نتیجه ۱.۱.۲ فرض کنید برای مجموعه اندیس‌گذار I و برای هر $i\in I$، فرض کنید $b_i\in R^n$ و $\beta_i\in R$ می‌توان نتیجه گرفت که مجموعه $C=\{x\in R^n ; \langle x,b_i\rangle \le \beta_i , \forall i\in I\}$ مجموعه محدبی است.

اثبات. فرض کنید $C_i=\{x ; \langle x,b_i\rangle \le \beta_i\}$. در این صورت C_i ها نیم‌صفحه‌های بسته از R^n یا $\emptyset$ هستند، بنابراین $C=\bigcap_{i\in I} C_i$ ✦

این نتیجه می‌تواند برای حالاتی که نامساوی‌ها موجود به جای $\le$ از نامساوی‌های $\ge$، $>$ و $<$ و یا $=$ قرار گیرد، به دست آید. بنابراین در تمام حالات C یک مجموعه محدبی از R^n هست.

این یک حقیقت قابل توجه در نظریه و کاربردها می‌باشد.

نتیجه ۱.۱.۲ بوسیله نتیجه ۱.۶.۴ توسعه پیدا می‌کند.

یک مجموعه که بتوان به عنوان اشتراک متناهی از نیم‌فضاهای از R^n نمایش داده را مجموعه محدب چندتائی نام می‌برند. (polyhedral convex)
پلی هیدرال

یک جمع برداری $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_nx_n$ که از $x_1, x_2, \dots, x_n$ که λ_i ها اعداد غیرمنفی و $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=1$ است، را ترکیب محدبی از عناصر $x_1, x_2, \dots, x_n$ می‌نامیم.

در خیلی از موقعیت‌ها، ترکیبات محدبی در موضوعات کاربردی ظاهر می‌شوند. پارامترهای $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ می‌توانند تعبیر احتمالات یا نسبت را دهد.
proportions probabilities

به عنوان مثال، m قطعه با جرم‌های $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ در موقعیت‌های $x_1, x_2, \dots, x_m$ از R^3، مرکز ثقل این سیستم در نقطه $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_mx_m$ که $\lambda_i=\frac{\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m}$ هستند، می‌باشد. در این ترکیب محدبی، λ_i ها نسبت وزن کلی به است در x_i.

قضیه ۲.۲. یک زیرمجموعه از R^n محدب است اگر و فقط اگر شامل همه ترکیبات محدب از عناصرش باشد.

اثبات. هرگاه فرض شود که C یک مجموعه محدب باشد اگر و فقط اگر برای عناصر $x_1, x_2\in C$ و $\lambda_1\ge 0$ و $\lambda_2\ge 0$ که $\lambda_1+\lambda_2=1$ می‌توان نتیجه گرفت که $\lambda_1c_1+\lambda_2c_2\in C$.

به این معنی است که محدب بودن C به معنی اینکه برای $m=2$، نسبت به ترکیب محدب بسته است.

حال باید نشان دهیم که C نسبت به هر ترکیب محدب با $m>2$ نیز بسته است.
حال فرض کنید $m>2$ و طبق فرض استقراء فرض کنید که C نسبت به هر ترکیب محدب کمتر از m بسته باشد. حال ترکیب محدب $x=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\dots+\lambda_m x_m$ از عناصر C را در نظر بگیرید. در این ترکیب محدب، حداقل یک اسکالر λ_i با عدد یک مخالف است (زیرا در غیر اینصورت اگر تمام λ_i برابر یک باشد، داریم $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_m=m\neq 1$)، برای راحتی فرض کنید λ_1 چنین باشد. فرض کنید

$$y=\lambda'_2 x_2+\lambda'_3 x_3+\dots+\lambda'_m x_m, \quad \lambda'_i=\frac{\lambda_i}{1-\lambda_1}$$

