آمار ریاضی ۱
فصل چهارم: برآوردگر نااریب با کمترین واریانس بطور یکنواخت
بخش دوم

استاد: دکتر اکبر اصغرزاده

قضیه لهمن-شفه

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n \stackrel{iid}{\sim} f(x;\theta), \quad \theta \in \Theta$. اگر S یک آماره بسنده کامل برای θ و $T^* = t^*(S)$ که تابعی از S است، یک برآوردگر نااریب برای $\alpha(\theta)$ باشد،آنگاه T^* یک $UMVUE$ برای $\alpha(\theta)$ است.

اثبات. فرض کنید که T یک برآوردگر نااریب دلخواه برای $\alpha(\theta)$ باشد که تابعی از S است، یعنی $T^{'} = t^{'}(S)$. آنگاه داریم:

$$E_\theta(T^* - T^{'}) = E_\theta(T^*) - E(T^{'}) = \alpha(\theta) - \alpha(\theta) = ۰.$$

از طرفی $T^* - T^{'} = t^*(S) - t^{'}(S)$ تابعی از S است. چون S کامل است لذا باید $P_\theta(T^* - T^{'} = ۰) = ۱$ یا

$$P_\theta(T^* = T^{'}) = ۱, \quad \forall\, \theta \in \Theta.$$

لذا تنها یک برآوردگر نااریب برای $\alpha(\theta)$ وجود دارد که تابعی از S است. حال برای برآوردگر نااریب دلخواه T برای $\alpha(\theta)$، چون $E(T|S)$ تابعی از S می‌باشد که نااریب برای $\alpha(\theta)$ است، لذا حتماً باید داشته باشیم $T^* = E(T|S)$.

در ادامه از قضیه رائو-بلاکول داریم:

$$Var_\theta(T^*) \leq Var_\theta(T), \quad \forall \theta \in \Theta.$$

لذا T^* یک $UMVUE$ برای $\alpha(\theta)$ است.

با توجه به قضایای رائو-بلاکول و لهمن-شفه برای پیدا کردن یک $UMVUE$ برای $\alpha(\theta)$ می‌توان از روش‌های زیر استفاده کرد:

- مستقیماً تابعی از آماره‌ی بسنده کامل یعنی S پیدا کرد که نااریب برای $\alpha(\theta)$ باشد.
- اگر مستقیماً تابعی از S پیدا نشود، ابتدا یک برآوردگر نااریب برای $\alpha(\theta)$ مانند T پیدا می‌کنیم، سپس با شرطی کردن T روی S برآوردگر $UMVUE$ برای $\alpha(\theta)$ می‌شود: $T^* = E(T|S)$.

مثال. اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} b(1,p)$، در هرکدام از موارد زیر $UMVUE$ پارامتر $\gamma(p)$ را پیدا کنید.

الف) $\gamma(p) = p$ ب) $\gamma(p) = p^2$ ج) $\gamma(p) = p(1-p)$

حل. الف) آماره بسنده کامل برای p می‌شود:

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n,p).$$

داریم

$$E(S) = np \Rightarrow E(\frac{S}{n}) = p.$$

لذا از قضیه لهمن-شفه، $UMVUE$ برای p می‌شود $\frac{S}{n} = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

ب)

$$\begin{aligned} E(S^2) &= Var(S) + E^2(S) = np(1-p) + n^2 p^2 \\ &= np + (n^2 - n)p^2 = E(S) + (n^2 - n)p^2 \end{aligned}$$

$$E(S^2 - S) = (n^2 - n)p^2 \Rightarrow E\left(\frac{S^2 - S}{n^2 - n}\right) = p^2$$

لذا $UMVUE$ برای p^2 می‌شود $\frac{S^2 - S}{n^2 - n}$.

