قابلیت اعتماد سیستم‌های ترکیبی

مدرس: دکتر اصغرزاده نشلی

دانشگاه مازندران

A.Asgharzadeh
University of Mazandaran

دانشگاه مازندران

قابلیت اعتماد سیستم‌های ترکیبی

در این مبحث به کمک تابع نشانگر روش‌های تعیین پایایی (قابلیت اعتماد) یک سیستم ترکیبی وقتی که اطلاعاتی درباره‌ی پایایی زیر سیستم‌ها و مؤلفه‌های آن و نیز نوع ساختار یک سیستم وجود داشته باشد را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

می‌دانیم که تابع قابلیت اعتماد یعنی $R(t),\ t \geq ۰$ تابعی برحسب زمان است. از این رو برای سادگی گاهی اوقات $R(t)$ را با R نشان می‌دهیم.

یک سیستم با n مؤلفه تشکیل‌دهنده آن را درنظر بگیرید. اگر پایایی مؤلفه‌ی i ام را با R_i نشان دهیم، در اینصورت پایایی کل سیستم برحسب پایایی مؤلفه‌های آن را به‌صورت زیرمی‌نویسیم:

$$R_{sys} = \psi(R_۱, \ldots, R_n)$$

اگر زمان‌های شکست مؤلفه‌ها مستقل باشند در آن صورت پایایی کل سیستم را می‌توان برحسب پایایی مؤلفه‌های این سیستم نوشت. در غیر اینصورت پیدا کردن پایایی کل سیستم برحسب پایایی مؤلفه‌های این سیستم ساده نخواهد بود. در چنین حالتی شاید بتوان یک کران بالا و یا کران پایین برای پایایی کل سیستم پیدا کرد.

A.Asgharzadeh
University of Mazandaran

پروژه‌ی تحقیقی: یک سیستم متشکل از دو مؤلفه را درنظر بگیرید. اگر چنانچه طول عمر مؤلفه‌ها مستقل نباشند تحقیق کنید که چگونه می‌توان قابلیت اعتماد این سیستم را در هریک از حالات زیر برحسب قابلیت اعتماد مؤلفه‌های سیستم یعنی R_1 و R_2 نوشت؟

الف) سیستم سری باشد. ب) سیستم موازی باشد.

پایایی (قابلیت اعتماد) سیستم‌های ترکیبی:

الف) سیستم سری: یک سیستم سری با دو مؤلفه مستقل C_1 و C_2 را درنظر بگیرید.

تابع نشانگر I_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{اگر مؤلفه } i \text{ ام در فاصله زمانی } (0,\ t) \text{ فعال باشد} \\ 0, & o.w \end{cases}$$

با توجه به اینکه سیستم فوق یک سیستم سری است بنابراین این سیستم در فاصله‌ی زمانی $(0, t)$ فعال خواهد بود اگر و فقط اگر $I_1\, I_2 = 1$.

A.Asgharzadeh
University of Mazandaran

تابع ساختاری سیستم سیستم سری را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi_s(I_1, I_2) = I_1\, I_2$$

لذا سیستم سری فوق در فاصله زمانی $(0, t)$ فعال می‌باشد اگر و تنها اگر

$$I_1 = 1,\, I_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \; I_1\, I_2 = 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; \psi_s(I_1\, I_2) = 1$$

لذا قابلیت اعتماد سیستم سری فوق می‌شود:

$$\begin{aligned} R_{sys} &= P[\psi_s(I_1\, I_2) = 1] = P(I_1 = 1,\, I_2 = 1) \\ &\overset{\text{(دو مؤلفه مستقل‌اند)}}{=} P(I_1 = 1)\, P(I_2 = 1) = R_1\, R_2 \\ &\Longrightarrow \boxed{R_{sys} = R_1\, R_2} \end{aligned}$$

به عبارتی

$$R_{sys} = \psi_s(R_1, R_2)$$

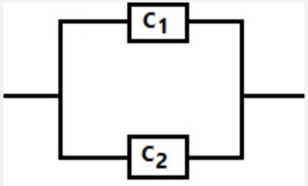
که $\psi_s(x_1, x_2) = x_1\, x_2$.

