

# روش‌های عددی برای محاسبه برآوردهای نقطه‌ای در نرم‌افزار R

دکتر اکبر اصغرزاده و علی سعادت‌نیک

دانشگاه مازندران

اردیبهشت ۹۹



Statistical Analysis with  
R Commander Training

Univversity of Mazandaran  
Dr. A. Asgharzadeh

## ۱. روش‌های برآورد

- برآورد درست‌نمایی ماکزیمم
- برآورد گشتاوری

## ۲. دستورات کاربردی در نرم‌افزار R

- دستور optim
- دستور optimize
- دستور uniroot

## ۳. مثال عددی

Univversity of Mazandaran  
Dr. A. Asgharzadeh

حل عددی معادلات برای پیدا کردن برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای در آمار بسیار حائز اهمیت هستند. معادلات گشتاوری و درست‌نمایی ماکزیمم ممکن است منجر به جواب‌های صریحی برای برآوردهای گشتاوری (MME)، و برآوردهای درست‌نمایی (MLE) نشوند. بنابراین حل اینگونه معادلات از روش‌های عددی حائز اهمیت است. در بسیاری از کتاب‌های آمار ریاضی بر حل این گونه معادلات از روش‌های عددی تأکید شده است اما به چگونگی انجام این روش‌های عددی اشاره نشده است. در اینجا ما تعدادی از توابع مهم و پرکاربرد برای حل اینگونه معادلات در نرم افزار آماری R را ارائه می‌دهیم. در ادامه با ارائه مثال‌هایی، چگونگی استفاده از این دستورات را تشریح می‌کنیم. همچنین چندین دستور برای ماکزیمم کردن تابع درست‌نمایی معرفی می‌شوند.

University of Tehran  
Dr. A. Asgharzadeh

در این بخش، روش برآوردی را که بیش تر مورد استفاده قرار می گیرد، یعنی روش برآورد ماکزیم درست نمایی که از آن به اختصار با عنوان برآورد  $ML$  یاد می شود، بررسی می کنیم. روش  $ML$  عبارت است از دستورالعملی برای به دست آوردن برآوردگری به نام برآوردگر ماکزیم درست نمایی که از آن به اختصار به  $MLE$  یاد خواهیم کرد. فرض کنید  $(X_1, \dots, X_n)$ ، یک نمونه تصادفی از تابع چگالی احتمال توأم  $\theta \in \Theta \subseteq R^k$ ،  $f_\theta(x)$  باشد. تابع درست نمایی براساس مشاهدات  $x_1, \dots, x_n$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$L(\theta, \underline{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta).$$

برآوردگر به دست آمده به وسیله ماکزیم کردن  $L(\theta, \underline{x})$  نسبت به  $\theta$ ، برآوردگر  $MLE$  پارامتر  $\theta$  نامیده می شود و با  $\hat{\theta}_{MLE}$  نشان داده می شود. از آنجایی که تابع درست نمایی بیشتر به صورت توان می باشد و از طرف دیگر ماکزیم کردن لگاریتم یک تابع با ماکزیم کردن خود تابع هم ارز است لذا برای سهولت محاسبات، ماکزیم کردن تابع درست نمایی بر روی لگاریتم تابع انجام می گیرد.

University of Mohaghegh Zadeh  
Dr. Amirhossein Zadeh

یکی از قدیمی ترین روش های برآوردیابی، روش برآورد گشتاوری است که در سال ۱۸۹۴ توسط آماردان مشهور کارل پیرسون معرفی شده است. روش برآورد گشتاوری عبارت است از روشی برای به دست آوردن برآوردگری به نام برآوردگر گشتاوری که از آن به اختصار  $MME$  یاد می کنیم.

فرض کنید  $f(x, \theta_1, \dots, \theta_k)$ ، چگالی یک متغیر تصادفی مانند  $X$  باشد که دارای  $k$  پارامتر  $\theta_1, \dots, \theta_k$  است. فرض کنید  $\mu'_r$  نشان دهنده  $r$  امین گشتاور حول صفر یعنی  $\mu'_r = E[X^r]$  باشد. به طور کلی  $\mu'_r$  تابعی معلوم از  $k$  پارامتر  $\theta_1, \dots, \theta_k$  می باشد. این مطلب را با نوشتن  $\mu'_r = \mu'_r(\theta_1, \dots, \theta_k)$  نشان می دهیم.

فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  نمونه ای تصادفی از چگالی  $f(x, \theta_1, \dots, \theta_k)$  باشد، و فرض کنید  $M'_r$ ،  $r$  امین گشتاور نمونه ای یعنی،  $M'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r$  باشد.  $k$  معادله

$$M'_r = \mu'_r(\theta_1, \dots, \theta_k), \quad r = 1, \dots, k$$

را بر حسب  $k$  متغیر  $\theta_1, \dots, \theta_k$  حل کرده و فرض کنید  $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k$  جواب های معادلات فوق باشند. برآوردگر حاصل یعنی  $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)$ ، را برآوردگر گشتاوری  $(\theta_1, \dots, \theta_k)$  می نامند.

# دستورات کاربردی در نرم افزار R

**دستور optim** : دستور optim در مبحث بهینه‌سازی، برای مینیم کردن یک تابع غیرخطی مانند  $f$  استفاده می‌شود و به صورت زیر فراخوانی می‌شود.

**optim ( par start, f )**

که در آن مقدار اولیه برای بهینه‌سازی پارامترها و  $f$  تابع مورد استفاده برای مینیم‌سازی می‌باشد.

• از آنجایی که ماکزیم‌سازی  $f$  معادل با مینیم‌سازی  $(-f)$  می‌باشد، لذا برای ماکزیم‌سازی تابع  $f$  با استفاده از دستور *optim*،  $(-f)$  را می‌توان مینیم کرد.

پس از اجرای این دستور، آرگومان‌هایی که در خروجی ظاهر می‌شوند به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$\$par$  : بهترین مجموعه مقادیر برای پارامترها (نقاط مینیم یا ماکزیم تابع  $f$ )

$\$value$  : مقدار تابع  $f$  به ازای مقادیر  $\$par$

نکته. در صورتی که تابع  $f$  بیش از یک متغیر (پارامتر) داشته باشد، برای به دست آوردن نقاط مینیمم و یا ماکزیمم آن با استفاده از دستور `optim`، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

بعنوان مثال فرض کنید  $f(x, y)$  یک تابع دومتغیره باشد که  $x$  و  $y$  هر دو مجهول‌اند.

```
f = function(par){
  x = par[۱]; y = par[۲]
  تعریف تابع
}
```

`optim(c(x = a, y = b), f)$par`

$a$  و  $b$  مقادیر اولیه دلخواه  $x$  و  $y$  می‌باشند.

مثال ۰.۱ برنامه زیر نقطه مینیم تابع

$$f(x) = x^3 - 2x + 5$$

را با مقدار اولیه دلخواه  $x = 2$  به دست می آورد.

### R code

```
f1=function(x){
x^3-2*x+5
}
optim( 2, f1 )
$par
[1] 0.8164062
$value
[1] 3.911338
```

ملاحظه می گردد که تابع فوق در نقطه  $x = 0.816$  مینیم مقدار خود را داراست که این مقدار برابر  $3.911$  می باشد.



مثال ۰۲. برنامه زیر نقطه مینیمم تابع

$$f(x, y) = (x + 2y - 7)^2 + (2x + y - 5)^2$$

را با مقادیر اولیه دلخواه  $(x, y) = (1, 1)$  با استفاده از دستور `optim` به دست می آورد.

### R code

```
f2 = function(par){
x = par[1]; y = par[2]
(x+2*y-7)^2+(2*x+y-5)^2
}
```

```
optim( c(1,1), f2 ) $par
```

```
$par
```

```
[1] 0.9998584 3.0001488
```

توجه شود با قرار دادن `$par` در انتهای دستور `optim`، فقط نقطه مینیمم در خروجی نمایش داده می شود.

**دستور optimize** : برای پیدا کردن نقاط ماکزیمم یا مینیمم یک تابع تک متغیره پیوسته در فاصله  $[a, b]$  از این دستور استفاده می شود که به صورت زیر مورد استفاده قرار می گیرد.

**optimize ( f, interval=c(a,b), maximum=F )**

که در آن  $f$  یک تابع حقیقی مقدار است. توجه شود از  $\text{maximum}=F$  برای پیدا کردن نقاط مینیمم تابع و از  $\text{maximum}=T$  برای پیدا کردن نقاط ماکزیمم تابع استفاده می شود.

پس از اجرای دستور فوق مقادیر زیر در خروجی مشاهده می شوند.

