در این قضیه قبل یک σ-جبر $\mathfrak{M}$ و اندازه μ بر آن را داشتیم. حال با کمک این دو مفهوم توانستیم σ-جبر کاملتری از $\mathfrak{M}$ یعنی $\mathfrak{M}^*$ بدست آوریم و با اندازه μ تغییر نکرده است. بعبارت بهتر σ-جبر $\mathfrak{M}^*$، یک σ-جبر μ-کامل شده σ-جبر $\mathfrak{M}$ خواهد بود.

اثبات قضیه: ابتدا اگر σ-جبر $\mathfrak{M}$ را در نظر بگیریم، یکی از شرایط آن اینست که $X\in\mathfrak{M}$ و چون می‌دانیم $X\subset X\subset X$ و $\mu(X-X)=0$، پس طبق تعریف $\mathfrak{M}^*$ لازم است که $X\in\mathfrak{M}^*$.

ثانیاً حال اگر $E\in\mathfrak{M}^*$. طبق تعریف $\mathfrak{M}^*$، عناصر $A,B\in\mathfrak{M}$ وجود دارند که $A\subset E\subset B$ و $\mu(B-A)=0$ و $\mu(E)=\mu(A)$. در نتیجه

$$B^c\subset E^c\subset A^c \quad , \quad A^c,B^c\in\mathfrak{M},\ \mu(A^c-B^c)=\mu(B-A)=0$$

پس لازم است طبق تعریف $\mathfrak{M}^*$ داشته باشیم $E^c\in\mathfrak{M}$.

برای قسمت سوم اگر برای $i=1,2,\dots$ ، $E_i\in\mathfrak{M}^*$. طبق تعریف عناصر $A_i,B_i\in\mathfrak{M}$ وجود دارند، بطوریکه $A_i\subset E_i\subset B_i$ و $\mu(B_i-A_i)=0$.

فرض کنید $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ و $B=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که $A\subset E\subset B$ که $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$.

$$\mu(B-A)=\mu(\bigcup B_i-A)=\mu(\bigcup(B_i-A))\le\mu(\bigcup(B_i-A_i))=0$$

بنابراین لازم است که $E\in\mathfrak{M}^*$. بااین ترتیب $\mathfrak{M}^*$ یک σ-جبر می‌باشد.

حال اگر E_i ها عناصر جدا از هم از $\mathfrak{M}^*$ باشند طبق بند سوم A_i ها نیز جدا از هم هستند و چون μ بطور شمارا جمع‌پذیر بر $\mathfrak{M}$ بود، داریم $\mu(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$. از طرفی $\mu(A_i)=\mu(E_i)$ پس

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)=\mu(A)=\mu(E).$$

پس μ بطور شمارا بر $\mathfrak{M}^*$ شمارا جمع‌پذیر است.

حال می‌خواهیم خوش تعریف بودن μ را ثابت کنیم. برای این موضوع فرض می‌کنیم

$$A_1\subset E\subset B_1 \quad , \quad A\subset E\subset B$$

بطوریکه $\mu(B-A)=\mu(B_1-A_1)=0$. چون $A\subset B_1$ پس $A-A_1\subset B_1-A_1$. پس داریم

$$\mu(A-A_1)\le\mu(B_1-A_1)=0\Rightarrow\mu(A-A_1)=0$$

به همین ترتیب $\mu(A_1-A)=0$. بنابراین $\mu(A_1)=\mu(A)$ زیرا

$$\mu(A)=\mu[(A_1\cap A)\cup(A-A_1)]=\mu(A_1\cap A)=\mu(A_1)$$

تعریف ۱.۳۷ مفهوم تقریباً همه جا اندازه پذیری یک تابع

فرض کنید f روی $E\in\mathfrak{M}$ تعریف شده باشد. گوییم این تابع روی X اندازه پذیر است هرگاه $\mu(E^c)=0$ باشد و برای هر مجموعه باز V، مجموعه $f^{-1}(V)\cap E$ اندازه پذیر باشد.

