول (۸) استفاده می‌کنیم و داریم

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right) e_i \qquad (10)$$

حال با مقایسه (۹) و (۱۰) که با هم برابرند، نتیجه می‌گیریم که $\sum_{i,j} b_{ik}\alpha_{kj} = \sum_{i,j} a_{ik} b_{kj}$.

پس در این ضرب می‌توان نتیجه گرفت که $[B][A]_U = [A][B]$.

چون ماتریس تبدیل پایه‌ها (براساس جبر خطی) معکوس‌پذیر است، فلذا طبق قضیه ۱.۳۶، $\det[B] \neq 0$. پس با توجه به قضیه ۱.۳۵

$$\det[B]\det[A]_U = \det[A]\det[B]$$

با ساده کردن طرفین به $\det[B]$، خواهیم داشت $\det[A]_U = \det[A]$.

نکته. با این تبصره می‌توان نشان داد که $\det$ یک ماتریس مستقل از انتخاب پایه است.

۱.۳۸ ژاکوبی‌ها

به قضیه ۱.۱۷ برمی‌گردیم و از آنجا برای تابع f مشتق‌پذیر بر مجموعه باز $E \subset R^n$ و برای هر نقطه $x \in E$، مؤلفه‌های ماتریس $f'(x)$ را به شکل زیر داشتیم

$$[f'(x)] = \begin{bmatrix} (D_1 f_1)(x) & \cdots & (D_n f_1)(x) \\ \vdots & & \\ (D_1 f_n) & \cdots & (D_n f_n)(x) \end{bmatrix}_{n\times n}$$

که $D_i f_j$ مشتقات جزئی تابع f هستند. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$J_f(x) = \det[f'(x)]$$

که آن را ژاکوبی f در x می‌نامیم.

چون $f: E\subset R^n \to R^n$ در توابع گرفته شده، فرض کنید $(y_1,y_2,\ldots,y_n)=f(x_1,\ldots,x_n)$ باشد به عبارتی $y_1, y_2, \ldots, y_n$ مؤلفه‌های $f(x)$ است که $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ است. شکل ژاکوبین $J_f(x)$ به صورت زیر خواهد بود

$$J_f(x) = \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

$$= \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

۳۹.۱ مشتقات مراتب بالاتر

فرض کنید f تابع حقیقی بر مجموعه باز $E\subset R^n$ تعریف شده است و مشتقات جزئی آن یعنی D_1f ، D_2f ، ... ، D_nf هستند. هرگاه این مشتقات جزئی یعنی D_jf ها توابع مشتق‌پذیر باشند، مشتقات جزئی مرتبه دوم f به صورت زیر بدست می‌آیند

$$D_{ij} f = D_i(D_j f) \qquad i,j = 1,2,\ldots,n$$

حال اگر تمام $D_{ij}f$ ها در E پیوسته باشند، می‌گوییم f در E از رده C'' (البته آن را e'' نخوانید، بلکه سی زگوند بخوانید) که در واقع C بزرگ است و بطور خلاصه می‌گوییم $f\in C''(E)$.

مثال. فرض کنید $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ برای $(x,y)\neq(0,0)$ و برای $f(0,0)=0$. می‌خواهیم $D_1f(0,0)$ و $D_2f(0,0)$ را بدست آوریم

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(t)(0)}{t^2+0^2}-0}{t} = 0$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(0)(t)}{0^2+t^2}-0}{t} = 0$$

نشان می‌دهد که D_1f و D_2f در نقطه $(0,0)$ پیوسته هستند. حال مشتق تمام آنها را

بررسی می‌کنیم

$$(D_1 f)(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - 2x(xy)}{(x^2+y^2)^2}$$

حال $D_{21}f$ را در نقطه $(0,0)$ محاسبه می‌کنیم

$$D_{21}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{D_1f(0,t)-D_1f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t(0+t^2)-0}{(0+t^2)^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}$$

تعریف نشده است

یعنی $D_{21}f$ در $(0,0)$ وجود ندارد.

مثال. برای $(x,y)\neq(0,0)$، تعریف می‌کنیم $f(x,y)=\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ و $f(0,0)=0$.

