روش‌های عددی برای محاسبه برآوردهای نقطه‌ای در نرم‌افزار R

دکتر اکبر اصغرزاده و علی سعادتی‌نیک

دانشگاه مازندران

اردیبهشت ۹۹

Statistical Analysis with
R Commander Training

فهرست مطالب

حل عددي معادلات براي پيدا كردن برآوردهاي نقطه‌اي و فاصله‌اي در آمار بسيار حائز اهميت هستند. معادلات گشتاوري و درست‌نمايي ماكزيمم ممكن است منجر به جواب‌هاي صريحي براي برآوردهاي گشتاوري (MME)، و برآوردهاي درست‌نمايي (MLE) نشوند. بنابراين حل اينگونه معادلات از روش‌هاي عددي حائز اهميت است. در بسیاری از کتاب‌های آمار ریاضی بر حل این گونه معادلات از روش‌های عددی تأکید شده است اما به چگونگی انجام این روش‌های عددی اشاره نشده است. در اینجا ما تعدادی از توابع مهم و پرکاربرد برای حل اینگونه معادلات در نرم افزار آماری R را ارائه می‌دهیم. در ادامه با ارائه مثال‌هایی، چگونگی استفاده از این دستورات را تشریح می‌کنیم. همچنین چندین دستور برای ماکزیمم کردن تابع درست‌نمایی معرفی می‌شوند.

در این بخش، روش برآوردی را که بیش‌تر مورد استفاده قرار می‌گیرد، یعنی روش برآورد ماکزیمم درست‌نمایی که از آن به اختصار با عنوان برآورد ML یاد می‌شود، بررسی می‌کنیم. روش ML عبارت است از دستورالعملی برای به‌دست آوردن برآوردگری به نام برآوردگر ماکزیمم درست‌نمایی که از آن به اختصار به MLE یاد خواهیم کرد. فرض کنید $(X_1, \ldots, X_n)$، یک نمونه تصادفی از تابع چگالی احتمال توأم $f_\theta(x)$، $\theta \in \Theta \subseteq R^k$ باشد. تابع درست‌نمایی براساس مشاهدات $x_1, \ldots, x_n$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(\theta, \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta).$$

برآوردگر به‌دست آمده به‌وسیله ماکزیمم کردن $L(\theta, \underline{x})$ نسبت به θ، برآوردگر MLE پارامتر θ نامیده می‌شود و با $\hat{\theta}_{MLE}$ نشان داده می‌شود. از آنجایی که تابع درست‌نمایی بیشتر به‌صورت توان می‌باشد و از طرف دیگر ماکزیمم کردن لگاریتم یک تابع با ماکزیمم کردن خود تابع هم ارز است لذا برای سهولت محاسبات، ماکزیمم کردن تابع درست‌نمایی بر روی لگاریتم تابع انجام می‌گیرد.

یکی از قدیمی‌ترین روش‌های برآوردیابی، روش برآورد گشتاوری است که در سال ۱۸۹۴ توسط آماردان مشهور کارل پیرسون معرفی شده است. روش برآورد گشتاوری عبارت است از روشی برای به‌دست آوردن برآوردگری به نام برآوردگر گشتاوری که از آن به اختصار MME یاد می‌کنیم.

فرض کنید $f(x, \theta_1, \ldots, \theta_k)$، چگالی یک متغیر تصادفی مانند X باشد که دارای k پارامتر $\theta_1, \ldots, \theta_k$ است. فرض کنید μ'_r نشان‌دهنده r امین گشتاور حول صفر یعنی $\mu'_r = E[X^r]$ باشد. به‌طور کلی μ'_r تابعی معلوم از k پارامتر $\theta_1, \ldots, \theta_k$ می‌باشد. این مطلب را با نوشتن $\mu'_r = \mu'_r(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ نمونه ای تصادفی از چگالی $f(x, \theta_1, \ldots, \theta_k)$ باشد، و فرض کنید M'_r، r امین گشتاور نمونه‌ای یعنی، $M'_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r$ باشد. k معادله

$$M'_r = \mu'_r(\theta_1, \ldots, \theta_k), \qquad r = 1, \ldots, k$$

را برحسب k متغیر $\theta_1, \ldots, \theta_k$ حل کرده و فرض کنید $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_k$ جواب‌های معادلات فوق باشند. برآوردگر حاصل یعنی $(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_k)$، را برآوردگر گشتاوری $(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ می‌نامند.