قضیه ۱.۳۸ فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع مختلط اندازه پذیر باشند که تقریباً همه جا بر X تعریف شده هستند. بطوری که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_X |f_n|\,d\mu<\infty \qquad (1)$$

در این صورت سری $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ برای تقریباً همه x ها همگراست، $f\in L^1(\mu)$ و

$$\int_X f\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,d\mu \qquad (2)$$

اثبات. فرض کنید S_n مجموعه‌ای باشد که f_n بر آن تعریف شده است. بنابراین $\mu(S_n^c)=0$، قرار دهید

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|,\quad x\in S=\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n.$$

در این صورت

$$\mu(S^c)=\mu\Big(\big(\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n\big)^c\Big)=\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n^c\Big)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(S_n^c)=0$$

با توجه به فرض (1) می‌دانیم که

$$\int_S\varphi\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_S|f_n|\,d\mu<\infty \qquad (3)$$

اگر فرض کنیم $E=\{x\in S\ ;\ \varphi(x)<\infty\}$، از (3) نتیجه می‌شود که $\mu(E^c)=0$ است، زیرا در غیر اینصورت بدلیل اینکه $\varphi|(S-E)$ بی‌نهایت است، با رابطه (3) در تناقض خواهد بود.

طبق رابطه (3) سری $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ برای هر $x\in E$ بطور مطلق همگراست. پس برای هر $x\in E$ هم همگراست. با استفاده از (3) نتیجه می‌شود که $f\in L^1(\mu)$.

اگر فرض کنیم $g_n=f_1+f_2+\dots+f_n$. در این صورت $|g_n|\le\varphi$ و برای هر $x\in E$، $g_n(x)\to f(x)$. از قضیه ۱.۳۴ نتیجه می‌شود

$$\int_X f\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,d\mu.$$

مثال $f_n(x)=\sin n^2x$ برای $n=1,2,\dots$ ، $x\in\mathbb{R}$. نشان می‌دهد $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b|f_n|\,d\mu$

پس طبق قضیه فوق تقریباً همه جا $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ همگراست.

قضیه ۱.۲۹. (a) فرض کنید $f: X \to [0,\infty]$ اندازه‌پذیر باشد و $E \in \mathfrak{M}$ و
$\int_E f\,d\mu = 0$ ، در این صورت تقریباً همه جا $f=0$ بر E است.
(b) فرض کنید $f \in L^1(\mu)$ و $\int_E f\,d\mu = 0$ برای هر $E\in\mathfrak{M}$ باشد. در این صورت $f=0$ تقریباً همه‌جا بر X است.
(c) فرض کنید $f\in L^1(\mu)$ و $\left|\int_X f\,d\mu\right| = \int_X |f|\,d\mu$ ، در این صورت عدد ثابت مانند α وجود دارد بطوری که تقریباً همه جا روی X رابطه $\alpha f = |f|$ برقرار است.

اثبات. (a) اگر فرض کنیم $A_n=\{x\in E \,;\, f(x)>\frac{1}{n}\}$ برای $n=1,2,\ldots$ ، در این صورت نامساوی $\frac{1}{n} \chi_{A_n} \le f$ را داریم (χ_{A_n} نیز تابع مشخصه A_n که قبلاً توضیح داده‌ایم)

$$\int_{A_n} \frac{1}{n} \chi_{A_n}\, d\mu = \frac{1}{n} \mu(A_n) \le \int_{A_n} f\, d\mu \le \int_E f\, d\mu = 0$$

بنابراین $\mu(A_n)=0$. چون $A=\bigcup A_n = \{x\in E,\ f(x)>0\}$ ، پس

$$\mu(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0 \Rightarrow \mu(A)=0$$

بنابراین $f=0$ تقریباً همه جا روی E است.

(b) قرار دهید $f=u+iv$ و $E=\{x \,;\, u(x)>0\}$. در این صورت قسمت حقیقی $\int_E f\, d\mu$ برابر $\int_E u^+ d\mu$ است زیرا $u^-=0$ بر E است. اگر فرض کنیم V نیم صفحه راست صفحه مختلط باشد، داریم $E=f^{-1}(V)$. بنابراین با توجه به اندازه‌پذیر بودن f و باز بودن V می‌توان نتیجه گرفت که $E\in\mathfrak{M}$ و می‌توان بیان کرد که $\int_E f\, d\mu$ معنی دار خواهد بود. طبق فرض می‌توان نتیجه گرفت که $\int_E u^+ d\mu = 0$ ، طبق قسمت (a) می‌توان نتیجه گرفت که $u^+=0$ ، به همین ترتیب

$$u^- = v^- = v^+ = 0 \quad a.e$$

پس $f=0$ تقریباً همه جا.