چون $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ بین ۱- و ۱ است بنابراین $-xy \leq f(x,y) \leq xy$

بنابراین $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$، یعنی تابع نه تنها در $(0,0)$ پیوسته هست، بلکه در R^2 پیوسته خواهد بود. حال مشتقات جزئی آن را بررسی می‌کنیم

$$(D_1f)(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t\times 0\,(t^2-0)}{t^2+0}}{t}=0$$

به همین ترتیب $(D_2f)(0,0)=0$. یعنی D_1f و D_2f بر R^2 پیوسته هستند.

حال مشتق بالاتر را بررسی می‌کنیم

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(D_1f)(x,y)=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$(D_{21}f)(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{(D_1f)(0,t)-(D_1f)(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-t^5}{t^4}-0}{t}=-1$$

هرگاه به همین ترتیب $(D_{12}f)(0,0)$ را محاسبه کنیم، برابر صفر یک خواهد شد، پس در این مثال مشتق دوم جزئی آن پیوسته نمی‌باشد.

در حالت مشتق مرتبه اول توابع حقیقی مقدار f بر بازه $[a,b]$ که بر بازه باز (a,b) مشتق‌پذیر است، می‌توان نقطه $x\in(a,b)$ پیدا کرد که رابطه زیر که تحت عنوان قضیه مقدار میانگین است بدست آورد.

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(x) \qquad (1)$$

حال در حالت دو متغیره، هرگاه f بر مجموعه باز $E\subset R^2$ تعریف شده و D_1f و $D_{21}f$ در هر نقطه E وجود داشته باشند و مستطیل $Q\subset E$ را که یک مستطیل بسته با اضلاع موازی محورهای مختصات است و نقاط (a,b) و $(a+h,b+k)$ رئوس متقابل آن می‌باشد، در نظر بگیریم در این صورت نقطه‌ای مانند $(x,y)\in Q$ هست بطوری که

$$f(a+h,b+k)-f(a+h,b)-f(a,b+k)+f(a,b)=hk\,(D_{21}f)(x,y) \qquad (2)$$

بنابراین رابطه (۲) را می‌توان قضیه مقدار میانگین برای توابع دو متغیره نام برد.

تذکر: در رابطه (۲) سمت چپ را می‌توان با علامت $\Delta(f,Q)$ نام برد.

قضیه ۴۱.۱ فرض کنیم f بر مجموعه بازی مانند $E\subset R^2$ تعریف شده است؛ توابع D_1f، $D_{21}f$ و D_2f در هر نقطه E وجود دارند و $D_{21}f$ در نقطه‌ای مانند $(a,b)\in E$ پیوسته است. در این صورت $D_{12}f$ در (a,b) وجود دارد و

$$(D_{12}f)(a,b)=(D_{21}f)(a,b)$$

اثبات. از رابطه (۲) داریم

$$\lim_{k\to 0}\frac{\Delta(f,Q)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)}{k}-\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$$

$$=(D_2f)(a+h)-(D_2f)(a,b) \qquad (3)$$

چون طبق فرض $(D_{21}f)$ در هر نقطه E موجود است، فرض کنید $A=(D_{21}f)(a,b)$.

و باز به دلیل فرض پیوستگی $(D_{21}f)$ در نقطه $(a,b)\in E$، برای هر $\varepsilon>0$ و h و k به قدر کافی کوچک، برای هر $(x,y)\in Q$، خواهیم داشت

$$|A-(D_{21}f)(x,y)|<\varepsilon \qquad (4)$$

با توجه به رابطه (۲)، داریم

$$\left|\frac{\Delta(f,Q)}{hk}-A\right|<\varepsilon \qquad (5)$$

اگر در این رابطه ابتدا h را ثابت گرفته و $k\to 0$، می‌توانیم از رابطه (۳) کمک گرفته و در رابطه (۵) $k\to 0$ میل دهیم و خواهیم داشت

$$\left|\frac{(D_2f)(a+h,b)-(D_2f)(a,b)}{h}-A\right|\le\varepsilon \qquad (6)$$

چون ε دلخواه است و رابطه (۶) برای کلیه $h\neq 0$ و کوچک برقرار است، پس می‌توان نتیجه گرفت $A=(D_{12}f)(a,b)$. بدین ترتیب حکم برقرار است.

