آمار ریاضی ۱
فصل سوم: روش‌های برآوردیابی

استاد: دکتر اکبر اصغرزاده

- **روش درست‌نمایی ماکزیمم**

اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} f(x, \theta)$، آنگاه تابع درست‌نمایی نمونه تصادفی $(X_1, \ldots, X_n)$ را با L نمایش داده و به‌صورت زیر است.

$$L(\theta) = f(x_1, \theta) \ldots f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta).$$

در روش درست‌نمایی ماکزیمم برای برآورد پارامتر θ، تابع $L(\theta)$ را روی فضای پارامتر یعنی روی Θ ماکزیمم می‌کنیم. برآوردی که از این روش به‌دست می‌آید را برآورد درست‌نمایی ماکزیمم (MLE) گویند که آنرا با $\hat{\theta}$ یا $\hat{\theta}_{ML}$ نمایش می‌دهند. در واقع

$$L(\theta) \leq L(\hat{\theta}), \quad \forall\, \theta \in \Theta.$$

اگر $L(\theta)$ برحسب θ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد با مشتق‌گیری از $L(\theta)$ می‌توان $\hat{\theta}$ را پیدا کرد. θ حاصل ممکن است MLE باشد.

$$L'(\theta) = \frac{d}{d\theta} L(\theta) = 0.$$

نکته. چون تابع $\ln(x)$ یا $\log(x)$ یک تابع صعودی است، لذا برای پیدا کردن $\hat{\theta}$ کافی است $l(\theta) = \ln L(\theta)$ را ماکزیمم کنیم.

مثال. اگر $X_۱, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} f(x,\theta)$ که

$$f(x,\theta) = \theta\, x^{\theta-۱}, \quad ۰ < x < ۱, \;\; \theta > ۰.$$

برآورد ML یا MLE پارامتر θ را پیدا کنید.

$$L(\theta) = \prod_{i=۱}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=۱}^{n} \theta\, x_i^{\theta-۱} = \theta^n \,(\prod_{i=۱}^{n} x_i)^{\theta-۱},$$

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = \ln\left[\theta^n\,(\prod_{i=۱}^{n} x_i)^{\theta-۱}\right]$$

$$= \ln(\theta^n) + \ln\left[(\prod_{i=۱}^{n} x_i)^{\theta-۱}\right] = n\ln\theta + (\theta - ۱)\sum_{i=۱}^{n} \ln(x_i).$$

$$l'(\theta) = ۰ \Rightarrow \; \frac{n}{\theta} + \sum_{i=۱}^{n} \ln(x_i) = ۰$$

$$\Rightarrow \; \hat{\theta} = \frac{n}{-\sum_{i=۱}^{n} \ln(x_i)} = \frac{-n}{\ln(\prod_{i=۱}^{n} x_i)}.$$

مثال کاربردی. داده‌های زیر میزان مرگ و میر نوزادان را در ۱۰ شهر یک منطقه نشان می‌دهد.

$$۰٫۰۲ \quad ۰٫۰۴ \quad ۰٫۰۱ \quad ۰٫۰۳ \quad ۰٫۰۵ \quad ۰٫۰۱ \quad ۰٫۰۱ \quad ۰٫۰۳ \quad ۰٫۰۲ \quad ۰٫۰۲$$

با فرض اینکه به داده‌های فوق توزیع بالا برازش شود، برآورد ML پارامتر θ را بیابید.

$$\hat{\theta} = \frac{-۱۰}{\ln(۰٫۰۲ \times ۰٫۰۴ \ldots \times ۰٫۰۲)} = \frac{-۱۰}{-۳۸٫۸} = ۰٫۲۵۷.$$

مثال. اگر $X_۱, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} f(x,\theta)$ که

$$f(x,\theta) = \theta\, e^{-\theta\, x}, \;\; x > ۰,\; \theta > ۰.$$

برآورد ML پارامتر θ را بیابید.

