وقت ۱۲۰ دقیقه- ماشین حساب آزاد

سوال ۱- ابتدا بسط سینوسی تابع زیر را تا $n=5$ تعیین کنید و سپس مقدار سری زیر را محاسبه کنید؟ **۴ نمره**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2k}{L}x & 0<x<\dfrac{L}{2}\\[2mm] \dfrac{2k}{L}(L-x) & \dfrac{L}{2}<x<L\end{cases}\qquad 1-\frac{1}{9}+\frac{1}{25}-\frac{1}{49}+-\ldots=?$$

حل:

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=\frac{4k}{L^2}\left(\int_0^{L/2}x\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx+\int_{L/2}^{L}(L-x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right)$$

$$b_n=\frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\quad\boxed{۵۰٪}$$

$$f(x)=\frac{8k}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{L}x+\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{L}x+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{L}x+\ldots\right)\quad\boxed{۳۰٪}$$

$$f\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{8k}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{L}\frac{L}{2}+\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{L}\frac{L}{2}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{L}\frac{L}{2}+\ldots\right)=k$$

$$\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right)=\frac{\pi^2}{8}\quad\boxed{۲۰٪}$$

سوال ۲- ابتدا معادله موج زیر را با کمک تغییر متغیر داده شده همگن کنید و سپس جواب معادله را از دو روش تفکیک-پذیری(separation of variables) و روش دالامبر (به کمک رابطه اشاره شده در برگه فرمول) تعیین و مقایسه کنید؟ **۴.۵ نمره**

$$*u_{tt}=u_{xx},\quad 0<x<\pi,\ t>0$$

$$\left|\begin{array}{l}u(0,t)=\pi t,\ \ u(\pi,t)=2\pi t,\\ u(x,0)=\sin 2x,\ u_t(x,0)=\sin(x)+\pi+x\end{array}\right.$$

$$w(x,t)=A(t)x-B(t)$$

تابع $w(x,t)=A(t)x-B(t)$ باید دو خاصیت داشته باشد؛ اولا شرایط مرزی را ارضا کند و ثانیا در معادله صدق کند.

ابتدا $A(t)$ و $B(t)$ را طوری تعیین می‌کنیم که در شرایط مرزی صدق کند.

$$w(0,t)=A(t)\times 0-B(t)=\pi t\ \Rightarrow\ B(t)=-\pi t$$
$$w(\pi,t)=A(t)\times\pi+\pi t=2\pi t\ \Rightarrow\ A(t)=t$$

$\boxed{۱۰٪}$

بنابراین تابع $w(x,t)=xt+\pi t$ تعیین شد که در معادله استار نیز صدق می‌کند. از طرفی برای همگن کردن مرز می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)$$

با جایگذاری رابطه فوق در استار داریم:

$$w_{tt}+v_{tt}=w_{xx}+v_{xx}, \Rightarrow \quad v_{tt}=v_{xx} \quad 0<x<\pi,\ t>0$$

$$\begin{cases} u(0,t)=\pi t=w(0,t)+v(0,t)=\pi t+v(0,t)\Rightarrow v(0,t)=0 \\ u(\pi,t)=2\pi t=w(\pi,t)+v(\pi,t)=2\pi t+v(\pi,t)\Rightarrow v(\pi,t)=0, \\ u(x,0)=\sin 2x=w(x,0)+v(x,0)=0+v(x,0)\Rightarrow v(x,0)=\sin 2x \\ ,\ u_t(x,0)=\sin(x)+\pi+x=w_t(x,0)+v_t(x,0)\xrightarrow{w_t(x,t)=x+\pi} \\ u_t(x,0)=x+\pi+v_t(x,0)=\sin(x)+\pi+x\Rightarrow v_t(x,0)=\sin(x) \end{cases}$$