(c) با بررسی قضیه ۱.۳۳ و فرض این قسمت می‌توان نتیجه گرفت که $\int_X u\, d\mu = \int_X |f|\, d\mu$
پس $\int_X (|f|-u)\, d\mu = 0$ ، چون $|f|-u \ge 0$ از قسمت a می‌توان نتیجه گرفت که

$$|f| = u \quad a.e$$

پس قسمت حقیقی αf تقریباً همه جا برابر $|\alpha f|$. چون قسمت موهومی $\int_X v\, d\mu = 0$ پس $v=0$
در نتیجه $\alpha f = u$ تقریباً همه جا

صفحه ۲۴

قضیه ۱.۴۰. فرض کنید $\mu(X)<\infty$ و $f\in L^1(\mu)$ و S یک مجموعه بسته در $\mathbb{C}$ است. میانگین

$$A_E(f)=\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,d\mu \in S$$

برای هر E از $\mathfrak{M}$ که $\mu(E)>0$ است را داریم. در این صورت تقریباً برای هر $x\in X$، $f(x)\in S$.

اثبات: فرض کنید Δ یک دیسک بمرکز α و شعاع r در S^c باشد. چون S^c یک مجموعه باز می‌باشد، بنابراین برابر اجتماع تعداد شمارش‌پذیری از مجموعه های باز مانند Δ است. در نتیجه کافی است برای چنین Δای، ثابت کنیم $\mu(f^{-1}(\Delta))=0$.

فرض کنید $E=f^{-1}(\Delta)$، باتوجه به فرض اندازه‌پذیری f می‌توان نتیجه گرفت که $E\in\mathfrak{M}$.

$$\forall x\in E \Rightarrow f(x)\in\Delta \Rightarrow |f(x)-\alpha|<r.$$

حال اگر $\mu(E)\neq 0$ باشد

$$|A_E(f)-\alpha|=\frac{1}{\mu(E)}\left|\int_E f\,d\mu-\int_E \alpha\,d\mu\right|$$

$$\leq\frac{1}{\mu(E)}\int_E|f-\alpha|\,d\mu<r \Rightarrow A_E(f)\in S^c$$

ولی با فرض قضیه در تناقض است. پس لازم است $\mu(E)=0$.

قضیه ۱.۴۱. فرض کنید $\{E_k\}$ دنباله‌ای از مجموعه های اندازه‌پذیر در X باشد که $\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)<\infty$. در این صورت تقریباً هر $x\in X$ در حداکثر تعداد متناهی از E_k ها قرار دارد.

اثبات. فرض کنیم $A=\{x\in X \mid x$ در تعداد نامتناهی از E_k قرار دارد $\}$.

ثابت می‌کنیم $\mu(A)=0$. قرار دهید $g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{E_k}(x)$، که χ_{E_k} تابع مشخصه روی E_k هست، می‌دانیم هر جمله از این سری مقدارش صفر یا یک هست. پس اگر $x\in A$، آنگاه x در تعداد نامتناهی از E_k ها قرار می‌گیرد. پس در تعریف تابع g تعداد نامتناهی از جملات سری برابر یک خواهد شد یعنی $g(x)=\infty$، از طرفی

$$\int_X g\,d\mu=\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)<\infty}_{\text{طبق فرض}} \Rightarrow \int_A g\,d\mu<\infty$$

پس لازم هست که $\mu(A)=0$ شود.

فصل دوم اندازه های مثبت برل positive Borel Measures

تعریف ۱.۲ تبدیل خطی Linear Transformation

یک تبدیل خطی از یک فضای برداری V به توی فضای برداری V_1 یک نگاشتی از V به توی V_1 است بطوریکه برای هر $x, y \in V$ و برای هر دو اسکالر α، β داشته باشیم

$$\Lambda(\alpha x+\beta y)=\alpha\Lambda x+\beta\Lambda y. \qquad (1)$$

هرگاه V_1 میدان اسکالرها باشد، در این صورت Λ را تابعک خطی می نامیم.

