که به عنوان مجموعه جواب ~~مجموعه~~ برای ~~سیستم~~ نامعادله خطی در R^n است.

اگر C مستطیل غیرمنفی از R^n باشد، در این صورت AC مجموعه بردارهای $y \in R^m$ است که معادله $Ax=y$ دارای جواب $x \geq 0$ است.

قضیه ۵.۳. فرض کنید C و D به ترتیب مجموعه های کوژ از R^m و R^p باشند، در این صورت

$$C \oplus D = \{ x=(y,z) \mid y \in C ; z \in D \}$$

مجموعه کوژ در R^{m+p}.

اثبات بدیهی است.

$C \oplus D$ در قضیه قبل را جمع مستقیم C و D می نامیم. این موضوع نیز برای جمع معمولی $C+D$ که $C \subset R^n$ و $D \subset R^m$ بکار تعریف می شود، اگر برای هر بردار $x \in C+D$ را به صورت یکتا به ~~صورت~~ فرم $x = y+z$ که $y \in C$ و $z \in D$ ارائه داد.

این در صورتی اتفاق می افتد که اگر فقط اگر مجموعه های متقارن $C-C$ و $D-D$ تنها بردار مشترک صفر از R^n باشند (که لزوماً اینصورت R^n را می توان به صورت جمع مستقیم دو زیرفضا که اولی شامل C و دیگری شامل D است نوشت).

قضیه ۶.۳ فرض کنید C_1 و C_2 مجموعه های کوژ در R^{m+p} و فرض کنید C مجموعه بردارهای $x=(y,z)$ (که $y \in R^m$ و $z \in R^p$) بطوری که بردارهای z_1 و z_2 با $(y,z_1) \in C_1$ و $(y,z_2) \in C_2$ و $z_1 + z_2 = z$. در این صورت C یک مجموعه محدب در R^{m+p}.

اثبات. فرض کنید $(y,z) \in C$ و همانند فرض مسئله، z_1 و z_2 را داشته باشیم. نقطه دیگر (y',z') را هم فرض می کنیم و z'_1 و z'_2 نیز به مانند فرض مسئله باشند. در این صورت برای $0 \leq \lambda \leq 1$، $y'' = (1-\lambda)y + \lambda y'$ و $z'' = (1-\lambda)z + \lambda z'$ داریم:

$$(y'', (1-\lambda) z_1 + \lambda z'_1) = (1-\lambda)(y,z_1) + \lambda (y', z'_1) \in C_1$$

$$(y'', (1-\lambda) z_2 + \lambda z'_2) = (1-\lambda)(y,z_2) + \lambda (y', z'_2) \in C_2$$

با در نظر گرفتن $z'' = (1-\lambda)(z_1+z_2) + \lambda(z'_1+z'_2)$
$= ((1-\lambda)z_1 + \lambda z'_1) + ((1-\lambda)z_2 + \lambda z'_2)$

$(1-\lambda)(y,z) + \lambda(y',z') = (y'',z'')$
بنابراین بردار در C قرار دارد

جلسه ۲۲

در قضیه ۶.۳ یک عمل توصیف پذیر و شرکت پذیر را برای مجموعه های محدب در R^{n+p} توصیف می کند.

حال برای صرف نظر از سیستم های متعامد خطی از R^n (که اهمیت چندانی ندارند) در این صورت هر یک از مؤلفه ها $y\in R^m$ و $z\in R^p$ نمایش داده می شود. هر یک از این ها برای خود یک نوع عملگر مطابق قضیه ۶.۳ را ارائه دهد (اگر تجزیه ها در R^n بوسیله ~~زیر~~ زیرفضاهای مربوط تجزیه شوند، عملگرهای آنها نیز متفاوت خواهند بود) یک ~~عمل~~ عمل از این نوع را ~~عمل~~ عمل جزئی می نامیم

partial addition

جمع معمولی (یعنی عمل به صورت C_1+C_2) متناظر با حالت $m=0$ از قضیه ۶.۳ بود و عمل اشتراک $C_1\cap C_2$ متناظر با حالت $p=0$ است.

توجه شود که، متناظر با هر مجموعه محدب C از R^n، یک مخروط محدب K از R^{n+1} شامل مبدأ و همه نقاط مشخص با C، یعنی مخروط محدب تولید شده با مجموعه

$$\{(1,x);\ x\in C\}.$$

این تناظر یک به یک می باشد.

