فصل شانزدهم 16 معادلات ماکسول

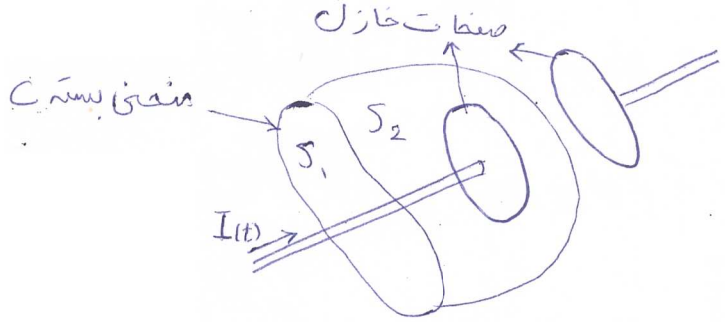
معرفی جریان‌های جابجایی - آثار قابل مشاهده این جریان در پدیده‌هایی که تاکنون بررسی کردیم ناچیز است، ولی برای تکمیل نظریه الکترومغناطیس در مباحث امواج، اپتیک و نسبیت ضروری است.

تعمیم قانون آمپر: جریان جابجایی

میدان مغناطیسی ناشی از توزیع جریان در قانون مداری آمپر صدق می‌کند:

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int \vec{J}\cdot\hat{n}\,da$$

نشان می‌دهیم این قانون گاهی اوقات با شکست مواجه می‌شود. یک مدار بصورت یک خازن کوچک با صفحات موازی که با جریان I باردار می‌شود، در نظر می‌گیریم:



قانون آمپر برای منحنی بسته C و سطح S_1:

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_{S_1} \vec{J}\cdot\vec{n}\,da = I \qquad (1)$$

و ... C و ... S_2:

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_{S_2} \vec{J}\cdot\hat{n}\,da = 0 \qquad (2)$$

دو معادله با هم در تناقضند. بنابراین هر دو نمی‌توانند صحیح باشند چون معادله (1) به خصوصیت خازن بستگی ندارد می‌توان صحیح تصور کرد. اما معادله (2) مستلزم در نظر گرفتن خازن است و باید تصحیح شود.

با ترکیب معادلات ① و ② مشکل را می‌توان بصورت دیگر نشان داد.

سطح S_2 با سطح S_1 روی هم سطح بستهٔ S را تشکیل می‌دهند. بردار $\hat{n}$ نیز همه جا عمود بر سطح و به سمت خارج است:

$$\oint_{S=S_1+S_2} \vec{J}\cdot\hat{n}\, da = -I$$

علامت منفی نشان دهنده تغییر جهت بردار عمود در معادله ① است. از طرفی انتگرالهای سطحی در معادلات ① و ② هر دو برابرند با انتگرال خطی $\vec{H}$ دور منحنی یکسان C

$$\oint_{S=S_1+S_2} \vec{J}\cdot\hat{n}\, da = \oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} - \oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = 0$$

علامت منفی به این علت است که منحنی C برای سطح S_2 در خلاف جهت سطح S_1 پیموده می‌شود.

حال ما قانون مداری آمپر را برای سطح S نوشتیم و مقدار جریان صفر را بدست آوردیم و این با فرض اولیه مان که جریان I وارد سطح S می‌شود در تناقض است.

حال فرم دیفرانسیلی قانون آمپر را در نظر می‌گیریم که قانون مداری آمپر نتیجهٔ همین رابطه است:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

اگر از طرفین رابطهٔ بالا دیورژانس بگیریم سمت چپ معادله صفر می‌شود چون واگرایی هر تاو صفر است. اما رابطهٔ دیگری برای دیورژانس $\vec{J}$ وجود دارد:

$$\nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{قانون بقای بار}$$

بار دیگر تناقض مشاهده می‌شود. $\nabla\cdot\vec{J}$ نمی‌تواند هم صفر باشد و هم $-\frac{\partial \rho}{\partial t}$. قانون بقای بار مشکلی ندارد، بنابراین فرم دیفرانسیلی قانون آمپر باید تصحیح شود. بطوریکه سمت راست آن به برداری با دیورژانس صفر منتهی شود.

یک راه استفاده از قانون گاوس است برای جایگزینی ρ در قانون پایستگی بار:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \left[\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] = 0$$

با این فرض که $\vec{D}$ تا حد کافی تابعی پیوسته از زمان و مکان است که بتوانیم ترتیب مشتق‌گیری‌ها را عوض کنیم. حال با اضافه کردن $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ به سمت راست معادله دیفرانسیلی آمپر، این تناقض مرتفع می‌شود، یعنی دیورژانس در دو طرف معادله صفر می‌شود:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$ (سهم ماکسول)

مشتق زمانی $\vec{D}$ را جریان جابجایی می‌نامیم. وارد کردن جریان جابجایی امواج الکترومغناطیسی را امکان‌پذیر می‌سازد و اساس سهم بزرگ ماکسول در توسعه نظریه الکترومغناطیس همین است.

- این یک اثبات نیست، بلکه فرضیه‌ای است برانگیخته از مشاهدات تجربی.
- در فصلهای قبل از جریان جابجایی چشم‌پوشی شد به سه دلیل:

1- میدانها نسبت به زمان ثابت بودند.

