آمار ریاضی ۱
فصل سوم: روش‌های برآوردیابی
بخش اول: روش گشتاوری

استاد: دکتر اکبر اصغرزاده

فرض کنید $f(x;\theta) \overset{iid}{\sim} X_۱,\ldots,X_n$ که

θ : پارامتر یا پارامترهای مجهول

$f(x,\theta)$: مدل آماری (تابع احتمال یا تابع چگالی) شناخته شده

هدف برآورد θ توسط نمونه تصادفی $\underline{X} = (X_۱,\ldots,X_n)$ با یافته $\underline{x} = (x_۱,\ldots,x_n)$ می‌باشد.

روش‌های برآوردیابی:

- روش گشتاوری
- روش درست‌نمایی ماکزیمم

• **روش گشتاوری:** اگر $f(x;\underline{\theta}) \overset{iid}{\sim} X_1, \dots, X_n$ که $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$،
آن‌گاه گشتاور r ام جامعه و گشتاور r ام نمونه به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

گشتاور r ام جامعه: $$\mu'_r = E(X^r) = \mu'_r(\underline{\theta}), \quad r = 1, 2, \dots,$$

گشتاور r ام نمونه: $$m'_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r, \quad r = 1, 2, \dots,$$

در حالت خاص برای $r = 1, 2$ داریم:

$$\mu'_1 = E(X)$$
$$\mu'_2 = E(X^2)$$
$$m'_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$
$$m'_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \bar{X^2}.$$

در روش گشتاوری برای برآورد کردن پارامتر یا پارامترهای مجهول، گشتاورهای جامعه را به کمک گشتاورهای نمونه تقریب می‌زنیم و معادلات زیر را بر حسب پارامترها حل می‌کنیم:

$$\mu'_r = m'_r, \qquad r = ۱, ۲, \ldots, k, \quad (\text{k: تعداد پارامتر})$$

یا

$$E(X^r) = \bar{X}^r, \qquad r = ۱, ۲, \ldots, k.$$

برای $k = ۱$

$$E(X) = \bar{X},$$

برای $k = ۲$

$$\begin{cases} E(X) = \bar{X}, \\ E(X^۲) = \bar{X}^۲, \end{cases}$$

$\vdots$

برآوردی که از این روش به‌دست می‌آید را برآوردگر (MME) گویند که آنرا با $\tilde{\theta}$ نمایش می‌دهند. به مقدار مشاهده شده برآوردگر گشتاوری، برآورد گشتاوری گویند.

مثال. اگر متغیر تصادفی X نرخ مرگ و میر کودکان باشد که تابع چگالی آن به‌صورت زیر است:

$$f(x,\theta) = \theta\, x^{\theta-۱}, \quad ۰ < x < ۱, \quad \theta > ۰,$$

الف) برآوردگر گشتاوری θ را به‌دست آورید.

ب) اگر چنانچه میزان مرگ و میر نوزادان در ۱۰ منطقه به‌صورت زیر باشد:

۰/۰۲ ۰/۰۴ ۰/۰۱ ۰/۰۳ ۰/۰۵ ۰/۰۱ ۰/۰۳ ۰/۰۲ ۰/۰۱ ۰/۰۲

برآورد گشتاوری فوق را به‌دست آورید.

حل الف. برآوردگر گشتاوری θ از حل معادله $E(X) = \bar{X}$ به‌دست می‌آید. داریم:

$$X \sim Beta(\theta,\, ۱) \;\Rightarrow\; E(X) = \frac{\theta}{\theta + ۱}.$$

محاسبه $E(X)$ به روش مستقیم:

$$E(X) = \int_{۰}^{۱} x\,\theta\,x^{\theta-۱}\,dx = \theta\int_{۰}^{۱} x^{\theta}\,dx = \theta\frac{x^{\theta+۱}}{\theta+۱}\Big|_{۰}^{۱} = \frac{\theta}{\theta+۱}.$$

لذا با حل معادله زیر داریم:

$$\begin{aligned} E(X) = \bar{X} &\Rightarrow \frac{\theta}{\theta+۱} = \bar{X} \Rightarrow (\theta+۱)\bar{X} = \theta \\ &\Rightarrow \theta\bar{X} + \bar{X} = \theta \Rightarrow \theta - \theta\bar{X} = \bar{X} \\ &\Rightarrow \bar{X} = \theta(۱-\bar{X}) \\ &\Rightarrow \theta = \frac{\bar{X}}{۱-\bar{X}} \Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{\bar{X}}{۱-\bar{X}}. \end{aligned}$$

حل ب. برآورد گشتاوری:

$$\bar{x} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} x_i = \frac{۱}{۱۰}\sum_{i=۱}^{۱۰} x_i = \frac{۰/۲۴}{۱۰} = ۰/۰۲۴.$$

$$\tilde{\theta} = \frac{۰/۰۲۴}{۱-۰/۰۲۴} = ۰/۰۲.$$

مثال. اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ که $\mu \in \mathbb{R}$ و $\sigma^2 > 0$ هردو مجهولند. برآوردگرهای گشتاوری (MME) μ و σ^2 را بیابید.