ج) داریم:

$$\begin{cases} E(\frac{S}{n}) = p \\ E\left(\frac{S^۲ - S}{n^۲ - n}\right) = p^۲. \end{cases}$$

لذا داریم:

$$E\left(\frac{S}{n} - \frac{S^۲ - S}{n^۲ - n}\right) = p - p^۲ = p(۱ - p).$$

بنابراین $UMVUE$ برای $p(۱ - p)$ می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{S}{n} - \frac{S^۲ - S}{n^۲ - n} &= \frac{S}{n} - \frac{S(S - ۱)}{n(n - ۱)} \\ &= \frac{S}{n}\left(۱ - \frac{S - ۱}{n - ۱}\right) \\ &= \frac{S}{n}\frac{n - S}{n - ۱}. \end{aligned}$$

مثال. در مثال قبل، $UMVUE$ را برای $p^۳$ به‌دست آورید.

حل. بنظر مستقیماً نمی‌توان تابعی از S پیدا کرد که نااریب برای $p^۳$ باشد. لذا ابتدا یک برآوردگر نااریب مانند T برای $p^۳$ پیدا می‌کنیم سپس T را روی S شرطی می‌کنیم که $UMVUE$ برای $p^۳$ می‌شود $T^* = E(T|S)$.

برآوردگر نااریب برای $p^۳$:

$$
\begin{aligned}
E(X_۱) &= p \\
E(X_۱ X_۲) &= p^۲ \\
E(X_۱ X_۲ X_۳) &= p^۳
\end{aligned}
$$

قرار می‌دهیم $T = X_۱ X_۲ X_۳$.

$$
\begin{aligned}
E(T) = E(X_۱ X_۲ X_۳) &= E(X_۱)\, E(X_۲)\, E(X_۳) \\
&= p.p.p = p^۳.
\end{aligned}
$$

پس لذا T نااریب برای $p^۳$ است.

$$
\begin{aligned}
E(T|S=s) &= \sum_{t=۰,۱} t\, f_{T|S}(t|s) = ۱.\, f_{T|S}(۱|s) = P(T=۱|S=s)\\
&= \frac{P(T=۱,\ S=s)}{P(S=s)} = \frac{P(X_۱.X_۲.X_۳=۱,\sum_{i=۱}^{n}X_i=s)}{P(\sum_{i=۱}^{n}X_i=s)}\\
&= \frac{P(X_۱=۱, X_۲=۱, X_۳=۱, \sum_{i=۴}^{n}X_i=s-۳)}{P(\sum_{i=۱}^{n}X_i=s)}\\
&= \frac{p(X_۱=۱, X_۲=۱, X_۳=۱)\, P(\sum_{i=۴}^{n}X_i=s-۳)}{P(\sum_{i=۱}^{n}X_i=s)}\\
&= \frac{P(X_۱=۱)\, P(X_۲=۱)\, P(X_۳=۱)\, P(\sum_{i=۴}^{n}X_i=s-۳)}{P(\sum_{i=۱}^{n}X_i=s)}\\
&= \frac{p.p.p\binom{n-۳}{s-۳}p^{s-۳}(۱-p)^{n-s}}{\binom{n}{s}p^{s}(۱-p)^{n-s}} = \frac{\binom{n-۳}{s-۳}}{\binom{n}{s}}.
\end{aligned}
$$

لذا $UMVUE$ برای $p^۳$ می‌شود

$$
T^* = E(T|S) = \frac{\binom{n-۳}{S-۳}}{\binom{n}{S}}.
$$

مثال. اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} P(\lambda)$، در هرکدام از حالات زیر $UMVUE$ پارامتر $\gamma(\lambda)$ را بیابید.

الف) $\gamma(\lambda) = \lambda$ ب) $\gamma(\lambda) = \lambda^2$ ج) $\gamma(\lambda) = e^{-\lambda}$

د) $\gamma(\lambda) = \lambda e^{-\lambda}$ و) $\gamma(\lambda) = (\lambda - 1) e^{-\lambda}$

حل. الف) آماره بسنده کامل برای λ می‌شود

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n\lambda).$$

داریم

$$E(S) = n\lambda \Rightarrow E(\frac{S}{n}) = \lambda.$$

لذا $UMVUE$ برای λ می‌شود $\frac{S}{n} = \bar{X}$.

ب)

$$E(S^2) = Var(S) + E^2(S) = n\lambda + n^2\lambda^2$$

$$\Rightarrow E(S^2) = E(S) + n^2\lambda^2 \Rightarrow E\left(\frac{S^2 - S}{n^2}\right) = \lambda^2.$$

لذا $UMVUE$ برای λ^2 می‌شود $\frac{S^2 - S}{n^2}$.