۱۰٪

۱۰٪

بنابراین معادله بصورت همگن شد که به‌صورت خلاصه در زیر آمده است:

$$**\ v_{tt}=v_{xx}, \quad 0<x<\pi,\ t>0$$

$$\begin{cases} v(0,t)=0,\ v(\pi,t)=0, \\ v(x,0)=\sin 2x,\ v_t(x,0)=\sin(x) \end{cases}$$

برای حل معادله همگن دو استار از روش تفکیک پذیر بصورت زیر عمل می‌شود:

$$v(x,t)=F(x)G(t), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=F(x)\ddot{G}(t), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=F''(x)G(t)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad F(x)\ddot{G}(t)=c^2F''(x)G(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{G}}{G}=\frac{F''}{F}=-\mu^2$$

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{F''}{F}=-\mu^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} \ddot{G}+\mu^2G=0 \\ F''+\mu^2F=0 \end{cases}$$

۱۰٪

$$v(0,t)=F(0)G(t)=0 \quad \Rightarrow \quad G(t)\neq 0 \text{ then } F(0)=0$$

$$v(\pi,t)=F(\pi)G(t)=0 \quad \Rightarrow \quad G(t)\neq 0 \text{ then } F(\pi)=0$$

$$F(x)=A\cos\mu x+B\sin\mu x \Rightarrow F(0)=0\Rightarrow F(0)=A\cos 0+B\sin 0=A=0$$

$$F(\pi)=0\Rightarrow F(\pi)=B\sin\mu\pi=0\Rightarrow B\neq 0,\ \sin\mu\pi=0,\ \ \mu=n,\ n=1,2,\dots$$

$$F_n(x)=\sin(nx),\ n=1,2,\dots$$

۱۰٪

$$\ddot{G}+\mu^2G=0,\ \mu^2=n^2 \quad \Rightarrow G_n(t)=a\cos nt+b\sin nt$$

۱۰٪

$$v_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)=(a\cos nt+b\sin nt)\sin(nx)$$

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a\cos nt+b\sin nt)\sin(nx), \quad v(x,0)=\sin 2x, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=\sin x$$

۱۰٪

$$v(x,0)=\sin 2x \quad \Rightarrow u(x,0)=\sin 2x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(nx) \quad a_n=\begin{cases} 0 & n\neq 2 \\ 1 & n=2 \end{cases}$$

۱۰٪

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sin x \quad \Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-an\sin nt+bn\cos nt)\sin(nx)\right]_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}bn\sin nx=\sin x, \quad b_n=\begin{cases} 0 & n\neq 1 \\ 1 & n=1 \end{cases}$$

$$v(x,t)=\cos 2t\sin 2x+\sin t\sin x$$

۱۰٪

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t) = xt + \pi t + \cos 2t \sin 2x + \sin t \sin x$$ ۱۰٪

جواب دالامبر:

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\{f(x+ct) + f(x-ct)\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds =$$

$$\frac{1}{2}\{\sin(2x+2t) + \sin(2x-2t)\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \sin s ds = \frac{1}{2}\{\sin(2x+2t) + \sin(2x-2t)\} - \frac{1}{2}\cos s \Big|_{x-t}^{x+t}$$

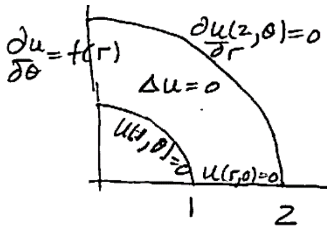
$$= \frac{1}{2}\{\sin(2x+2t) + \sin(2x-2t)\} - \frac{1}{2}\{\cos(x+t) - \cos(x-t)\} = \cos 2t \sin 2x + \sin t \sin x$$

از دو روش به جواب یکسانی منجر شد.