$\$maximum$  یا  $\$minimum$  : نقطه ماکزیمم یا مینیمم تابع

$\$objective$  : مقدار تابع هدف به ازای نقاط اکسترمم موضعی

به عنوان مثال، برنامه زیر نقاط مینیمم و ماکزیمم تابع  $f(x) = x^3 - 6x + 4$  را با استفاده از دستور optimize در فاصله  $[1, 2]$  به دست می آورد. توجه شود با قرار دادن  $\$minimum$  در آخرین دستور تنها نقطه  $minimum$  تابع در خروجی ظاهر می شود.

## R code

```
f3 =function(x){  
x^3-6*x+4  
}
```

```
optimize(f3, interval=c(1,2), maximum=F)$minimum
```

```
$minimum  
[1] 1.414221
```

```
optimize(f3, interval=c(1,2), maximum=T)$maximum
```

```
$maximum  
[1] 1.999934
```

ملاحظه می‌گردد که تابع فوق در نقطه  $1/414$  مینیمم و در نقطه  $1/99$  ماکزیمم می‌گردد.

دستور **uniroot** : دستور *uniroot* یکی از توابع پرکاربرد برای به دست آوردن ریشه یک تابع تک متغیره می باشد. برای پیدا کردن ریشه تابع تک متغیره  $f$  در فاصله  $[a, b]$  باید مطمئن شویم تابع  $f$  در این بازه دارای ریشه است ( $f(a)f(b) < 0$ ). این تابع به صورت زیر فراخوانی می شود.

**uniroot ( f, interval=c(a,b) )**

که در آن  $f$  یک تابع حقیقی به فرم (شناسه های مورد بررسی  $f(x)$  است.  $x$ ، متغیر مورد بررسی و  $interval = c(a, b)$  کران بالا و کران پایین در فاصله  $[a, b]$  است. قابل ذکر است با قرار دادن  $root$  در انتهای دستور فوق می توان فقط ریشه معادله را در خروجی مشاهده کرد.

پس از اجرای این دستور مقادیر زیر در خروجی ظاهر می شوند:

$root$  : ریشه تابع  $f$  در فاصله  $[a, b]$

$f.root$  : مقدار تابع به ازای  $root$ .

Univversity of Mazandaran  
Dr. A. Asgharzadeh

به عنوان مثال برنامه زیر ریشه تابع  $f(x)$  را در فاصله  $[0, 2]$  محاسبه می کند.  $(f(0)f(2) < 0)$

$$f(x) = x^3 + 8x - 16$$

$$f(0) = -16 < 0$$

$$f(2) = 8 > 0$$

### R code

```
f4 = function(x){
x^3+8*x-16
}
uniroot ( f4, c(0, 2) ) $root
[1] 1.541831
```

ملاحظه می شود ریشه تابع  $f$  در فاصله  $[0, 2]$  مقدار  $1.54$  می باشد.

# برآورد ML برای پارامتر توزیع کوشی

فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع کوشی با پارامتر مکان  $\theta$  با تابع چگالی زیر باشد.

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\pi[1 + (x - \theta)^2]}; \quad x, \theta \in R.$$

تابع درست‌نمایی به صورت زیر می‌باشد.

$$L(\theta) = \pi^{-n} \prod_{i=1}^n [1 + (x_i - \theta)^2]^{-1}.$$

لگاریتم تابع درست‌نمایی و معادلات درست‌نمایی به صورت زیر است:

$$\ln L = -n \ln \pi - \sum_{i=1}^n \ln[1 + (x_i - \theta)^2], \quad (1)$$

و

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L = 2 \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \theta}{1 + (x_i - \theta)^2} = 0. \quad (2)$$

از آن جایی که معادله (۲) به طور مستقیم قابل حل نیست، لذا مقدار  $\hat{\theta}$  به ازاء یک نمونه تصادفی باید به روش های عددی محاسبه شود.

برای به دست آوردن برآورد  $ML$  پارامتر  $\theta$  از دو روش زیر استفاده می کنیم:

- **روش اول:** در این روش، ریشه معادله (۲) را با استفاده از دستور *uniroot* محاسبه می کنیم.
- **روش دوم:** در این روش، با استفاده از دستور *optimize*، لگاریتم تابع درست نمایی (معادله (۱)) را مستقیماً ماکزیم کرده و برآورد  $ML$  پارامتر  $\theta$  را محاسبه می کنیم.