این کلاس از مخروط های K تشکیل دسته ای از مخروط های محدب متناظری را می دهند که با نیم ~~فضا~~ فضای $\{(\lambda,x);\ \lambda\geq 0\}$ فقط در نقطه $(0,0)$ اشتراک دارند.

یک عمل در این کلاس از مخروط ها در R^{n+1} متناظر با یک عمل ~~جمع~~ برای مجموعه های محدب در R^n است. تجزیه R^{n+1} به صورت جفت (λ,x) ما را متوجه چهار عمل جزئی در R^{n+1} می کند.

فرض کنید K_1 و K_2 متناظر با مجموعه های محدب C_1 و C_2 باشند. اگر بخواهیم جمع جزئی x را با عناصر K_1 و K_2 نشان دهیم برای، معلوم است که $(1,x)$ در K هست اگر و فقط اگر عناصر $(1,x_1)\in K_1$ و $(1,x_2)\in K_2$ بیابیم که $x=x_1+x_2$ است.

بنابراین برای مجموعه محدب متناظر آنها داریم $C=C_1+C_2$. اگر جمع جزئی دوگانی را در نظر بگیریم که $(1,x)\in K$ باشد اگر و فقط اگر $x=x_1+x_2$ و $1=\lambda_1+\lambda_2$ برای بعضی $(\lambda_1,x_1)\in K_1$ و $(\lambda_2,x_2)\in K_2$. بنابراین C برابر اجتماع تمام مجموعه های $\lambda_1C_1+\lambda_2C_2$ برای $\lambda_1\geq 0$ و $\lambda_2\geq 0$ که $\lambda_1+\lambda_2=1$ و این مخروط $(C_1\cap C_2)$ طبق قضیه ۳.۳ خواهد بود

~~[illegible]~~ هرگاه نه با λ و نه با x جمع صورت نپذیرد. به صفت

اشتراک K_1 و K_2 خواهد بود. و شناختش $C_1 \cap C_2$ می‌باشد. می‌ماند عمل جمع

فقط با λ صورت پذیرد که به صورت $(1, x) \in K$ در نظر گرفته اگر و فقط اگر

$(\lambda_1, x) \in K_1$ و $(\lambda_2, x) \in K_2$ و $\lambda_1 \geq 0$ و $\lambda_2 \geq 0$ و $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ است. بنابراین

$$C = \bigcup \{ \lambda_1 C_1 \cap \lambda_2 C_2 \mid \lambda_i \geq 0 \;,\; \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \}$$

$$= \bigcup \{ (1-\lambda) C_1 \cap \lambda C_2 \mid 0 \leq \lambda \leq 1 \}$$

این مجموعه را با علامت $C_1 \# C_2$ نشان می‌دهیم. عمل $\#$ را عمل معکوس می‌نامیم

و $C_1 \# C_2$ را جمع معکوس می‌نامیم

قضیه ۳.۷. اگر C_1 و C_2 مجموعه‌های محدب ~~[illegible]~~ در R^n باشند. بنابراین جمع معکوس نیز $C_1 \# C_2$ محدب است

اثبات. با توجه به نکته بالا حاصل می‌شود.

عمل ~~جمع~~ معکوس، جابجایی است که این عمل بین هم مجموعه‌های محدب در R^n صورت می‌پذیرد

برای نشان دادن ~~[illegible]~~ عمل $C_1 \# C_2$ که به صورت نقطه‌ای عبارت است به صورت زیر عمل می‌کنیم

که x را در این مجموعه در نظر می‌گیریم و

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \;,\quad 0 \leq \lambda \leq 1 \;,\quad x_1 \in C_1, x_2 \in C_2$$

حال ~~[illegible]~~ x_1 و x_2 و x را که در مجموعه‌های شعاعی خاص قرار دارند، بیان می‌کنیم

فرض کنید $x_2 = \alpha_2 e$ و $x_1 = \alpha_1 e$ و $\alpha_2 \geq 0$ و $\alpha_1 \geq 0$ باشد

آنگاه.

$$x = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} e = (\alpha_1^{-1} + \alpha_2^{-1})^{-1} e$$

خواهد بود. در این مجموعه ممکن است یکی از مقادیر صفر باشد، یعنی α_1 یا α_2.

