# نمونه‌های سانسورشده

مدرس: دکتر اصغرزاده نشلی
دانشگاه مازندران

## نمونه‌های سانسورشده

بسیاری از اوقات در مباحث قابلیت اعتماد و دیگر زمینه‌های کاربردی بنا به دلایلی آزمایشگر نمی‌تواند زمان دقیق از کار افتادگی واحدها را در یک آزمایش طول عمر مشاهده کند. برخی از این دلایل عبارتند از: زمان محدود، عدم دسترسی به همه قطعات، گران بودن واحدهای تحت آزمایش طول عمر و نبودن بودجه‌ی کافی برای انجام آزمایش.

نمونه‌های سانسورشده و عمل سانسور کردن بسیار حائز اهمیت می‌باشند. فرض کنید $n$ قطعه مثلا $n$ لامپ در زمان صفر در معرض یک آزمایش طول عمر قرار بگیرند. بدیهی است اولین زمان خرابی مشاهده شده خود به خود کوچکترین آماره‌ی ترتیبی $t_{1:n}$ می‌باشد. بطور مشابهی دومین زمان خرابی مشاهده شده عبارتست از $t_{2:n}$ و همینطور الی آخر.

اگر آزمایش طول عمر بعد از مشاهده‌ی $r$ امین خرابی پایان پذیرد، در آنصورت نمونه‌گیری سانسور شده‌ی نوع دوم (II) از راست شکل خواهد گرفت و نمونه‌ی سانسورشده عبارت خواهد بود از:

$$t_{1:n},\ t_{2:n}, \ldots, t_{r:n} \qquad\qquad r \leq n$$

از راست سانسورشده یعنی ما $t_{r+1:n}, \ldots, t_{n:n}$ نقطه را مشاهده نمی‌کنیم. $(n-r)$ نقطه را مشاهده نمی‌کنیم و $r$ قطعه طول عمر آن‌ها مشاهده می‌شود. این سانسور به سانسور تعداد نیز معروف است.

- اگر آزمایش طول عمر $n$ قطعه را تا زمان از پیش تعیین شده‌ی $t$ ادامه دهیم و به محض اینکه به این زمان رسیدیم آزمایش طول عمر را متوقف کنیم، در آنصورت نمونه‌گیری سانسور نوع اول $(I)$ حاصل خواهد شد که به این سانسور، سانسور زمانی نیز می‌گویند. (مشخص نیست تا زمان $t$ چند قطعه از کار می‌افتد ولی در سانسور نوع دوم تعداد قطعات $r$ فیکس است. یعنی می‌دانیم تا زمان $t$ تعداد $r$ قطعه از کار افتاده است)
- در آزمایش طول عمر $n$ قطعه اگر زمان‌های خرابی تمامی $n$ قطعه مشاهده شود در آن صورت نمونه‌گیری کامل خواهد بود و نمونه‌ی مشاهده شده عبارت خواهد بود از $t_{1:n}, t_{2:n}, \ldots, t_{n:n}$.
- در نمونه‌گیری سانسورشده‌ی نوع دوم، تعداد شکست‌ها (تعداد خرابی‌ها) ثابت است اما زمان‌های خرابی تصادفی است. بخصوص زمان خرابی $r$ امین قطعه یعنی $t_{r:n}$ که طول دوره‌ی آزمایش نیز می‌باشد. از طرفی در نمونه‌گیری سانسور شده‌ی نوع نوع اول، نقطه‌ی پایانی آزمایش یعنی $t$ ثابت است در حالیکه تعداد خرابی‌های مشاهده شده تا این زمان متغیری تصادفی است مانند $R$ که این متغیر تصادفی یکی از مقادیر $0, 1, 2, \ldots, n$ را می‌پذیرد.

$$\begin{cases} T \leq t & \text{پیروزی} \\ T > t & \text{شکست} \end{cases}$$

$R:$ تعداد خرابی‌ها تا زمان $t$

$R$ تکیه‌گاه : $\{0, 1, \ldots, n\}$

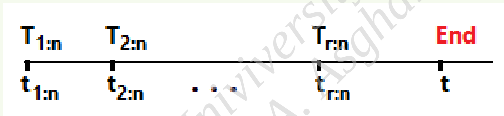
$$R \sim B(n,p), \qquad p = P(T \leq t) = F(t)$$

## چگالی توأم نمونه سانسورشده‌ی نوع اول

در آزمایش طول عمر $n$ قطعه و نمونه‌ی سانسورشده‌ی نوع اول با فرض اینکه بدانیم تا زمان از پیش تعیین شده $t$ تعداد $R=r$ قطعه از کار افتاده باشد، نمونه‌ی سانسورشده‌ی نوع اول عبارت خواهد بود از $t_{1:n}, t_{2:n}, \ldots, t_{r:n}$.