در این صورت y یک ترکیب محدب است، زیرا $\lambda'_i\geq 0$ و $i=2,3,\dots,m$

$$\lambda'_2+\lambda'_3+\dots+\lambda'_m=\frac{\lambda_2+\lambda_3+\dots+\lambda_m}{1-\lambda_1}=\frac{\lambda_2+\lambda_3+\dots+\lambda_m}{\lambda_2+\lambda_3+\dots+\lambda_m}=1$$

چون y یک ترکیب محدب از $m-1$ عضو از C است، فلذا طبق فرض استقراء عضوی از C است. از طرفی $x=(1-\lambda_1)y+\lambda_1 x_1$، پس نتیجه می‌شود که $x\in C$. ■

تعریف (غلاف محدب) Convex hall
اشتراک همه مجموعه‌های محدب شامل یک مجموعه S از R^n را غلاف محدب از S می‌نامیم و آن را با $\operatorname{Conv} S$ نشان می‌دهیم. بوسیله قضیه ۱.۲ ص ۱۰، این یک مجموعه محدب است و تنها کوچکترین مجموعه‌ای شامل S با چنین خاصیت است.

قضیه ۳.۲. برای هر مجموعه S، $\operatorname{Conv} S$ شامل همه ترکیبات محدب از عناصر S است.

اثبات. چون $\operatorname{Conv} S$ مجموعه محدب است، بنابراین طبق قضیه ۲.۲ ترکیبات محدب از عناصر S در $\operatorname{Conv} S$ قرار دارند. حال از سوی دیگر دو ترکیب محدب

$$x=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\dots+\lambda_m x_m, \quad y=\mu_1 y_1+\mu_2 y_2+\dots+\mu_n y_n$$

از عناصر S و $x_i\in S$ و $y_j\in S$ باشند، بر طبق

$$(1-\lambda)x+\lambda y=(1-\lambda)\lambda_1 x_1+(1-\lambda)\lambda_2 x_2+\dots+(1-\lambda)\lambda_m x_m$$
$$+\lambda\mu_1 y_1+\lambda\mu_2 y_2+\dots+\lambda\mu_n y_n$$

که $0\leq\lambda\leq 1$ است را در نظر بگیریم خود یک ترکیب محدب از عناصر S است. پس مجموعه تمام ترکیبات محدب از عناصر S، یک مجموعه محدب است، و بنابراین باید شامل کوچکترین مجموعه محدب باشد که $\operatorname{Conv} S$ است. بنابراین حکم حاصل می‌شود ■

نتیجه ۱.۳.۲ غلاف محدب از مجموعه متناهی $\{b_0, b_1, \dots, b_m\}$ از R^n شامل تمام بردارهای به صورت $\lambda_0 b_0 + \dots + \lambda_m b_m$ با $\lambda_0 \geq 0$، $\lambda_1 \geq 0$، ...، $\lambda_m \geq 0$ که $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ است.

اثبات. ترکیب محدب از عناصر انتخابی $\{b_0, b_1, \dots, b_m\}$ می‌تواند به یک ترکیب محدب از همه عناصر $\{b_0, b_1, \dots, b_m\}$ نشان داده شود، به شرطی که به برای بقیه عناصر b_i که در ترکیب اولیه نبودند، ضریب صفر قرار دهیم. ■

یک مجموعه‌ای که غلاف محدب از یک تعداد متناهی نقاط باشد را پولیپ (polytope) می‌نامیم.

اگر $\{b_0, b_1, \dots, b_m\}$ به صورت آفینی مستقل باشد، غلاف محدب آن را سادک (simplex) بعدی m می‌نامیم.

نقطه $\lambda_0 b_0 + \dots + \lambda_m b_m$ با $\lambda_0 = \dots = \lambda_m = \frac{1}{1+m}$ را نقطه میانی (midpoint) یا barycenter از سادک می‌نامیم.

هرگاه $m = 0$، ۱، ۲ یا ۳ باشد، در این صورت سادک یک نقطه، پاره‌خط بسته، مثلث یا چهارضلعی می‌نامیم.

در حقیقت می‌توان بعد یک مجموعه محدب C را بعد غلاف آفینی C معنی نمود.