حل.

$$L(\theta) = \prod_{i=۱}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=۱}^{n} \theta\, e^{-\theta\, x_i}$$
$$= \theta^n\, e^{-\theta \sum_{i=۱}^{n} x_i}$$

لگاریتم تابع درست‌نمایی نمونه ($(l(\theta))$):

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = \ln\left[\theta^n e^{-\theta\sum_{i=۱}^n x_i}\right] = n\ln\theta - \theta\sum_{i=۱}^n x_i.$$

$$\Rightarrow\ l'(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=۱}^n x_i$$

$$l'(\theta) = ۰ \Rightarrow\ \frac{n}{\theta} - \sum_{i=۱}^n x_i \Rightarrow\ \frac{n}{\theta} = \sum_{i=۱}^n x_i.$$

$$\Rightarrow\ \theta = \frac{n}{\sum_{i=۱}^n x_i} \Rightarrow\ \hat{\theta} = \frac{۱}{\bar{x}}.$$

سؤال: آیا $\hat{\theta}$ واقعا MLE است؟ یعنی آیا واقعا تابع $L(\theta)$ یا $l(\theta)$ را ماکزیمم می‌کند؟

تست مشتق دوم: مشتق دوم تابع $l(\theta)$ به‌صورت زیر می‌باشد.

$$l''(\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{n}{\theta} - \sum_{i=۱}^n x_i\right) = -\frac{n}{\theta^۲} < ۰.$$

از آنجایی‌که $l''(\theta) < ۰, \ \ \forall\theta > ۰$ از جمله $l''(\hat{\theta}) < ۰$، لذا $\hat{\theta} = \frac{۱}{\bar{x}}$ واقعا MLE پارامتر θ است.

مثال کاربردی. داده‌های زیر زمان‌های خرابی (طول عمر) ۱۸ دستگاه الکترونیکی را در یک آزمون طول عمر نشان می‌دهد.

$$5 \quad 11 \quad 21 \quad 31 \quad 46 \quad 75 \quad 98 \quad 122 \quad 145 \quad 165 \quad 196 \quad 224 \quad 245 \quad 293 \quad 321 \quad 330 \quad 350 \quad 420$$

با فرض اینکه طول عمر دستگاه فوق توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\theta}$ (مدل داده شده در مثال قبل) باشد، MLE پارامتر θ را بیابید.

حل.

$$\bar{x} = \frac{1}{18}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{18}(5 + 11 + \cdots + 420) = 172.1$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{172.1} = 0.0058.$$

مثال. اگر $X_۱, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} U(\circ, \theta),\ \theta > \circ$ با تابع چگالی زیر باشد، MLE پارامتر θ را بیابید.

$$f(x, \theta) = \frac{۱}{\theta}, \quad \circ < x < \theta.$$

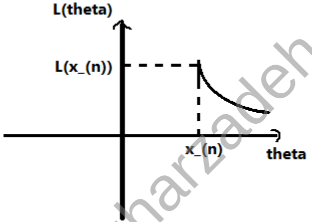
حل. تابع درست‌نمایی نمونه:

$$\begin{aligned}
L(\theta) = \prod_{i=۱}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=۱}^{n} \frac{۱}{\theta} = \frac{۱}{\theta^n}, &\qquad \circ < x_i < \theta, \quad i = ۱, \ldots, n, \\
= \frac{۱}{\theta^n}, &\qquad \circ < x_{(۱)} < \cdots < x_{(n)} < \theta \\
= \frac{۱}{\theta^n}, &\qquad x_{(n)} < \theta.
\end{aligned}$$

لذا

$$L(\theta) = \begin{cases} \frac{۱}{\theta^n}, & x_{(n)} < \theta \\ \circ, & o.w. \end{cases}$$

با توجه به نمودار، $l(\theta)$ در $x_{(n)} = \max(x_۱, \ldots, x_n)$ ماکزیمم می‌شود. لذا MLE پارامتر θ می‌شود $\hat{\theta} = x_{(n)}$.



در اینجا نمی‌توان از مشتق‌گیری و حل معادله درست‌نمایی MLE را پیدا کرد. چون

$$l'(\theta) = -n\theta^{-n-۱} < ۰, \quad \text{هیچگاه صفر نمی‌شود}$$

از آنجایی‌که $l(\theta)$ تابعی نزولی است، لذا هنگامی ماکزیمم می‌شود که θ در فاصله $(x_{(n)}, \ \infty)$ مینیمم شود. بنابراین $\hat{\theta} = x_{(n)}$.