- $(n-r)$ قطعه طول عمرشان از $t$ بیشتر است.

اگر چنانچه تابع توزیع و تابع چگالی طول عمر قطعات به ترتیب $F$ و $f$ باشد، در آن صورت چگالی توأم نمونه‌ی سانسورشده‌ی نوع اول عبارت خواهد بود از:





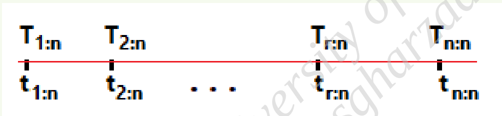

$$
\begin{aligned}
g(t_{1:n}, t_{2:n}, \ldots, t_{r:n}) &= \frac{n!}{(n-r)!} f(t_{1:n})\, f(t_{2:n}) \ldots f(t_{r:n})\, [1-F(t)]^{n-r} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^{r} f(t_{i:n})[1-F(t)]^{n-r} \\
\Longrightarrow g(t_{1:n}, t_{2:n}, \ldots, t_{r:n}) &= \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^{r} f(t_{i:n})[1-F(t)]^{n-r}, \qquad t_{1:n} < t_{2:n} < \cdots < t_{r:n} < t
\end{aligned}
$$

- اگر $t$ را خیلی بزرگ درنظر بگیریم نمونه کامل می‌شود. یعنی $t_{r:n} = t_{n:n}$ در نتیجه $t \to \infty$ ,$F(t) = 1$. بنابراین

$$g(t_{1:n}, t_{2:n}, \ldots, t_{n:n}) = n! \prod_{i=1}^{n} f(t_{i:n}), \qquad 0 < t_{1:n} < \cdots < t_{n:n}$$

## چگالی توأم نمونه سانسورشده‌ی نوع دوم

در نمونه‌ی سانسورشده‌ی نوع دوم با فرض اینکه تابع توزیع و تابع چگالی طول عمر قطعات به‌ترتیب $F$ و $f$ باشد و بدانیم که آزمایش طول عمر $n$ قطعه به محض مشاهده‌ی $r$ امین خرابی به پایان برسد، چگالی توأم نمونه‌ی سانسورشده عبارت خواهد بود از:






$$g(t_{1:n}, t_{2:n}, \ldots, t_{r:n}) = \frac{n!}{1!1!\ldots 1!(n-r)!} f(t_{1:n})\, f(t_{2:n}) \ldots f(t_{r:n})\, [1 - F(t_{r:n})]^{n-r}$$

$$\Longrightarrow g(t_{1:n}, t_{2:n}, \ldots, t_{r:n}) = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^{r} f(t_{i:n})[1 - F(t_{r:n})]^{n-r}, \qquad t_{1:n} < t_{2:n} < \cdots < t_{r:n} < t$$

**حالت خاص:** برای $r = n$ (حالت نمونه کامل) چگالی توأم برابر است با

$$g(t_{1:n}, t_{2:n}, \ldots, t_{n:n}) = n! \prod_{i=1}^{n} f(t_{i:n}), \qquad 0 < t_{1:n} < \cdots < t_{n:n}$$

## مثال

در آزمایش طول عمر $n$ قطعه اگر بدانیم که توزیع طول عمر قطعات نمایی است با میانگین $\theta$، آنگاه چگالی توأم نمونه‌های سانسورشده‌ی نوع اول و دوم را بیابید و به کمک آن‌ها برآورد درست‌نمایی ماکزیمم (MLE) پارامتر $\theta$ را پیدا کنید.

