نمونه‌های سانسورشده

مدرس: دکتر اصغرزاده نشلی

دانشگاه مازندران

University of Mazandaran
Dr. Asgharzadeh

نمونه‌های سانسورشده

بسیاری از اوقات در مباحث قابلیت اعتماد و دیگر زمینه‌های کاربردی بنا به دلایلی آزمایشگر نمی‌تواند زمان دقیق از کار افتادگی واحدها را در یک آزمایش طول عمر مشاهده کند. برخی از این دلایل عبارتند از: زمان محدود، عدم دسترسی به همه قطعات، گران بودن واحدهای تحت آزمایش طول عمر و نبودن بودجه‌ی کافی برای انجام آزمایش.

نمونه‌های سانسورشده و عمل سانسور کردن بسیار حائز اهمیت می‌باشند. فرض کنید n قطعه مثلا n لامپ در زمان صفر در معرض یک آزمایش طول عمر قرار بگیرند. بدیهی است اولین زمان خرابی مشاهده شده خود به خود کوچکترین آماره‌ی ترتیبی $t_{1:n}$ می‌باشد. بطور مشابهی دومین زمان خرابی مشاهده شده عبارتست از $t_{2:n}$ و همینطور الی آخر.

اگر آزمایش طول عمر بعد از مشاهده‌ی r امین خرابی پایان پذیرد، در آنصورت نمونه‌گیری سانسور شده‌ی نوع دوم (II) از راست شکل خواهد گرفت و نمونه‌ی سانسورشده عبارت خواهد بود از:

$$t_{1:n},\ t_{2:n}, \ldots, t_{r:n} \qquad\qquad r \leq n$$

از راست سانسورشده یعنی ما $t_{r+1:n}, \ldots, t_{n:n}$ نقطه را مشاهده نمی‌کنیم. $(n-r)$ نقطه را مشاهده نمی‌کنیم و r قطعه طول عمر آن‌ها مشاهده می‌شود. این سانسور به سانسور تعداد نیز معروف است.

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

- اگر آزمایش طول عمر n قطعه را تا زمان از پیش تعیین شده‌ی t ادامه دهیم و به محض اینکه به این زمان رسیدیم آزمایش طول عمر را متوقف کنیم، در آنصورت نمونه‌گیری سانسور نوع اول (I) حاصل خواهد شد که به این سانسور، سانسور زمانی نیز می‌گویند. (مشخص نیست تا زمان t چند قطعه از کار می‌افتد ولی در سانسور نوع دوم تعداد قطعات r فیکس است. یعنی می‌دانیم تا زمان t تعداد r قطعه از کار افتاده است)

- در آزمایش طول عمر n قطعه اگر زمان‌های خرابی تمامی n قطعه مشاهده شود در آن صورت نمونه‌گیری کامل خواهد بود و نمونه‌ی مشاهده شده عبارت خواهد بود از $t_{1:n}, t_{2:n}, \ldots, t_{n:n}$.

- در نمونه‌گیری سانسورشده‌ی نوع دوم، تعداد شکست‌ها (تعداد خرابی‌ها) ثابت است اما زمان‌های خرابی تصادفی است. بخصوص زمان خرابی r امین قطعه یعنی $t_{r:n}$ که طول دوره‌ی آزمایش نیز می‌باشد. از طرفی در نمونه‌گیری سانسور شده‌ی نوع نوع اول، نقطه‌ی پایانی آزمایش یعنی t ثابت است در حالیکه تعداد خرابی‌های مشاهده شده تا این زمان متغیری تصادفی است مانند R که این متغیر تصادفی یکی از مقادیر $0, 1, 2, \ldots, n$ را می‌پذیرد.

$$\begin{cases} T \le t & \text{پیروزی} \\ T > t & \text{شکست} \end{cases}$$

$R:$ تعداد خرابی‌ها تا زمان t

R تکیه‌گاه : $\{0, 1, \ldots, n\}$

$$R \sim B(n, p), \qquad p = P(T \le t) = F(t)$$

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

چگالی توأم نمونه سانسورشده‌ی نوع اول

در آزمایش طول عمر n قطعه و نمونه‌ی سانسورشده‌ی نوع اول با فرض اینکه بدانیم تا زمان از پیش تعیین شده t تعداد $R = r$ قطعه از کار افتاده باشد، نمونه‌ی سانسورشده‌ی نوع اول عبارت خواهد بود از $t_{1:n}, t_{2:n}, \ldots, t_{r:n}$.