مثال. اگر $X \sim f(x,\theta)$ که

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{۱}{۴} & x=۱,۲\\ \frac{۱+\theta}{۴} & x=۳\\ \frac{۱-\theta}{۴} & x=۴\end{cases} \qquad \theta\in[۰,۱].$$

برآورد ML پارامتر θ را بیابید.

حل.

$$L(\theta)=f(x,\theta)$$

باید $L(\theta)$ روی فضای پارامتر $\Theta=[۰,۱]$ ماکزیمم شود.

$$(۱)\ \text{اگر}\ x=۱,۲\ \Rightarrow\ L(\theta)=\frac{۱}{۴}$$

پس در این حالت

$$\hat{\theta}=\alpha\ \ (\alpha\in[۰,۱]),$$

یعنی MLE می‌تواند هر عددی بین $(۰,۱)$ باشد.

$$(۲) \quad \text{اگر} \quad x = ۳ \quad \Rightarrow \quad L(\theta) = \frac{۱+\theta}{۴} \quad \Rightarrow \quad L'(\theta) = \frac{۱}{۴} > ۰,$$

از آنجایی‌که $L(\theta)$ صعودی است، لذا تابع درست‌نمایی در بیشترین مقدار θ ماکزیمم می‌شود، یعنی $\hat{\theta} = ۱$.

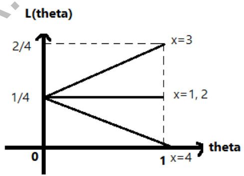
$$(۳) \quad \text{اگر} \quad x = ۴ \quad \Rightarrow \quad L(\theta) = \frac{۱-\theta}{۴} \quad \Rightarrow \quad L'(\theta) = -\frac{۱}{۴} < ۰,$$

از آنجایی‌که $L(\theta)$ نزولی است، لذا تابع درست‌نمایی در کمترین مقدار θ ماکزیمم می‌شود، یعنی $\hat{\theta} = ۰$.

بطور خلاصه

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \alpha & x = ۱, ۲ \quad \alpha \in (۰, ۱) \\ ۱ & x = ۳ \\ ۲ & x = ۴. \end{cases}$$

روش دوم: با استفاده از نمودار $L(\theta)$ نیز می‌توان $\hat{\theta}$ را پیدا کرد.



مثال. در مثال فوق بر اساس یک نمونه ۶ تایی

$$(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵, x_۶) = (۲, ۳, ۴, ۳, ۳, ۱)$$

برآورد ML پارامتر θ را بیابید.

حل. تابع درست‌نمایی نمونه:

$$\begin{aligned} L(\theta) = \prod_{i=۱}^{n} f(x_i, \theta) &= f(x_۱, \theta) \dots f(x_۶, \theta) \\ &= f(۲, \theta)\, f(۳, \theta)\, f(۴, \theta)\, f(۳, \theta)\, f(۳, \theta)\, f(۱, \theta) \\ &= \frac{۱}{۴} \times \frac{۱+\theta}{۴} \times \frac{۱-\theta}{۴} \times \frac{۱+\theta}{۴} \times \frac{۱+\theta}{۴} \times \frac{۱}{۴} \\ &= \frac{۱}{۴^۶}[(۱+\theta)^۳(۱-\theta)] \end{aligned}$$

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = -۶ \ln ۴ + ۳ \ln(۱+\theta) + \ln(۱-\theta)$$

$$l'(\theta) = \frac{۳}{۱+\theta} - \frac{۱}{۱-\theta} = \frac{۲-۴\theta}{(۱+\theta)(۱-\theta)} = ۰ \Rightarrow ۲ - ۴\theta = ۰,$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{۱}{۲}.$$

مثال. اگر $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, 1),\ \mu \in \mathbb{R}$، برآورد ML پارامتر μ را بیابید.

حل.

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}}$$
$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$l(\mu) = \ln L(\mu) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,$$

$$l'(\mu) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} -2(x_i-\mu) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n} x_i = n\,\mu$$

$$\Rightarrow\ \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ \Rightarrow\ \hat{\mu} = \bar{x}.$$

تست مشتق دوم:

$$l''(\mu) = \frac{d}{d\mu} l'(\mu) = \frac{d}{d\mu}\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\Big) = \frac{d}{d\mu}(-n\mu) = -n < 0.$$

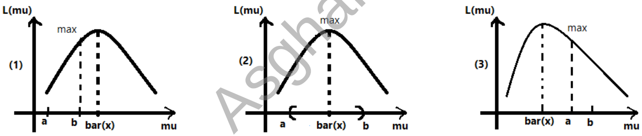
پس لذا

$$\frac{d''}{d^{۲}\mu} < ۰, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

بنابراین $\hat{\mu} = \bar{x}$ تابع $L(\mu)$ را واقعا ماکزیمم می‌کند. یعنی $\hat{\mu} = \bar{x}$ واقعا MLE پارامتر μ می‌باشد.