سوال۳- معادله زیر را از روش جداسازی متغییرها حل کنید؟ **۴ نمره**

$$*\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad 1<r<2, \quad 0<\theta<\frac{\pi}{2},$$

$$u(r,0)=0,\ u_\theta\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=f(r),\ u(1,\theta)=0,\ u_r(2,\theta)=0$$



$$u(r,\theta)=W(r)\Theta(\theta), \qquad r^2\frac{(W''+W'/r)}{W}=-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=-\lambda^2 ** \quad \boxed{۱۰٪}$$

$$\begin{cases} r^2W''+rW'+\lambda^2 W=0,\ W(1)=0,\ W'(2)=0 \Rightarrow \lambda_n=\frac{(2n+1)\pi}{2\ln(2)} \boxed{۱۰٪},\ n=0,1,2,...\ W(r)=\sin(\lambda_n \ln r) \boxed{۱۰٪} \\ \Theta''(\theta)-\lambda^2\Theta(\theta)=0,\ \Theta(0)=0,\quad \Theta_n(\theta)=B_n\sinh\lambda_n(\theta) \boxed{۱۵٪} \end{cases}$$

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}W(r)\Theta(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\lambda_n(\theta)\sin(\lambda_n\ln r), \quad \boxed{۱۰٪}$$

$$u_\theta(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\lambda_n\cosh\lambda_n(\theta)\sin(\lambda_n\ln r), \quad \boxed{۱۰٪}$$

$$u_\theta(r,0)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\lambda_n\cosh\left(\lambda_n\frac{\pi}{2}\right)\sin(\lambda_n\ln r)=f(r), \quad \boxed{۵٪}$$

$$\int_1^2\frac{1}{r}f(r)\sin(\lambda_n\ln r)dr=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\lambda_n\cosh\left(\lambda_n\frac{\pi}{2}\right)\int_1^2\frac{1}{r}\sin(\lambda_m\ln r)\sin(\lambda_n\ln r)dr \quad \boxed{۱۰٪}$$

$$now:\ \int_1^2\frac{1}{r}\sin(\lambda_m\ln r)\sin(\lambda_n\ln r)dr \xrightarrow[r=1\Rightarrow x=0,\quad r=2\Rightarrow x=\ln 2]{x=\ln r,\quad dx=\frac{1}{r}dr} \int_0^{\ln 2}\sin(\lambda_m x)\sin(\lambda_n x)dx=\frac{\ln 2}{2}\delta_{mn} \quad \boxed{۱۰٪}$$

$$B_m\lambda_n\cosh\left(\lambda_n\frac{\pi}{2}\right)\frac{\ln 2}{2}=\int_1^2\frac{1}{r}f(r)\sin(\lambda_n\ln r)dr \Rightarrow B_m=\frac{2}{\lambda_n\cosh\left(\lambda_n\frac{\pi}{2}\right)\ln 2}\int_1^2\frac{1}{r}f(r)\sin(\lambda_n\ln r)dr \quad \boxed{۱۰٪}$$

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\lambda_n(\theta)\sin(\lambda_n\ln r),$$

سوال۴- مقدار زیر را محاسبه کنید؟ **۲ نمره**

$$(-i)^{-2i}=$$

پاسخ:

$$\boxed{۱۰٪} \qquad \boxed{۵۰٪}$$

$$(-i)^{-2i}=e^{(-2i)\ln(-i)}=\exp((-2)i\ln(-i))=\exp\left((-2)i\left(-\frac{i\pi}{2}\pm 2n\pi i\right)\right)$$

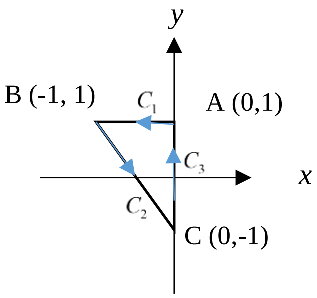
$$=\exp(-\pi\pm 4n\pi) \quad \boxed{۲۰٪}$$

$$\text{if } n=0 \text{ so we have: } (-i)^{-2i}=\exp(-\pi)=0.0432 \quad \boxed{۲۰٪}$$

سوال ۵- انتگرال روی خط مختلط تابع $f(z) = \bar{z}^2$ را بر روی دو مسیر با رئوس A (0,1) ، B (-1, 1) و C(0,-1) تعیین کنید؟