حل. برآوردگرهای گشتاوری پارامترهای μ و σ^2 از حل معادلات زیر به‌دست می آید.

$$E(X) = \bar{X}, \qquad E(X^2) = \bar{X^2}.$$

می‌دانیم

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow E(X) = \mu,$$
$$E(X^2) = Var(X) + E^2(X) = \sigma^2 + \mu^2.$$

لذا داریم:

$$\begin{cases} E(X) = \bar{X^2} \\ E(X^2) = \bar{X^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \bar{X} \\ \mu^2 + \sigma^2 = \bar{X^2}. \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{\mu} = \bar{X}, \\ \tilde{\sigma^2} = \bar{X^2} - \bar{X}^2 \overset{?}{=} S_b^2. \end{cases}$$

دلیل تساوی فوق:

$$
\begin{aligned}
S_b^{۲} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(X_i-\bar{X})^{۲} &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(X_i^{۲}-۲\bar{X}X_i+\bar{X}^{۲}) \\
&= \frac{۱}{n}\Big[\sum_{i=۱}^{n}X_i^{۲}-۲\bar{X}\sum_{i=۱}^{n}X_i+n\bar{X}^{۲}\Big] \\
&= \frac{۱}{n}\Big[\sum_{i=۱}^{n}X_i^{۲}-n\bar{X}^{۲}\Big] \\
&= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}X_i^{۲}-\bar{X}^{۲}=\overline{X^{۲}}-\bar{X}^{۲}.
\end{aligned}
$$

مثال. اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} \Gamma(\alpha, \beta)$ با تابع چگالی زیر باشند. برآوردگرهای گشتاوری α و β را بیابید.

$$f_X(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\, e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x > 0, \quad \alpha,\ \beta > 0.$$

حل. می‌دانیم

$$X \sim \Gamma(\alpha,\ \beta) \ \Rightarrow\ E(X) = \alpha\, \beta,$$
$$E(X^2) = Var(X) + E^2(X) = \alpha\, \beta^2 + (\alpha\, \beta)^2 = \alpha\, \beta^2 (1 + \alpha).$$

داریم:

$$\begin{cases} E(X) = \bar{X} \\ E(X^2) = \bar{X^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\, \beta = \bar{X} \\ \alpha\, \beta^2 + \alpha^2\, \beta^2 = \bar{X^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\, \beta = \bar{X} \\ \beta\, \bar{X} + \bar{X}^2 = \bar{X^2}. \end{cases}$$

از معادلات فوق نتیجه می‌شود:

$$\tilde{\beta} = \frac{\bar{X^2} - \bar{X}^2}{\bar{X}}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\bar{X}^2}{\bar{X^2} - \bar{X}^2}.$$

مثال کاربردی. داده‌های زیر طول عمر ۱۰ دستگاه توربین (برحسب میلیون چرخش) می‌باشد.

۶ ۱۶ ۳۶ ۳۹ ۴۸ ۸۰ ۸۰ ۱۳۴ ۱۳۹ ۱۴۰

اگر چنانچه توزیع طول عمر این توربین‌ها توزیع گاما $\Gamma(\alpha, \beta)$ باشد، برآوردهای گشتاوری α و β را به‌دست آورید.