تذکر. برآورد ML حافظ دامنه می‌باشد یعنی اینکه برآورد ML پارامتر θ همیشه داخل فضای پارامتر θ قرار می‌گیرد.

مثال. اگر $X_۱, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, ۱), \quad \mu \in [a, b]$ که a و b دو عدد حقیقی معلوم‌اند. برآورد ML پارامتر μ را بیابید.



با توجه به نمودارهای فوق نتیجه می‌شود

$$\hat{\theta} = \begin{cases} b & a < b < \bar{x}, \qquad \text{(۱) شکل} \\ \bar{x} & a < \bar{x} < b, \qquad \text{(۲) شکل} \\ a & \bar{x} < a < b, \qquad \text{(۳) شکل.} \end{cases}$$

مثال. اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2), \quad \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0$، برآوردهای ML پارامترهای μ و σ^2 را بیابید.

حل. فضای پارامتر $\Theta = \{(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0\}$. داریم:

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

$$l(\mu, \sigma^2) = \ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

با مشتق‌گیری از $l(\mu, \sigma^2)$ نسبت به μ و σ^2 داریم:

$$\begin{cases} \frac{dl}{d\mu} = 0 \\ \frac{dl}{d\sigma^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} -2(x_i-\mu) = 0, \\ -\frac{n}{2}\frac{2\pi}{2\pi\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0, \\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4} = \frac{n}{2\sigma^4}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu} = \bar{x}, \\ \hat{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = S_b^2. \end{cases}$$

برای بررسی MLE بودن $\bar{x}$ و $S_b^۲$ بایستی نشان داد

$$A = \left| \begin{matrix} \frac{\partial l(\mu,\sigma^۲)}{d\mu^۲} & \frac{\partial l(\mu,\sigma^۲)}{d\mu\, d\sigma^۲} \\ \frac{\partial l(\mu,\sigma^۲)}{d\sigma^۲\, d\mu} & \frac{\partial l(\mu,\sigma^۲)}{d\sigma^۲} \end{matrix} \right| \Bigg|_{\mu=\bar{x},\ \sigma^۲=S_b^۲} \leq ۰.$$

یعنی بایستی نشان دهیم ماتریس A یک ماتریس همیشه منفی است (به عنوان تمرین بررسی کنید).

تعریف: ماتریس $A_{n\times n}$ را یک ماتریس همیشه منفی گویند هرگاه

$$\underline{x}' A\, \underline{x} \leq ۰, \quad \forall\ \underline{x}_{n\times ۱}.$$

مثال. اگر $X_۱, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} f(x, \theta)$ که

$$f(x,\theta) = e^{-(x-\theta)}, \quad x > \theta,\ \theta \in \mathbb{R}.$$

برآورد ML پارامتر θ را بیابید.

حل. داریم:

$$\begin{aligned} L(\theta) = \prod_{i=۱}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=۱}^{n} e^{-(x_i-\theta)} &= e^{-(n\bar{x}-n\theta)}, \qquad \theta < x_i,\ \ i = ۱, \ldots, n \\ &= e^{-n\bar{x}+n\theta} \qquad \theta < x_{(۱)} \\ &= e^{-n\bar{x}+n\theta}\, I_{(-\infty,\ x_{(۱)})}(\theta). \end{aligned}$$

از آنجایی‌که $l(\theta)$ تابعی صعودی از θ می‌باشد، لذا تابع درست‌نمایی در بیشترین مقدار θ ماکزیمم مقدار خود را داراست. بنابراین $\hat{\theta} = x_{(۱)}$.

توجه شود که از مشتق‌گیری و حل معادله درست‌نمایی، MLE پارامتر θ به‌دست نمی‌آید.