2- مواد رسانای الکتریکی خوبی بودند، بطوریکه جریان جابجایی در مقایسه با جریان رسانش کوچک بود

3- جریانهای جابجایی محدود به ناحیه کوچکی از فضا بود که لازم نبود بطور صریح در نظر گرفته شود (خازنها)

معادلات ماکسول و مبانی تجربی آنها

تعمیم قانون آمپر:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

صورت دیفرانسیلی قانون الکترومغناطیسی فاراده:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

تعمیم قانون گاوس که خود از قانون کولن نتیجه می‌شود:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

تک قطبی مغناطیسی نداریم:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

معادلات ماکسول بیان ریاضی نتایج تجربی خاصی هستند، از این رو نمی‌توان آنها را اثبات کرد.

برای آنکه معادلات ماکسول را به کار ببریم باید معادلات ساختمندی مناسب را بدانیم:

$$\vec{D} = \vec{D}(E)$$
$$\vec{H} = \vec{H}(B)$$
$$\vec{J} = \vec{J}(E)$$

این معادلات توأم معادله نیروی لورنتس که اثر میدانها بر روی ذرات باردار است، توصیف می‌کنند:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})$$

انرژی الکترومغناطیسی

انرژی پتانسیل الکتریستاتیک دستگاه بار که با محاسبه کار انجام شده برای ایجاد میدان بدست می‌آید:

$$U_E = \frac{1}{2}\int_V \vec{E} \cdot \vec{D}\, dv$$

به طریق مشابه برای میدان مغناطیسی:

$$U_M = \frac{1}{2}\int_V \vec{H} \cdot \vec{B}\, dv$$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} = -\vec{H} \cdot \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (1) \\ \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (2) \end{cases}$$

(1) - (2) :

$$\vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J}$$

با استفاده از اتحاد زیر سمت چپ رابطه بالا را بصورت دیورژانس یک تابع می نویسیم:

$$\nabla \cdot (F \times G) = \vec{G} \cdot \nabla \times \vec{F} - \vec{F} \cdot \nabla \times \vec{G}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J}$$

اگر در محیطی که معادله فوق را به کار می بریم :

$$\begin{cases} D(t) \propto E(t) \\ B(t) \propto H(t) \end{cases}$$

باشد بطوریکه ثابتهای تناسب بطور صریح به زمان بستگی نداشته باشند می توان مشتقهای زمانی سمت راست را بصورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \vec{E} \cdot \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \dfrac{\partial}{\partial t} \epsilon \vec{E} = \dfrac{1}{2} \epsilon \dfrac{\partial}{\partial t} E^2 = \dfrac{\partial}{\partial t} \dfrac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \\ \vec{H} \cdot \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{H} \cdot \dfrac{\partial}{\partial t} \mu \vec{H} = \dfrac{1}{2} \mu \dfrac{\partial}{\partial t} H^2 = \dfrac{\partial}{\partial t} \dfrac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) - \vec{J} \cdot \vec{E}$$

جمله اول سمت راست: مشتق زمانی مجموع چگالیهای انرژی الکتریکی و مغناطیسی

$\vec{J} \cdot \vec{E}$ ؛ در اکثر موارد، بویژه چنانچه $\vec{J} = g\vec{E}$ باشد، برابر منفی گرمای ژول ایجاد شده در واحد حجم

با انتگرال گیری از معادله بالا روی حجم V که با سطح S محصور شده است:

$$\int_V \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})\,dV = -\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H})\,dV - \int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,dV$$

با استفاده از قضیه دیورژانس در سمت چپ معادله

$$\oint_S \vec{E}\times\vec{H}\cdot\hat{n}\,da = -\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H})\,dV - \int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,dV$$

با نوشتن معادله فوق بصورت زیر: (بیان کننده بقای انرژی در حجم ثابت V)

$$-\int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,dV = \frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H})\,dV + \oint_S \vec{E}\times\vec{H}\cdot\hat{n}\,da$$

جمله اول سمت راست: آهنگ تغییر انرژی الکترومغناطیسی ذخیره شده در حجم V نسبت به زمان

جمله دوم: انتگرال سطحی شامل میدانهای الکتریکی و مغناطیسی، آهنگ عبور انرژی از این سطح.

سمت چپ معادله: توان انتقال یافته به میدان الکترومغناطیسی از طریق حرکت بارهای آزاد در حجم V. اگر در حجم V، emf وجود نداشته باشد، سمت چپ معادله منفی و برابر است با منفی گرمای ژول تولید شده در واحد زمان. در بعضی موارد نیز می‌تواند مثبت باشد. فرض کنید ذره‌ای باردار با بار q و سرعت V تحت تأثیر نیروهای مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی حرکت می‌کند. آهنگ کاری که نیروی مکانیکی روی ذره انجام می‌دهد:

$$\vec{F}_m\cdot\vec{V} = -q(\vec{E}+\vec{V}\times\vec{B})\cdot\vec{V} = -q\,\vec{E}\cdot\vec{V}$$

۹- : بدلیل اینکه نیروی مکانیکی در خلاف جهت نیروی الکتریکی است.