## حل

$$T \sim Exp(\frac{1}{\theta}) \Longrightarrow \begin{cases} F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}, & t > 0,\ \theta > 0 \\ f(t) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}}, & t > 0,\ \theta > 0 \end{cases}$$

چگالی توأم نمونه‌ی سانسورشده‌ی نوع اول:

$$\begin{aligned} g(t_{1:n}, t_{2:n}, \ldots, t_{r:n}, \theta) &= \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^{r} f(t_{i:n}; \theta)[1 - F(t_0; \theta)]^{n-r} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t_{i:n}}{\theta}} [1 - (1 - e^{-\frac{t_0}{\theta}})]^{n-r} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} (\frac{1}{\theta})^r \, e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{r} t_{i:n}} \, e^{-\frac{(n-r)t_0}{\theta}} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \theta^{-r} \, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{r} t_{i:n} + (n-r)t_0}{\theta}} \end{aligned}$$

حل

**ادامه:** تابع درست‌نمایی ماکزیمم نمونه سانسورشده‌ی نوع اول:

$$L(\theta)=g(t_{1:n},t_{2:n},\ldots,t_{r:n})=\frac{n!}{(n-r)!}\theta^{-r}\,e^{-\frac{\sum_{i=1}^{r}t_{i:n}+(n-r)t_0}{\theta}}$$

$$l(\theta)=\ln L(\theta)=\ln\left(\frac{n!}{(n-r)!}\right)-r\ln\theta-\frac{\sum_{i=1}^{r}t_{i:n}+(n-r)t_0}{\theta}$$

$$l'(\theta)=\frac{d}{d\theta}l(\theta)=-\frac{r}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{r}t_{i:n}+(n-r)t_0}{\theta^2}=0\Longrightarrow\widehat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{r}t_{i:n}+(n-r)t_0}{r}$$

**حل**

**در حالت سانسور نوع دوم:** چگالی توأم نمونه‌ی سانسورشده‌ی نوع دوم:

$$\begin{aligned}
g(t_{1:n}, t_{2:n}, \ldots, t_{r:n}, \theta) &= \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^{r} f(t_{i:n};\theta)[1 - F(t_{r:n};\theta)]^{n-r} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t_{i:n}}{\theta}} [1 - (1 - e^{-\frac{t_{r:n}}{\theta}})]^{n-r} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!} \theta^{-r} \, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{r} t_{i:n} + (n-r)t_{r:n}}{\theta}}
\end{aligned}$$

تابع درست‌نمایی ماکزیمم نمونه سانسورشده‌ی نوع دوم:

$$\begin{aligned}
&L(\theta) = g(t_{1:n}, t_{2:n}, \ldots, t_{r:n}) = \frac{n!}{(n-r)!} \theta^{-r} \, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{r} t_{i:n} + (n-r)t_{r:n}}{\theta}} \\
&l(\theta) = \ln L(\theta) = \ln\left(\frac{n!}{(n-r)!}\right) - r \ln\theta - \frac{\sum_{i=1}^{r} t_{i:n} + (n-r)t_{r:n}}{\theta} \\
&l'(\theta) = \frac{d}{d\theta} l(\theta) = -\frac{r}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{r} t_{i:n} + (n-r)t_{r:n}}{\theta^2} = 0 \Longrightarrow \widehat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{r} t_{i:n} + (n-r)t_{r:n}}{r}
\end{aligned}$$

که

$\sum_{i=1}^{r} t_{i:n} + (n-r)t_{r:n}$ : Total time on test (مجموع طول عمر $n$ قطعه تا اتمام آزمایش)

برای حالت خاص $r = n$ (نمونه کامل) داریم:

$$\widehat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{i:n}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{i}}{n} = \bar{t}$$

## مثال

داده‌های زیر زمان‌های خرابی ۳۰ دستگاه تهویه‌ی هواپیما (در ساعات پرواز) را نشان می‌دهد.

۲۳ ۲۶۱ ۸۷ ۷ ۱۲۰ ۱۴ ۶۲ ۴۷ ۳ ۹۵ ۲۲۵ ۷۱ ۲۴۶ ۲۱ ۴۲ ۲۰ ۵ ۱۲ ۱۲۰

۱۱ ۱۴ ۷۱ ۱۱ ۱۴ ۱۱ ۱۶ ۹۰ ۱ ۱۶ ۵۲

با فرض اینکه توزیع طول عمر قطعات نمایی با میانگین $\theta$ باشد، پیدا کنید:

الف) MLE پارامتر $\theta$

ب) MLE تابع نرخ خرابی دستگاه

ج) MLE قابلیت اعتماد سیستم در زمان $t = ۲۰$ ساعت

د) فاصله‌ی اطمینان ۹۵ درصد برای قابلیت اعتماد دستگاه در زمان $t = ۲۰h$



## حل

الف)

$$T_۱, \dots, T_n \overset{iid}{\sim} Exp(\theta)$$

$$f(t;\theta) = \frac{۱}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}}, \qquad t > ۰,\ \theta > ۰$$

$$\widehat{\theta} = \frac{\sum_{i=۱}^{۳۰} t_i}{۳۰} = \frac{۲۳ + ۲۶۱ = \cdots + ۵۲}{۳۰} = ۵۹٫۶$$