نکته: برای توزیع‌هایی که دامنه X وابسته به پارامتر باشد، برآورد MLE بر حسب آماره‌ی ترتیبی به‌دست می‌آید.

مثال. اگر $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} f(x,\theta,\eta)$ که

$$f(x,\theta,\eta) = \frac{1}{\eta} e^{-\frac{(x-\theta)}{\eta}}, \quad x > \theta, \quad \eta > 0, \ \theta \in \mathbb{R}.$$

MLE پارامترهای θ و η را پیدا کنید. تابع چگالی فوق تابع چگالی توزیع نمایی دوپارامتری می‌باشد.

حل.

$$\begin{aligned} L(\theta,\eta) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta,\eta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\eta} e^{-\frac{(x_i-\theta)}{\eta}}, \quad \theta < x_i, \ \ i = 1, \dots, n, \\ &= \frac{1}{\eta^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}{\eta}} = \eta^{-n} e^{-\frac{n(\bar{x}-\theta)}{\eta}}, \quad \theta < x_{(1)} \\ &= \eta^{-n} e^{-\frac{n(\bar{x}-\theta)}{\eta}} I_{(-\infty, x_{(1)})}(\theta). \end{aligned}$$

داریم:

$$l(\theta,\eta) = \ln L(\theta,\eta) = -n\ln\eta - \frac{n(\bar{x}-\theta)}{\eta}.$$

از آنجاییکه l تابعی صعودی از θ است، لذا $\hat{\theta} = x_{(۱)}$. با جایگذاری $x_{(۱)}$ بجای θ در $l(\theta,\eta)$ داریم:

$$l(x_{(۱)},\eta) = -n\ln\eta - \frac{n(\bar{x}-x_{(۱)})}{\eta}$$

با مشتق‌گیری از $l(x_{(۱)},\eta)$ نسبت به η داریم:

$$\frac{dl(x_{(۱)},\eta)}{d\eta} = -\frac{n}{\eta} + \frac{n(\bar{x}-x_{(۱)})}{\eta^۲}.$$

$$\frac{dl(x_{(۱)},\eta)}{d\eta} = ۰ \Rightarrow \frac{n(\bar{x}-x_{(۱)})}{\eta^۲} - \frac{n}{\eta} = ۰ \Rightarrow \frac{n}{\eta}\left(\frac{\bar{x}-x_{(۱)}}{\eta} - ۱\right) = ۰,$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{x}-x_{(۱)}}{\eta} = ۱, \quad \Rightarrow \eta = \bar{x}-x_{(۱)}, \quad \Rightarrow \hat{\eta} = \bar{x}-x_{(۱)}.$$

مثال کاربردی. داده‌های زیر زمان‌های خرابی (طول عمر) ۱۸ مؤلفه یا قطعه که در معرض یک آزمایش طول عمر قرار می‌گیرند به‌صورت زیر می‌باشد.

۵ ۱۱ ۲۱ ۳۱ ۴۶ ۷۵ ۹۸ ۱۲۲ ۱۴۵ ۱۶۵ ۱۹۵ ۲۲۴ ۲۴۵ ۲۹۳ ۳۲۱ ۳۳۰ ۳۵۰ ۴۲۰

با فرض اینکه بدانیم به داده‌های فوق توزیع نمایی دوپارامتری ذکر شده در مثال قبل برازش شود، پارامترهای MLE θ و η را بیابید.

حل.

$$x_{(۱)} = \min(x_۱, \dots, x_{۱۸}) = ۵,$$
$$\bar{x} = \frac{۵ + ۱۱ + \cdots + ۴۲۰}{۱۸} = ۱۷۲/۱,$$
$$\Rightarrow \hat{\theta} = x_{(۱)} = ۵, \quad \hat{\eta} = \bar{x} - x_{(۱)} = ۱۷۲/۱ - ۵ = ۱۶۷/۱.$$

خاصیت پایایی MLE: اگر $\hat{\theta}$، MLE پارامتر θ باشد، آنگاه $g(\hat{\theta})$، برآورد درست‌نمایی ماکزیمم $g(\theta)$ ($g(\theta)$ تابعی دلخواه از θ است). یعنی

$$\widehat{g(\theta)}_{MLE} = g(\hat{\theta}_{MLE}).$$

مثال. در مثال قبل MLE پارامترهای زیر را بیابید.