همانطور که در رابطه (۱) دیده می شود، می توان برای تبدیل خطی به جای $\Lambda(x)$ مقدار Λx قرار دهیم

به عنوان مثال فضای $L^1(\mu)$ برای اندازه مثبت μ یک فضای برداری است. حال تبدیل $f \to \int_X f d\mu$ بر $L^1(\mu)$ یک تابعک خطی است.

مثال بعدی فرض کنید C مجموعه تمام توابع حقیقی مختلط پیوسته روی بازه واحد $I=[0,1]$ است. می دانیم که جمع دو تابع پیوسته، پیوسته می باشد و نیز ضرب اسکالر در یک تابع پیوسته نیز پیوسته می باشد

این بدان معنی است که C یک فضای برداری است. انتگرال ریمان معمولی برای عناصر $f \in C$ نسبت $\Lambda(f)=\int_0^1 f(x)dx$ یک تابعک خطی بر C است. این تابعک مثبت نیز هست، بدان معنی است که درجائیکه $f \geq 0$ داریم $\Lambda f \geq 0$.

در ابتدای درس در صفحه یک این جزوه در تعریف ۲.۱ فضای توپولوژی را تعریف کردیم، موضوعات مرتبط با این فضا از جمله مجموعه های باز و بسته و ستار و مجموعه های فشرده مفاهیم مقدماتی آن هستند. در این قسمت چند تعریف از فضای توپولوژی لازم می گردد

تعریف فضای توپولوژی هاسدورف Hausdorff

فضای توپولوژی X را هاسدورف می نامیم. هرگاه برای هر $p, q \in X$ که $p \neq q$، همسایگیها مانند U و V بترتیب برای p و q موجود باشند و $U \cap V=\varnothing$.

به عنوان مثال فضای اقلیدسی R^n یک فضای هاسدورف می باشد. البته هر فضای متریک فضای هاسدورف است.

تعریف موضعاً فشرده Locally compact

فضای X را موضعاً فشرده گویند، هرگاه برای هر نقطه $p \in X$، یک همسایه داشته باشد بطوریکه بستار آن فشرده باشد.

به عنوان مثال، هر فضای فشرده، موضعاً فشرده است. ولی عکس آن برقرار نمی‌باشد. به عنوان مثال R فشرده نیست ولی موضعاً فشرده است.

یکی از فضاهایی که در آنالیز ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد، در خصوص جداسازی مجموعه‌های فشرده است، بدان معنی که در یک فضای هاسدورف X هرگاه K زیرمجموعه فشرده باشد و $p \in K^c$، آنگاه مجموعه‌های باز چون U و W وجود دارند که $p \in U$، $K \subset W$ و نیز $U \cap W = \emptyset$. موضوعات دیگری از مفاهیم توپولوژی وجود داشته و مورد استفاده قرار می‌گیرد که در جای خودش در صورت لزوم اشاره می‌گردد.

قضیه ۲.۷ فرض کنید U مجموعه بازی در فضای هاسدورف موضعاً فشرده X باشد و زیرمجموعه فشرده K از X طوری باشد که $K \subset U$. در این صورت زیرمجموعه بازی چون V موجود است، بطوریکه بستار آن فشرده است و

$$K \subset V \subset \bar{V} \subset U.$$

اثبات. با توجه به فرض موضعاً فشردگی X، می‌توان بیان کرد که هر نقطه از K یک همسایگی دارد که بستار آن فشرده است. پس K بوسیله اجتماع متناهی از این همسایگیها پوشانده می‌شود. بنابراین K در مجموعه بازی مانند G قرار می‌گیرد که بستار آن فشرده است. اگر $U = X$ باشد، حکم بدست می‌آید، زیرا با فرض $V = G$، داریم $K \subset G \subset \bar{G} \subset U = X$.