- $(n-r)$ قطعه طول عمرشان از t بیشتر است.

اگر چنانچه تابع توزیع و تابع چگالی طول عمر قطعات به ترتیب F و f باشد، در آن صورت چگالی توأم نمونه‌ی سانسورشده‌ی نوع اول عبارت خواهد بود از:

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

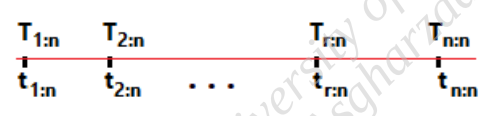
$$
\begin{aligned}
g(t_{1:n}, t_{2:n}, \ldots, t_{r:n}) &= \frac{n!}{(n-r)!} f(t_{1:n})\, f(t_{2:n}) \ldots f(t_{r:n})\, [1 - F(t)]^{n-r} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^{r} f(t_{i:n}) [1 - F(t)]^{n-r} \\
\Longrightarrow g(t_{1:n}, t_{2:n}, \ldots, t_{r:n}) &= \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^{r} f(t_{i:n}) [1 - F(t)]^{n-r}, \qquad t_{1:n} < t_{2:n} < \cdots < t_{r:n} < t
\end{aligned}
$$

- اگر t را خیلی بزرگ درنظر بگیریم نمونه کامل می‌شود. یعنی $t_{r:n} = t_{n:n}$ در نتیجه $F(t) = ۱,\ t \to \infty$. بنابراین

$$g(t_{۱:n}, t_{۲:n}, \ldots, t_{n:n}) = n! \prod_{i=۱}^{n} f(t_{i:n}), \qquad ۰ < t_{۱:n} < \cdots < t_{n:n}$$

چگالی توأم نمونه سانسورشده‌ی نوع دوم

در نمونه‌ی سانسورشده‌ی نوع دوم با فرض اینکه تابع توزیع و تابع چگالی طول عمر قطعات به‌ترتیب F و f باشد و بدانیم که آزمایش طول عمر n قطعه به محض مشاهده‌ی r امین خرابی به پایان برسد، چگالی توأم نمونه‌ی سانسورشده عبارت خواهد بود از:



Univiversity of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

$$g(t_{۱:n}, t_{۲:n}, \ldots, t_{r:n}) = \frac{n!}{۱!۱!\ldots۱!(n-r)!} f(t_{۱:n})\, f(t_{۲:n}) \ldots f(t_{r:n})\, [۱ - F(t_{r:n})]^{n-r}$$

$$\Longrightarrow g(t_{۱:n}, t_{۲:n}, \ldots, t_{r:n}) = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=۱}^{r} f(t_{i:n}) [۱ - F(t_{r:n})]^{n-r}, \qquad t_{۱:n} < t_{۲:n} < \cdots < t_{r:n} < t$$

حالت خاص: برای $r = n$ (حالت نمونه کامل) چگالی توأم برابر است با

$$g(t_{۱:n}, t_{۲:n}, \ldots, t_{n:n}) = n! \prod_{i=۱}^{n} f(t_{i:n}), \qquad ۰ < t_{۱:n} < \cdots < t_{n:n}$$

مثال

در آزمایش طول عمر n قطعه اگر بدانیم که توزیع طول عمر قطعات نمایی است با میانگین θ، آنگاه چگالی توأم نمونه‌های سانسورشده‌ی نوع اول و دوم را بیابید و به کمک آن‌ها برآورد درست‌نمایی ماکزیمم (MLE) پارامتر θ را پیدا کنید.

حل

$$T \sim Exp(\frac{1}{\theta}) \Longrightarrow \begin{cases} F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}, & t > 0,\ \theta > 0 \\ f(t) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}}, & t > 0,\ \theta > 0 \end{cases}$$

چگالی توأم نمونه‌ی سانسورشده‌ی نوع اول:

$$\begin{aligned} g(t_{1:n}, t_{2:n}, \ldots, t_{r:n}, \theta) &= \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^{r} f(t_{i:n}; \theta)[1 - F(t_0; \theta)]^{n-r} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t_{i:n}}{\theta}} [1 - (1 - e^{-\frac{t_0}{\theta}})]^{n-r} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} (\frac{1}{\theta})^r e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{r} t_{i:n}} e^{-\frac{(n-r)t_0}{\theta}} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \theta^{-r} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{r} t_{i:n} + (n-r)t_0}{\theta}} \end{aligned}$$