در این x بستگی به x_1 و x_2 دارد نه انتخاب e.

عمل معکوس را روی اعضا هم می‌توان نشان داد یعنی به صورت $x_1 \# x_2$.

عمل عکس یک عمل جابجایی و شرکت پذیر است. برای بردارهای در یک راستا، داریم

$$C_1 \# C_2 = \{ x_1 \# x_2 ; x_1 \in C_1 , x_2 \in C_2 \}$$

که بصورت موازی با $C_1 + C_2$ است.

همه احکامی که بحث خواهد ایم، پیروش برای تمام مخروطهای محدب در R^n صدق می‌کنند. بجز عمل انتقال یعنی همه مجموعه های $K_1 \# K_2$ ، $K_1 + K_2$ ،

$A^{-1}K$ و AK ، $K_1 \oplus K_2$ ، $K_1 \cap K_2$ ، $\mathrm{conv}(K_1 \cup K_2)$

کلیه مخروطهای محدب هستند به شرطی که K_1 ، K_2 ، K مخروطهای محدب باشند.

ضرب اسکالر یک عمل بدیهی برای مخروطها است زیرا $\lambda K = K$ برای هر $\lambda > 0$ است.

قضیه ۳.۸. اگر K_1 و K_2 ~~مجموعه های~~ مخروطهای محدب که شامل صفر باشند در این صورت

$$K_1 + K_2 = \mathrm{conv}(K_1 \cup K_2)$$

$$K_1 \# K_2 = K_1 \cap K_2$$

اثبات. بوسیله قضیه ۳.۳ می دانیم که $\mathrm{conv}(K_1 \cup K_2)$، اتحاد مجموعه های $(1-\lambda)K_1 + \lambda K_2$ روی $\lambda \in [0,1]$ می باشد. مجموعه $K_1 + K_2$، وقتی که $0 < \lambda < 1$ است و اگر $\lambda = 0$ برابر K_1 و اگر $\lambda = 1$ باشد برابر K_2 است و چون $0 \in K_1$ و $0 \in K_2$، اینک ~~$0 \in K_1 + K_2$~~ پس $K_1 + K_2$ شامل هردو K_1 و K_2 است، پس $\mathrm{conv}(K_1 \cup K_2)$ شامل $K_1 + K_2$ است. بطور مشابه

بطور مشابه $K_1 \# K_2$ (طبق نقطه قبل از قضیه ۳.۷) برابر اتحاد مجموعه های $\lambda K_1 \cap (1-\lambda) K_2$ برای $\lambda \in [0,1]$ است. این مجموعه برابر $K_1 \cap K_2$ اگر $0 < \lambda < 1$ که و اگر $\lambda = 0$ یا $\lambda = 1$ برابر $\{0\} \subset K_1 \cap K_2$ می گردد، بنابراین

$K_1 \# K_2 = K_1 \cap K_2$

تعمیم دیگر از ساختار جالب ~~...~~ که مایلیم در اینجا ذکر کنیم وجود دارد:

دو نقطه متفاوت x و y در R^n داده شده است، نیم خط

$$\{(1-\lambda)x+\lambda y \mid \lambda \geq 1\}$$

که در واقع تغییر آن سایه y از منبع نوری در x می باشد. اتحاد همه این نیم خطها

با تغییر y از مجموعه C را سایه C می نامیم. این موضوع ما را به تعریف سایه C

umbra

نسبت به S را تعریف کنیم

برای زیرمجموعه جداگانه C و S از R^n،

$$\bigcap_{x\in S}\bigcup_{\lambda}\{(1-\lambda)x+\lambda C\}$$

را سایه C نسبت به S می نامیم. و نیم سایه (Penumbra) C نسبت به S مجموعه

$$\bigcup_{x\in C}\bigcup_{\lambda}\{\lambda C+(1-\lambda)x\}$$

تعریف می شود

این موضوع را به خواننده واگذار می کنیم که اگر C مجموعه محدب باشد آنگاه سایه آن هم محدب است، ولی نیم سایه آن در صورتی که C و S محدب باشند محدب است.