Univiversity of Mazandaran  
Dr. A. Asgharzadeh

روش اول. در این روش برآورد  $ML$  پارامتر  $\theta$  که همان ریشه معادله (۲) می باشد را با استفاده از دستور  $uniroot$  و براساس یک نمونه تصادفی  $10$  تایی در فاصله  $[0, 3]$  به دست می آوریم. توجه شود در فاصله  $[0, 3]$  مقدار رابطه (۲) به ازای  $\theta = 0$  برابر  $5,38$  و به ازای  $\theta = 3$  مقدار  $-4,75$  می باشد. بنابراین در فاصله  $[0, 3]$  ریشه وجود دارد.

## R code

```
x=c(-20.245740 , -4.920345, 1.488077, 1.864589, 1.931868, 2.013209, 2.050313,
2.831752, 2.908131, 3.952036)
```

```
eqsolve=function(theta) {
2*sum((x-theta)/(1+(x-theta)^2 ))
}
```

```
uniroot( eqsolve, interval=c(0,3) )$root
```

```
[1] 2.155482
```



روش دوم. برآورد  $ML$  پارامتر  $\theta$  با استفاده از دستور  $optimize$  به صورت زیر قابل محاسبه است.

## R code

```
x=c(-20.245740 , -4.920345, 1.488077, 1.864589, 1.931868, 2.013209, 2.050313,
2.831752, 2.908131, 3.952036)
```

```
lnL=function(theta){
n=length(x)
-n*log(pi)-sum( log(1+(x-theta)^2) )
}
```

```
optimize( lnL, interval=c(0.01, 3), maximum=T )$maximum
```

```
[1] 2.155475
```

لذا براساس داده‌های فوق،  $\hat{\theta} = ۲/۱۵۵$ . توجه شود  $length(x)$  طول بردار  $x$  و  $pi = \pi$  می‌باشد.

# برآورد ML پارامتر شکل توزیع گاما

فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی  $n$  تایی از توزیع  $\Gamma(\alpha, 1)$  با  $\alpha \in (0, \infty)$  تابع چگالی احتمال زیر باشد. می‌خواهیم برآورد  $ML$  پارامتر  $\alpha$  را به دست آوریم.

$$f(x; \alpha) = \frac{e^{-x} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0,$$

تابع درست‌نمایی برابر است با

$$L(\alpha) = \{\Gamma(\alpha)\}^{-n} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1} \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i\right)$$

و لگاریتم تابع درست‌نمایی می‌شود

$$\begin{aligned} l(\alpha) &= \ln L(\alpha) \\ &= -n \ln \Gamma(\alpha) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n x_i. \end{aligned} \quad (3)$$

که از آن معادله درست‌نمایی زیر حاصل می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} l(\alpha) = -n \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0, \quad (4)$$

که در آن  $\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$  تابع دای گاما می‌باشد و  $\Gamma'(\alpha)$  برای  $x > 0$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \Gamma(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} \ln x x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

چون معادله (4) به صورت مستقیم دارای جواب نیست، لذا از روش‌های عددی برای حل آن استفاده می‌کنیم.

University of Mazandaran  
Dr. A. Asgharzadeh

همانند مثال قبل، برای محاسبه برآورد  $ML$  پارامتر  $\alpha$  از دو روش استفاده می کنیم.

• **روش اول:** در این روش، ریشه معادله (۴) را با استفاده از دستور *uniroot* محاسبه می کنیم.

• **روش دوم:** در این روش، با استفاده از دستور *optimize*، لگاریتم تابع درست‌نمایی (معادله (۳)) را ماکزیمم کرده و برآورد  $ML$  پارامتر  $\alpha$  را محاسبه می کنیم.

Univiversity of Mazandaran  
Dr. A. Asgharzadeh

روش اول. براساس یک نمونه تصادفی شبیه‌سازی شده از توزیع  $\Gamma(\frac{1}{\alpha}, 1)$ ، ریشه معادله (۴) را با استفاده از دستور *uniroot* به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

## R code

```
x=c(0.0003655479, 2.1736826989, 0.0586845207, 0.0138559379, 0.2178146318,
0.7201073143, 2.1528716490, 0.4777215568, 0.5507213824, 1.2154430724)
```

```
eqsolve2=function(alpha){
n=length(x)
-n*digamma(alpha)+sum(log(x))
}
```

```
uniroot(eqsolve2, interval=c(0.001,2))$root
[1] 0.5716474
```

بنابراین  $\hat{\alpha} = 0.571$  به دست می‌آید.

توجه شود *digamma(alpha)* دستور مورد استفاده برای تابع دای گاما می‌باشد.

روش دوم. با استفاده از دستور *optimize* برآورد *ML* پارامتر  $\alpha$  به صورت زیر محاسبه می شود.