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

حل

ادامه: تابع درست‌نمایی ماکزیمم نمونه سانسورشده‌ی نوع اول:

$$L(\theta) = g(t_{1:n}, t_{2:n}, \ldots, t_{r:n}) = \frac{n!}{(n-r)!}\theta^{-r}\, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{r} t_{i:n} + (n-r)t_0}{\theta}}$$

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = \ln\left(\frac{n!}{(n-r)!}\right) - r\ln\theta - \frac{\sum_{i=1}^{r} t_{i:n} + (n-r)t_0}{\theta}$$

$$l'(\theta) = \frac{d}{d\theta}l(\theta) = -\frac{r}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{r} t_{i:n} + (n-r)t_0}{\theta^2} = 0 \Longrightarrow \widehat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{r} t_{i:n} + (n-r)t_0}{r}$$

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

حل

در حالت سانسور نوع دوم: چگالی توأم نمونه‌ی سانسورشده‌ی نوع دوم:

$$\begin{aligned} g(t_{1:n}, t_{2:n}, \ldots, t_{r:n}, \theta) &= \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^{r} f(t_{i:n};\theta)[1 - F(t_{r:n};\theta)]^{n-r} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t_{i:n}}{\theta}} [1 - (1 - e^{-\frac{t_{r:n}}{\theta}})]^{n-r} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \theta^{-r}\, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{r} t_{i:n} + (n-r)t_{r:n}}{\theta}} \end{aligned}$$

تابع درست‌نمایی ماکزیمم نمونه سانسورشده‌ی نوع دوم:

$$L(\theta) = g(t_{1:n}, t_{2:n}, \ldots, t_{r:n}) = \frac{n!}{(n-r)!} \theta^{-r}\, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{r} t_{i:n} + (n-r)t_{r:n}}{\theta}}$$

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = \ln\left(\frac{n!}{(n-r)!}\right) - r\ln\theta - \frac{\sum_{i=1}^{r} t_{i:n} + (n-r)t_{r:n}}{\theta}$$

$$l'(\theta) = \frac{d}{d\theta} l(\theta) = -\frac{r}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{r} t_{i:n} + (n-r)t_{r:n}}{\theta^2} = 0 \Longrightarrow \widehat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{r} t_{i:n} + (n-r)t_{r:n}}{r}$$

که

$$\sum_{i=1}^{r} t_{i:n} + (n-r)t_{r:n} : \text{Total time on test}$$ (مجموع طول عمر n قطعه تا اتمام آزمایش)

برای حالت خاص $r = n$ (نمونه کامل) داریم:

$$\widehat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{i:n}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n} = \bar{t}$$

Dr. A. Asgharzadeh
University of Mazandaran

مثال

داده‌های زیر زمان‌های خرابی ۳۰ دستگاه تهویه‌ی هواپیما (در ساعات پرواز) را نشان می‌دهد.

۲۳	۲۶۱	۸۷	۷	۱۲۰	۱۴	۶۲	۴۷	۳	۹۵	۲۲۵	۷۱	۲۴۶	۲۱	۴۲	۲۰	۵	۱۲	۱۲۰
۱۱	۱۴	۷۱	۱۱	۱۴	۱۱	۱۶	۹۰	۱	۱۶	۵۲								

با فرض اینکه توزیع طول عمر قطعات نمایی با میانگین θ باشد، پیدا کنید:

الف) MLE پارامتر θ ب) MLE تابع نرخ خرابی دستگاه

ج) MLE قابلیت اعتماد سیستم در زمان $t = ۲۰$ ساعت

د) فاصله‌ی اطمینان ۹۵ درصد برای قابلیت اعتماد دستگاه در زمان $t = ۲۰h$

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

حل

الف)

$$T_۱, \ldots, T_n \overset{iid}{\sim} Exp(\theta)$$

$$f(t;\theta) = \frac{۱}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}}, \qquad t > ۰,\ \theta > ۰$$

$$\widehat{\theta} = \frac{\sum_{i=۱}^{۳۰} t_i}{۳۰} = \frac{۲۳ + ۲۶۱ = \cdots + ۵۲}{۳۰} = ۵۹/۶$$