الف) مسیر ABC ب) مسیر CA ؟ **۳ نمره**

حل الف:



$$C_1: \quad z_1(t) = t + i, \qquad \dot{z}_1(t) = 1 \qquad 0 \ge t \ge -1$$
$$C_2: \quad z_2(t) = t + (-2t-1)i \qquad \dot{z}_2(t) = 1 - 2i \qquad -1 \le t \le 0$$
$$C_3: \quad z(t) = ti, \qquad \dot{z}_3(t) = i \qquad -1 \le t \le 1$$

۳۰٪

$$I_1 = \int_{C1+C2} \bar{z}^2 dz = \int_{C1+C2} (x - iy)^2 dz = \int_{C1+C2} (x^2 - y^2 - 2ixy) dz =$$
$$\int_{C_1} (x^2 - y^2 - 2ixy) dz + \int_{C_2} (x^2 - y^2 - 2ixy) dz =$$
$$\int_0^{-1} (t^2 - 2it - 1)(1) dt + \int_{-1}^{0} \left(t^2 - (2t+1)^2 - 2it(-2t-1)\right)(1-2i) dt$$
$$= \left(\frac{2}{3} - i\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{i}{3}\right) = \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3} i\right)$$

۲۰٪　　۳۰٪

حل ب:

$$I_2 = \int_{C3} \bar{z}^2 dz = \int_{C3} (x - iy)^2 dz = \int_{C3} (x^2 - y^2 - 2ixy) dz = \int_{-1}^{1} (-t^2)(i) dt = -\frac{2}{3} i$$

۲۰٪

سوال ۶- مقدار انتگرال‌های زیر را برای هر کنتور پادساعتگرد شامل تمام نقاط تکینه تعیین کنید؟ **۲.۵ نمره**

$$b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left\{ (z - z_0)^m f(z) \right\}$$

$$\oint_C \left(\frac{z^4 - 5z^2 + 6}{(2z - i)^3} - z e^{\pi / z^2} \right) dz = ?$$

۱۰٪

حل: اولین جمله انتگرالده دارای یک قطب مرتبه سوم $z_0 = \frac{i}{2}$ است. بنابراین مانده‌ی قطب را از رابطه فوق تعیین می‌کنیم.

$$b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left\{ (z - z_0)^m f(z) \right\} = \operatorname{Res}_{z=0.5i} \frac{z^4 - 5z^2 + 6}{(2z - i)^3}$$
$$= \lim_{z \to 0.5i} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left\{ \left(z - \frac{i}{2}\right)^3 \frac{z^4 - 5z^2 + 6}{(2z - i)^3} \right\} =$$

۱۰٪

$$\lim_{z \to 0.5i} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left\{ \frac{z^4 - 5z^2 + 6}{8} \right\} = \lim_{z \to 0.5i} \frac{1}{16} \left(-10 + 12z^2\right) = -\frac{13}{16} = -0.8125$$

۱۰٪　　۲۰٪

جمله دوم انتگرالده در نقطه صفر دارای تکینه است. برای تعیین مانده آن سری لوران آن را می نویسیم که برابر است با:

$$ze^{\pi/z^2} = z\left(1+\frac{\pi}{z^2}+\frac{\pi^2}{2!z^4}+\frac{\pi^3}{3!z^6}+\dots\right) = z+\frac{\pi}{z}+\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{z^3}+\frac{\pi^3}{3!z^5}+\dots \quad b_1 = \pi \quad \boxed{۳۰٪}$$

$$I = \oint_C \left(\frac{z^4-5z^2+6}{(2z-i)^3} - ze^{\pi/z^2}\right)dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\left[f(z)\right] = 2\pi i\left(\frac{13}{16}+\pi\right) = 24.84i \quad \boxed{۲۰٪}$$

با آرزوی موفقیت برای شما عزیزان

علی عسگری، عضو هیات علمی گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی و فناوری, دانشگاه مازندران