به نام او، به یاد او، برای او

جبرخطی عددی

حل دستگاه معادلات خطی

روش حذفی گاوس

Dr. *Ali Valinejad*

valinejad.ir
valinejad@umz.ac.ir

University of Mazandaran

فهرست مطالب

- دستگاه معادلات خطی
- وجود جواب برای دستگاه معادلات خطی
- دستگاه‌های معادلات خطی هم ارز
- دسته‌بندی روش‌های عددی برای حل دستگاه معادلات خطی
- روش حذفی گاوس ساده
- روش جایگزینی پسرو برای حل دستگاه بالامثلثی $Ux=b$
- روش جایگزینی پیشرو برای حل دستگاه پایین مثلثی $Lx=b$

دستگاه معادلات خطی

دستگاه معادلات خطی با m معادله و n مجهول:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots \quad\;\; \vdots \quad &\quad\; \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

شکل ماتریسی دستگاه معادلات خطی با m معادله و n مجهول:

$$
Ax = b \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{b}
$$

چند نکته:

الف) اگر $m = n$، دستگاه را ***همواره معین***(Everdetermined) نامند.

ب) اگر $m < n$، دستگاه را ***فرو معین*** (Underdetermined) نامند.

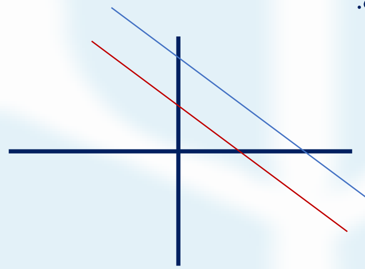
ج) اگر $m > n$، دستگاه را ***فرا معین*** (Overdetermined) گویند.

وجود جواب برای دستگاه معادلات خطی

حالت های مختلف وجود جواب برای دستگاه معادلات خطی $Ax = b$:

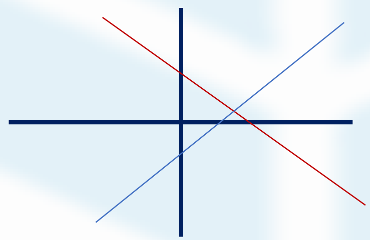
الف) دستگاه معادلات ***ناسازگار*** و ***بدون جواب*** است.

$$2x_1 + 3x_2 = 6$$
$$4x_1 + 6x_2 = 10$$



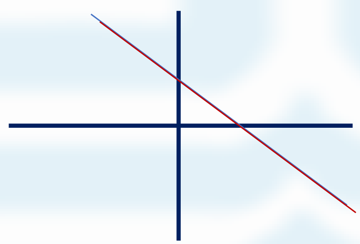
ب) دستگاه معادلات ***سازگار*** و دارای جواب ***منحصربفرد*** است.

$$2x_1 + 3x_2 = 6$$
$$-1x_1 + 1x_2 = -1$$



ج) دستگاه معادلات ***سازگار*** و دارای ***بیشمار جواب*** است.

$$2x_1 + 3x_2 = 12$$
$$4x_1 + 6x_2 = 24$$



وجود جواب برای دستگاه معادلات خطی

حالت های مختلف وجود جواب برای دستگاه معادلات خطی $Ax = b$:

الف) دستگاه معادلات ***ناسازگار*** و ***بدون جواب*** است.

ب) دستگاه معادلات ***سازگار*** و دارای جواب ***منحصربفرد*** است.

ج) دستگاه معادلات ***سازگار*** و دارای ***بیشمار جواب*** است.

چند نکته در باره وجود جواب برای دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ برای حالتی که $m = n$:

الف) اگر $|A| \neq 0$، دستگاه معادلات ***سازگار*** و دارای جواب ***منحصربفرد*** است.

$$2x_1 + 3x_2 = 6$$
$$-1x_1 + 1x_2 = -1$$

ب) اگر $|A| = 0$ و دستگاه معادلات ***سازگار*** باشد، ***بیشمار جواب*** دارد.

$$2x_1 + 3x_2 = 12$$
$$4x_1 + 6x_2 = 24$$

ج) اگر $|A| = 0$ و دستگاه معادلات ***ناسازگار*** باشد، ***بدون جواب*** است.

$$2x_1 + 3x_2 = 6$$
$$4x_1 + 6x_2 = 10$$

دستگاه معادلات خطی هم ارز

تعریف دستگاه معادلات خطی هم ارز:

دو دستگاه معادلات خطی را **هم ارز** گویند، اگر دقیقاً یک مجموعه جواب یکسان داشته باشند.