حل

ب) تابع نرخ خرابی:

$$h(t) = \frac{f(t;\theta)}{۱ - F(t;\theta)} = \frac{۱/\theta\, e^{-\frac{t}{\theta}}}{۱ - (۱ - e^{-\frac{t}{\theta}})} = \frac{۱/\theta\, e^{-\frac{t}{\theta}}}{e^{-\frac{t}{\theta}}} = \frac{۱}{\theta}$$

از خاصیت پایایی MLE برآورد ML تابع نرخ خرابی در زمان t می‌شود

$$\widehat{h(t)}_{ML} = \frac{۱}{\widehat{\theta}_{ML}} = \frac{۱}{۵۹/۶} = ۰/۰۱۷$$

ج) برآورد ML تابع قابلیت اعتماد در زمان $t = ۲۰$:

$$R(t) = ۱ - F(t) = ۱ - (۱ - e^{-\frac{t}{\theta}}) = e^{-\frac{t}{\theta}}$$

$$R(۲۰) = e^{-\frac{۲۰}{\theta}} \implies \widehat{R(۲۰)} = e^{-\frac{۲۰}{\widehat{\theta}}} = e^{-\frac{۲۰}{۵۹/۶}} = ۰/۷۱۵$$

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

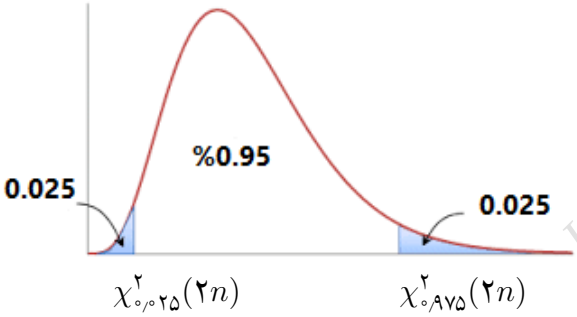
حل

د) داریم:

$$T_i \sim Exp(\theta) = \Gamma(۱, \theta) \qquad \Longrightarrow \sum_{i=۱}^{n} T_i \sim \Gamma(n, \theta) \quad \Longrightarrow \quad \frac{۲\sum_{i=۱}^{n} T_i}{\theta} \sim \chi^{۲}_{(۲n)}$$

لذا کمیت محوری مناسب می‌شود:

$$Q = \frac{۲\sum_{i=۱}^{n} T_i}{\theta} \sim \chi^{۲}_{(۲n)} \qquad \text{یا} \qquad Q = \frac{۲n\bar{T}}{\theta} \sim \chi^{۲}_{(۲n)}$$



$$P\Big(\chi^{۲}_{\frac{\alpha}{۲}}(۲n) < Q < \chi^{۲}_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(۲n)\Big) = ۱ - \alpha$$

$$P\Big(\chi^{۲}_{۰/۰۲۵}(۶۰) < \frac{۲n\widehat{\theta}}{\theta} < \chi^{۲}_{۰/۹۷۵}(۶۰)\Big) = ۰/۹۵$$

$$P\Big(\frac{۲n\widehat{\theta}}{\chi^{۲}_{۰/۹۷۵}(۶۰)} < \theta < \frac{۲n\widehat{\theta}}{\chi^{۲}_{۰/۰۲۵}(۶۰)}\Big) = ۰/۹۵$$

لذا فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای θ می‌شود:

$$\Big(\frac{۲n\widehat{\theta}}{\chi^{۲}_{۰/۹۷۵}(۶۰)}, \frac{۲n\widehat{\theta}}{\chi^{۲}_{۰/۰۲۵}(۶۰)}\Big) = \Big(\frac{۲(۳۰)(۵۹/۶)}{۸۳/۲۹۸}, \frac{۲(۳۰)(۵۹/۶)}{۴۰/۴۸}\Big) = (۴۲/۹۳,\ ۸۸/۳۳)$$

یعنی با اطمینان ۹۵ درصد می‌توان ادعا کرد که میانگین طول عمر دستگاه‌های تهویه بین (۴۲/۹۳, ۸۸/۳۳) می‌باشد.