قضیه ۴.۲ بعد یک مجموعه محدب C، ماکزیمم بعد سادک‌های متفاوت در C است.

اثبات. می‌دانیم که غلاف محدب هر مجموعه C در داخل C است.

ماکزیمم بعد سادک‌های متفاوت در C بزرگترین عدد m است که C شامل مجموعه آفین مستقل فضای $m+1$ عنصری است. فرض کنید $\{b_0, b_1, \dots, b_m\}$ چنین مجموعه‌ای باشد که m همان ماکزیمم است. M را غلاف آفینی باشد، در این صورت $\dim M = m$ و $M \subset \operatorname{aff} C$. بعلاوه $C \subset M$. برای اینکه اگر $C \setminus M$ شامل عنصری مانند b باشد، بنابراین $m+2$ عنصر $b_0, b_1, \dots, b_m$ و b در C قرار می‌گیرند و باید مستقل آفینی باشند، این با عدد m متناقض است. از طرفی چون $\operatorname{aff} C$ کوچکترین مجموعه آفینی که شامل C است، یک $\operatorname{aff} C = M$، و بنابراین $\dim C = m$ ■

یک زیرمجموعه K از R^n را مخروط (cone) می‌نامیم اگر تحت ضرب اسکالرهای مثبت بسته باشد، یعنی اگر $x \in K$ و $\lambda > 0$، آنگاه $\lambda x \in K$.

این چنین مجموعه‌ای در واقع اتحاد نیم خطهای از مبدأ است، که مبدأ ممکن است در آن باشد یا نباشد.

یک مخروط محدب، یک مخروطی است که محدب است.
شخص ممکن است تصور نکند که یک مخروط محدب به شکل گوشه دار باشد.
زیرفضاهای R^n بویژه مخروطهای محدب هستند. بنابراین اینها نیم فضاهای باز و بسته متناظر با ابرصفحه های عبوری از مبدأ هستند.

دوتا از مهمترین مخروطهای محدب، مستطیل نامنفی از R^n به شکل

$$\{x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) \mid \xi_1\geq 0,\ \xi_2\geq 0,\ \dots,\ \xi_n\geq 0\}$$

و مستطیل مثبت به شکل

$$\{x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) \mid \xi_1>0,\ \xi_2>0,\ \dots,\ \xi_n>0\},$$

هستند. این مخروطها در نظریه نابرابریها مفید می باشند. در این موضوع اگر x و x' در مستطیل نامنفی قرار داشته باشد، گوییم $x\geq x'$ یعنی

$$\xi_j\geq \xi'_j \qquad j=1,2,\dots,n$$

در این علامت گذاری مستطیل نامنفی شامل عناصری مانند x است که $x\geq 0$ است.
قضیه ۵.۲ اشتراک هر تعداد از مخروطهای محدب یک مخروط محدب است.
اثبات. ساده است.
نتیجه ۱.۵.۲ فرض کنید $b_i\in R^n$ بر $i\in I$ که I یک مجموعه اندیس گذار معمولی است.
در این صورت

$$K=\{x\in R^n \mid \langle x,b_i\rangle\leq 0 \quad i\in I\}$$

یک مخروط محدب است.
اثبات. نتیجه ای از نتیجه ۱.۱.۲
البته ≤ 0 را می توان با علامتهای ≥ 0 ، $<$ ، $>$ و یا $=$ تعویض نمود.
بنابراین مجموعه جواب سیستم های نابرابری خطی، مخروط محدب هستند.
یک نوع تفاوت بین مخروط محدب و زیرفضاها را مشخص می کنیم.
قضیه ۶.۲. زیرمجموعه R^n مخروط محدب است اگر و فقط اگر تحت جمع و ضرب اسکالر بسته باشد.