بر اساس رابطه چگالی جریان داریم:

$$\vec{J} = \sum_i N_i q_i V_i$$

$$\Rightarrow \sum_i N_i \vec{F}_m\cdot\vec{V}_i = -\vec{E}\cdot\vec{J}$$

و این چگالی توان به میدان الکترومغناطیسی انتقال می‌یابد.

مجدداً به معادلهٔ زیر برمی‌گردیم که بیان کنندهٔ پایستگی موضعی انرژی در هر نقطه است:

$$\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H}) - \vec{J}\cdot\vec{E}$$

بردار پوئین تینگ:

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$$

$$u = \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H})$$

$$\nabla\cdot\vec{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{J}\cdot\vec{E}$$ (بقای انرژی بصورت موضعی)

$\vec{J}\cdot\vec{E}$: کاری که میدان موضعی روی ذرات باردار در واحد حجم انجام می‌دهد. (و در واحد زمان)

u : چگالی انرژی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی

اگر $\nabla\cdot S=0$ باشد معادلهٔ فوق بقای موضعی انرژی را بیان خواهد کرد. در هر نقطه آهنگ تغییر انرژی میدان برابر است با اتلاف توان در واحد حجم.

از طرف دیگر اگر $\nabla\cdot S\neq 0$ ولی $\vec{J}\cdot\vec{E}=0$ باشد (مثل محیط نارسانا)، آنگاه:

$$\nabla\cdot S + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

این معادله از نظر ریاضی دقیقاً همانند معادلهٔ پیوستگی بار الکتریکی است با این تفاوت که u بجای چگالی بار ρ نشسته است. اگر بنا باشد معادلهٔ فوق نیز بقای انرژی را توصیف کند $\nabla\cdot\vec{S}$ می‌بایست نمایانگر دیورژانس چگالی جریان انرژی یا به بیان دیگر آهنگ جریان انرژی در واحد سطح باشد. معمولاً $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ را بعنوان جریان موضعی انرژی در واحد زمان در واحد سطح در نظر می‌گیرند.

معادله موج:

یکی از مهمترین نتایج معادلات ماکسول، معادلات انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیط خطی است.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla \times \vec{J} + \nabla \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{J} = g \vec{E} \end{cases}$$

ϵ, g ثابت اند.

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = g \nabla \times E + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{E}$$

فرض می‌کنیم $\vec{E}$ تابع خوشرفتاری باشد و از این رو در اینجا ترتیب مشتق‌گیری زمانی و مکانی را عوض کرده‌ایم. با بکارگیری

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad , \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = -g\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times \nabla \times = \nabla \nabla \cdot - \nabla^2$$

$$\nabla \nabla \cdot \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = -g\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

چون μ ثابت است:

$$\nabla \cdot \vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

در نتیجه جملهٔ اول سمت چپ صفر می‌شود:

$$\nabla^2 \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - g\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$$

بردار $\vec{E}$ نیز در همین معادله موج صدق می‌کند. با گرفتن تاو از $\nabla \times E$ داریم:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

با حذف میدان مغناطیسی با: $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -g\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

معادلهٔ فوق را برای فضای تهی از بار آزاد در نظر می‌گیریم $\nabla . D = 0$

$$\nabla^2 E - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - g\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

میدان الکترومغناطیسی در یک محیط خطی و همگن که چگالی بار در آن صفر است، خواه محیط رسانا باشد خواه نارسانا، از معادلهٔ موج فوق پیروی می‌کند. واضح است که معادلات موج الزاماً از معادلات ماکسول نتیجه می‌شوند ولی عکس این مطلب صحیح نیست.

امواج تکفام

امواج تکفام امواجی هستند که در آن تمام میدانها با یک فرکانس مشخص می‌شوند.

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - g\mu \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

روش تحلیل با متغیرهای مختلط را برای معادله فوق در نظر می‌گیریم. برای مشخص کردن بردار $\vec{E}$ آن را وابسته به زمان و وابستگی آن را بصورت $e^{-i\omega t}$ در نظر می‌گیریم،

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}(r)\, e^{-i\omega t}$$

میدان الکتریکی فیزیکی با گرفتن قسمت حقیقی رابطه فوق بدست می‌آید. $\vec{E}(r)$ نیز در حالت کلی مختلط است، بطوریکه میدان الکتریکی واقعی با

$\cos(\omega t + \phi)$

بدست می‌آید که ϕ فاز $E(r)$ است.

با بکارگیری رابطهٔ فوق در معادلهٔ موج داریم:

$$e^{-i\omega t}\left\{\nabla^2\vec{E}+\omega^2\epsilon\mu\vec{E}+i\omega g\mu\vec{E}\right\}=0$$

تغییرات فضایی میدان الکتریکی باید در معادلهٔ فوق صدق کند. حل این معادله در حالات ویژه گوناگون در فصل بعدی صورت می‌گیرد. در اینجا ساده‌ترین مورد را بررسی می‌کنیم.