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

حل

ادامه: فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای قابلیت اعتماد دستگاه در زمان $t = ۲۰$:

از آنجایی که $R(۲۰) = e^{-\frac{۲}{\theta}}$ برحسب θ صعودی است یعنی

$$a < \theta < b \quad \Leftrightarrow \quad R(a) < R(\theta) < R(b)$$

لذا فاصله اطمینان برای $R(۲۰) = e^{-\frac{۲}{\theta}}$ می‌شود:

$$P\left(e^{-\frac{۲}{۴۲٫۹۳}} < e^{-\frac{۲}{\theta}} < e^{-\frac{۲}{۸۸٫۳۳}}\right) = P(۰٫۶۲۷ < R(۲۰) < ۰٫۷۹۷) = ۰٫۹۵$$

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

مثال

در مثال قبل با فرض اینکه آزمایش طول عمر

الف) بعد از مشاهده‌ی ۲۰ امین خرابی،

ب) در زمان $t = ۲۰$ ساعت

به پایان برسد، برآوردهای ML میانگین طول عمر، تابع نرخ خرابی و تابع قابلیت اعتماد در $t = ۱۰$ را بیابید.

حل

الف) آزمایش طول عمر به محض مشاهده‌ی r امین $(r = ۲۰)$ خرابی متوقف می‌شود. لذا نمونه‌ی سانسورشده‌ی نوع دوم می‌شود:

۱	۳	۵	۷	۱۱	۱۱	۱۱	۱۲	۱۴	۱۴
۱۴	۱۶	۱۶	۲۰	۲۱	۲۳	۴۲	۴۷	۵۲	۶۲

برآوردهای ML پارامتر θ (میانگین طول عمر) و تابع نرخ خرابی:

$$\widehat{\theta} = \frac{\sum_{i=۱}^{r} t_{i:n} + (n-r)t_{r:n}}{r} = \frac{[۱+۳+\cdots+۶۲] + (۳۰-۲۰)۶۲}{۲۰} = ۵۱/۱$$

$$h(t) = \frac{۱}{\theta} \implies \widehat{h(t)} = \frac{۱}{\widehat{\theta}} = \frac{۱}{۵۱/۱} = ۰/۰۱۹$$

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

حل

ادامه: تابع قابلیت اعتماد در $t = ۱۰$:

$$R(۱۰) = e^{-\frac{۱۰}{\theta}} \implies \widehat{R(۱۰)} = e^{-\frac{۱۰}{\widehat{\theta}}} = e^{-\frac{۱۰}{۵۱/۸}} = ۰/۶۷۶$$

ب) اگر آزمایش طول عمر در زمان $t = ۲۰$ متوقف شود، زمان‌های خرابی مشاهده شده این زمان یعنی نمونه سانسورشده نوع اول می‌شود:

۱	۳	۵	۷	۱۱	۱۱	۱۱	۱۲	۱۴
۱۴	۱۴	۱۶	۱۶	۲۰				

$r = ۱۴$ (تعداد خرابی‌ها قبل از زمان $t = ۲۰$)

$$\widehat{\theta} = \frac{\sum_{i=۱}^{r} t_{i:n} + (n-r)t}{r} = \frac{\sum_{i=۱}^{۱۴} t_{i:n} + (۳۰-۱۴)۲۰}{۱۴} = \frac{(۱+\cdots+۲۰)+(۳۰-۱۴)(۲۰)}{۱۴} = ۳۳/۹۲$$

$$\widehat{h(t)} = \frac{۱}{\widehat{\theta}} = \frac{۱}{۳۳/۹۲} = ۰/۰۲۹$$

$$\widehat{R(۱۰)} = e^{-\frac{۱۰}{\widehat{\theta}}} = e^{-\frac{۱۰}{۳۳/۹۲}} = ۰/۷۴$$

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

قضیه

قضیه سوخاتمه: فرض کنید $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \overset{iid}{\sim} Exp(1)$. قرار دهید:

$$W_1 = Y_{1:n}, \qquad W_2 = Y_{2:n} - Y_{1:n}, \qquad \ldots, \qquad W_n = Y_{n:n} - Y_{n-1:n}$$

در اینصورت:

- $W_1, \ldots, W_n$ مستقل‌اند.
- $W_i \sim Exp\left(\frac{1}{n-i+1}\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$
- $Y_{k:n} = \sum_{j=t}^{k} \frac{Z_j}{n-j+1}$ که $Z_1, \ldots, Z_n \overset{iid}{\sim} Exp(1)$.
- $E(Y_{k:n}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n-j+1}$.