الف) $g(\theta) = \theta^۲$ ب) $h(\eta) = \frac{۱}{\eta}$ ج) $k(\theta, \eta) = \theta + \eta$.

حل.

$$\text{الف)}\quad \widehat{g(\theta)} = g(\hat{\theta}) = \hat{\theta}^۲ = x_{(۱)}^۲,$$

$$\text{ب)}\quad \widehat{h(\eta)} = h(\hat{\eta}) = \frac{۱}{\hat{\eta}} = \frac{۱}{\bar{x} - x_{(۱)}},$$

$$\text{ج)}\quad \widehat{k(\theta, \eta)} = \hat{\theta} + \hat{\eta} = x_{(۱)} + \bar{x} - x_{(۱)} = \bar{x}.$$

مثال. در مثال مربوط به طول عمر ۱۸ قطعه و با فرض اینکه توزیع طول عمر این قطعات نمایی دو پارامتری با پارامترهای θ و η باشد:

الف) به‌طور تقریبی چند درصد از این قطعات بالای ۱۰ ماه عمر می‌کنند؟

ب) به‌طور تقریبی میانگین طول عمر قطعات را پیدا کنید.

حل. الف)

$$X_i : \text{طول عمر قطعه}, \ i = ۱, \ldots, ۱۸$$

$$X_i \sim Exp(\theta, \eta) \ \Rightarrow \ f(x, \theta, \eta) = \frac{۱}{\eta} e^{-\frac{(x-\theta)}{\eta}}, \ \ x > \theta, \ \ \eta > ۰, \ \ \theta \in \mathbb{R}.$$

$$P(\widehat{X > ۱۰}) = ?$$

$$P(X > ۱۰) = \int_{۱۰}^{\infty} \frac{۱}{\eta} e^{-\frac{(x-\theta)}{\eta}} \, dx = e^{\frac{\theta}{\eta}} \int_{۱۰}^{\infty} \frac{۱}{\eta} e^{-\frac{x}{\eta}} \, dx$$

$$= e^{\frac{\theta}{\eta}} \, e^{-\frac{x}{\eta}} \Big|_{۱۰}^{\infty} = e^{\frac{\theta}{\eta} - \frac{۱۰}{\eta}} = e^{\frac{\theta - ۱۰}{\eta}}.$$

از خاصیت پایایی نتیجه می‌شود:

$$P(\widehat{X > ۱۰}) = e^{\frac{\hat{\theta} - ۱۰}{\hat{\eta}}} = e^{\frac{۵ - ۱۰}{۱۶۷/۱}} = e^{-۰/۰۲} = ۰/۹۸ \ \Rightarrow \ ۰/۹۸ \times ۱۰۰ = ۹۸\,\% \, .$$

تخمین می‌زنیم که ۹۸ درصد از قطعات تولیدی طول عمر بالای ۱۰ ماه دارند.

روش دوم. استفاده از فرمول.

$$F_X(x) = P(X \leq x) = ۱ - e^{-\frac{(x-\theta)}{\eta}}, \quad x > \theta,$$
$$P(X > x) = ۱ - P(X \leq x) = e^{-\frac{(x-\theta)}{\eta}},$$
$$P(\widehat{X > ۱۰}) = e^{\frac{\hat{\theta}-۱۰}{\hat{\eta}}} = e^{\frac{۵-۱۰}{۱۶۷/۱}} = e^{-۰/۰۲} = ۰/۹۸.$$

حل ب)

$$E(X) = \int x\, f(x)\, dx = \int_{\theta}^{\infty} x\, \frac{۱}{\eta} e^{-\frac{(x-\theta)}{\eta}}\, dx$$
$$(y = \frac{x-\theta}{\eta} \;\Rightarrow\; x = \theta + \eta y \Rightarrow\; dx = \eta\, dy)$$
$$\Rightarrow\; E(X) = \int_{۰}^{\infty} (\theta + \eta y) \frac{۱}{\eta} e^{-y}\, \eta\, dy$$
$$= \theta \int_{۰}^{\infty} e^{-y}\, dy + \eta \int_{۰}^{\infty} y\, e^{-y}\, dy = \theta + \eta.$$
$$\Rightarrow\; \widehat{E(X)} = \hat{\theta} + \hat{\eta} = x_{(۱)} + \bar{x} - x_{(۱)} = \bar{x} = ۱۷۲/۱.$$

مثال. اگر $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} f(x,\theta)$ که

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\pi[1+(x-\theta)^2]},\ x \in \mathbb{R},\ \theta \in \mathbb{R}.$$

برآورد ML پارامتر θ را بیابید.