فرض می‌کنیم "محیط" فضای تهی است.

$$\begin{cases} g=0 \\ \epsilon=\epsilon_0 \\ \mu=\mu_0 \end{cases}$$

و $\vec{E}(r)$ فقط در یک راستا مانند z تغییر می‌کند.

$$\frac{d^2\vec{E}(z)}{dz^2}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\vec{E}=0 \qquad , \epsilon\mu_0=\frac{1}{c^2}$$

این معادله به معادلهٔ هلمهولتز معروف است و از نظر ریاضی با معادلهٔ نوسانگر هماهنگ یکسان است. پاسخ‌های این معادله عبارتند از:

$$\vec{E}(z)=\vec{E}_0\,e^{\pm ikz}$$

$\vec{E}_0$ = بردار ثابت

$$k=\frac{\omega}{c}$$

با قرار دادن این پاسخ برای $E(r)$ در معادلهٔ $E(r,t)=E(r)e^{-i\omega t}$ پاسخ کامل را بدست می‌آوریم:

$$\vec{E}(r,t)=E_0\,e^{-i(\omega t\mp kz)}$$

علامت منفی: انتشار موج در جهت مثبت
علامت مثبت: انتشار موج در جهت منفی

با گرفتن قسمت حقیقی آن داریم:

$$\vec{E}(r,t)=\vec{E}_0\cos(\omega t\mp kz)$$

با بکارگیری $k=\frac{\omega}{c}$ داریم:

$$\vec{E}(r,t)=\vec{E}_0\cos\omega\left(t\mp\frac{z}{c}\right)$$

این معادله نمایانگر یک موج سینوسی است که در راستای Z به سمت راست یا به سمت چپ (بسته به آنکه کدام یک از دو علامت مثبت یا منفی به کار گرفته شوند) حرکت می‌کند. سرعت انتشار موج C است. اگر نور صورتی از تابش الکترومغناطیسی باشد، آنگاه معادلات ماکسول پیش بینی می‌کنند که سرعت نور در خلأ برابر است با

$$C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,9979 \times 10^8 \ m/s$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$ فرکانس موج

$$\lambda = \frac{2\pi}{K}$$ طول موج

$$\lambda f = C$$

در یک محیط دی الکتریک نارسانای غیر مغناطیسی داریم

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \mu = \mu_0 \\ \epsilon = K\epsilon_0 \end{cases}$$

در این حالت اثباتی که در بالا اشاره شد به همان شکل خواهد بود با این تفاوت که:

$$K = \sqrt{K}\ \frac{\omega}{C}$$

اگر n، ضریب شکست را بصورت مقابل تعریف کنیم:

$$n = \sqrt{K}$$

نتیجه با حالت مربوط به خلأ یکسان است بجز آنکه سرعت انتشار موج بجای C برابر با $\frac{C}{n}$ است:

$$C \longrightarrow \frac{C}{n}$$

اگر محیط رسانا باشد $g>0$ ، جملهٔ سوم معادله موج را باید نگه داریم.
زمانی که g کوچک است، همان طور که در فصل بعد خواهیم دید، نتیجه صرفاً آن خواهد بود که موج میرا می‌شود. منظور از کوچک بودن g آن است که جمله سوم معادله موج در مقایسه با جملهٔ دوم آن که به پاسخ موجی منجر شد، کوچک باشد:

$$\omega g \mu \ll \omega^2 \epsilon \mu \quad , \quad g \ll \omega \epsilon$$

از سوی دیگر هنگامی که $g \gg \omega \epsilon$ باشد، می‌توانیم از جملهٔ دوم معادله موج چشم پوشی کنیم که در حالت یک بُعدی:

$$\frac{d^2 \vec{E}(z)}{dz^2} + i\omega g \mu \vec{E} = 0$$

چنانچه فرض کنیم $\alpha = i\omega$ حقیقی باشد یا به بیان دیگر اگر فرض کنیم فرکانس موهومی باشد، ضریب $\vec{E}$ در جمله دوم حقیقی خواهد بود. در آن صورت اگر

$$K = \sqrt{\alpha g \mu}$$

وابستگی فضایی پاسخ، $\vec{E}(r)$ ، درست به همان شکل قبل است. اما اختلاف در آن است که وابستگی زمانی بصورت زیر در می‌آید:

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}(r)\, e^{-\alpha t}$$

یعنی میدان نسبت به زمان به جای آنکه به طریقی موج گونه نوسان کند، بطور نمایشی کاهش می‌یابد. گذار بین رفتار موجی و رفتار کاهش یابنده هنگامی رخ می‌دهد که

$$|\omega| = |\alpha| \cong \left|\frac{g}{\epsilon}\right| = \frac{1}{t_c}$$

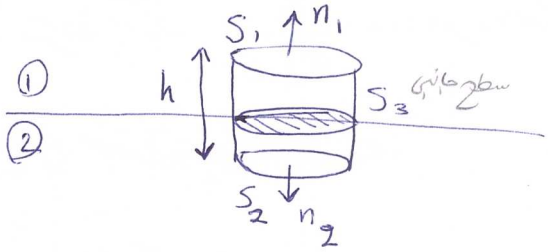
که t_c زمان واهلش ماده (فصل ۶) است. برای بکارگیری این شرط در فلزات باید دقت شود زیرا $\frac{g}{\epsilon}$ قویاً به ω بستگی دارد.