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

اثبات

ایده‌ی اثبات (با استفاده از روش ژاکوبین):

$$g(w_1, \ldots, w_n) = f(y_{1:n}, y_{2:n}, \ldots, y_{n:n})\,|J| \qquad |J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_{1:n}}{\partial W_1} & \frac{\partial Y_{1:n}}{\partial W_2} & \cdots & \frac{\partial Y_{1:n}}{\partial W_n} \\ \frac{\partial Y_{2:n}}{\partial W_1} & \frac{\partial Y_{2:n}}{\partial W_2} & \cdots & \frac{\partial Y_{2:n}}{\partial W_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial Y_{n:n}}{\partial W_1} & \frac{\partial Y_{n:n}}{\partial W_2} & \cdots & \frac{\partial Y_{n:n}}{\partial W_n} \end{vmatrix}$$

قضیه

اگر $\widehat{\theta}$ برآوردگر ML (MLE) پارامتر θ براساس اولین r آماره ترتیبی یک نمونه n تایی از توزیع $Exp(\theta)$ باشد، یعنی

$$\widehat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{r} x_{i:n} + (n-r)x_{r:n}}{r}$$

در اینصورت:

- $\widehat{\theta}$ یک آماره بسنده کامل برای θ است.
- $\widehat{\theta}$ یک UMVUE برای θ است.
- $\frac{2r\widehat{\theta}}{\theta} \sim \chi^2_{(2r)}$

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

اثبات

اثبات ۱. چگالی توأم $x_{1:n}, \ldots, x_{r:n}$ می‌شود

$$g(x_{1:n}, \ldots, x_{r:n}) = \frac{n!}{(n-r)!}\theta^{-r}\, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i:n} + (n-r)x_{r:n}}{\theta}} = \frac{n!}{(n-r)!}\theta^{-r}\, e^{-\frac{r\widehat{\theta}}{\theta}}$$

که به خانواده نمایی تعلق دارد. لذا $\widehat{\theta}$ یک آماره بسنده کامل برای θ است.

اثبات

اثبات ۳.

$$\begin{aligned}\frac{۲r\widehat{\theta}}{\theta} &= \frac{۲}{\theta}\sum_{i=۱}^{r} x_{i:n} + (n-r)x_{r:n}\\ &= \frac{۲\sum_{i=۱}^{r}(n-i+۱)(x_{i:n}-x_{i-۱:n})}{\theta}\\ &= ۲\sum_{i=۱}^{r}(n-i+۱)(Z_{i:n}-Z_{i-۱:n})\\ &= ۲\sum_{i=۱}^{r}(n-i+۱)W_i\end{aligned}$$

که $W_i \sim Exp\left(\frac{۱}{n-i+۱}\right)$.

اثبات ۲. چون

$$\frac{۲r\widehat{\theta}}{\theta} \sim \chi^{۲}_{(۲r)} \implies E\left(\frac{۲r\widehat{\theta}}{\theta}\right) = ۲r \implies E(\widehat{\theta}) = \theta$$

چون $\widehat{\theta}$ یک آماره بسنده کامل نیز می‌باشد لذا $\widehat{\theta}$ یک UMVUE برای θ است.

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh

مثال

در مثال مربوط به دستگاه‌های تهویه هواپیما براساس اولین ۲۰ خرابی (نمونه‌ی سانسورشده‌ی نوع دوم $r = ۲۰$) اگر چنانچه بدانیم توزیع طول عمر دستگاه‌ها نمایی با میانگین θ است، یک فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای θ بیابید.

حل

داریم

$$P\left(\chi_{۰/۰۲۵}(۴۰) < \frac{۲r\widehat{\theta}}{\theta} < \chi^{۲}_{۰/۹۷۵}(۴۰)\right) = ۰/۹۵$$

$$\Longrightarrow P\left(\frac{۲r\widehat{\theta}}{\chi^{۲}_{۰/۹۷۵}(۴۰)} < \theta < \frac{۲r\widehat{\theta}}{\chi^{۲}_{۰/۰۲۵}(۴۰)}\right) = ۰/۹۵$$

لذا فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای θ می‌شود:

$$\left(\frac{۲ \times ۲۰ \times ۵۱/۱}{۵۹/۳۴}, \frac{۲ \times ۲۰ \times ۵۱/۱}{۲۴/۴۳}\right) = (۳۴/۴۴,\ ۸۳/۶۶)$$

University of Mazandaran
Dr. A. Asgharzadeh