حل. تابع درست‌نمایی نمونه

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\pi[1+(x_i-\theta)^2]} = \pi^{-n} \prod_{i=1}^{n} [1+(x_i-\theta)^2]^{-1}$$

لگاریتم تابع درست‌نمایی:

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = -n \ln \pi - \sum_{i=1}^{n} \ln[1+(x_i-\theta)^2].$$

$$l'(\theta) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{d\theta} \ln[1+(x_i-\theta)^2] = -\sum_{i=1}^{n} \frac{-2(x_i-\theta)}{1+(x_i-\theta)^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(x_i-\theta)}{1+(x_i-\theta)^2}.$$

معادله درست‌نمایی:

$$l'(\theta) = ۰ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{n} \frac{۲(x_i - \theta)}{۱ + (x_i - \theta)^۲} = ۰.$$

برآورد ML یعنی $\hat{\theta}$ از حل معادله درست‌نمایی $\sum_{i=۱}^{n} \frac{۲(x_i-\theta)}{۱+(x_i-\theta)^۲} = ۰$ بر حسب θ به‌دست می آید. ولی همانطوری که مشاهده می‌شود، حل معادله فوق ساده نیست. بنابراین برای پیدا کردن MLE بایستی از روش‌های عددی یا دستوراتی که در نرم‌افزارهای آماری و ریاضی وجود دارند استفاده کرد (مثل نرم‌افزار R).
در نرم‌افزار R دستوراتی وجود دارد که برای ماکزیمم کردن تابع استفاده می‌شود. همچنین دستوراتی وجود دارد که می‌توان به کمک آنها ریشه‌های یک معادله را پیدا کرد. برای مطالعه بیشتر در این زمینه به مقاله‌ی زیر مراجعه شود:

عبدی، موسی و اصغرزاده، اکبر. (۱۳۹۲). مروری بر روش های عددی برای محاسبه برآوردهای نقطه ای و فاصله ای با استفاده از نرم افزار $s-plus$. *اندیشه آماری*، ۱۸, ۲, ۶۰ — ۴۷.

۱. فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $f(x,\theta)$ باشد که $\theta \in \{۱,۲,۳\}$. MLE پارامتر θ را بیابید.

x	$f(x,1)$	$f(x,2)$	$f(x,3)$
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{4}$

۲. اگر $X_۱,\ldots,X_n \overset{iid}{\sim} f(x,\theta)$. در هرکدام از حالات زیر برآورد ML پارامتر θ را بیابید.

$$i)\ f(x,\theta) = \theta x^{-۲}, \quad ۰ < \theta \leq x < \infty.$$

$$ii)\ f(x,\theta) = \frac{۱}{\theta} e^{-x/\theta},, \quad x > ۰, \quad \theta > ۰.$$

$$iii)\ f(x,\theta) = \theta^x (۱-\theta)^{۱-x}, \quad x = ۰ \text{ یا } ۱, \quad ۰ \leq \theta \leq \frac{۱}{۲}.$$

۳. فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} f(x,\theta)$ که

$$f(x,\theta) = \frac{\alpha\,\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+۱}},\ \ x \geq \beta,\ \ \alpha,\ \beta > ۰.$$

الف) برآورد ML پارامترهای α و β را بیابید.

ب) برآورد ML پارامترهای $\frac{۱}{\beta}$ و $\alpha^۲$ را بیابید.

۴. اگر $X_۱, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} f(x,\theta)$ که

$$f(x,\theta) = \theta\, x^{\theta-۱},\ \ ۰ < x < ۱,\ \ \theta \in [a,b].$$

برآورد ML پارامتر θ را بیابید.

۵. اگر $X \sim f(x,\theta)$ که

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{۱}{۴} & x = ۱,۲ \\ \frac{۱+\theta}{۴} & x = ۳ \\ \frac{۱-\theta}{۴} & x = ۴ \end{cases} \qquad \theta \in [-۱,۱].$$

برآورد ML پارامتر θ را بیابید.