حل. برآوردهای گشتاوری:

$$\tilde{\beta} = \frac{\overline{x^۲} - \bar{x}^۲}{\bar{x}}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\bar{x}^۲}{\overline{x^۲} - \bar{x}^۲},$$

که در آن

$$\bar{x} = \frac{۱}{۱۰}\sum_{i=۱}^{۱۰} x_i = \frac{۶ + ۱۶ + \cdots + ۱۴۰}{۱۰} = \frac{۷۱۸}{۱۰} = ۱۷/۸,$$

$$\overline{x^۲} = \frac{۱}{۱۰}\sum_{i=۱}^{۱۰} x_i^۲ = \frac{۶^۲ + ۱۶^۲ + \cdots + ۱۴۰^۲}{۱۰} = \frac{۷۵۰۹۰}{۱۰} = ۷۵۰۹.$$

$$\Rightarrow \tilde{\beta} = \frac{\overline{x^۲} - \bar{x}^۲}{\bar{x}} = \frac{۷۵۰۹ - (۱۷/۸)^۲}{۱۷/۸} = ۴۰۴/۰۵۳۹,$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{\bar{x}^۲}{\overline{x^۲} - \bar{x}^۲} = \frac{(۱۷/۸)^۲}{۷۵۰۹ - (۱۷/۸)^۲} = ۰/۰۴۴.$$

مثال. اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} P(\lambda)$، برآوردگر گشتاوری λ را بیابید.

داریم:

$$X \sim P(\lambda) \;\Rightarrow\; E(X) = Var(X) = \lambda,$$

با برابر قرار دادن گشتاور مرتبه اول نمونه و جامعه داریم:

$$E(X) = \bar{X} \;\Rightarrow\; \lambda = \bar{X} \;\Rightarrow\; \tilde{\lambda} = \bar{X}.$$

* در ادامه اگر از گشتاور دوم استفاده شود، داریم:

$$\begin{aligned}
E(X^2) = \bar{X^2} \;&\Rightarrow\; Var(X) + E^2(X) = \lambda + \lambda^2 = \bar{X^2} \\
&\Rightarrow\; \lambda^2 + \lambda - \bar{X^2} = 0 \quad (\text{معادله درجه دوم}) \\
&\Rightarrow\; \tilde{\lambda} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\bar{X^2}}}{2} \\
&\Rightarrow\; \begin{cases} \tilde{\lambda}_1 = \frac{-1-\sqrt{1+4\bar{X^2}}}{2} < 0 & \text{غ.ق.ق} \\ \tilde{\lambda}_2 = \frac{-1+\sqrt{1+4\bar{X^2}}}{2} > 0 & \text{ق.ق} \end{cases} \overset{\lambda > 0}{\Longrightarrow} \tilde{\lambda} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\bar{X^2}}}{2}.
\end{aligned}$$

مثال. اگر $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\theta, \theta)$ که $\theta > 0$. برآوردگر گشتاوری θ را بیابید.

حل. با استفاده از گشتاور اول داریم:

$$E(X) = \bar{X} \quad \Rightarrow \quad \theta = \bar{X} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\theta} = \bar{X}.$$

* همچنین با استفاده از گشتاور دوم $\tilde{\theta}$ به‌صورت زیر می‌باشد.

$$E(X^2) = \bar{X^2} \quad \Rightarrow \quad \theta + \theta^2 = \bar{X^2}$$

$$\Rightarrow \quad \theta^2 + \theta - \bar{X^2} = 0 \Rightarrow \quad \tilde{\theta} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\bar{X^2}}}{2}.$$

تمرین ۱. اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} f(x,\theta)$ که

$$f(x,\theta) = \frac{2x}{\theta^2}, \quad 0 < x < \theta.$$

برآوردگر گشتاوری θ را بیابید.

تمرین ۲. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Exp(\theta)$ با تابع چگالی زیر باشد، برآوردگر گشتاوری θ را به‌دست آورید.

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \ \ x > 0, \ \ \theta > 0.$$

تمرین ۳. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} f(x,\theta)$ با تابع چگالی زیر باشد، برآوردگر گشتاوری θ را به‌دست آورید.

$$f(x,\theta) = 2\theta\, x\, e^{-\theta\, x^2}, \ \ x > 0, \ \ \theta > 0.$$

تمرین ۴. فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} b(k,p)$ که

$$P(X=x) = \binom{k}{x} p^x \, (۱-p)^{k-p}, \quad x = ۰, ۱, \ldots, k, \quad ۰ < p < ۱,$$

(k,p) هردو نامعلوم می‌باشند. برآوردگرهای گشتاوری k و p را به‌دست آورید.

تمرین ۵. اگر $X_۱, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} f(x,\theta)$ که

$$f(x,\theta) = e^{-(x-\theta)}, \quad x > \theta.$$

برآوردگر گشتاوری θ را بیابید.

تمرین ۶. اگر $X_۱, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} f(x,\alpha)$ که

$$f(x,\alpha) = \alpha \, x^{-(\alpha+۱)}, \quad x \geq ۱, \ \alpha > ۰.$$

برآوردگر گشتاوری α را بیابید.