شرایط مرزی

شرایط مرزی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در فصل مشترک دو محیط مانند حالت ساکن از معادلات ماکسول استنتاج می‌شوند.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

میدان مغناطیسی:



قضیهٔ دیورژانس را برای دیورژانس $\vec{B}$ در حجمی که این سطح در بر گرفته است:

$$\oint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,da = \int_{S_1} \vec{B}\cdot\hat{n}_1\,da + \int_{S_2} \vec{B}\cdot\hat{n}_2\,da + \int_{S_3} \vec{B}\cdot\hat{n}_3\,da = 0$$

سطح جانبی

اگر $\vec{B}$ متناهی باشد، با به سمت صفر میل دادن h، جمله آخر صفر می‌شود و

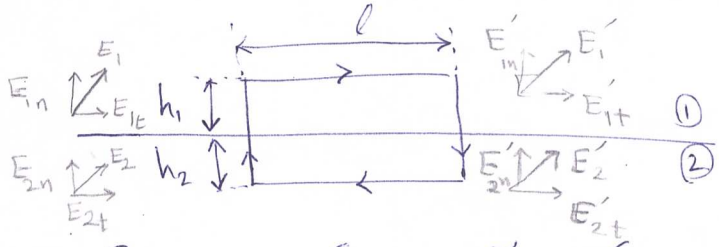
$$n_1 = -n_2$$

$$\Rightarrow B_{1n} = B_{2n}$$

مشابه حالت ساکن

برای مؤلفهٔ مماسی میدان الکتریکی رابطهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$



با انتگرال‌گیری از معادلهٔ بالا روی سطحی که مرز آن مانند شکل فوق است یک مسیر مستطیل است:

$$\int_S \nabla \times \vec{E}\cdot\hat{n}\,da = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\,da$$

$$l E_{1t} - l E_{2t} + h_1 E_{1n} + h_2 E_{2n} - h_1 E'_{1n} - h_2 E'_{2n} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n}\, da$$

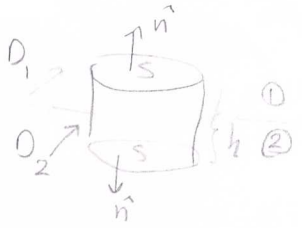
با به سمت صفر میل دادن h_1 و h_2، سطح را کوچک می‌کنیم، چهار جملهٔ آخر طرف چپ و همچنین طرف راست تنها به شرط آنکه $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ متناهی باشد، صفر می‌شوند:

مؤلفهٔ مماسی E در فصل مشترک پیوسته است:

$$E_{1t} = E_{2t}$$

مؤلفهٔ عمودی جابجایی الکتریکی:

$$\nabla \cdot D = \rho$$



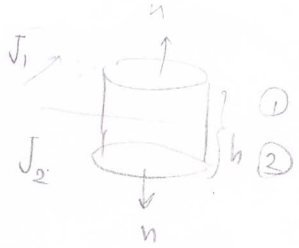
از رابطهٔ بالا انتگرال حجمی روی استوانهٔ شکل قبل بگیریم:

$$\int_V \nabla \cdot D \, dv = \int_V \rho \, dv$$

با بکارگیری قضیه دیورژانس و به سمت صفر میل دادن h، خواهیم داشت:

$$(D_{1n} - D_{2n}) = \sigma$$

σ: چگالی بار سطحی در فصل مشترک



با توجه به اینکه بار الکتریکی باید بقا داشته باشد

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

با انتگرال گیری حجمی روی حجم قرصی شکل و به سمت صفر میل دادن ارتفاع آن داریم:

$$J_{1n} - J_{2n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

اگر تابش تکفام را در نظر بگیریم چگالی سطحی باید بصورت $e^{-i\omega t}$ تغییر کند

سمت راست معادله فوق را می‌توانیم بصورت $i\omega\sigma$ بنویسیم:

$$\sigma \propto e^{-i\omega t} \rightarrow -\frac{\partial \sigma}{\partial t} = i\omega\sigma$$

$$\begin{cases} D_{1n} - D_{2n} = \sigma \\ J_{1n} - J_{2n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \sigma \\ g_1 E_{1n} - g_2 E_{2n} = i\omega\sigma \end{cases}$$

اگر چگالی سطحی بار $\sigma = 0$ باشد از دو معادله بالا نتیجه می‌شود:

$$\frac{\epsilon_1}{g_1} = \frac{\epsilon_2}{g_2}$$

این رابطه چنانچه g_1 و g_2 هر دو صفر یا بینهایت باشند، صادق است. موردی که در آن رسانندگیها هر دو بینهایت هستند، زیاد جالب نیست ولی موردی که در آن رسانندگیها هر دو صفرند تقریباً در مرز بین دو دی الکتریک رخ می‌دهد. اگر σ صفر نباشد می‌توان آن را از دو معادله بالا حذف کرد:

$$\left(\epsilon_1 + i\frac{g_1}{\omega}\right)E_{1n} - \left(\epsilon_2 + i\frac{g_2}{\omega}\right)E_{2n} = 0$$