اثبات. هرگاه K یک مخروط باشد و $x \in K$ و $y \in K$ و اگر K محدب باشد. در این صورت $z=\frac{1}{2}(x+y)$ در K قرار می‌گیرد، پس $2z \in K$.
یعنی K نسبت به جمع بسته است. از طرف دیگر اگر K نسبت به ضرب اسکالر هم بسته باشد و $0<\lambda<1$ می‌دانیم که $(1-\lambda)x$ و λy عضوهای K هستند. پس $(1-\lambda)x+\lambda y \in K$
یعنی K محدب است ~~پس K محدب~~ اگر و فقط اگر K نسبت به جمع بسته باشد. ▫

نتیجه ۲.۶.۱ زیر مجموعه R^n مخروط محدب است اگر و فقط اگر شامل همه ترکیبات خطی مثبت
(یعنی تمام ترکیبات $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\dots+\lambda_m x_m$ که ضرایب آن مثبت هستند)
از عناصر آن باشد.

نتیجه ۲.۶.۲ فرض کنید S یک مجموعه دلخواه از R^n و K مجموعه همه ترکیبات مثبت خطی از S است. در این صورت K کوچکترین مخروط محدبی است که شامل S است.

اثبات. K نسبت به جمع و ضرب اسکالر مثبت بسته است و $K \supset S$. از طرفی اگر C مخروط محدبی که شامل S باشد، لازم است که شامل K نیز باشد. ▫

در این وقتی S یک مجموعه محدب باشد، توصیف ساده‌تری ~~مجموعه~~ ارائه می‌کند.

نتیجه ۲.۶.۳ فرض کنید C یک مجموعه محدب باشد و فرض کنید

$$K=\{\lambda x \mid \lambda>0,\ x\in C\}$$

در این صورت K کوچکترین مخروط محدبی است که شامل C است.

اثبات. این از نتیجه قبل حاصل می‌شود. یعنی هر ترکیب خطی مثبت از عناصر C که مضرب اسکالر مثبت از یک ترکیب محدب از C است و بنابراین عنصری از K است. ▫

می‌دانیم که مخروط محدب حاصل از کنار هم قرار دادن صدها و مخروط در نتیجه ۲.۶.۲ (یا نتیجه ۲.۶.۳) به عنوان مخروط محدب تولید شده از S که محسوب می‌شود و آن را با $\operatorname{cone} S$ نمایش می‌دهیم.
(بنابراین مخروط محدب حاصل از S، تحت اصطلاحات ما، کوچکترین مخروط محدب شامل S است، مگر اینکه مخروط حاصل شامل صفر باشد)
اگر $S \neq \emptyset$، مخروط S شامل ترکیب خطی غیرمنفی (به جای مثبت) از عناصر S است

بروشنی داریم $\text{cone } S = \text{conv}(\text{ray } S)$

که در این رابطه $\text{ray } S$ اتحاد مبداء با تمام نیم خطهای (rays) $\{\lambda y ; \lambda \geq 0\}$

تولید شده بوسیله عنصر غیرصفر $y \in S$ است.

درست مثل یک دیسک بیضوی (elliptical disk) می‌تواند به عنوان سطح مقطع معین از مخروط مدور باشد، بنابراین هر مجموعه محدب C از R^n را می‌توان سطح مقطع از بعضی مخروط K از R^{n+1} دانست. در حقیقت K یک مخروط محدب تولید شده بوسیله مجموعه نقاط $(1, x) \in R^{n+1}$ است که $x \in C$ است. در این صورت K شامل مبداء از R^{n+1} است و نقاط $(\lambda, \lambda x)$ برای $\lambda > 0$ و $x \in C$ است. اشتراک K با ابرصفحه $\{(\lambda, y) ; \lambda = 1\}$ می‌تواند C را ارائه دهد. این حقیقت امکان این را می‌دهد که اگر یکی از آنها را انتخاب کنیم، قبل از قضایای کلی در مورد مجموعه‌های محدب از قضایای متناظر در مورد مخروطهای محدب را نتیجه بگیریم.