مشتق‌گیری از انتگرال

در این بخش دو مفهوم مشتق و انتگرال را برای یک تابع دو متغیره بحث می‌نماییم. یعنی می‌خواهیم هم‌زمان از این تابع نسبت به یک متغیر انتگرال گرفته و نسبت به متغیر دیگر از تابع مشتق بگیریم. سوالی که مطرح است این که تحت چه شرایطی این دو عمل نسبت به هم جابجا می‌شوند و این جابجایی تاثیری در مقدار حاصل ندارد؟ به عبارتی برای تابع دو متغیره φ می‌توان تحت چه شرایطی ثابت کرد که معادله زیر درست است

$$\frac{d}{dt}\int_a^b\varphi(x,t)\,dx=\int_a^b\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dx \qquad (1)$$

به مثال زیر توجه کنید.

فرض کنید برای $t\ge 0$ تابع دو متغیره زیر تعریف شود

$$\varphi(x,t)=\begin{cases}x & 0\le x\le\sqrt{t}\\ -x+2\sqrt{t}, & \sqrt{t}\le x\le 2\sqrt{t}\\ 0 & \text{در سایر جاها}\end{cases}$$

صفحه ۳۸

و اگر $t<0$ قرار دهید $\varphi(x,t)=-\varphi(x,|t|)$. براحتی می‌توان بررسی کرد که این تابع بر R^2 پیوسته است و برای هر x، $(D_2\varphi)(x,0)=0$ زیرا می‌دانیم که برای $x\neq 0$ مقدار $\varphi(x,t)=0$ و برای $t\to 0$، مقادیر $2\sqrt{t}$ و $2\sqrt{|t|}$ خیلی بسیار کوچک هستند و فقط مقدار $\varphi(x,t)$ از ضابطه سوم برخوردار است یعنی برابر صفر می‌گردد. پس

$$D_2\varphi(x,0)=\lim_{t\to 0^\pm}\frac{\varphi(x,t)-\varphi(x,0)}{t}=\lim_{t\to 0^\pm}\frac{0-0}{t}=0$$

از طرفی نیز برای $0\leq t\leq \frac{1}{4}$

$$\int_{-1}^{1}\varphi(x,t)\,dx=\int_{-1}^{0}\varphi(x,t)\,dx+\int_{0}^{\sqrt{t}}\varphi(x,t)\,dx+\int_{\sqrt{t}}^{2\sqrt{t}}\varphi(x,t)\,dx$$
$$+\int_{2\sqrt{t}}^{1}\varphi(x,t)\,dx=0+\int_{0}^{\sqrt{t}}x\,dx+\int_{\sqrt{t}}^{2\sqrt{t}}(-x+2\sqrt{t})\,dx$$
$$+0$$

انتگرال اول و چهارم، چون $\varphi(x,t)$ در آن فاصله برابر صفر است. با محاسبه دو انتگرال داریم

$$\int_{-1}^{1}\varphi(x,t)\,dx=t$$

برای فاصله $-\frac{1}{4}\leq t\leq 0$ نیز همین مقدار حاصل می‌گردد. پس برای $|t|<\frac{1}{4}$ مقدار انتگرال برابر t است، یعنی $f(t)=t=\int_{-1}^{1}\varphi(x,t)\,dx$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$1=f'(t)\neq\int_{-1}^{1}(D_2\varphi)(x,0)\,dx=\int_{-1}^{1}0\,dx=0$$

نتیجه، در این مثال نشان داده که رابطه (1) برای چنین تابع برقرار نیست.

قضیه ۱.۴۲ فرض کنید $\varphi(x,t)$ برای $a\leq x\leq b$ و $c\leq t\leq d$ تعریف شده باشد، برای هر $t\in[c,d]$، تابع $\varphi^t(x)=\varphi(t,x)$ انتگرال‌پذیر باشد، برای هر $c<s<d$ تابع $D_2\varphi(x,t)$ پیوسته باشد. با تعریف

$$f(t)=\int_a^b\varphi(x,t)\,dx \qquad c\leq t\leq d$$

آنگاه، تابع $D_2\varphi(x,s)=(D_2\varphi)^s(x)$، انتگرال‌پذیر است بر $[a,b]$. و $f'(s)$ موجود باشد و

$$f'(s) = \int_a^b (D_2\varphi)(x, s)\,dx$$

(به عبارتی، شرایط در این قضیه فراهم شود که رابطه (۱) حاصل شود)

