

تابه حال روابط عدم قطعیت

$$\Delta x \Delta k \geq 1$$

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar$$

راش هد کرده ایم. آشکار است که اگر سعی کنیم یک بسته موج بسیار جاگزیده

در فضای x بسیار یعنی اگر بخواهیم Δx را خیلی کوچک کنیم، آنگاه نسبت

دادن یک تکانه کاملاً معین به آن بسته موج غیر ممکن می شود.

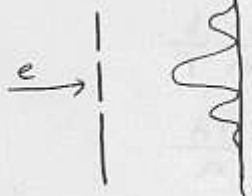
در فیزیک کلاسیک، تکانه مکان مستقل از یکدیگرند. اما در مکانیک کوانتومی،

مکان و تکانه ویژگی های مکمل یکدیگرند. بر اساس نظریه مکانیک کوانتومی هرگز

همزمان مکان و تکانه را به طور همزمان تعیین کرد.

مثال (آزمایش دوشکافی)

عمود بارنگه الکترونی از دوشکافی نامتجانس یک طرح تداخلی عبور روی پرده می شود.



طرح تداخلی

(رفتاری مشابه با امواج)

اگر سعی کنیم که تعیین کنیم الکترون از کدام

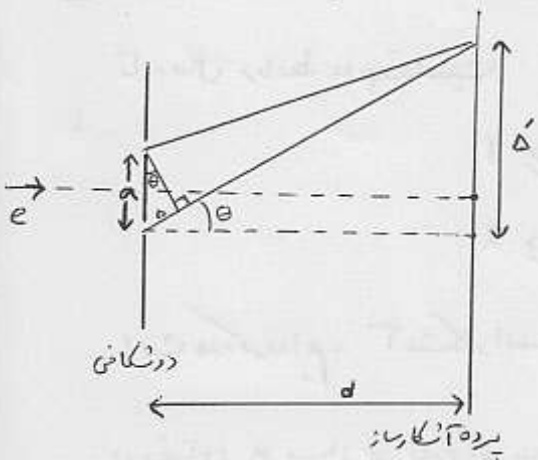
شکاف عبور کرده است، طرح تداخلی

از بین می رود.

می توان با استفاده از اصل عدم قطعیت نشان داد که تعیین شکاف گذر الکترون

باعث خراب شدن نقش تداخل می شود.

ص ۲



$$\sin \theta = \frac{\Delta}{a}$$

$$\Delta = a \sin \theta = n \lambda \quad \text{شرط تداخل سازنده}$$

$$\sin \theta_n = \frac{n \lambda}{a}$$

$$\text{از طرف دیگر: } \sin \theta = \frac{\Delta'}{\sqrt{d^2 + \Delta'^2}} = \frac{\Delta'}{d \sqrt{1 + \frac{\Delta'^2}{d^2}}} \approx \frac{\Delta'}{d}$$

$$\Delta' = d \sin \theta$$

Δ' فاصله بین بیشینه‌های مجاور

$$\Delta' \approx d \sin \theta_{n+1} - d \sin \theta_n = \frac{d(n+1)\lambda}{a} - \frac{dn\lambda}{a} = \frac{d\lambda}{a}$$

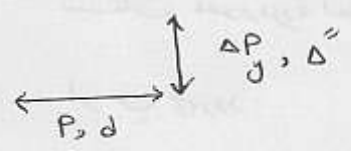
اگر به کمک دیده بان سعی کنیم محل شکاف عبور امواج را بسازیم

$$\Delta y < \frac{a}{r} \xrightarrow{\text{since } \Delta y \Delta p > h} \Delta p > \frac{h}{\Delta y} \rightarrow$$

$$\Delta p > \frac{r h}{a} \rightarrow$$

$$\frac{\Delta p}{p} > \frac{r}{a} \frac{h}{p}$$

$$\frac{\Delta p}{p} > \frac{r \lambda}{a}$$



$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta''}{d} \rightarrow \Delta'' = \frac{\Delta p}{p} d > \frac{r \lambda d}{a} > \text{فاصله بین بیشینه‌های مجاور}$$

پس در صورت داشتن $\Delta y < \frac{a}{r}$ ، مراج تداخلی ضراب می‌شود.

در الگوی اتمی بور، مدارها با شعاع $R_n = \frac{n^2 \hbar}{m a c}$ داده می شود.

اگر به دنبال آزمایشی باشیم که مکان الکترون در اتم را با دقت اندازه گیری کند یعنی

$$\Delta x \ll R_n - R_{n-1} \approx \frac{2n\hbar}{m a c}$$

آنگاه براساس اصل عدم قطعیت $\Delta x \Delta p \gg \hbar$ به دست می آید

$$\Delta p \gg \frac{m c \alpha}{2n}$$

در این صورت عدم قطعیت در انرژی الکترون برابر می شود با

$$E = \frac{P^2}{2m}$$

$$\Delta E \approx \frac{P \Delta P}{m} \gg \left(\frac{m c \alpha}{n} \right) \left(\frac{\alpha c}{2n} \right) = \frac{1}{2} \frac{m c^2 \alpha^2}{n^2}$$

$$\Delta E = \frac{2P \Delta P}{2m}$$

که معلوم می شود ΔE خیلی بزرگ تر از انرژی بستگی الکترون در مدار است.