بخش ۴

توابع محدب

هرگاه تابع f با مقادیر حقیقی یا $\pm\infty$ باشد و دامنه آن زیر مجموعه S از R^n خواهد بود مجموعه

$$\{(x,\mu) \mid x\in S,\ \mu\in R,\ \mu \geq f(x)\}$$

را اپی گراف f می نامیم و آن را با $\mathrm{epi}\, f$ نشان می دهیم. تابع f را محدب می گوییم هرگاه $\mathrm{epi}\, f$ در R^{n+1} یک زیر مجموعه محدب باشد.

یک تابع f را روی S مقعر می نامیم، هرگاه $-f$ بر S محدب باشد.

یک تابع را روی S آفین می نامیم، اگر همزمان محدب و مقعر باشد.

effective domain

دامنه مؤثر f روی که را با $\mathrm{dom}\, f$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{dom}\, f = \{x ; \exists \mu ,\ (x,\mu) \in \mathrm{epi}\, f\} = \{x ; f(x) < \infty\}$$

این مجموعه محدب در R^n است. چون این مجموعه تصویر مجموعه محدب $\mathrm{epi}\, f$ تحت تبدیل خطی است. (طبق قضیه ۴.۳) بعد این مجموعه را بعد تابع f می‌نامیم.

بطور واضح، محدب بودن f معادل با محدب بودن تابع f بر $\mathrm{dom}\, f$ است. همه تمرکزها واقعی روی مسائله محدب است و که نقش کمتری برای نقاط دارد.

دلایل عملی وجود دارند، و بزودی نمایان می‌گردد، که چرا اراده‌ای برای در نظر گرفتن کلاس تمام انواع محدب با دامنه مؤثر مشترک C وجود ندارد. در روش فنی ~~...~~ باقی می‌ماند. یک حد تابع f در یک مجموعه محدب که خواه منطبق با $\mathrm{dom}\, f$) می‌باشد با بسیت حد توابع داده شده بر تمام R^n معادل است چونکه یک تابع محدب روی C را می‌توان به یک تابع محدب بر تمام R^n با در نظر گرفتن $f(x) = +\infty$ برای $x \notin C$ توسیع داد.

نکته دیگر که در این کتاب بیان می‌شود بوسیله یک تابع محدب، ما از این پس همواره معنی خواهیم که یک تابع محدب با ~~...~~ مقادیر امکاناً نهایت بر سراسر ~~...~~ فضای R^n تعریف خواهد شد. مگر اینکه نوع خاصی در میان باشد. به عنوان مثال هرگاه تابع f مطابق با یک فرمول معین ساخته شده است، آن فرمول خاص، دامنه مؤثر را بطور دقیق تعیین می‌نماید، زیرا تعیین می‌کند چه جایی تابع f برابر بی‌نهایت می‌شود یا خیر. با این نگاه همواره لازم است دامنه مؤثر تابع f بصورت دقیق توصیف گردد، قبل از اینکه مقادیر f روی دامنه آن داده شده باشد. با این حال رویکردی مورد استفاده در اینجا ~~...~~ به محاسبات شامل $+\infty$ و $-\infty$ را منجر می‌شود.

این قوانینی که لازم می‌گردد ساده می‌باشند

$$\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty, \quad -\infty < \alpha \leq \infty$$

$$\alpha - \infty = -\infty + \alpha = -\infty, \quad -\infty \leq \alpha < \infty$$

$$\alpha\infty = \infty\alpha = \infty, \quad \alpha(-\infty) = (-\infty)\alpha = -\infty, \quad 0 < \alpha \leq \infty$$

$$\alpha\infty = \infty\alpha = -\infty, \quad \alpha(-\infty) = (-\infty)\alpha = \infty, \quad -\infty \leq \alpha < 0$$

$$0\infty = \infty 0 = 0(-\infty) = (-\infty)0, \quad -(-\infty) = \infty$$

$$\inf \emptyset = +\infty \qquad \sup \emptyset = -\infty$$

عبارات $-\infty+\infty$ و $\infty-\infty$ تعریف نشده هستند. تحت این قوانین

قوانین ساده حسابی به صورت زیر می‌باشند

$$\alpha_1+\alpha_2=\alpha_2+\alpha_1,\qquad (\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3=\alpha_1+(\alpha_2+\alpha_3)$$

$$\alpha_1\alpha_2=\alpha_2\alpha_1,\qquad (\alpha_1\alpha_2)\alpha_3=\alpha_1(\alpha_2\alpha_3)$$

$$\alpha(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha\alpha_1+\alpha\alpha_2,$$

در عبارات بالا جمع دوتایی $\alpha+\beta$ به فرم $\infty-\infty$ یا $-\infty+\infty$ نیستند.