دستورات کاربردی در نرم افزار R

دستور optim : دستور optim در مبحث بهینه‌سازی، برای مینیمم کردن یک تابع غیرخطی مانند f استفاده می‌شود و به‌صورت زیر فراخوانی می‌شود.

optim (par start, f)

که در آن $par\ start$ مقدار اولیه برای بهینه‌سازی پارامترها و f تابع مورد استفاده برای مینیمم‌سازی می‌باشد.

- از آنجایی‌که ماکزیمم‌سازی f معادل با مینیمم‌سازی $(-f)$ می‌باشد، لذا برای ماکزیمم‌سازی تابع f با استفاده از دستور $optim$، $(-f)$ را می‌توان مینیمم کرد.

پس از اجرای این دستور، آرگومانت‌هایی که در خروجی ظاهر می‌شوند به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

par : بهترین مجموعه مقادیر برای پارامترها (نقاط مینیمم یا ماکزیمم تابع f)

$value$: مقدار تابع f به ازای مقادیر par

نکته. در صورتی‌که تابع f بیش از یک متغیر (پارامتر) داشته باشد، برای به‌دست آوردن نقاط مینیمم و یا ماکزیمم آن با استفاده از دستور $optim$، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

بعنوان مثال فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع دومتغیره باشد که x و y هردو مجهول‌اند.

$$f = function(par)\{$$
$$x = par[۱];\ \ y = par[۲]$$
تعریف تابع
$$\}$$

$$optim(\ c(x = a,\ y = b),\ f\ )\$par$$

a و b مقادیر اولیه دلخواه x و y می‌باشند.

مثال ۱. برنامه زیر نقطه مینیمم تابع

$$f(x) = x^{۳} - ۲x + ۵$$

را با مقدار اولیه دلخواه $x = ۲$ به‌دست می‌آورد.

R code

```
f1=function(x){
x^3-2*x+5
}
optim( 2, f1 )
$par
[1] 0.8164062
$value
[1] 3.911338
```


ملاحظه می‌گردد که تابع فوق در نقطه $x = ۰/۸۱۶$ مینیمم مقدار خود را داراست که این مقدار برابر ۳/۹۱۱ می‌باشد.

مثال ۲. برنامه زیر نقطه مینیمم تابع

$$f(x,y) = (x + ۲y - ۷)^۲ + (۲x + y - ۵)^۲$$

را با مقادیر اولیه دلخواه $(x,y) = (۱,۱)$ با استفاده از دستور $optim$ به‌دست می آورد.

R code

```
f2 = function(par){
x = par[1]; y = par[2]
(x+2*y-7)^2+(2*x+y-5)^2
}

optim( c(1,1), f2 ) $par
$par
[1] 0.9998584   3.0001488
```


توجه شود با قرار دادن $\$par$ در انتهای دستور $optim$، فقط نقطه مینیمم در خروجی نمایش داده می‌شود.

دستور optimize : برای پیدا کردن نقاط ماکزیمم یا مینیمم یک تابع تک متغیره پیوسته در فاصله $[a, b]$ از این دستور استفاده می‌شود که به‌صورت زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

```
optimize ( f, interval=c(a,b), maximum=F )
```

که در آن f یک تابع حقیقی مقدار است. توجه شود از maximum=F برای پیدا کردن نقاط مینیمم تابع و از maximum=T برای پیدا کردن نقاط ماکزیمم تابع استفاده می‌شود.

پس از اجرای دستور فوق مقادیر زیر در خروجی مشاهده می‌شوند.

$maximum$ یا $minimum$: نقطه ماکزیمم یا مینیمم تابع

$objective$: مقدار تابع هدف به‌ازای نقاط اکسترمم موضعی

به عنوان مثال، برنامه زیر نقاط مینیمم و ماکزیمم تابع $f(x) = x^{۳} - ۶x + ۴$ را با استفاده از دستور optimize در فاصله $[۱, ۲]$ به‌دست می‌آورد. توجه شود با قرار دادن $minimum در آخر این دستور تنها نقطه $minimum تابع در خروجی ظاهر می‌شود.