اثبات. براساس فرض پیوستگی $D_2\varphi(x,t)$ در نقطه s (نیز به ثابت هست)، برای هر $\varepsilon>0$، عدد $\delta>0$ وجود دارد به قسمی برای هر x ثابت در $[a,b]$ و هر t در فاصله $(s-\delta, s+\delta)$ داریم

$$|(D_2\varphi)(x,t) - (D_2\varphi)(x,s)| < \varepsilon \qquad (2)$$

برای تمام t های که $|t-s|<\delta$، تعریف می‌کنیم

$$\psi(x,t) = \frac{\varphi(x,t) - \varphi(x,s)}{t-s} \qquad (3)$$

طبق قضیه مقدار میانگین عددی مابین s, t مانند u وجود دارد که

$$(D_2\varphi)(x,u) = \frac{\varphi(x,t) - \varphi(x,s)}{t-s} \qquad (4)$$

با مقایسه (۳)، (۴) $\psi(x,t) = (D_2\varphi)(x,u)$ حاصل می‌شود، برای چنین u ای طبق رابطه (۲) داریم، $|(D_2\varphi)(x,u) - (D_2\varphi)(x,s)| < \varepsilon$، در نتیجه

$$|\psi(x,t) - (D_2\varphi)(x,s)| < \varepsilon \qquad (5)$$

نشان می‌دهد که همگرایی $\psi(x,t)$ به $(D_2\varphi)(x,s)$ بر بازه $[a,b]$ یکنواخت می‌باشد. حال می‌توانیم از این مفهوم استفاده کنیم و از طرفین رابطه زیر حد بگیریم

$$\frac{f(t) - f(s)}{t-s} = \int_a^b \psi(x,t)\,dx$$

با توجه به همگرایی یکنواخت بیان شده، جای حد و انتگرال تعویض می‌شود

$$\lim_{t\to s} \frac{f(t) - f(s)}{t-s} = \int_a^b \lim_{t\to s} \psi(x,t)\,dx$$

$$= \int_a^b (D_2\varphi)(x,s)\,dx$$ با توجه به رابطه (۵)

و بنابراین حکم ثابت می‌گردد

فصل دوم

انتگرال گیری

در فصل ششم این کتاب (اصول آنالیز ریاضی رودین) دانشجو با مقدمات انتگرال ریمان و قضایای مربوطه، آشنا شده است. در آنجا، توابع حقیقی مقدار و دامنه تعریف آنها بازه $[a,b]$ بوده است. در این فصل توابع حقیقی چندمتغیره بحث می شود، به عبارتی دامنه تعریف چنین توابعی زیرمجموعه های خاصی از R^n می باشند.

تعریف ۲.۱ (تعریف انتگرال مکرر یک تابع چندمتغیره)

فرض کنید I^k حجره k بعدی در R^k که شامل تمام $x=(x_1,\dots,x_k)$ های که

$$a_i \le x_i \le b_i, \qquad i=1,2,\dots,k \qquad (1)$$

به همین ترتیب I^j را حجره j بعدی در R^j می نامیم که با j نامساوی همانند (1) تعریف می شود. تابع f را یک تابع پیوسته حقیقی بر I^k در نظر بگیریم.

به مثال زیر توجه کنید.

$$\int_0^1 (-x+2\sqrt{t})\,dx = -1+2\sqrt{t}$$

یعنی از یک متغیر x انتگرال گرفتیم و نتیجه به تابع $-1+2\sqrt{t}$ رسیدیم که یک تابع تک متغیره است. پس اگر از یک تابع حقیقی k متغیره نسبت به یک متغیر انتگرال بگیریم، به یک تابع با $k-1$ متغیر خواهیم رسید. پس قرار می دهیم $f=f_k$ و f_{k-1} را بر I^{k-1} به صورت زیر

$$f_{k-1}(x_1,\dots,x_{k-1}) = \int_{a_k}^{b_k} f_k(x_1,\dots,x_{k-1},x_k)\,dx_k$$

تعریف می کنیم. این فرآیند را می توان تکرار کرد (با انتگرال گیری مکرر) و توابع پیوسته f_j بر حجره I^j به دست آورد، بطوریکه f_{j-1}، انتگرال f_j نسبت به x_j بر بازه $[a_j,b_j]$ است. پس از k بار انتگرال گیری به عدد f_0 می رسیم، که آن را انتگرال f روی I^k می نامیم. این عدد به شکل زیر می باشد

$$f_0=\int_{I^k} f \quad \text{یا} \quad f_0=\int_{I^k} f(x)\,dx$$