پس این اندازه گیری به احتمال زیاد الکترون را از مدار خارج می کند.

$$R_n = \frac{n^2 \hbar}{m a c}$$

یادآوری: الگوی اتمی بور

$$V_n = \frac{\alpha c}{n}$$

$$P_n = \frac{m \alpha c}{n}$$

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{m c^2 \alpha^2}{n^2}$$

برآورد مرتبه بزرگی

مثال) اتم هیدروژن

اگر حلقه شعاعی اکسون در اتم r باشد، آنگاه انرژی عبارت است از

$$E = \frac{P^r}{2m} - \frac{e^r}{r}$$

اصل عدم قطعیت را می توان صورت $\Delta p \Delta x \sim h$ در نظر گرفت.

$$E = \frac{h^r}{2mr^2} - \frac{e^r}{r} \quad \star \quad \text{در این صورت}$$

مقدار کمینه انرژی از رابطه زیر بدست می آید.

$$\frac{\delta E}{\delta r} = 0$$

$$-\frac{h^r}{mr^3} + \frac{e^r}{r^2} = 0$$

$$-\frac{h^r}{mr} + e^r = 0 \rightarrow r = \frac{h^r}{me^r} = \frac{h}{m c \alpha}$$

$$\alpha = \frac{e^r}{hc}$$

با قراردادن r در رابطه \star مقدار انرژی بدست می آید

$$E = -\frac{1}{2} m c^2 \alpha^2$$

به نظر می رسد که می توان از اصل عدم قطعیت برای برآورد مرتبه بزرگی برخی کمیت ها

در مسائل مختلف بهره برد.

ص 5

فصل ۳ - معادله موج شرودینگر و تفسیر احتمالاتی

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \phi(p) e^{i(px-Et)/\hbar} \quad \text{I}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \phi(p) i\hbar \frac{-iE}{\hbar} e^{i(px-Et)/\hbar}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \phi(p) E e^{i(px-Et)/\hbar}$$

فرض $E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \phi(p) \left(\frac{p^2}{2m} + V \right) e^{i(px-Et)/\hbar}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \phi(p) \frac{p^2}{2m} e^{i(px-Et)/\hbar}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \phi(p) V e^{i(px-Et)/\hbar}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \phi(p) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) e^{i(px-Et)/\hbar} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \phi(p) V(x) e^{i(px-Et)/\hbar} =$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \phi(p) e^{i(px-Et)/\hbar}}_{\Psi(x,t)}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(r,t)}{\partial r^2} + V(r) \Psi(r,t)$$

معادله دیفرانسیل مربوط به ذره با انرژی $E = \frac{p^2}{2m} + V(r)$

(II)

اگر ذره مورد نظر، ذره آزاد باشد، آنگاه: $V=0$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(r,t)}{\partial r^2}$$

معادله شرودینگر
ذره آزاد

(III)

معادله شرودینگر خطی است. اگر چند جواب برای آن وجود داشته باشد، ترکیب خطی جوابهای ممکن نیز جواب خواهد بود.

اگر ψ_1 و ψ_2 دو جواب ممکن برای معادله II باشد:

$$\left. \begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_1 &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi_1 + V \psi_1 \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_2 &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi_2 + V \psi_2 \end{aligned} \right\}$$

برای امتحان
تعمیق کردیم \rightarrow

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [\alpha \psi_1 + \beta \psi_2] = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [\alpha \psi_1 + \beta \psi_2] + V [\alpha \psi_1 + \beta \psi_2]$$

آنگاه راست که تابع $\alpha \psi_1 + \beta \psi_2$ نیز در معادله شرودینگر صدق می کند

پس $\alpha \psi_1 + \beta \psi_2$ (ترکیب خطی دلخواه از ψ_1 و ψ_2) نیز جواب است.

ص

برای ذره تحت پتانسیل $V(x)$

$$\text{معادله دیفرانسیل} \quad i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x,t) \quad \textcircled{II}$$

عمومی ترین جواب: $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \phi(p) e^{i(px - Et)/\hbar}$

برای ذره آزاد ($V=0$)

$$\text{معادله دیفرانسیل} \quad i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} \quad \textcircled{III}$$

عمومی ترین جواب $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \phi(p) e^{i(px - \frac{p^2}{2m}t)/\hbar} \quad \textcircled{III-b}$

معادله III بر حسب متغیر زمان از مرتبه اول است. اگر مقدار تابع موج در زمان اولیه $t=0$:

به صورت $\Psi(x,0)$ معلوم باشد، می توان مقدار آن را در زمان های دیگر به دست آورد.

با قراردادن $\Psi(x,0)$ در معادله $\textcircled{III-b}$ می توان $\phi(p)$ را به دست آورد و

با یافتن $\phi(p)$ و قراردادن در $\textcircled{III-b}$ همه $\Psi(x,t)$ ها در هر زمان را

به دست می آید.

$$\textcircled{III-b} \quad t=0 : \Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \phi(p) e^{ipx/\hbar}$$

$$\int \Psi(x,0) e^{-ip'x/\hbar} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \int dp e^{i(p-p')x/\hbar} \phi(p)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \phi(p) 2\pi\hbar \delta(p-p')$$

ص

$$= \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \phi(p')$$

$$\rightarrow \phi(p') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \psi(x,0) e^{-\frac{ip'x}{\hbar}} \rightarrow \begin{array}{l} \psi(x,0) \text{ با داشتن} \\ \phi(p') \text{ توابعیم} \\ \text{رابطه است آوردیم.} \end{array}$$

حال با داشتن $\phi(p)$ در قرارداد آن در رابطه

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \phi(p) e^{\frac{ipx}{\hbar} - \frac{ip^2t}{2m\hbar}}$$

می توان در هم زمان های دیگر $\psi(x,t)$ رابطه آورد.

$$* \text{ در اثبات رابطه فوق از رابطه } \int dx e^{\frac{i(p-p')x}{\hbar}} = 2\pi\hbar \delta(p-p') \text{ استفاده کرده است.}$$