R code

```
f3 =function(x){
x^3-6*x+4
}

optimize(f3, interval=c(1,2), maximum=F)$minimum

$minimum
[1] 1.414221

optimize(f3, interval=c(1,2), maximum=T)$maximum

$maximum
[1] 1.999934
```


ملاحظه می‌گردد که تابع فوق در نقطه ۱/۴۱۴ مینیمم و در نقطه ۱/۹۹ ماکزیمم می‌گردد.

دستور uniroot : دستور $uniroot$ یکی از توابع پرکاربرد برای به‌دست آوردن ریشه یک تابع تک متغیره می‌باشد. برای پیدا کردن ریشه تابع تک متغیره f در فاصله $[a, b]$ باید مطمئن شویم تابع f در این بازه دارای ریشه است $(f(a)f(b) < 0)$. این تابع به‌صورت زیر فراخوانی می‌شود.

```
uniroot ( f, interval=c(a,b) )
```

که در آن f یک تابع حقیقی به فرم (شناسه‌های مورد بررسی, x)f است. x، متغیر مورد بررسی و $interval =$ $c(a, b)$ کران بالا و کران پایین در فاصله $[a, b]$ است. قابل ذکر است با قرار دادن $\$root$ در انتهای دستور فوق می‌توان فقط ریشه معادله را در خروجی مشاهده کرد.

پس از اجرای این دستور مقادیر زیر در خروجی ظاهر می شوند:

$\$root$: ریشه تابع f در فاصله $[a, b]$

$\$f.root$: مقدار تابع به ازای $\$root$.

به عنوان مثال برنامه زیر ریشه تابع $f(x)$ را در فاصله $[۰, ۲]$ محاسبه می کند. $(f(۰)f(۲) < ۰)$

$$f(x) = x^۳ + ۸x - ۱۶$$
$$f(۰) = -۱۶ < ۰$$
$$f(۲) = ۸ > ۰$$

R code

```
f4 = function(x){
x^3+8*x-16
}
uniroot ( f4, c(0, 2) ) $root
[1] 1.541831
```


ملاحظه می‌شود ریشه تابع f در فاصله $[۰, ۲]$ مقدار ۱/۵۴ می‌باشد.

برآورد ML برای پارامتر توزیع کوشی

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع کوشی با پارامتر مکان θ با تابع چگالی زیر باشد.

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\pi[1+(x-\theta)^2]}; \qquad x, \theta \in R.$$

تابع درست‌نمایی به‌صورت زیر می‌باشد.

$$L(\theta) = \pi^{-n} \prod_{i=1}^{n} [1+(x_i-\theta)^2]^{-1}.$$

لگاریتم تابع درست‌نمایی و معادلات درست‌نمایی به‌صورت زیر است:

$$\ln L = -n \ln \pi - \sum_{i=1}^{n} \ln[1+(x_i-\theta)^2], \tag{1}$$

و

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L = 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i-\theta}{1+(x_i-\theta)^2} = 0. \tag{2}$$

از آن‌جایی که معادله (۲) به‌طور مستقیم قابل حل نیست، لذا مقدار $\hat{\theta}$ به ازاء یک نمونه تصادفی باید به روش‌های عددی محاسبه شود.

برای به‌دست آوردن برآورد ML پارامتر θ از دو روش زیر استفاده می‌کنیم:

- روش اول: در این روش، ریشه معادله (۲) را با استفاده از دستور $uniroot$ محاسبه می‌کنیم.
- روش دوم: در این روش، با استفاده از دستور $optimize$، لگاریتم تابع درست‌نمایی (معادله (۱)) را مستقیما ماکزیمم کرده و برآورد ML پارامتر θ را محاسبه می‌کنیم.

روش اول. در این روش برآورد ML پارامتر θ که همان ریشه معادله (۲) می‌باشد را با استفاده از دستور $uniroot$ و بر اساس یک نمونه تصادفی ۱۰ تایی در فاصله $[۰, ۳]$ به‌دست می‌آوریم. توجه شود در فاصله $[۰, ۳]$ مقدار رابطه (۲) به ازای $\theta = ۰$ برابر ۵/۳۸ و به ازای $\theta = ۳$ مقدار $-۴/۷۵$ می‌باشد. بنابراین در فاصله $[۰, ۳]$ ریشه وجود دارد.