بردار x^* را بردار نرمال نسبت به مجموعه محدب C در نقطه a از C می‌نامیم، اگر x^* با هر خطوط در C با نقطه انتهائی a یک زاویه حاده نسازد. یعنی اگر برای هر $x \in C$ $\langle x-a, x^* \rangle \leq 0$. برای مثال اگر C نیم فضا $\{x \mid \langle x, b \rangle \leq \beta\}$ باشد و a در شرط $\langle a, b \rangle = \beta$ صدق کند در این صورت b را نرمال برای C در a می‌نامیم. خوانندگان می‌توانند به آسانی بررسی کنند که این مخروط دوراره محدب است. ~~barrier~~

بررسی ساده‌گری می‌تواند مثال مخروط محدب، برای یک مجموعه محدب C، یک مخروط مانع barrier cone آن باشد. این یک مجموعه‌ای از بردارهای x^* که برای بعضی از $\beta \in R$، برای هر $x \in C$ داریم $\langle x, x^* \rangle \leq \beta$.

در زیر نشان داده شد که هر مخروط محدب شامل مبداء ۰ متناظر با یک جفت از زیرفضاهاست.

قضیه ۷.۲ فرض کنید K یک مخروط محدب شامل نقطه مبداء ۰ باشد در این صورت یک کوچکترین زیرفضای شامل K یعنی

$$K - K = \{x - y ; x \in K, y \in K\} = \text{aff } K$$

وجود دارد و یک ~~زیرفضای~~ بزرگترین زیرفضای مشمول در K که آن

$(-K)\cap K$ باشد وجود خواهد داشت.

اثبات. با توجه به قضیه ۲.۲ صفحه ۱۴، K تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است. برای زیرفضا بودن علاوه بر اینکه شامل صفر باشد، باید تحت ضرب در ۱- بسته باشد. پس $K-K$ و $(-K)\cap K$ زیرفضا هستند که اولی شامل K و دومی زیرمجموعه K هستند و از طرفی می‌توان نشان داد که $K-K$ کوچکترین زیرفضا و $(-K)\cap K$ بزرگترین زیرفضای بالای خاصیت هستند، چون خلاف آن شامل نقطه صفر غیر زیرفضا است، پس زیرفضا است (قضیه ۱.۱ صفحه ۱) بنابراین حکم حاصل می‌شود.

فصل سوم

جبر مجموعه های محدب

کلاس مجموعه های محدب به وسیله یک تعداد از عملیات جبری حفظ می‌شود. برای مثال اگر C یک مجموعه محدب در R^n باشد، در این صورت $C+a$ و ضرب اسکالر λC نیز چنین است. یعنی

$$\lambda C = \{\lambda x;\ x\in C\}$$

از نقاط مفهوم هندسی، اگر $\lambda>0$، λC تبدیل بزرگ شده (یا منقبض شده) با فاکتور λ که مبدأ در آن ثابت است. انعکاس متقارن از C که در یک طرف مبدأ، برابر $-C=(-1)C$ است.

تعریف مجموعه محدب متقارن: یک مجموعه محدب را متقارن می‌نامیم اگر $-C=C$ (symmetric reflection) چنین مجموعه‌ای لازم است، شامل مبدأ باشد زیرا با در نظر گرفتن x و $-x$ ممکن نقاط مابین x و $-x$ در C قرار می‌گیرند پس مبدأ در مجموعه محدب متقارن قرار می‌گیرد. هر مجموعه های محدب متقارن، زیرفضا هستند.

قضیه ۳.۱. اگر C_1 و C_2 مجموعه های محدب در R^n باشند، در این صورت جمع C_1+C_2 نیز چنین است که

$$C_1+C_2=\{x_1+x_2;\ x_1\in C_1,\ x_2\in C_2\}$$

اثبات. فرض کنید x و y از C_1+C_2 باشد در این صورت x_1 و y_1 از C_1 و x_2 و y_2 از C_2 وجود دارند که

$$x=x_1+x_2,\qquad y=y_1+y_2$$

برای $0<\lambda<1$ داریم

$$(1-\lambda)x+\lambda y=[(1-\lambda)x_1+\lambda y_1]+[(1-\lambda)x_2+\lambda y_2]$$