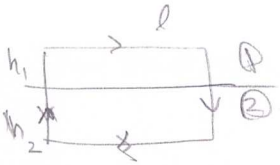
اگر یکی از رسانندگیها مثلاً g_2 بینهایت شود (فلز) در این صورت باید $E_{2n} = 0$ و $E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_1}$ شود:

$$\text{if } g_2 = \infty$$

$$\rightarrow E_{2n} = 0$$

$$\rightarrow E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_1}$$

شرط مرزی روی مؤلفهٔ مماسی شدت مغناطیسی H :



$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$$

با انتگرال گیری روی سطح مستطیل شکل و به سمت صفر میل دادن سطح داریم:

$$H_{1t} - H_{2t} = J_{\perp}$$

$J_{\perp}$ آن مؤلفه از چگالی سطحی است که بر امتداد آن مؤلفه از $\vec{H}$ که در معادله ظاهر می‌شود عمود است. چگالی جریان سطحی نشان دهنده یک جریان متناهی در یک لایه سطحی بی‌نهایت نازک است. اگر رسانندگی بینهایت باشد (فلز) چگالی جریان غیر صفر است. بنابراین برای رسانندگی غیر بینهایت (دی الکتریک) چگالی جریان صفر است:

$$H_{1t} = H_{2t}$$

یعنی مؤلفه مماسی H پیوسته است.

اگر رسانندگی محیط دوم بی‌نهایت باشد (فلز) در آنصورت $E_{2n} = 0$. می‌توان با در نظر گرفتن معادلهٔ ماکسول نتیجه کلی‌تری بدست آورد

$$\nabla \times \vec{H}_2 - \frac{\partial \vec{D}_2}{\partial t} = \vec{J}_2$$

با فرض اینکه E_2 بصورت $e^{-i\omega t}$ نسبت به زمان تغییر می‌کند:

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{g_2 - i\omega \epsilon_2} \nabla \times \vec{H}_2$$

اگر فرض کنیم که H_2 هم متناهی و هم مشتق پذیر است، باز هم معادلهٔ فوق نه برای $g_2 = \infty$ ایجاب می‌کند که E_2 صفر باشد.

$$-\frac{\partial \vec{B}_2}{\partial t} = \nabla \times \vec{E}_2$$

$$i\omega\mu_2 \vec{H}_2 = \nabla \times \vec{E}_2$$

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{i\omega\mu_2} \nabla \times \vec{E}_2$$

با صفر شدن $\vec{E}_2$ نتیجه می‌شود که $\vec{H}_2$ نیز صفر شود. و اگر $\vec{H}_2$ صفر شود شرایط مرزی

روی مؤلفه مماسی $\vec{H}$ در فصل مشترک دو محیط که رسانندگی یکی از آنها بی نهایت است عبارت خواهد بود:

$$H_{1t} = J_{\perp} \qquad \text{(محیط دوم رسانا)}$$

g	E_t	D_n	H_t	B_n
$g_1 = g_2 = 0$	$E_{1t} = E_{2t}$	$D_{1n} = D_{2n}$	$H_{1t} = H_{2t}$	$B_{1n} = B_{2n}$
$g_2 = \infty$	$E_{2t} = 0$	$D_{2n} = 0$	$H_{2t} = 0$	$B_{2n} = 0$
	$E_{1t} = 0$	$D_{1n} = \sigma$	$H_{1t} = 0$	$B_{1n} = 0$
$g_1, g_2 \neq \infty$ اختیاری	$E_{1t} = E_{2t}$	$(\epsilon_1 + i\frac{g_1}{\omega})E_{1n} = (\epsilon_2 + i\frac{g_2}{\omega})E_{2n}$	$H_{1t} = H_{2t}$	$B_{1n} = B_{2n}$

معادله موج با چشمه‌ها

در اینجا می‌خواهیم میدان‌هایی را که توزیع بار $\rho(r,t)$ و توزیع جریان $J(r,t)$ ایجاد می‌کنند را بررسی کنیم. چندین روش وجود دارد که روش پتانسیل را در اینجا انتخاب می‌کنیم:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{A} = 0$$

چنانچه فرض کنیم که بردارهای میدان به حد کافی پیوسته باشند که بتوانیم مشتق‌های زمانی و مکانی را عوض کنیم:

$$\nabla \times \left[\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0$$

چون تاو $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ صفر است می‌توان آن را بصورت گرادیان یک کمیت اسکالر بنویسیم:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (2)$$

معادلات ① و ② میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را برحسب یک پتانسیل برداری $\vec{A}$ و یک پتانسیل نرده‌ای φ بدست می‌دهند.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \vec{A} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right] = \vec{J}$$

$$\nabla \times \nabla \times \longrightarrow \nabla \nabla \cdot - \nabla^2$$

$$-\nabla^2 \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \nabla \nabla \cdot \vec{A} + \epsilon\mu \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \vec{J}$$

تا اینجا تا و $\vec{A}$ مشخص بود ولی هنوز دیورژانس $\vec{A}$ دلخواه است. از معادله بالا مشخص است که اگر شرط زیر را که پیمانه لورنتس یا شرط لورنتس است اعمال کنیم معادله بسیار ساده خواهد شد.

$$\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

پیمانه لورنتس

اگر پیمانه لورنتس صادق باشد:

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}$$

(معادله موج غیرهمگن)

و همچنین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow -\epsilon\left[\nabla \cdot \nabla \varphi + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right] = \rho$$

با عوض کردن ترتیب عمل دیورژانس و مشتق‌گیری زمانی روی $\vec{A}$ و بکارگیری شرط لورنتس داریم:

$$\nabla^2 \varphi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

(معادله موج غیرهمگن)

بدین ترتیب، با استفاده از شرط لورنتس، پتانسیلهای برداری و نرده‌ای هر دو مجبورند در معادلات موج غیرهمگن مشابهی صدق کنند.