ج) مستقیماً نمی‌توان تابعی از S پیدا کرد که ناریب برای $e^{-\lambda}$ باشد. لذا ابتدا یک برآوردگر ناریب مانند T برای $e^{-\lambda}$ معرفی می‌کنیم. سپس $UMVUE$ مطلوب می‌شود $E(T|S)$. تعریف کنید

$$T = \begin{cases} ۱ & X_۱ = ۰ \\ ۰ & X_۱ \neq ۰. \end{cases}$$

نشان می‌دهیم که T ناریب برای $e^{-\lambda}$ است.

$$E(T) = ۱ \times P(X_۱ = ۰) + ۰ \times P(X_۱ \neq ۰) = P(X_۱ = ۰) = e^{-\lambda}.$$

حال داریم:

$$\begin{aligned} E(T|S=s) &= \sum_{t=۰,۱} t\, f_{T|S}(t|s) = ۱.f_{T|S}(۱|s) = P(T=۱|S=s) \\ &= \frac{P(T=۱, \sum_{i=۱}^{n} X_i = s)}{P(\sum_{i=۱}^{n} X_i = s)} = \frac{P(X_۱ = ۰, \sum_{i=۲}^{n} X_i = s)}{P(\sum_{i=۱}^{n} X_i = s)} \\ &= \frac{P(X_۱ = ۰)\, P(\sum_{i=۲}^{n} X_i = s)}{P(\sum_{i=۱}^{n} X_i = s)} \\ &= \frac{e^{-\lambda} \dfrac{\big((n-۱)\lambda\big)^s e^{-(n-۱)\lambda}}{s!}}{\dfrac{(n\lambda)^s e^{-n\lambda}}{s!}} = \frac{(n-۱)^s}{n^s} = \left(\frac{n-۱}{n}\right)^s. \end{aligned}$$

لذا $UMVUE$ برای $e^{-\lambda}$ می‌شود $\left(\frac{n-1}{n}\right)^s$.

د) برآوردگر نااریب برای $\gamma(\lambda)=\lambda\, e^{-\lambda}$:

$$T=\begin{cases} 1 & X_1=1 \\ 0 & X_1\neq 1. \end{cases}$$

$$E(T)=P(X_1=1)=\lambda\, e^{-\lambda}.$$

حال داریم:

$$\begin{aligned} E(T|S=s) &= \sum_t t\, f_{T|S}(t|s) = 1\times f_{T|S}(1|s) = P(T=1|S=s) \\ &= \frac{P(T=1,\sum_{i=1}^n X_i=s)}{P(\sum_{i=1}^n X_i=s)} = \frac{P(X_1=1,\sum_{i=2}^n X_i=s-1)}{P(\sum_{i=1}^n X_i=s)} \\ &= \frac{P(X_1=1)\,P(\sum_{i=2}^n X_i=s-1)}{P(\sum_{i=1}^n X_i=s)} \\ &= \frac{\lambda\, e^{-\lambda}\,\dfrac{\left((n-1)\lambda\right)^{s-1} e^{-(n-1)\lambda}}{(s-1)!}}{\dfrac{(n\lambda)^s\, e^{-n\lambda}}{s!}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^s \frac{s!}{(s-1)!} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^s s. \end{aligned}$$

لذا $UMVUE$ برای $\gamma(\lambda) = \lambda\, e^{-\lambda}$ می‌شود $S\left(\frac{n-۱}{n}\right)^{S}$.

و) داریم

$$(\lambda - ۱)\, e^{-\lambda} = \lambda\, e^{-\lambda} - e^{-\lambda}.$$

لذا $UMVUE$ برای $\gamma(\lambda) = (\lambda - ۱)\, e^{-\lambda}$ می‌شود

$$\left(\frac{n-۱}{n}\right)^{S} S - \left(\frac{n-۱}{n}\right)^{S} = \left(\frac{n-۱}{n}\right)^{S} (S - ۱).$$

مثال. اگر $X_۱, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Exp(\frac{۱}{\theta})$ که

$$f(x,\theta) = \theta\, e^{-\theta x}, \quad x > ۰, \quad \theta > ۰.$$

پیدا کنید $UMVUE$ را برای

الف) $\frac{۱}{\theta}$ ب) θ ج) $e^{-k\theta}$.