مثال:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ \quad -7x_2 = -7 \end{cases}$$

مجموعه جواب: $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

هم ارز

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = -3 \end{cases}$$

مجموعه جواب: $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

دسته‌بندی روش‌های عددی برای حل دستگاه معادلات خطی

به طور کلی، روش‌های عددی برای حل دستگاه معادلات خطی را می‌توان به دو دسته اصلی زیر تقسیم نمود:

روش‌های مستقیم:

این دسته از روش‌ها، در صورت عدم وجود خطای گردکردن، *جواب دقیق* دستگاه معادلات خطی را در یک *تعداد متناهی مرحله* محاسبه می کنند.
بعضی از مهمترین روش‌های مستقیم عبارتند از: روش کرامر، معکوس ماتریس، روش حذفی گوس ساده و ...

روش‌های تکراری:

این دسته از روش‌ها، به صورت تکراری به محاسبه *تقریبی* از جواب دستگاه معادلات خطی می‌پردازند. روش‌های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی با ماتریس ضرائب بزرگ مقیاس مفیدند.
بعضی از مهمترین روش‌های تکراری عبارتند از: روش ژاکوبی، روش گوس سایدل و...

حل دستگاه معادلات خطی

روش حذفی گاوس ساده

روش حذفی گاوس دستگاه $Ax = b$ را به یک دستگاه هم ارزی تبدیل می‌کند که پیدا کردن جواب آن آسانتر است.

گام۱: تشکیل ماتریس افزوده

گام۲: تبدیل ماتریس افزوده به یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی

گام۱: تشکیل ماتریس افزوده

$$Ax = b \longrightarrow [A \,\vdots\, b]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

ماتریسی با m سطر و $n+1$ ستون

حل دستگاه معادلات خطی

روش حذفی گاوس ساده

روش حذفی گاوس دستگاه $Ax = b$ را به یک دستگاه هم ارزی تبدیل می‌کند که پیدا کردن جواب آن آسانتر است.

گام۱: تشکیل ماتریس افزوده

گام۲: تبدیل ماتریس افزوده به یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی

گام۲: تبدیل ماتریس افزوده به یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی

با استفاده از عملیات سطری مقدماتی، ماتریس افزوده به ماتریسی با خواص زیر تبدیل شود:

- ❑ هر سطر غیر صفر بالای همه سطرهای صفر قرار گیرد
- ❑ عناصر پیشرو به شکل پلکانی قرار گیرند
- ❑ ستون های شامل عناصر پیشرو به بردارهای استاندارد تبدیل شوند

حل دستگاه معادلات خطی

روش حذفی گاوس ساده

روش حذفی گاوس دستگاه $Ax = b$ را به یک دستگاه هم ارزی تبدیل می‌کند که پیدا کردن جواب آن آسانتر است.

گام۱: تشکیل ماتریس افزوده

گام۲: تبدیل ماتریس افزوده به یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس سطری پلکانی}} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس تحویل شده سطری پلکانی}}$$

عناصر پیشرو

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad &= 1 \\ x_2 \quad &= 1 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

هم ارز

حل دستگاه معادلات خطی

روش حذفی گاوس ساده

روش حذفی گاوس دستگاه $Ax=b$ را به یک دستگاه هم ارزی تبدیل می‌کند که پیدا کردن جواب آن آسانتر است.

گام۱: تشکیل ماتریس افزوده

گام۲: تبدیل ماتریس افزوده به یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی

$$
\begin{aligned}
1x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 2x_4 + 1x_5 &= 2\\
-1x_1 - 2x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 6\\
2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 0x_5 &= 3\\
-3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 3x_5 &= 9
\end{aligned}
$$

هم ارز

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 \qquad\qquad - x_5 &= 2\\
x_3 \qquad\qquad &= -3\\
x_4 + x_5 &= 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 2\\
-1 & -2 & 1 & 2 & 3 & 6\\
2 & 4 & -3 & 2 & 0 & 3\\
-3 & -6 & 2 & 0 & 3 & 9
\end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{ماتریس تحویل شده سطری پلکانی}}
\begin{bmatrix}
1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -5\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

حل دستگاه معادلات خطی

روش حذفی گاوس ساده

$$
\begin{aligned}
1x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 2x_4 + 1x_5 &= {\color{red}2} \\
-1x_1 - 2x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= {\color{red}6} \\
2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 0x_5 &= {\color{red}3} \\
-3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 3x_5 &= {\color{red}9}
\end{aligned}
$$

هم ارز

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 \qquad\qquad - x_5 &= 2 \\
x_3 \qquad\qquad &= -3 \\
x_4 + x_5 &= 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2 - 2{\color{red}x_2} + {\color{red}x_5} \\
x_3 &= -3 \\
x_4 &= 2 - {\color{red}x_5}
\end{aligned}
$$

متغیرهای ${\color{red}x_2}$ و ${\color{red}x_5}$ را متغیرهای آزاد و متغیرهای x_1، x_3 و x_4 را متغیرهای وابسته نامند.