حل

ب) تابع نرخ خرابی:

$$h(t) = \frac{f(t;\theta)}{1 - F(t;\theta)} = \frac{1/\theta\, e^{-\frac{t}{\theta}}}{1 - (1 - e^{-\frac{t}{\theta}})} = \frac{1/\theta\, e^{-\frac{t}{\theta}}}{e^{-\frac{t}{\theta}}} = \frac{1}{\theta}$$

از خاصیت پایایی MLE برآورد ML تابع نرخ خرابی در زمان $t$ می‌شود

$$\widehat{h(t)}_{ML} = \frac{1}{\widehat{\theta}_{ML}} = \frac{1}{59/6} = 0/017$$

ج) برآورد ML تابع قابلیت اعتماد در زمان $t = 20$:

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\frac{t}{\theta}}) = e^{-\frac{t}{\theta}}$$

$$R(20) = e^{-\frac{20}{\theta}} \implies \widehat{R(20)} = e^{-\frac{20}{\widehat{\theta}}} = e^{-\frac{20}{59/6}} = 0/715$$

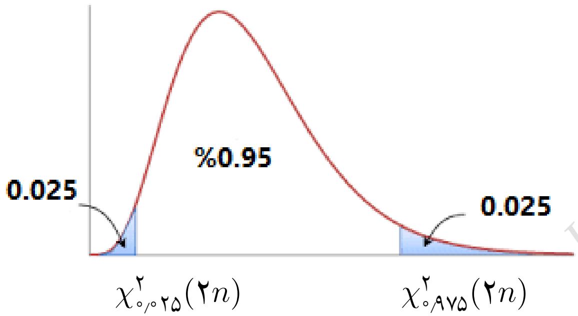
حل

د) داریم:

$$T_i \sim Exp(\theta) = \Gamma(۱, \theta) \quad \Longrightarrow \sum_{i=۱}^{n} T_i \sim \Gamma(n, \theta) \quad \Longrightarrow \frac{۲\sum_{i=۱}^{n} T_i}{\theta} \sim \chi^۲_{(۲n)}$$

لذا کمیت محوری مناسب می‌شود:

$$Q = \frac{۲\sum_{i=۱}^{n} T_i}{\theta} \sim \chi^۲_{(۲n)} \qquad \text{یا} \qquad Q = \frac{۲n\bar{T}}{\theta} \sim \chi^۲_{(۲n)}$$




$$P\Big(\chi^۲_{\frac{\alpha}{۲}}(۲n) < Q < \chi^۲_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(۲n)\Big) = ۱ - \alpha$$

$$P\Big(\chi^۲_{۰/۰۲۵}(۶۰) < \frac{۲n\widehat{\theta}}{\theta} < \chi^۲_{۰/۹۷۵}(۶۰)\Big) = ۰/۹۵$$

$$P\Big(\frac{۲n\widehat{\theta}}{\chi^۲_{۰/۹۷۵}(۶۰)} < \theta < \frac{۲n\widehat{\theta}}{\chi^۲_{۰/۰۲۵}(۶۰)}\Big) = ۰/۹۵$$

لذا فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای $\theta$ می‌شود:

$$\Big(\frac{۲n\widehat{\theta}}{\chi^۲_{۰/۹۷۵}(۶۰)}, \ \frac{۲n\widehat{\theta}}{\chi^۲_{۰/۰۲۵}(۶۰)}\Big) = \Big(\frac{۲(۳۰)(۵۹/۶)}{۸۳/۲۹۸}, \ \frac{۲(۳۰)(۵۹/۶)}{۴۰/۴۸}\Big) = (۴۲/۹۳, \ ۸۸/۳۳)$$

یعنی با اطمینان ۹۵ درصد می‌توان ادعا کرد که میانگین طول عمر دستگاه‌های تهویه بین $(۴۲/۹۳, \ ۸۸/۳۳)$ می‌باشد.