یک تابع محدب را محض (proper) می‌نامیم، اگر اپی‌گراف آن غیرخالی و شامل هیچ خط عمودی نیست. یعنی اگر حداقل برای یک x، $f(x)<\infty$ و برای تمام x ها $f(x)>-\infty$.

یعنی f محض است اگر و فقط اگر $C=\operatorname{dom} f$ محدب است و غیرخالی است. و کرانه تابع f به C متناهی است. به عبارت دیگر یک تابع محض و محدب f بر R^n یک تابع f ای است که روی مجموعه محدب و غیرخالی C یک تابع محدب متناهی است سپس توسیع پیدا می‌کند بر R^n با در نظر گرفتن اینکه برای هر $x\notin C$، $f(x)=+\infty$.

یک تابع محدب که محض نباشد را ناسره یا نامحض (improper) می‌نامیم

توابع محدب محض، اشیاء موضوعات حقیقی تحقیق هستند ولی توابع ناسره، مفاهیمی برخاسته از موضوعات خیلی طبیعی است.

یک مثال از تابع محدب ناسره که صرفاً $+\infty$ یا $-\infty$ نیست تابع تعریف شده زیر بر $\mathbb{R}$ است

$$f(x)=\begin{cases}-\infty & |x|<1,\\ 0 & |x|=1\\ +\infty & |x|>1\end{cases}$$

توابع محدب دارای یک خاصیت مهم الحاق می‌باشند. با تعریف اینکه f روی C محدب است اگر و فقط اگر برای هر دو نقطه $(x,\mu),(y,\nu)$ در $\operatorname{epi} f$ و $0<\lambda<1$ داشته باشیم

$$(1-\lambda)(x,\mu)+\lambda(y,\nu)=((1-\lambda)x+\lambda y,\ (1-\lambda)\mu+\lambda\nu)$$

در ... که $epi\, f$ محدب داشته باشد، به عبارت دیگر برای هر $x\in S$ و $y\in S$ و $f(x)\leq \mu\in R$ و $f(y)\leq \nu\in R$ و $0<\lambda<1$، روابط $(1-\lambda)x+\lambda y\in S$ و

$$f((1-\lambda)x+\lambda y)\leq (1-\lambda)\mu+\lambda\nu$$

را داریم.

این رابطه می‌تواند به وسیله چندین راه متفاوت شرح داده شود. دو حالت مفید و خاص شرح زیر ارائه می‌شود.

قضیه ۴.۱. فرض کنید f یک تابع از C به $[-\infty,+\infty]$ باشد که C یک مجموعه محدب می‌باشد (برای مثال $C=R^n$). در این صورت f را محدب روی C است اگر و فقط اگر

$$f((1-\lambda)x+\lambda y)\leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y),\qquad 0<\lambda<1$$

برای هر $x,y\in C$.

قضیه ۴.۲. فرض کنید f یک تابع روی R^n به $[-\infty,+\infty]$ باشد. در این صورت f محدب است اگر و فقط اگر برای هر $f(x)<\alpha$ و $f(y)<\beta$ داریم

$$f((1-\lambda)x+\lambda y)<(1-\lambda)\alpha+\lambda\beta,\qquad 0<\lambda<1.$$

دیگر حالت مفید می‌تواند با کمک قضیه ۲.۲ برای اپی‌گراف به دست آید.

قضیه ۴.۳ (نامساوی جنسن) (Jensen's Inequality) فرض کنید f یک تابع از R^n به $(-\infty,+\infty]$ باشد. در این صورت f محدب است اگر و فقط اگر برای $\lambda_1\geq 0, \dots, \lambda_m\geq 0$ که $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_m=1$ است داریم

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_mx_m)\leq \lambda_1f(x_1)+\dots+\lambda_mf(x_m)$$

اثبات. به عنوان تمرین ساده است.

برای توابع مقعر، البته عکس نامساوی با جابجایی فرضیات به دست می‌آید. آفین نیز این نامساوی‌ها به تساوی تبدیل می‌شود. بنابراین توابع آفین روی R^n، تبدیلات آفین از R^n به R هستند.