روش جایگزینی پسرو برای حل دستگاه بالامثلثی Ux=b

بطور کلی یک دستگاه معادلات خطی با n معادله و n مجهول را می‌توان به یک دستگاه بالامثلثی هم ارز با آن تبدیل نمود، اگر معادله iام ($i=1,2,\ldots,n$) تنها به مجهولات x_i، x_{i+1}، ... و x_n وابسته باشد.

برای حل دستگاه بالامثلثی می‌توان از روش جایگزینی پسرو استفاده نمود

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j}{u_{ii}}, \qquad \text{for} \quad i = n-1, \ldots, 1$$

```
n = length(b);
x(n)=b(n) / U(n,n)

for i=n-1:-1:1
    x(i) = b(i);
    for j=(i+1):1:n
        x(i) = x(i) - U(i, j)*x(j);
    end
    x(i) = x(i) / U(i, i);
end
```

روش جایگزینی پسرو برای حل دستگاه بالامثلثیUx=b

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس دستگاه زیر را به یک دستگاه بالا مثلثی هم ارز تبدیل نموده و سپس با استفاده از الگوریتم جایگزینی پسرو، دستگاه حاصل را حل نمایید.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

هم ارز

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 6 \\ -2x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

هم ارز

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس سطری پلکانی}} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس تحویل شده سطری پلکانی}}$$

روش جایگزینی پسرو برای حل دستگاه بالامثلثیUx=b

(ادامه)

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس دستگاه زیر را به یک دستگاه بالا مثلثی هم ارز تبدیل نموده و سپس با استفاده از الگوریتم جایگزینی پسرو، دستگاه حاصل را حل نمایید.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

هم ارز

$$\boxed{\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 6 \\ -2x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 2x_3 &= 2 \end{aligned}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس سطری پلکانی}}$$

```
for j=1:n
   for i=j+1:n
      m_ij=a_ij/a_ii
      for k= j+1:n
          a_ij=a_ik - m_ij a_jk
      end
      b_i=b_i - m_ij b_j
   end
end
```

روش جایگزینی پسرو برای حل دستگاه بالامثلثیUx=b

(ادامه)

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس دستگاه زیر را به یک دستگاه بالا مثلثی هم ارز تبدیل نموده و سپس با استفاده از الگوریتم جایگزینی پسرو، دستگاه حاصل را حل نمایید.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 6 \\ -2x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

```
n = length(b);
x(n)=b(n) / U(n,n)

for i=n-1:-1:1
     x(i) = b(i);
     for j=(i+1):1:n
          x(i) = x(i) - U(i, j)*x(j);
     end
     x(i) = x(i) / U(i, i);
end
```

$$x_3 = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{2 - 4(1)}{-2} = 1$$

$$x_1 = \frac{6 - 6(1) + 2(1)}{2} = 1$$

نکته:
شرط اتمام الگوریتم جایگزینی پسرو در این است که عناصر قطری ماتریس **U** همگی غیر صفر باشند. چنان چه حداقل یکی از عناصر قطری صفر باشد، دترمینان ماتریس ضرائب صفر می شود و در نتیجه دستگاه **Ux=b** جواب منحصربفرد نخواهد داشت.

روش جایگزینی پیشرو برای حل دستگاه پایین مثلثیLx=b

برای حل دستگاه پایین مثلثی می‌توان از روش جایگزینی پیشرو استفاده نمود

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{32} & l_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{33} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j}{l_{ii}}, \qquad \text{for} \quad i = n-1, \ldots, 1$$

```
n = length(b);
x(n)=b(1) / L(1,1)

for i=1:n
    x(i) = b(i);
    for j=1:i-1
        x(i) = x(i) - L(i, j)*x(j);
    end
    x(i) = x(i) / L(i, i);
end
```

نکته:

شرط اتمام الگوریتم جایگزینی پیشرو در این است که عناصر قطری ماتریس **L** همگی غیر صفر باشند. چنان چه حداقل یکی از عناصر قطری صفر باشد، دترمینان ماتریس ضرائب صفر می شود و در نتیجه دستگاه **Lx=b** جواب منحصربفرد نخواهد داشت.

مراجع

1- ***Numerical Linear Algebra and Applications***, Biswa Nath Datta, 1995.

2- ***https://www.slideserve.com***

3- ***http://speech.ee.ntu.edu.tw/~tlkagk/courses_LA19.html***

4- ***http://mathonline.wikidot.com/gaussian-elimination-and-back-substitution***

5-***https://www.math.usm.edu/lambers/mat610/sum10***