و با توجه به محدب بودن C_1، $(1-\lambda)x_1+\lambda y_1\in C_1$ و $(1-\lambda)x_2+\lambda y_2\in C_2$

بنابراین $(1-\lambda)x+\lambda y \in C_1+C_2$ ■

برای مثال اگر C_1 یک مجموعه محدب و C_2 یک مستطیل نامنفی باشد در این صورت

$$C_1+C_2=\{x_1+x_2 \mid x_1\in C_1,\ x_2>0\}$$
$$=\{x \mid \exists x_1\in C_1,\ x_1\preceq x_2\}$$

مجموعه فوق با توجه به قضیه ۱.۳، در صورتیکه C_2 محدب است، یک مجموعه محدب خواهد بود.

محدب بودن C بوسیله تعریف زیر در واقع حاصل می‌شود

$$(1-\lambda)C+\lambda C\subset C, \qquad 0\le\lambda\le 1$$

تساوی این رابطه را برای مجموعه محدب ارائه می‌کند. (براساس قضیه ۶.۲) مجموعه K مخروط محدب است اگر و فقط اگر برای هر $\lambda>0$، $\lambda K\subset K$ و $K+K\subset K$.

اگر $C_1,\dots,C_m$ مجموعه‌های محدب باشند، در این صورت ترکیب خطی آنها نیز چنین است

$$C=\lambda_1C_1+\dots+\lambda_mC_m$$

بطور طبیعی C را ترکیب محدب از $C_1, C_2, \dots, C_m$ می‌باشد، هرگاه $\lambda_1\ge 0, \lambda_2\ge 0, \dots, \lambda_m\ge 0$ و $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_m=1$.

در این حالت، که از نظر هندسی، C یک نوع مخلوطی از $C_1, C_2, \dots, C_m$ به حساب می‌آید.

برای مثال اگر C_1 و C_2 مثلث و دیسک در R^2 باشند و λ از بین ۰ تا ۱ انتخاب شود،

$$C=(1-\lambda)C_1+\lambda C_2$$

یک مثلث را به مثلثی با گوشه‌های گرد تبدیل می‌کند.

چه قوانین برای جمع و ضرب اسکالر معتبر می‌باشند بطور مساوی، حتی بدون تحدب داریم

$$C_1+C_2=C_2+C_1$$
$$(C_1+C_2)+C_3=C_1+(C_2+C_3)$$
$$\lambda_1(\lambda_2C)=(\lambda_1\lambda_2)C$$
$$\lambda(C_1+C_2)=\lambda C_1+\lambda C_2$$

قضیه ۲.۳. اگر C مجموعه محدب باشد و $\lambda_1 \geq 0$ و $\lambda_2 \geq 0$، در این صورت

$$(\lambda_1 + \lambda_2) C = \lambda_1 C + \lambda_2 C$$

اثبات. واضح است C برقرار است، در حالتی که C محدب باشد یا نباشد. برای عکس آن داریم

$$C \supset \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right) C + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right) C$$

چون $\lambda_1+\lambda_2 > 0$ و با ضرب طرفین در این معادله داریم

$$(\lambda_1+\lambda_2) C \supset \lambda_1 C + \lambda_2 C$$

در حالت دیگر اینکه λ_1 یا λ_2 صفر باشند، مطلب واضح خواهد بود. ∎

از این قضیه واضح است که $C + C = 2C$ ، $C + C + C = 3C$ ... (اگر C محدب باشد)

اگر C_1 و C_2 دو مجموعه محدب در R^n باشند در این صورت $C_1 \cap C_2$ مجموعه محدب است که هر دو C_1 و C_2 است و همچنین $C_1 \cup C_2$ کوچکترین مجموعه محدب است که شامل دو C_1 و C_2 است.