## حل

ادامه: فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای قابلیت اعتماد دستگاه در زمان $t = ۲۰$:

از آنجایی که $R(۲۰) = e^{-\frac{۲}{\theta}}$ برحسب $\theta$ صعودی است یعنی

$$a < \theta < b \quad \Leftrightarrow \quad R(a) < R(\theta) < R(b)$$

لذا فاصله اطمینان برای $R(۲۰) = e^{-\frac{۲}{\theta}}$ می‌شود:

$$P\left(e^{-\frac{۲}{۴۲/۹۳}} < e^{-\frac{۲}{\theta}} < e^{-\frac{۲}{۸۸/۳۳}}\right) = P(۰/۶۲۷ < R(۲۰) < ۰/۷۹۷) = ۰/۹۵$$

**مثال**

در مثال قبل با فرض اینکه آزمایش طول عمر

الف) بعد از مشاهده‌ی ۲۰ امین خرابی،

ب) در زمان $t = ۲۰$ ساعت

به پایان برسد، برآوردهای ML میانگین طول عمر، تابع نرخ خرابی و تابع قابلیت اعتماد در $t = ۱۰$ را بیابید.

**حل**

الف) آزمایش طول عمر به محض مشاهده‌ی $r$ امین ($r = ۲۰$) خرابی متوقف می‌شود. لذا نمونه‌ی سانسورشده‌ی نوع دوم می‌شود:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۳ | ۵ | ۷ | ۱۱ | ۱۱ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۴ | ۱۴ |
| ۱۴ | ۱۶ | ۱۶ | ۲۰ | ۲۱ | ۲۳ | ۴۲ | ۴۷ | ۵۲ | ۶۲ |

برآوردهای ML پارامتر $\theta$ (میانگین طول عمر) و تابع نرخ خرابی:

$$\widehat{\theta} = \frac{\sum_{i=۱}^{r} t_{i:n} + (n-r)t_{r:n}}{r} = \frac{[۱ + ۳ + \cdots + ۶۲] + (۳۰ - ۲۰)۶۲}{۲۰} = ۵۱/۱$$

$$h(t) = \frac{۱}{\theta} \implies \widehat{h(t)} = \frac{۱}{\widehat{\theta}} = \frac{۱}{۵۱/۱} = ۰/۰۱۹$$

**حل**

ادامه: تابع قابلیت اعتماد در $t = 10$:

$$R(10) = e^{-\frac{10}{\theta}} \implies \widehat{R(10)} = e^{-\frac{10}{\widehat{\theta}}} = e^{-\frac{10}{51.1}} = 0.676$$

ب) اگر آزمایش طول عمر در زمان $t = 20$ متوقف شود، زمان‌های خرابی مشاهده شده این زمان یعنی نمونه سانسورشده نوع اول می‌شود:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۳ | ۵ | ۷ | ۱۱ | ۱۱ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۴ |
| ۱۴ | ۱۴ | ۱۶ | ۱۶ | ۲۰ | | | | |

$r = 14$ ( تعداد خرابی‌ها قبل از زمان $t = 20$ )

$$\widehat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{r} t_{i:n} + (n-r)t}{r} = \frac{\sum_{i=1}^{14} t_{i:n} + (30-14)20}{14} = \frac{(1+\cdots+20)+(30-14)(20)}{14} = 33.92$$

$$\widehat{h(t)} = \frac{1}{\widehat{\theta}} = \frac{1}{33.92} = 0.029$$

$$\widehat{R(10)} = e^{-\frac{10}{\widehat{\theta}}} = e^{-\frac{10}{33.92}} = 0.74$$

**قضیه**

**قضیه سوخاته:** فرض کنید $Y_۱, Y_۲, \ldots, Y_n \overset{iid}{\sim} Exp(۱)$. قرار دهید:

$$W_۱ = Y_{۱:n}, \qquad W_۲ = Y_{۲:n} - Y_{۱:n}, \qquad \ldots, \qquad W_n = Y_{n:n} - Y_{n-۱:n}$$

در اینصورت:

- $W_۱, \ldots, W_n$ مستقل‌اند.
- $W_i \sim Exp\left(\frac{۱}{n-i+۱}\right), \qquad i = ۱, ۲, \ldots, n$
- $Y_{k:n} = \sum_{j=t}^{k} \frac{Z_j}{n-j+۱}$ که $Z_۱, \ldots, Z_n \overset{iid}{\sim} Exp(۱)$.
- $E(Y_{k:n}) = \sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{n-j+۱}$.