در غیر اینصورت فرض کنید اگر U زیرمجموعه اکید X باشد، فرض کنید C مکمل U است. نقطه $p \in C$ را در نظر بگیرید، می‌دانیم که $p \notin U$، پس $p \notin K$. طبق نکته‌ای که قبل از قضیه بیان گردید، می‌توان بیان کرد که همسایه‌ای از K مانند W_p دارد که

$$K \subset W_p \subset V \quad , \quad p \in \bar{W}_p \, , \quad \bar{W}_p \text{ فشرده است}$$

حال با سه مجموعه بسته C، $\bar{G}$، $\bar{W}_p$، می‌دانیم $C \cap \bar{G} \cap \bar{W}_p$ زیرمجموعه بسته‌ای از فضای فشرده $\bar{G}$ است. در نتیجه فشرده خواهد بود.

فرض کنید $W = \bigcap_{p\in C} \overline{W}_p$ ، نشان می‌دهیم $C\cap\overline{G}\cap W = \emptyset$ ، فرض کنید

$$q \in C\cap\overline{G}\cap W = C\cap\overline{G}\cap\left(\bigcap_{p\in C}\overline{W}_p\right) \Rightarrow q\in C,\ q\in\bigcap_{p\in C}\overline{W}_p \Rightarrow q\in\overline{W}_q$$

چون $\overline{W}_p \subset V$ است، بنابراین $\overline{W}_q \cap C = \emptyset$. از تناقض حاصل $C\cap\overline{G}\cap W$ تهی است، پس می‌توان بیان کرد که عناصر p_1 ، p_2 ، ... p_n از C وجود دارند که

$$C\cap\overline{G}\cap[\overline{W}_{p_1}\cap\overline{W}_{p_2}\cap\cdots\cap\overline{W}_{p_n}] = \emptyset$$

اگر فرض کنیم $V = G\cap W_{p_1}\cap\cdots\cap W_{p_n}$. در این صورت

$$\overline{V}\subset\overline{G}\cap\overline{W}_{p_1}\cap\overline{W}_{p_2}\cdots\cap\overline{W}_{p_n}$$

چون سمت راست رابطه فشرده است، پس $\overline{V}$ نیز فشرده خواهد بود. بنابراین با انتخاب V قضیه اثبات می‌شود

تعریف ۸.۲ مفهوم نیم پیوستگی Semi Continuous

هرگاه X ، Y دو فضای توپولوژی باشند، از مفهوم پیوستگی تابع f داریم که برای هر مجموعه باز $V\subset Y$ ، می‌دانیم $f^{-1}(V)$ در X باز است. (مشابه آن را در فصول اندازه پذیر هم داشتیم)

حال اگر f یک تابع حقیقی مقدار باشد (یا دارای توزیع حقیقی باشد) و X نیز فضای توپولوژی در نظر گرفته شود. در صورتی این تابع را نیم پیوسته پایین می‌نامیم، هرگاه $\{x\in X, f(x) > \alpha\}$ برای هر α حقیقی، یک مجموعه باز در X است. اگر برای هر α حقیقی، مجموعه $\{x\in X, f(x)<\alpha\}$ یک مجموعه باز باشد، آنگاه f را نیم پیوسته بالا می‌نامیم.

خاصیتهای زیر را داریم.

(a) یک تابع حقیقی پیوسته است، اگر و فقط اگر هم نیم پیوسته بالا و هم نیم پیوسته پایین باشد.

(b) تابع ویژه یک مجموعه باز، نیم پیوسته پایین و تابع ویژه مجموعه های بسته، نیم پیوسته بالا هستند

برای توضیح این قسمت، فرض کنید Ω یک مجموعه باز باشد، و α یک عدد حقیقی در نظر گرفته شود اگر $\alpha < 0$ داریم $X = \{x\in X, \chi_\Omega(x) > \alpha\}$ که یک مجموعه باز است. اگر [illegible] این مجموعه برابر Ω است که مجموعه بازی باشد و اگر $1 \le \alpha$ ، این مجموعه تهی است و بالاخره برای هر α حقیقی این مجموعه باز است به همین ترتیب می‌توان نشان داد که تابع ویژه مجموعه های بسته، نیم پیوسته بالا می‌باشد.

۲۸. P.B.M

(c) ثابت می‌کنیم هر زوالی از توابع نیم پیوسته پایین یک تابع نیم پیوسته پایین و اینفیمم از هر خانواده توابع نیم پیوسته بالا یک تابع نیم پیوسته بالا است.