حل. الف) آماره بسنده کامل برای θ می‌شود

$$S = \sum_{i=۱}^{n} X_i \sim \Gamma(\alpha = n, \beta = \frac{۱}{\theta}).$$

داریم

$$E(S) = \alpha\,\beta = \frac{n}{\theta} \quad \Rightarrow \quad E(\frac{S}{n}) = \frac{۱}{\theta}.$$

لذا $UMVUE$ برای $\frac{۱}{\theta}$ می‌شود $\bar{X} = \frac{S}{n}$.

ب)

$$E(\frac{۱}{S}) = \int \frac{۱}{s} f_S(s)\, ds = \int_{۰}^{\infty} \frac{۱}{s} \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} s^{n-۱}\, e^{-\theta s}\, ds$$
$$= \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \int_{۰}^{\infty} s^{n-۲} e^{-\theta s}\, ds, \quad *$$

داریم

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} s^{n-۱}\, e^{-\theta s}\, ds = ۱ \;\Rightarrow\; \int_{۰}^{\infty} s^{n-۱}\, e^{-\theta s}\, ds = \frac{\Gamma(n)}{\theta^n}.$$

لذا

$$E(\frac{۱}{S}) = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \int_{۰}^{\infty} s^{n-۲} e^{-\theta s}\, ds = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-۱)}{\theta^{n-۱}}$$
$$= \frac{\theta\,\Gamma(n-۱)}{(n-۱)\,\Gamma(n-۱)} = \frac{\theta}{n-۱} \Rightarrow \; E(\frac{n-۱}{S}) = \theta.$$

لذا $UMVUE$ برای θ می‌شود $\frac{n-۱}{S}$.

روش دوم محاسبه *:

$$\int_{۰}^{\infty} s^{n-۲}\, e^{-\theta s}\, ds$$
$$= \int_{۰}^{\infty} (\frac{y}{\theta})^{n-۲}\, e^{-y}\, \frac{۱}{\theta}\, dy \qquad \left(y = \theta s \Rightarrow s = \frac{y}{\theta},\ \ ds = \frac{dy}{\theta}\right)$$
$$= \frac{۱}{\theta^{n-۱}} \int_{۰}^{\infty} y^{n-۲}\, e^{-y}\, dy = \frac{\Gamma(n-۱)}{\theta^{n-۱}}.$$

تذکر.

$$\Gamma(\alpha) = \int_{۰}^{\infty} x^{\alpha-۱}\, e^{-x}\, dx.$$

ج) داریم $F_X(x) = ۱ - e^{-\theta x}, \quad x > ۰$. لذا

$$P(X \leq x) = ۱ - e^{-\theta x},$$
$$P(X > x) = e^{-\theta x}.$$

به‌نظر مستقیماً نمی‌توان تابعی از S پیدا کرد که نااریب برای $e^{-k\theta}$ باشد. لذا ابتدا یک برآوردگر نااریب مانند T برای $e^{-k\theta}$ پیدا کرده و سپس آن را روی S شرطی می‌کنیم که در این حالت $UMVUE$ می‌شود $T^* = E(T|S)$.

برآوردگر نااریب T:

$$T = I_{(k,\infty)}(X_۱) = \begin{cases} ۱ & x_۱ > k \\ ۰ & X_۱ \leq k. \end{cases}$$