## R code

```
x=c(0.0003655479, 2.1736826989, 0.0586845207, 0.0138559379, 0.2178146318,
0.7201073143, 2.1528716490, 0.4777215568, 0.5507213824, 1.2154430724)
```

```
lnL2 = function(alpha){
n=length(x)
-n*log(gamma(alpha))+(alpha-1)*sum(log(x))-sum(x)
}
```

```
optimize(lnL2, interval=c(0,2), maximum=T)$maximum
```

```
[1] 0.5716659
```

University of Mohammar  
Dr. A. Asgharzadeh

## برآورد ML و MM در توزیع وایبل

در این بخش برآوردهای درست‌نمایی ماکزیمم و گشتاوری پارامترهای توزیع وایبل با استفاده از دستورات ذکر شده، براساس یک مجموعه داده‌های واقعی به دست می‌آوریم. داده‌های مورد استفاده مربوط به زمان خرابی ۲۰ واحد مکانیکی می‌باشد. داده‌ها به صورت زیر می‌باشند:

0.067, 0.068, 0.076, 0.081, 0.084, 0.085, 0.085, 0.086, 0.089, 0.098,  
0.098, 0.114, 0.114, 0.115, 0.121, 0.125, 0.131, 0.149, 0.160, 0.485

Univiversity of Mazandaran  
Dr. A. Asgharzadeh

بر اساس یک نمونه  $n$  تایی از توزیع وایبل با پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  با تابع چگالی

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta}{\alpha^\beta} x^{\beta-1} e^{-(\frac{x}{\alpha})^\beta}; \quad x \geq 0, \alpha, \beta > 0$$

تابع درست‌نمایی به صورت زیر می‌باشد.

$$L(\alpha, \beta, \underline{x}) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta}.$$

لگاریتم تابع درست‌نمایی می‌شود

$$l(\alpha, \beta, \underline{x}) = n \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \quad (5)$$

از آن معادلات درست‌نمایی زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{d\alpha} &= -\frac{n}{\alpha} + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{-1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \\ &= -\frac{n\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta = 0, \end{aligned} \quad (6)$$



$$\frac{dl}{d\beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta} \ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right) = 0. \quad (7)$$

با استفاده از (۶) نتیجه می‌شود

$$\alpha = \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{\beta}}{n} \right)^{1/\beta} \quad (8)$$

با جایگذاری  $\alpha$  به دست آمده در (۷) داریم

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i^{\beta} \ln x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^{\beta}} - \frac{1}{\beta} - \frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i}{n} = 0. \quad (9)$$

به دلیل غیرخطی بودن این معادله برحسب  $\beta$ ، ما برآوردهای ماکزیمم درست‌نمایی پارامترها را به صورت عددی محاسبه می‌کنیم.

برای این منظور از دو روش زیر استفاده می‌کنیم.

• **روش اول:** برای محاسبه برآورد  $ML$  پارامتر  $\beta$ ، ریشه معادله (۹) را با استفاده از دستور *uniroot* محاسبه می‌کنیم. با جایگذاری  $\hat{\beta}$  به دست آمده در معادله (۸) برآورد  $ML$  پارامتر  $\alpha$  به دست می‌آید.

• **روش دوم:** در این روش، لگاریتم تابع درست‌نمایی را بر حسب  $\alpha$  و  $\beta$  ماکزیمم می‌کنیم. برای این منظور از دستور *optim* استفاده می‌کنیم و با مینیمم سازی تابع  $(-l(\alpha, \beta, \underline{x}))$  نسبت به  $\alpha$  و  $\beta$  برآوردهای درست‌نمایی پارامترها را محاسبه می‌کنیم.

Univversität of Maragheh  
Dr. A. Asgharzadeh

روش اول: استفاده از دستور *uniroot* در بازه  $[0, 3]$ .

### R code

```
x = c( 0.067, 0.068, 0.076, 0.081, 0.084, 0.085, 0.085, 0.086, 0.089, 0.098,
0.098, 0.114, 0.114, 0.115, 0.121, 0.125, 0.131, 0.149, 0.160 ,0.485 )
```

```
eqsolve3=function(beta){
n=length(x)
sum(x^beta*log(x))/sum(x^beta)-(1/beta)-sum(log(x))/n
}
```

```
uniroot( eqsolve3, c(0,3) )$root
[1] 1.642151
```

بنابراین از این روش  $\hat{\beta} = 1/64$  به دست می آید. با جایگذاری آن در (۸) مقدار  $\hat{\alpha} = 0/1376$  برآورد می شود.