فرض می‌کنیم که $\{h_n\}$ یک خانواده نیم پیوسته پایین باشد.
یعنی به ازای هر $\alpha \in R$ (α ثابت فرض شده) داریم به ازای هر n

$$U_n = \{x : h_n(x) > \alpha\}$$

یک مجموعه باز است حال $\sup h_n = h$ در نظر بگیریم به ازای n و $x \in U_n$ داریم. پس $\alpha < h_n(x) < h(x)$

$$\bigcup U_n = U = \{x ;\ h(x) > \alpha\}$$

یک مجموعه باز است پس h یک نیم پیوسته پایین است.
و اگر $\{f_n\}$ خانواده از نیم پیوسته های بالا باشد. به ازای $\alpha \in R$ داریم و به ازای هر n

$$V_n = \{x : f_n(x) < \alpha\},$$

یک مجموعه باز است. فرض کنید $\bigcup V_n = V$. برای هر $x \in V$،
حال اگر $\inf f_n = h$ در نظر بگیریم به ازای n و $x \in V_n$ داریم
پس $\alpha > h_n(x) > h(x)$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = V = \{x ;\ h(x) < \alpha\}$$

یک مجموعه باز است پس h یک نیم پیوسته بالا است.

$$x \in \bigcup V_n \Leftrightarrow \exists n\ x \in V_n \Leftrightarrow \exists n\ \alpha > f_n(x) > f(x) \Leftrightarrow x \in V$$

تعریف 2.9 : تکیه‌گاه تابع مختلط f روی فضای توپولوژیک X بستار مجموعه $\{x ; f(x) \neq 0\}$ است. (support تکیه‌گاه)
حال خانواده تمام توابع مختلط پیوسته‌ای که تکیه‌گاه فشرده داشته باشند را به $C_c(X)$ توصیف می‌کنیم.
Continuous
Compact
به آسانی دیده می‌شود که $C_c(X)$ یک فضای برداری است. دو حقیقت زیر بدیهی است.
(a) تکیه‌گاه $f+g$ که بر اتحاد تکیه‌گاههای f و g قرار دارد و اتحاد با پایان مجموعه فشرده فشرده است. زیرا

$$\{x ;\ (f+g)(x) \neq 0\} \subset \{x ; f(x) \neq 0\} \cup \{x ; g(x) \neq 0\}$$

(b) مجموع دو تابع پیوسته تابعی است پیوسته و ضرب اسکالر یک تابع پیوسته [illegible]

در مفاهیم آنالیز (یعنی موضوع) را یادآوری کنیم که هرگاه X و Y فضاهای توپولوژیکی باشند و فرض کنید $f: X\to Y$ تابع پیوسته باشد، اگر K زیرمجموعه فشرده از X در نظر گرفته شود، در این صورت $f(K)$ نیز فشرده است.

دو علامت معرفی می‌شود. یکی $f\prec V$ و دیگری $K\prec f$ که $f\in C_c(X)$ و K مجموعه فشرده و V یک مجموعه باز در X هستند.

گوییم $K\prec f$، هرگاه $f\in C_c(X)$، $0\le f(x)\le 1$ و برای هر $x\in K$، $f(x)=1$. و نیز $f\prec V$ یعنی $f\in C_c(X)$ و $0\le f(x)\le 1$ که تکیه‌گاه f در V است. هرگاه f هر دو شرط را هم‌زمان داشته باشد، گوییم $K\prec f\prec V$.

لم زیر را که نکته جالبی در آن اثبات می‌شود تحت عنوان لم اوریسون (Urysohn) ارائه می‌دهیم.

لم ۲.۱۲ فرض کنید X فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد و V مجموعه باز و K زیرمجموعه فشرده از X هستند، در این صورت $f\in C_c(X)$ موجود است، بطوریکه $K\prec f\prec V$.