حال می‌خواهیم پاسخ معادله موج غیرهمگن را بیابیم. پیدا کردن جواب معادله موج غیرهمگن شبیه پیدا کردن جواب معادله پواسون است.

در مورد معادله پواسون به خاطر می‌آوریم که پاسخ عمومی شامل یک پاسخ خصوصی معادله غیرهمگن به اضافه یک پاسخ عمومی معادله همگن است. منظور کردن پاسخ عمومی معادله همگن بدین جهت است که شرایط مرزی دلخواه را بتوان برآورده کرد. در صورتی که پاسخ خصوصی ما را مطمئن می‌کند که تابع کل در معادله غیرهمگن صدق می‌کند. همین امر در مورد معادله موج نیز صادق است.

در حالت ساکن یعنی $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ معادله موج نرده‌ای غیرهمگن به معادله پواسون تبدیل می‌شود. یک پاسخ خصوصی معادله پواسون برای خلأ می‌دانیم:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv'$$

معادله موج برداری نیز در حالت ساکن در خلأ پاسخ مشابهی دارد:

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv'$$

اما با قرار دادن $\rho(r', t)$ و $J(r', t)$ در پاسخ های حالت ساکن پاسخ های وابسته به زمان را به دست می‌آوریم.

حال معادله موج غیرهمگن برای پتانسیل اسکالر در خلأ را با تغییرات زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n} \quad , \quad n = 1$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

برای حل، ابتدا پاسخی برای یک بار نقطه‌ای بدست می‌آوریم، سپس تمام اجزای بارهای $\rho\Delta V$ را در توزیع بار مربوط با یکدیگر جمع می‌کنیم. مناسب‌ترین محل برای قرار دادن بار نقطه‌ای مبدأ مختصات است:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \qquad (1) \qquad \text{(بجز مبدأ)}$$

بنابراین معادلهٔ فوق باید در تمام نقاط بجز مبدأ صادق باشد، در صورتیکه در حجم کوچک ΔV که مبدأ را احاطه می‌کند، معادلهٔ زیر باید صادق باشد:

$$\int_{\Delta V} dV\left[\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right] = -\frac{1}{\epsilon_0}q(t)$$

فرض می‌شود $q(t)$ تنها بصورت یک وسیلهٔ ریاضی برای حل معادله، نمایانگر یک بار نقطه‌ای به بزرگی q است که در زمان t در مبدأ مختصات قرار دارد، بدون هیچ فرضی که یک بار واقعی بقا دارد در زمان قبل از آن یا بعد از آن در کجا بوده یا خواهد بود. (این تابع نمایانگر بار متحرک فیزیکی نیست و پاسخ حاصل برای φ پتانسیل صحیح برای بار نقطه‌ای متحرک نخواهد بود. پتانسیل بار نقطه‌ای متحرک پیچیده‌تر بوده که در فصل 21 بررسی می‌شود).

از روی تقارن توزیع بار واضح است که φ باید از لحاظ فضایی به r بستگی داشته باشد چون φ به زاویه سمتی و قطبی بستگی ندارد، معادله موج (1) بدین شکل در می‌آید:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

حال با قرار دادن

$$\varphi(r,t) = \frac{\chi(r,t)}{r}$$

معادله بالا بدین شکل خواهد شد:

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0 \qquad (2)$$

این معادله مرجع یک بعدی است که هر تابعی از $r-ct$ یا $r+ct$ در آن صدق می‌کند.

برای تحقیق این مطلب می‌نویسیم:

$$u = r - ct$$

و فرض می‌کنیم $f(u)$ تابعی از u است که بتوان دوبار از آن مشتق گرفت

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{df}{du}\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{df}{du} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \dfrac{d^2 f}{du^2}\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{d^2 f}{\partial u^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{df}{du}\dfrac{\partial u}{\partial t} = -c\dfrac{df}{du} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\dfrac{d^2 f}{du^2} \end{cases}$$

با قرار دادن روابط بالا در معادله موج ② نتیجه می‌شود که هر تابعی از $(r-ct)$ که دوبار مشتق‌پذیر باشد پاسخ معادلهٔ ② است. با محاسباتی مشابه می‌توان نتیجه‌گیری کرد که تابعی از $(r+ct)$ نیز یک پاسخ است. در نتیجه

$$\chi = f(r-ct) + g(r+ct)$$

یک پاسخ کاملاً دلخواه برای معادله موج ② است.

جملهٔ $g(r+ct)$ را کنار می‌گذاریم و فقط جمله اول را در نظر می‌گیریم. با این کار چیزی از دست نمی‌دهیم.