به همین صورت برای یک سیستم سری با n مؤلفه داریم:

$$R_{sys} = R_1\, R_2 \ldots R_n = \prod_{i=1}^{n} R_i = \psi_s(R_1, R_2, \ldots, R_n)$$

A.Asgharzadeh
University of Mazandaran

ب) سیستم موازی: اکنون یک سیستم موازی با دو مؤلفه مستقل $C_۱$ و $C_۲$ را به‌صورت زیر درنظر بگیرید:



این سیستم زمانی خراب می‌شود که هر دو مؤلفه‌ی آن از کار بیفتند یا خراب شوند. تابع ساختاری سیستم موازی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi_p(I_۱, I_۲) = ۱ - (۱ - I_۱)(۱ - I_۲) = I_۱ + I_۲ - I_۱ I_۲$$

سیستم موازی فوق در فاصله‌ی زمانی $(۰, t)$ از کار می‌افتد اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$I_۱ = ۰, \; I_۲ = ۰ \;\Leftrightarrow\; \psi_p(I_۱, I_۲) = ۰$$

A. Asgharzadeh
University of Mazandaran

دانشگاه مازندران

قابلیت اعتماد سیستم می‌شود:

$$
\begin{aligned}
R_{sys} &= P[\psi_p(I_1, I_2) = 1] = 1 - P[\psi_p(I_1, I_2) = 0] \\
&= 1 - P(I_1 = 0,\ I_2 = 0) \\
&= 1 - P(I_1 = 0)\, P(I_2 = 0) \\
&= 1 - [1 - P(I_1 = 1)][1 - P(I_2 = 1)] \\
&= 1 - (1 - R_1)\,(1 - R_2) = R_1 + R_2 - R_1 R_2
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \boxed{R_{sys} = R_1 + R_2 - R_1 R_2 = 1 - (1 - R_1)(1 - R_2)}$$

برحسب تابع ساختاری سیستم موازی داریم:

$$R_{sys} = \psi_p(R_1, R_2)$$

که $\psi_p(x_1, x_2) = 1 - (1 - x_2)(1 - x_2)$.

برای یک سیستم موازی با n مؤلفه مستقل داریم:

$$R_{sys} = 1 - (1 - R_1)(1 - R_2)\ldots(1 - R_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - R_i)$$

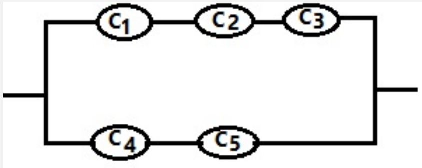
بعبارتی $R_{sys} = \psi_p(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ که

$$\psi_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)$$

A.Asgharzadeh
University of Mazandaran

قابلیت اعتماد سیستم‌های شامل مدول (Module):

به هر قسمتی از یک سیستم که دارای یک ورودی و یک خروجی باشد، یک مدول گویند. به عنوان مثال در سیستم شکل زیر هرکدام از مؤلفه‌ها یک مدول هستند.

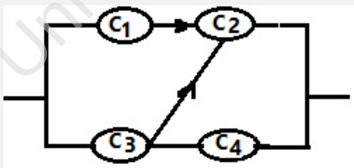


شکل ۱.

زیر سیستم‌های m_1 و m_2 و کل سیستم نیز یک مدول هستند که

$$m_1 = \{C_1, C_2, C_3\}, \qquad m_2 = \{C_4, C_5\}$$

در سیستم زیر مؤلفه‌های C_2 و C_3 مدول نیستند در حالیکه مؤلفه‌های C_1 و C_4 و نیز کل سیستم مدول می‌باشند.



شکل ۲.

A.Asgharzadeh
University of Mazandaran

دانشگاه مازندران

نحوه یافتن قابلیت اعتماد در سیستم‌های مدول:

در سیستم‌های شامل مدول ابتدا قابلیت اعتماد هر مدول را محاسبه کرده و سپس در مرحله‌ی بعد قابلیت اعتماد سیستم را براساس تابع ساختاری مرتبط با مدول پیدا می‌کنیم. برای محاسبه قابلیت اعتماد سیستم در شکل ۱ دو مدول زیر را درنظر می‌گیریم:

$$m_1 = \{C_1, C_2, C_3\}, \qquad m_2 = \{C_4, C_5\}$$

لذا قابلیت اعتماد سیستم می‌شود

$$R_{sys} = \psi_p(R_{m_1}, R_{m_2}) = 1 - (1 - R_{m_1})(1 - R_{m_2})$$

از طرفی

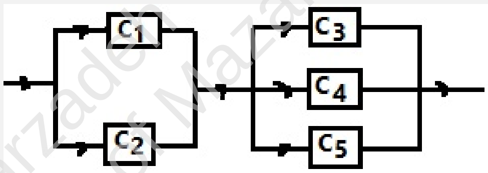
$$R_{m_1} = \psi_s(R_1, R_2, R_3) = R_1\, R_2\, R_3$$
$$R_{m_2} = \psi_s(R_4, R_5) = R_4\, R_5$$
$$\Longrightarrow R_{sys} = 1 - (1 - R_1\, R_2\, R_3)(1 - R_4\, R_5)$$