R code

```
x=c(-20.245740 , -4.920345, 1.488077, 1.864589, 1.931868, 2.013209, 2.050313,
2.831752, 2.908131, 3.952036)

eqsolve=function(theta) {
2*sum((x-theta)/(1+(x-theta)^2 ))
}

uniroot( eqsolve, interval=c(0,3) )$root
[1] 2.155482
```

روش دوم. برآورد ML پارامتر θ با استفاده از دستور $optimize$ به‌صورت زیر قابل محاسبه است.

R code

```
x=c(-20.245740 , -4.920345, 1.488077, 1.864589, 1.931868, 2.013209, 2.050313,
2.831752, 2.908131, 3.952036)

lnL=function(theta){
n=length(x)
-n*log(pi)-sum( log(1+(x-theta)^2) )
}

optimize( lnL, interval=c(0.01, 3), maximum=T )$maximum
[1] 2.155475
```

لذا براساس داده‌های فوق، $\hat{\theta} = ۲/۱۵۵$. توجه شود $length(x)$ طول بردار x و $pi = \pi$ می‌باشد.

برآورد ML پارامتر شکل توزیع گاما

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $\Gamma(\alpha, 1)$, $\alpha \in (0, \infty)$ با تابع چگالی احتمال زیر باشد. می‌خواهیم برآورد ML پارامتر α را به‌دست آوریم.

$$f(x;\alpha) = \frac{e^{-x}\, x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0,$$

تابع درست‌نمایی برابر است با

$$L(\alpha) = \{\Gamma(\alpha)\}^{-n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1}\, exp\Big(-\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)$$

و لگاریتم تابع درست‌نمایی می‌شود

$$\begin{aligned} l(\alpha) &= \ln L(\alpha) \\ &= -n \ln \Gamma(\alpha) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i. \end{aligned} \tag{3}$$

که از آن معادله درست‌نمایی زیر حاصل می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}l(\alpha) = -n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0, \qquad (4)$$

که در آن $\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$ تابع دای گاما می‌باشد و $\Gamma'(\alpha)$ برای $x > 0$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\Gamma(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,\mathrm{dx} = \int_0^\infty \ln x\, x^{\alpha-1}\, e^{-x}\,\mathrm{dx}.$$

چون معادله (۴) به‌صورت مستقیم دارای جواب نیست، لذا از روش‌های عددی برای حل آن استفاده می‌کنیم.

همانند مثال قبل، برای محاسبه برآورد ML پارامتر α از دو روش استفاده می‌کنیم.

- روش اول: در این روش، ریشه معادله (۴) را با استفاده از دستور $uniroot$ محاسبه می‌کنیم.
- روش دوم: در این روش، با استفاده از دستور $optimize$، لگاریتم تابع درست‌نمایی (معادله (۳)) را ماکزیمم کرده و برآورد ML پارامتر α را محاسبه می‌کنیم.

روش اول. براساس یک نمونه تصادفی شبیه‌سازی شده از توزیع $\Gamma(\frac{1}{2}, 1)$، ریشه معادله (۴) را با استفاده از دستور $uniroot$ به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

R code

```
x=c(0.0003655479, 2.1736826989, 0.0586845207, 0.0138559379, 0.2178146318,
0.7201073143, 2.1528716490, 0.4777215568, 0.5507213824, 1.2154430724)

eqsolve2=function(alpha){
n=length(x)
-n*digamma(alpha)+sum(log(x))
}

uniroot(eqsolve2, interval=c(0.001,2) )$root
[1] 0.5716474
```

بنابراین $\widehat{\alpha} = ۰/۵۷۱$ به‌دست می‌آید.

توجه شود $digamma(alpha)$ دستور مورد استفاده برای تابع دای گاما می‌باشد.