$f(r-ct)$: موجی که از بار چشمه واقع در مبدأ به سمت خارج منتشر می‌شود

$g(r+ct)$: " " از بینهایت به سمت چشمه منتشر می‌شود.

اکنون پاسخی برای معادلهٔ $\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$ با تقارن کروی در دست است.

$$\varphi = \frac{f(r-ct)}{r}$$

این پاسخ شامل یک تابع اختیاری است که می‌توان آن را طوری انتخاب کرد که معادله زیر نیز صادق باشد:

$$\int_{4\pi} d\tau \left[\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right] = -\frac{1}{\epsilon_0}q(t)$$

برای یافتن این تابع اختیاری می‌توان توجه نمود که پتانسیل یک بار در حال سکون که با معادلات بالا سازگار باشد عبارت است از

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

در نتیجه تابع $f(r-ct)$ را می‌توان بدین شکل مهیا کرد

$$f(r-ct) = \frac{q(t-\frac{r}{c})}{4\pi\epsilon_0}$$

بنابراین پاسخ دو معادله موج (مبدأ و غیرمبدأ) بصورت زیر خواهد بود:

$$\varphi(r,t) = \frac{q(t-\frac{r}{c})}{4\pi\epsilon_0 r}$$

در نتیجه به سادگی می‌توان دید که معادله زیر:

$$\varphi(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(r',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dv'$$

در معادله موج غیرهمگن پتانسیل اسکالر صدق می‌کند که $t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ است که زمان تأخیری نام دارد و φ به پتانسیل لزاندای تأخیری معروف است.

معادله موج غیرهمگن پتانسیل برداری $\vec{A}$ نیز به طریق مشابه حل می‌شود. ابتدا بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{J}$ را برحسب مؤلفه‌هایشان در مختصات قائم می‌نویسیم. سه معادله حاصل می‌شود که خیلی شبیه به معادله موج غیرهمگن پتانسیل اسکالر خواهند بود:

$$\nabla^2 A_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu_0 J_x$$

که پاسخ آن:

$$A_x(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{J_x(\vec{r}',t')}{|r-r'|}\,dv'$$

با ترکیب سه مؤلفه خواهیم داشت:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dv'$$

که به پتانسیل برداری تأخیری معروف است.

تعبیر فیزیکی پتانسیل تأخیری:

زمان مناسب متناظر با هر یک از نقاط چشمه به اندازه مدت لازم برای رفتن از نقطهٔ چشمه به نقطهٔ میدان $\vec{r}$ با سرعت c از زمان t پیشتر است. مثلاً اگر یک جزء بار که در مبدأ قرار دارد ناگهان تغییر کند، تأثیر این تغییر در نقطه‌ای به فاصله r تا مدتی به اندازهٔ $\frac{r}{c}$ بعد از انجام تغییر احساس نخواهد شد. تأثیر این تغییر تقریباً بصورت یک سطح موج کروی به طرف خارج منتشر می‌شود.

در روش بالا، اعمال شرط لورنتس گامی اساسی بود. برای آنکه ببینیم در اعمال این شرط آزادی داریم، فرض می‌کنیم $\vec{A}$ و φ انتخاب خاصی برای توزیع توابع پتانسیل اند که میدانهای صحیح E و B را طبق معادلات $\begin{cases}\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\\ \vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\end{cases}$ بدست می‌دهند. در اینصورت چنانچه ما پتانسیلهای جدید زیر را انتخاب کنیم

$$\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\xi \quad , \quad \varphi'=\varphi-\frac{\partial\xi}{\partial t}$$

این پتانسیلها نیز اگر در معادلات $\begin{cases}\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\\ \vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\end{cases}$ قرار داده شوند، بدون توجه به آنکه تابع ξ چه نوع تابعی است (این تابع کاملاً اختیاری است)، دقیقاً همان میدانهای $\vec{E}$ و $\vec{B}$ را بدست خواهند داد. این تغییر در پتانسیلها ی جدید که از نظر فیزیکی معادلند تبدیل پیمانه‌ای نامیده می‌شوند. حال با قرار دادن $\vec{A}'$ و φ' در رابطه پیمانه لورنتس برای آنکه $\vec{A}'$ و φ' در این شرط صدق کنند، یک معادله موج نرده‌ای برای ξ بدست می‌آید

$$\nabla^2\xi-\epsilon\mu\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\left(\nabla\cdot\vec{A}+\epsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

بنابراین چنانچه پتانسیلهای اصلی در شرط لورنتس صدق کنند پتانسیلهای جدید نیز صدق

خواهند کرد، مشروط بر آنکه در معادله موج نزده‌ای همگن صدق کند. اگر $\vec{A}$ و φ در شرط لورنتس صدق نکنند، باز هم می‌توانیم پتانسیلهای جدیدی انتخاب کنیم که در این شرط صدق کنند که در آن صورت φ باید بصورت پاسخ معادلهٔ موج نزده‌ای غیرهمگن انتخاب شود که عبارت زیر (پیمانه لورنتس) چشمهٔ معادلهٔ غیرهمگن است.

$$\nabla \cdot A + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$