داریم:

$$E(T) = P(X_۱ > k) = e^{-k\theta}.$$
$$T^* = E(T|S) = E\Big(I_{(k,\infty)}(X_۱)|S\Big) = ?$$

$$E(T|S = s) = E\Big(I_{(k,\infty)}(X_۱)|S = s\Big)$$
$$= \int_۰^\infty I_{(k,\infty)}(x_۱)\, f_{X_۱|S}(x_۱|s)\, dx_۱ = \int_۰^k ۰\, dx_۱ + \int_k^\infty ۱.\, f_{X_۱|S}(x_۱|s)\, dx_۱ \quad *$$

$$
\begin{aligned}
f_{X_1|S}(x_1|s) &= \frac{f_{X_1,S}(x_1,s)}{f_S(s)} \\
&= \frac{f_{X_1,S}(x_1,s)\,\Delta x_1\,\Delta s}{f_S(s)\,\Delta x_1\,\Delta s} \\
&\approx \frac{P(x_1 < X_1 \le x_1+\Delta x_1,\ s < S \le s+\Delta s)}{f_S(s)\,\Delta x_1\,\Delta s} \qquad **
\end{aligned}
$$

تذکر. در حالت یک متغیره برای مقادیر خیلی کوچک Δx:

$$P\Big(x < X \le x+\Delta x\Big) \approx f_X(x)\,\Delta x$$

در حالت دو متغیره برای مقادیر خیلی کوچک Δx و Δy:

$$** \quad P\Big(x < X \le x+\Delta x,\ \ y < Y \le y+\Delta y\Big) \approx f_{X,Y}(x,y)\,\Delta x\,\Delta y.$$

لذا داریم

$$f_{X_1|S}(x_1|s) = \frac{P\Big(x_1 < X_1 \le x_1 + \Delta x_1,\ \ s < \sum_{i=1}^{n} X_i \le s + \Delta s\Big)}{f_S(s)\,\Delta x_1\,\Delta s}$$

$$= \frac{P\Big(x_1 < X_1 \le x_1 + \Delta x_1,\ \ s - x_1 < \sum_{i=2}^{n} X_i \le s - x_1 + \Delta s\Big)}{f_S(s)\,\Delta x_1\,\Delta s}$$

$$** \ \approx \ \frac{f_{X_1}(x_1)\,\Delta x_1\, f_{\sum_{i=2}^{n} X_i}(s - x_1)\,\Delta s}{f_S(s)\,\Delta x_1\,\Delta s}.$$

بنابراین داریم

$$f_{X_1|S}(x_1|s) = \frac{f_{X_1}(x_1)\, f_{\sum_{i=2}^{n} X_i}(s-x_1)}{f_S(s)}.$$

در این مثال داریم

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \frac{1}{\theta}),$$

$$\sum_{i=2}^{n} X_i \sim \Gamma(n-1, \frac{1}{\theta}).$$

لذا

$$f_{X_1|S}(x_1|s) = \frac{\theta\, e^{-\theta x_1}\, \frac{\theta^{n-1}}{\Gamma(n-1)}(s-x_1)^{n-2}\, e^{-\theta(s-x_1)}}{\frac{\theta^n}{\Gamma(n)} s^{n-1}\, e^{-\theta s}}$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-1)} \frac{(s-x_1)^{n-2}}{s^{n-1}}, \quad s - x_1 > 0, \ \ x_1 > 0.$$

$$\Rightarrow f_{X_1|S}(x_1|s) = (n-1)\frac{(s-x_1)^{n-2}}{s^{n-1}}, \quad 0 < x_1 < s.$$

$$
\begin{aligned}
* \ E(T|S=s) &= \int_k^{\infty} f_{X_۱|S}(x_۱|s)\, dx_۱ \\
&= \int_k^s \frac{n-۱}{s^{n-۱}} (s-x_۱)^{n-۲}\, dx_۱ = \frac{n-۱}{s^{n-۱}} \int_k^s (s-x_۱)^{n-۲}\, dx_۱ \\
&= \frac{n-۱}{s^{n-۱}} \frac{(s-x_۱)^{n-۱}}{n-۱}\Big|_s^k = \frac{n-۱}{s^{n-۱}} \frac{(s-k)^{n-۱}}{n-۱} \\
&= \left(\frac{s-k}{s}\right)^{n-۱}, \quad s>k.
\end{aligned}
$$

لذا $UMVUE$ برای $e^{-\theta k}$ می‌شود

$$
T^* = \left(\frac{S-k}{S}\right)^{n-۱} = \left(\frac{\sum_{i=۱}^n X_i - k}{\sum_{i=۱}^n X_i}\right)^{n-۱}, \quad \sum_{i=۱}^n X_i > k.
$$