روش دوم. با استفاده از دستور $optimize$ برآورد ML پارامتر α به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

R code

```
x=c(0.0003655479, 2.1736826989, 0.0586845207, 0.0138559379, 0.2178146318,
0.7201073143, 2.1528716490, 0.4777215568, 0.5507213824, 1.2154430724)

lnL2 = function(alpha){
n=length(x)
-n*log(gamma(alpha))+(alpha-1)*sum(log(x))-sum(x)
}

optimize(lnL2, interval=c(0,2), maximum=T)$maximum
[1] 0.5716659
```

برآورد ML و MM در توزیع وایبل

در این بخش برآوردهای درست‌نمایی ماکزیمم و گشتاوری پارامترهای توزیع وایبل با استفاده از دستورات ذکر شده، براساس یک مجموعه داده‌های واقعی به‌دست می‌آوریم. داده‌های مورد استفاده مربوط به زمان خرابی ۲۰ واحد مکانیکی می‌باشد. داده‌ها به‌صورت زیر می‌باشند:

0.067, 0.068, 0.076, 0.081, 0.084, 0.085, 0.085, 0.086, 0.089, 0.098,
0.098, 0.114, 0.114, 0.115, 0.121, 0.125, 0.131, 0.149, 0.160 ,0.485

براساس یک نمونه n تایی از توزیع وایبل با پارامترهای α و β با تابع چگالی

$$f(x;\alpha,\beta)=\frac{\beta}{\alpha^{\beta}}\,x^{\beta-1}\,e^{-(\frac{x}{\alpha})^{\beta}};\quad x\geq 0,\alpha,\beta>0$$

تابع درست‌نمایی به‌صورت زیر می‌باشد.

$$L(\alpha,\beta,\underline{x})=(\frac{\beta}{\alpha})^{n}\prod_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{\alpha})^{\beta-1}e^{-\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{\alpha})^{\beta}}.$$

لگاریتم تابع درست‌نمایی می‌شود

$$l(\alpha,\beta,\underline{x})=n\ln(\frac{\beta}{\alpha})+(\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{x_i}{\alpha})-\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{\alpha})^{\beta}\qquad(5)$$

از آن معادلات درستنمایی زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned}\frac{dl}{d\alpha}&=-\frac{n}{\alpha}+(\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{-1}{\alpha}+\frac{\beta}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{\alpha})^{\beta}\\&=-\frac{n\beta}{\alpha}+\frac{\beta}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{\alpha})^{\beta}=0,\end{aligned}\qquad(6)$$

$$\frac{dl}{d\beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^{n} \ln(\frac{x_i}{\alpha}) - \sum_{i=1}^{n} (\frac{x_i}{\alpha})^{\beta} \ln(\frac{x_i}{\alpha}) = 0. \qquad (7)$$

با استفاده از (۶) نتیجه می‌شود

$$\alpha = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}}{n} \right)^{1/\beta} \qquad (8)$$

با جایگذاری α به‌دست آمده در (۷) داریم

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} \ln x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}} - \frac{1}{\beta} - \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n} = 0. \qquad (9)$$

به دلیل غیرخطی بودن این معادله برحسب β، ما برآوردگرهای ماکزیمم درست‌نمایی پارامترها را به‌صورت عددی محاسبه می‌کنیم.

برای این منظور از دو روش زیر استفاده می‌کنیم.

- روش اول: برای محاسبه برآورد ML پارامتر β، ریشه معادله (۹) را با استفاده از دستور $uniroot$ محاسبه می‌کنیم. با جایگذاری $\hat{\beta}$ به‌دست آمده در معادله (۸) برآورد ML پارامتر α به‌دست می‌آید.

- روش دوم: در این روش، لگاریتم تابع درست‌نمایی را بر حسب α و β ماکزیمم می‌کنیم. برای این منظور از دستور $optim$ استفاده می‌کنیم و با مینیمم سازی تابع $(-l(\alpha, \beta, \underline{x}))$ نسبت به α و β برآوردهای درست‌نمایی پارامترها را محاسبه می‌کنیم.

روش اول: استفاده از دستور *uniroot* در بازه $[0, 3]$.

R code

```
x = c( 0.067, 0.068, 0.076, 0.081, 0.084, 0.085, 0.085, 0.086, 0.089, 0.098,
0.098, 0.114, 0.114, 0.115, 0.121, 0.125, 0.131, 0.149, 0.160 ,0.485 )

eqsolve3=function(beta){
n=length(x)
sum(x^beta*log(x))/sum(x^beta)-(1/beta)-sum(log(x))/n
}

uniroot( eqsolve3, c(0,3) )$root
[1] 1.642151
```

بنابراین از این روش $\widehat{\beta} = ۱/۶۴$ به‌دست می‌آید. با جایگذاری آن در (۸) مقدار $\widehat{\alpha} = ۰/۱۳۷۶$ برآورد می‌شود.