روش دوم: استفاده از دستور *optim* با مقدار اولیه (۱, ۲) برای  $(\alpha, \beta)$ .

## R code

```
x = c( 0.067, 0.068, 0.076, 0.081, 0.084, 0.085, 0.085, 0.086, 0.089, 0.098,
0.098, 0.114, 0.114, 0.115, 0.121, 0.125, 0.131, 0.149, 0.160 ,0.485 )
```

```
lnL3=function(par){
alpha=par[1]; beta=par[2]
n=length(x)
out=n*log(beta/alpha)+(beta-1)*sum(log(x/alpha))-sum((x/alpha)^beta)
return(-out)
}
```

```
optim( par=c(alpha=1,beta=2), lnL3 )$par
```

```
alpha beta
```

```
0.1376125 1.6422294
```

با توجه به مقادیر به دست آمده در خروجی  $\hat{\alpha}_{MLE} = 0.13$  و  $\hat{\beta}_{MLE} = 1.64$  برآورد شده‌اند.

برای پیدا کردن برآورد گشتاوری  $\alpha$  و  $\beta$  به صورت زیر داریم:

$$E(X) = \alpha \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) = \bar{X},$$

که از آن نتیجه می شود

$$\alpha = \frac{\bar{X}}{\Gamma \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right)} \quad (10)$$

همچنین برای پیدا کردن برآورد گشتاوری  $\beta$  داریم

$$E(X^2) = \alpha^2 \Gamma \left( 1 + \frac{2}{\beta} \right) = \bar{X}^2.$$

با جایگذاری  $\alpha$  به دست آمده در این معادله داریم

$$(\bar{X})^2 \Gamma \left( 1 + \frac{2}{\beta} \right) - \bar{X}^2 \left[ \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) \right]^2 = 0. \quad (11)$$

از آنجایی که معادله (۱۱) دارای جواب صریحی برای  $\beta$  نمی‌باشد، بنابراین برای یافتن جواب معادله بایستی از روش‌های عددی با یک نمونه خاص استفاده کرد. ما در اینجا با استفاده از دستور *uniroot* برآورد گشتاوری  $\beta$  که ریشه معادله (۱۱) می‌باشد را به دست آورده و با جایگذاری آن در معادله (۱۰) برآورد گشتاوری  $\alpha$  را محاسبه می‌کنیم.

Univversity of Azad  
Dr. A. Asghari Zandaran

## R code

```
x = c( 0.067, 0.068, 0.076, 0.081, 0.084, 0.085, 0.085, 0.086, 0.089, 0.098,
0.098, 0.114, 0.114, 0.115, 0.121, 0.125, 0.131, 0.149, 0.160 ,0.485 )
```

```
mme = function(beta) {
(mean(x))^2*gamma(1+(2/beta))-mean(x^2)*(gamma(1+1/beta))^2
}
```

```
uniroot( mme, interval=c(1,5) )$root
[1] 1.415412
```

بنابراین با توجه به خروجی به دست آمده مشاهده می شود  $\tilde{\beta}_{MME} = 1/415$  که با جایگذاری آن در (۱۰) برآورد گشتاوری پارامتر  $\alpha$ ، مقدار  $\tilde{\alpha}_{MME} = 0/1335$  به دست می آید.

توجه شود در برنامه فوق  $mean(x)$  نمایانگر میانگین داده‌ها، یعنی  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  و  $mean(x^2)$  نمایانگر میانگین توان دوم داده‌ها، یعنی  $\bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$  می باشد.

تمرین. اگر  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} f(x, \alpha, \lambda)$  که

$$f(x; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1}; \quad x > 0, \quad \alpha, \lambda > 0.$$

با استفاده از روش‌های عددی ذکر شده، براساس مجموعه داده واقعی زیر، برآورد درست‌نمایی ماکزیمم پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  را به دست آورید. داده‌ها نشان‌دهنده تعداد چرخش‌های (برحسب میلیون) ۲۳ بلب‌رینگ قبل از زمان خرابی می‌باشد. داده‌ها به صورت زیر می‌باشند.

17.88, 28.92, 33, 41.52, 42.12, 45.6, 48.8, 51.84, 51.96, 54.12, 55.56, 67.8, 68.64, 68.88, 84.12, 93.12, 98.64, 105.12, 105.84, 127.92, 128.04, 173.4

University of Mazan  
Dr. A. Asgharzadeh