تذکر. با توجه به اینکه اگر تابعی از آماره بسنده کامل S مانند $t(S)$ وجود داشته باشد که نااریب برای $\alpha(\theta)$ است، لذا گاهی اوقات $UMVUE$ را ممکن است بتوان از حل معادله زیر بر حسب $t(s)$ به‌دست آورد.

$$E\Big(t(S)\Big) = \alpha(\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \sum_s t(s)\, f_S(s) = \alpha(\theta) \\ \int t(s)\, f_S(s)\, ds = \alpha(\theta) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t(S) = ?$$

مثال. اگر $X_۱,\ldots,X_n \overset{iid}{\sim} P(\lambda)$. پیدا کنید $UMVUE$ را برای $e^{-\lambda}$.

حل. آماره بسنده کامل برای λ می‌شود

$$S=\sum_{i=۱}^{n} X_i \sim P(n\lambda).$$

از حل معادله زیر می‌توان $UMVUE$ را پیدا کرد.

$$\sum t(s)\, f_S(s)=e^{-\lambda}.$$

داریم

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=۰}^{\infty} t(s)\,\frac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^s}{s!}=e^{-\lambda}\\
\Rightarrow\ &\sum_{s=۰}^{\infty} t(s)\,n^s\,\frac{\lambda^s}{s!}=e^{\lambda(n-۱)}=\sum_{s=۰}^{\infty}(n-۱)^s\,\frac{\lambda^s}{s!} \qquad \left(e^a=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\right)\\
\Rightarrow\ & t(s)\,n^s=(n-۱)^s\\
\Rightarrow\ & t(s)=\left(\frac{n-۱}{n}\right)^s.
\end{aligned}$$

لذا $UMVUE$ برای θ می‌شود $\left(\frac{n-1}{n}\right)^S$.

مثال. اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} U(0, \theta)$. پیدا کنید $UMVUE$ را برای θ.

حل. آماره بسنده کامل برای θ می‌شود $S = X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$. از حل معادله زیر می‌توان $UMVUE$ را پیدا کرد.

$$\int t(s)\, f_S(s)\, ds = \theta.$$

با توجه به اینکه

$$f_S(s) = f_{X_{(n)}}(s) = \frac{n\, s^{n-1}}{\theta^n}, \quad 0 < s < \theta,$$

داریم:

$$\int_0^\theta t(s)\, \frac{n\, s^{n-1}}{\theta^n}\, ds = \theta$$

$$\Rightarrow n \int_0^\theta t(s)\, s^{n-1}\, ds = \theta^{n+1}.$$

با مشتق‌گیری از طرفین تساوی نسبت به θ داریم:

$$\frac{d}{d\theta}\left(n\int_{۰}^{\theta} t(s)\, s^{n-۱}\, ds\right) = \frac{d}{d\theta}\theta^{n+۱}$$

$$\Rightarrow\ n\, t(\theta)\, \theta^{n-۱} = (n+۱)\theta^{n}$$

$$\Rightarrow\ t(\theta) = \frac{n+۱}{n}\frac{\theta^{n}}{\theta^{n-۱}} = \frac{n+۱}{n}\theta.$$

$$\Rightarrow t(s) = \frac{n+۱}{n}s.$$

لذا $UMVUE$ برای θ می‌شود

$$\frac{n+۱}{n}S = \frac{n+۱}{n}X_{(n)}.$$

مسأله ۱. اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Exp(\theta)$ که

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0, \quad \theta > 0.$$

پیدا کنید $UMVUE$ را برای

الف) $\frac{1}{\theta}$ ب) θ ج) $e^{-k/\theta}$.

مسأله ۲. اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\theta, 1)$. پیدا کنید $UMVUE$ پارامتر θ.

مسأله ۳. اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(0, \theta)$. پیدا کنید $UMVUE$ پارامتر θ.

مسأله ۴. اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(0, \theta^2)$. پیدا کنید $UMVUE$ پارامتر θ.

مسأله ۵. اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} f(x;\theta)$ که

$$f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}, \quad x > \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

پیدا کنید $UMVUE$ پارامتر θ.