روش دوم: استفاده از دستور $optim$ با مقدار اولیه $(۱, ۲)$ برای (α, β).

R code

```
x = c( 0.067, 0.068, 0.076, 0.081, 0.084, 0.085, 0.085, 0.086, 0.089, 0.098,
0.098, 0.114, 0.114, 0.115, 0.121, 0.125, 0.131, 0.149, 0.160 ,0.485 )

lnL3=function(par){
alpha=par[1]; beta=par[2]
n=length(x)
out=n*log(beta/alpha)+(beta-1)*sum(log(x/alpha))-sum((x/alpha)^beta)
return(-out)
}

optim( par=c(alpha=1,beta=2), lnL3 )$par
alpha     beta
0.1376125 1.6422294
```

با توجه به مقادیر به‌دست آمده در خروجی $\hat{\alpha}_{MLE} = ۰/۱۳$ و $\hat{\beta}_{MLE} = ۱/۶۴$ برآورد شده‌اند.

برای پیدا کردن برآورد گشتاوری α و β به‌صورت زیر داریم:

$$E(X) = \alpha\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = \bar{X},$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\alpha = \frac{\bar{X}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} \tag{10}$$

همچنین برای پیدا کردن برآورد گشتاوری β داریم

$$E(X^2) = \alpha^2\,\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) = \bar{X^2}.$$

با جایگذاری α به‌دست آمده در این معادله داریم

$$(\bar{X})^2\,\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \bar{X^2}\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]^2 = 0. \tag{11}$$

از آنجایی که معادله (۱۱) دارای جواب صریحی برای β نمی‌باشد، بنابراین برای یافتن جواب معادله بایستی از روش‌های عددی با یک نمونه خاص استفاده کرد. ما در اینجا با استفاده از دستور $uniroot$ برآورد گشتاوری β که ریشه معادله (۱۱) می‌باشد را به‌دست آورده و با جایگذاری آن در معادله (۱۰) برآورد گشتاوری α را محاسبه می‌کنیم.

R code

```
x = c( 0.067, 0.068, 0.076, 0.081, 0.084, 0.085, 0.085, 0.086, 0.089, 0.098,
0.098, 0.114, 0.114, 0.115, 0.121, 0.125, 0.131, 0.149, 0.160 ,0.485 )

mme = function(beta) {
(mean(x))^2*gamma(1+(2/beta))-mean(x^2)*(gamma(1+1/beta))^2
}

uniroot( mme, interval=c(1,5) )$root
[1] 1.415412
```


بنابراین با توجه به خروجی به‌دست آمده مشاهده می‌شود $\tilde{\beta}_{MME} = ۱/۴۱۵$ که با جایگذاری آن در (۱۰) برآورد گشتاوری پارامتر α، مقدار $\tilde{\alpha}_{MME} = ۰/۱۳۳۵$ به‌دست می‌آید.

توجه شود در برنامه فوق $mean(x)$ نمایانگر میانگین داده‌ها، یعنی $\bar{x} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} x_i$ و $mean(x^۲)$ نمایانگر میانگین توان دوم داده‌ها، یعنی $\bar{X^۲} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲$ می‌باشد.

تمرین. اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} f(x, \alpha, \lambda)$ که

$$f(x; \alpha, \lambda) = \alpha\, \lambda\, e^{-\lambda x}\, (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha - 1} \qquad ; x > 0, \quad \alpha, \lambda > 0.$$

با استفاده از روش‌های عددی ذکر شده، براساس مجموعه داده واقعی زیر، برآورد درست‌نمایی ماکزیمم پارامترهای α و β را به دست آورید. داده ها نشان‌دهنده تعداد چرخش‌های (برحسب میلیون) ۲۳ بلبرینگ قبل از زمان خرابی می‌باشد. داده‌ها به‌صورت زیر می‌باشند.

17.88, 28.92, 33, 41.52, 42.12, 45.6, 48.8, 51.84, 51.96, 54.12, 55.56 ,67.8, 68.64, 68.88, 84.12, 93.12, 98.64, 105.12, 105.84, 127.92, 128.04, 173.4