اثبات. فرض کنید $r_0=0$ و $r_1=1$ و نیز $r_2, r_3, r_4, \ldots$ اعداد گویای دلخواه در $(0,1)$ باشند. با توجه به قضیه قبل، مجموعه‌های V_0 و V_1 را می‌توان یافت که $\bar V_0$ فشرده باشد و روابط زیر را داشته باشیم

$$K\subset V_1\subset \bar V_1\subset V_0\subset \bar V_0\subset V$$

برای $n\ge 2$ مجموعه‌های $V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_n}$ را انتخاب می‌کنیم بطوریکه اگر $r_i<r_j$، نتیجه می‌دهد که $\bar V_{r_j}\subset V_{r_i}$. در این صورت یکی از اعداد $r_1, r_2, \ldots, r_n$، مثلاً r_i بزرگترین عددی است که از r_{n+1} کوچکتر است و دیگری r_j هست که از بین آنها کوچکترین عددی است که از r_{n+1} بزرگتر است.

(مثلاً فرض کنید $r_2=\frac{1}{2}$، $r_3=\frac{5}{6}$، $r_4=\frac{3}{8}$، $r_5=\frac{7}{9}$. حال چند عدد از $\frac{7}{9}$ کوچکترند خوب r_2 و r_4، حال از بین آنها بزرگتر را یعنی r_2 را انتخاب می‌کنیم)

بوسیله قضیه قبل، $V_{r_{n+1}}$ را طوری بدست می‌آوریم که

$$\bar V_{r_j}\subset V_{r_{n+1}}\subset \bar V_{r_{n+1}}\subset V_{r_i}$$

بنابراین شمارایی از مجموعه‌های باز $\{V_r\}$ داریم که $r\in[0,1]$ و r یک عدد گویا خواهیم داشت

و نیز داریم که $K\subset V_1$ و $\bar{V}_0\subset V$ و $\bar{V}_0$ مجموعه فشرده است و نیز

$$s>r,\qquad \bar{V}_s\subset V_r$$

تعریف می‌کنیم

$$f_r(x)=\begin{cases} r & x\in V_r\\ 0 & \text{در سایر جاها}\end{cases},\qquad g_s(x)=\begin{cases} 1 & x\in \bar{V}_s\\ s & \text{در سایر جاها}\end{cases}$$

و

$$f=\sup_r f_r,\qquad g=\inf_s g_s$$

قبلاً نشان دادیم که f_r ها نیم پیوسته پایین هستند (البته توابع مشخصه مجموعه های باز) و همچنین نشان دادیم که سوپرمم توابع نیم پیوسته پایین، نیم پیوسته پایین می‌باشد. یعنی f چنین است. بطور مشابه g نیز نیم پیوسته بالا است. می‌دانیم که $0\le f\le 1$.
از طرفی اگر $x\in K$، یعنی $x\in V_r$ برای هر $r\in[0,1]$ است، پس سوپرمم $f_r(x)=r$ برابر یک است یعنی $f(x)=1$. از طرفی تکیه‌گاه تابع f در $\bar{V}_0$ است.
اگر نشان دهیم که $f=g$، پس f تابع پیوسته بوده و حکم ثابت می‌گردد.
از نامساوی $f_r(x)>g_s(x)$ نتیجه می‌شود که $r>s$ است و $x\notin \bar{V}_s$ و $x\in V_r$. اما مجموعه‌های V_r و V_s به گونه‌ای هستند که لازم است $V_r\subset V_s$ باشد. بنابراین برای هر r, s داریم $f_r\le g_s$ است، این یعنی $f\le g$. حال اگر برای بعضی از x ها داشته باشیم $f(x)<g(x)$. در این صورت گویاهای r, s ای پیدا می‌شوند که

$$f(x)<r<s<g(x)$$

بنابراین $x\notin V_r$ و همچنین $x\in \bar{V}_s$. باز هم تناقض حاصل می‌شود. پس نتیجه اینکه $f=g$.

قضیه ۱۳۲ فرض کنید $V_1,\dots,V_n$ زیرمجموعه‌های باز از فضای موضعاً فشرده هاسدورف X باشند و K نیز مجموعه فشرده در X است که

$$K\subset V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_n=\bigcup_{i=1}^{n} V_i$$

در این صورت توابع h_i $(i=1,2,\dots,n)$ طوری وجود دارند که $h_i\prec V_i$ و

$$h_1(x)+\cdots+h_n(x)=1,\qquad (x\in K)$$

(در این قضیه مجموعه $\{h_1,h_2,\dots,h_n\}$ را افراز واحد K می‌نامیم.