**اثبات**

ایده‌ی اثبات (با استفاده از روش ژاکوبین):

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_{۱:n}}{\partial W_۱} & \frac{\partial Y_{۱:n}}{\partial W_۲} & \cdots & \frac{\partial Y_{۱:n}}{\partial W_n} \\ \frac{\partial Y_{۲:n}}{\partial W_۱} & \frac{\partial Y_{۲:n}}{\partial W_۲} & \cdots & \frac{\partial Y_{۲:n}}{\partial W_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial Y_{n:n}}{\partial W_۱} & \frac{\partial Y_{n:n}}{\partial W_۲} & \cdots & \frac{\partial Y_{n:n}}{\partial W_n} \end{vmatrix} \qquad g(w_۱, \ldots, w_n) = f(y_{۱:n}, y_{۲:n}, \ldots, y_{n:n})\,|J|$$

## قضیه

اگر $\widehat{\theta}$ برآوردگر ML (MLE) پارامتر $\theta$ براساس اولین $r$ آماره ترتیبی یک نمونه $n$ تایی از توزیع $Exp(\theta)$ باشد، یعنی

$$\widehat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{r}x_{i:n}+(n-r)x_{r:n}}{r}$$

در اینصورت:

- $\widehat{\theta}$ یک آماره بسنده کامل برای $\theta$ است.
- $\widehat{\theta}$ یک UMVUE برای $\theta$ است.
- $\frac{2r\widehat{\theta}}{\theta}\sim\chi^2_{(2r)}$



## اثبات

**اثبات ۱.** چگالی توأم $x_{1:n},\dots,x_{r:n}$ می‌شود

$$g(x_{1:n},\dots,x_{r:n})=\frac{n!}{(n-r)!}\theta^{-r}\,e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_{i:n}+(n-r)x_{r:n}}{\theta}}=\frac{n!}{(n-r)!}\theta^{-r}\,e^{-\frac{r\widehat{\theta}}{\theta}}$$

که به خانواده نمایی تعلق دارد. لذا $\widehat{\theta}$ یک آماره بسنده کامل برای $\theta$ است.

## اثبات

**اثبات ۳.**

$$\begin{aligned}\frac{۲r\widehat{\theta}}{\theta} &= \frac{۲}{\theta}\sum_{i=۱}^{r} x_{i:n} + (n-r)x_{r:n}\\ &= \frac{۲\sum_{i=۱}^{r}(n-i+۱)(x_{i:n}-x_{i-۱:n})}{\theta}\\ &= ۲\sum_{i=۱}^{r}(n-i+۱)(Z_{i:n}-Z_{i-۱:n})\\ &= ۲\sum_{i=۱}^{r}(n-i+۱)W_i\end{aligned}$$

که $W_i \sim Exp\left(\frac{۱}{n-i+۱}\right)$.

**اثبات ۲.** چون

$$\frac{۲r\widehat{\theta}}{\theta} \sim \chi^{۲}_{(۲r)} \implies E\left(\frac{۲r\widehat{\theta}}{\theta}\right) = ۲r \implies E(\widehat{\theta}) = \theta$$

چون $\widehat{\theta}$ یک آماره بسنده کامل نیز می‌باشد لذا $\widehat{\theta}$ یک UMVUE برای $\theta$ است.

**مثال**

در مثال مربوط به دستگاه‌های تهویه هواپیما براساس اولین ۲۰ خرابی (نمونه‌ی سانسورشده‌ی نوع دوم $r=۲۰$) اگر چنانچه بدانیم توزیع طول عمر دستگاه‌ها نمایی با میانگین $\theta$ است، یک فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای $\theta$ بیابید.

**حل**

داریم

$$P\Big(\chi_{۰/۰۲۵}(۴۰) < \frac{۲r\widehat{\theta}}{\theta} < \chi^{۲}_{۰/۹۷۵}(۴۰)\Big) = ۰/۹۵$$
$$\Longrightarrow P\Big(\frac{۲r\widehat{\theta}}{\chi^{۲}_{۰/۹۷۵}(۴۰)} < \theta < \frac{۲r\widehat{\theta}}{\chi^{۲}_{۰/۰۲۵}(۴۰)}\Big) = ۰/۹۵$$

لذا فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای $\theta$ می‌شود:

$$\Big(\frac{۲\times ۲۰\times ۵۱/۱}{۵۹/۳۴}, \frac{۲\times ۲۰\times ۵۱/۱}{۲۴/۴۳}\Big) = (۳۴/۴۴,\ ۸۳/۶۶)$$