نامساوی موجود در قضیه ۴.۱، اغلب برای تعریف توابع محدب از یک مجموعه محدب C به $(-\infty,+\infty]$ در نظر گرفته می‌شود.

تعدادی از مثال‌های کلاسیک از توابع محدب بر خط حقیقی با قضیه‌های زیر ارائه می‌شود.

قضیه ۴.۴. فرض کنید f تابع دوبار مشتق‌پذیر پیوسته حقیقی مقدار روی مجموعه باز (α,β) باشد

در این صورت f محدب است اگر و فقط اگر مشتق دوم f'' غیر منفی بر بازه (α,β) باشد.

اثبات. فرض کنید که f'' نامنفی روی (α,β) باشد. در این صورت f' غیر نزولی است بر (α,β). برای $\alpha<x<y<\beta$ و $0<\lambda<1$ و $z=(1-\lambda)x+\lambda y$ داریم

$$f(z)-f(x)=\int_x^z f'(t)\,dt \leq f'(z)(z-x)$$

$$f(y)-f(z)=\int_z^y f'(t)\,dt \geq f'(z)(y-z).$$

چونکه $z-x=\lambda(y-x)$, $y-z=(1-\lambda)(y-x)$ ، داریم

$$f(z)\leq f(x)+\lambda f'(z)(y-x)$$

$$f(z)\leq f(y)-(1-\lambda)f'(z)(y-x)$$

با ضرب $(1-\lambda)$ در عبارت اول و λ در عبارت دوم و جمع دو طرف آنها داریم

$$(1-\lambda)f(z)+\lambda f(z)\leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$

سمت چپ برابر $f(z)$ است و بنابراین $f(z)=f((1-\lambda)x+\lambda y)$

و بوسیله قضیه ۱.۴ محدب بودن تابع f بدست می‌آید. برای اثبات عکس این قضیه فرض کنید که f'' نامنفی روی (α,β) نباشد. در این صورت برای یک زیر بازه‌ای از آن مانند (α',β') تابع f'' منفی می‌باشد. بوسیله روابط بالا داریم

$$f(z)-f(x)>f'(z)(z-x)$$

$$f(y)-f(z)<f'(z)(y-z),$$

و بنابراین

$$f((1-\lambda)x+\lambda y)>(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$$

یعنی تابع f بر (α,β) محدب نمی‌باشد.

قضیه ۳.۶ برای اثبات قضایای ۱.۲۶ و ۲.۲۶ توسعه پیدا می‌نماید

در زیر به هفت مثال از توابع بر R که محدب بوده آنها با کمک قضیه ۴.۳ حاصل می‌شود، بیان می‌کنیم

۱- $f(x) = e^{ax}$ که $-\infty < a < \infty$

۲- برای $1 \leq p < \infty$.

$$f(x) = \begin{cases} x^p & x \geq 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$$

۳- برای $0 \leq p \leq 1$

$$f(x) = \begin{cases} -x^p & x \geq 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$$

۴- برای $-\infty < p \leq 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^p & x > 0 \\ \infty & x \leq 0 \end{cases}$$

۵- برای $\alpha > 0$

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} & |x| < \alpha \\ \infty & |x| \geq \alpha \end{cases}$$

۶-

$$f(x) = \begin{cases} -\log x & x > 0 \\ \infty & x \leq 0 \end{cases}$$

در بعدهای بالاتر، با استفاده از قضیه ۴.۱ (ص ۲۸) هر تابع به فرم زیر

$$f(x) = \langle x, a \rangle + \alpha, \qquad a \in R^n, \qquad \alpha \in R.$$

یک تابع محدب روی R^n است. در حالت آفین، هر تابع آفین روی R^n (با کمک قضیه ... ص ۲۷) یک تابع محدب است. تابع زیر را تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Qx \rangle + \langle x, a \rangle + \alpha$$

که Q یک ماتریس $n \times n$ بوده و نیمه‌معین مثبت است یعنی

$$\langle z, Qz \rangle \geq 0 \quad , \quad z \in R^n,$$

در این صورت تابع f محدب بر R^n است، این تابع f را تابع مربعی (quadratic) می‌گوییم

در این حالت قضیه ۴.۴ برای بعدهای بالاتر استفاده می‌کنیم