در حالت خاص که $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 0/9$ داریم:

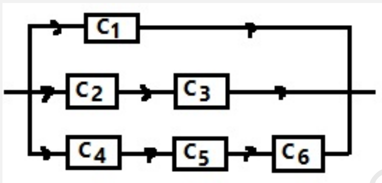
$$R_{sys} = 1 - \left(1 - (0/9)^3\right)\left(1 - (0/9)^2\right) = 0/949$$

A.Asgharzadeh
University of Mazandaran

تمرین: در هرکدام از سیستم‌هایی که شکل آنها در زیر آمده است مدول‌ها را مشخص کنید و قابلیت اعتماد سیستم را به کمک مدول‌ها به‌دست آورید.



شکل ۳.



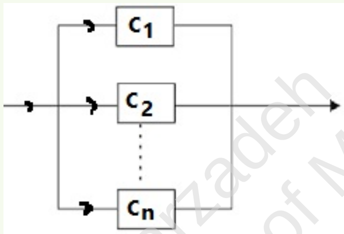
شکل ۴.

در ادامه در حالت خاص که قابلیت اعتماد هر مؤلفه ۰/۹ باشد، قابلیت اعتماد سیستم را بیابید.

A. Asgharzadeh
University of Mazandaran

قابلیت اعتماد سیستم k از n $(k \leq n)$: k out of n system

در سیستم‌های k از n، سیستم از n مؤلفه‌ی مستقل موازی تشکیل می‌شود اما به منظور فعال بودن سیستم کافی است حداقل k تا از این n مؤلفه فعال باشند. بدیهی است که سیستم موازی زیر با n مؤلفه‌ی مستقل یک سیستم ۱ از n می‌باشد.



شکل ۵.

A. Asgharzadeh
University of Mazandaran

در یک سیستم موازی k از n که در آن مؤلفه‌ها مستقل و دارای قابلیت اعتماد R باشند، تابع قابلیت اعتماد سیستم را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\psi_{(k)\,n} = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} R^{j} \left(1 - R\right)^{n-j}$$

دانشگاه مازندران

تذکر

داریم:

$$\psi_{(k)\,n} = ۱ - \sum_{j=\circ}^{k-۱} \binom{n}{j} R^j \,(۱ - R)^{n-j} = ۱ - F_B(k - ۱) \qquad (B \sim b(n, R))$$

که $F_B(k-۱)$ تابع توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و R در نقطه $(k-۱)$ می‌باشد.

A. Asgharzadeh
University of Mazandaran

دانشگاه مازندران

A.Asgharzadeh
University of Mazandaran

مثال

می‌دانیم که یک سیستم موازی با n مؤلفه مستقل یک سیستم ۱ از n است. به کمک فرمول فوق قابلیت اعتماد یک سیستم موازی که شامل n مؤلفه است و قابلیت اعتماد هر مؤلفه‌ی آن R می‌باشد را بیابید.

نشان دهید این قابلیت اعتماد دقیقا همان قابلیت اعتمادی است که قبلا برای سیستم‌های موازی پیدا کردیم. به عبارتی نشان دهید:

$$\psi_{(۱)n} = ۱ - (۱ - R)^n$$

دانشگاه مازندران

A.Asgharzadeh
University of Mazandaran

مثال

سیستم S شامل $n = ۳$ پمپ آب برای سرد کردن یک رآکتور می‌باشد. اگر پمپ‌ها مستقل از هم کار کنند و قابلیت اعتماد هر پمپ برابر $R = ۰/۹۵$ (۱۰۰۰ ساعت) و نیز حداقل $k = ۲$ پمپ برای سرد کردن سیستم لازم باشد، در آن صورت قابلیت اعتماد سیستم را پیدا کنید.

A.Asgharzadeh
University of Mazandaran

مثال

دو مدول m_1 و m_2 بطور سری به هم متصل شده‌اند، بطوریکه مدول m_1 یک سیستم ۳ از ۵ می‌باشد که قابلیت اعتماد هر مؤلفه‌ی آن $R = 0/8$ است. در حالیکه مدول m_2 یک سیستم ۴ از ۸ می‌باشد که قابلیت اعتماد هر مؤلفه‌ی آن $R_2 = 0/6$ است. قابلیت اعتماد سیستم شامل این دو مدول را بیابید.