این موضوع با یک خانواده دلخواه مانند $\{C_i ; i \in I\}$ بررسی می‌شود

به مباحث مجموعه های محدب از R^n تحت ترتیب جزئی شمول یک شبکه کامل است Lattice

قضیه ۳.۳. فرض کنید $\{C_i ; i \in I\}$ یک تعداد دلخواه از مجموعه های محدب غیرخالی از R^n باشند. فرض کنید C خلاف محدب از اتحاد این گردایه است. در این صورت

$$C = \cup \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i C_i \right\},$$

که در این رابطه اتحاد روی همه ترکیبات محدب متناهی گرفته می‌شود (یعنی روی تمام ضرایب نامنفی λ_i که تنها تعداد متناهی از آنها ناصفر هستند و جمع آنها برابر یک است)

اثبات. با توجه به قضیه ۲.۳ مجموعه C از همه ترکیبات محدب $x = \mu_1 y_1 + \dots + \mu_m y_m$ که $y_1, \dots, y_m$ عناصر دلخواه از اتحاد C_i هاست، حاصل می‌شود. دقیقاً C را می‌توان برابر همه ترکیباتی از ضرایب غیرصفر و بردارها به عنوان عناصر C_i مختلف دانست.

یعنی اگر دو ترکیب دو عنصر y_1 و y_2 از یک مجموعه C_i باشند، در این صورت ترکیب $\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2$

آن را با μy که $\mu=\mu_1+\mu_2$ و

$$y=\left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)y_1+\left(\frac{\mu_2}{\mu}\right)y_2\in C_i$$

عوض کرد. پس C دقیقاً اتحاد تمام ترکیبات متناهی محدب بصورت

$$\mu_1 C_{i_1}+\mu_2 C_{i_2}+\cdots+\mu_n C_{i_m}$$

که اندیسهای $i_1, i_2, \ldots, i_m$ متفاوت هستند. این موضوع همان توصیفی است که در کلیه قضیه بوده است. ■

~~انتقال خطی از A~~ برای هر تبدیل خطی A از R^n به R^m ، تعریف می‌کنیم

$$AC=\{Ax;\ x\in C\},\qquad C\subset R^n$$
$$A^{-1}D=\{x;\ Ax\in D\},\qquad D\subset R^m,$$

مجموعه AC را تصویر C تحت A و $A^{-1}D$ را تصویر وارون D تحت A می‌نامیم. معلوم می‌شود که وقتی تصاویر گرفته می‌شود، مفهوم محدب حفظ می‌گردد، یعنی محدب بوسیله تبدیل خطی حفظ می‌شود. (این اصلاً برداشت نمی‌شود که $A^{-1}D$ در اینجا به عنوان معکوس تبدیل خطی ~~به عنوان~~ یک نگاشت تک مقداری باشد)

قضیه ۳.۴. فرض کنید A تبدیل خطی از R^n به R^m است. در این صورت برای هر مجموعه محدب C از R^n و هر مجموعه محدب D از R^m، مجموعه‌های AC و $A^{-1}D$ محدب هستند.

اثبات: آن ساده است.

نتیجه ۳.۴.۱. تصویر متعامد از یک مجموعه محدب C، روی زیرفضای L، محدب است.

اثبات: تصویر متعامد یک به L که یک تبدیل خطی است. نظیر هر x، عنصر یکتای $y\in L$ است که $(x-y)\perp L$.

از قضیه ۳.۴، درمی‌یابیم که هرگاه y از یک مجموعه محدب انتخاب شود، جوابهای x از سیستم خطی $Ax=y$ نیز از یک مجموعه محدب خواهند بود.

هرگاه K یک مستطیل از R^m، $a\in R^m$ باشند، و فرض کنید $D=K+a$. در این صورت $A^{-1}D$ مجموعه‌ای از بردارهای x ای است که $Ax\geq a$، یعنی

آن را با μy که $\mu=\mu_1+\mu_2$ و

$$y=\left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)y_1+\left(\frac{\mu_2}{\mu}\right)y_2\in C_i$$

عوض کرد. پس C دقیقاً اتحاد تمام ترکیبات متناهی محدب بصورت

$$\mu_1 C_{i_1}+\mu_2 C_{i_2}+\cdots+\mu_n C_{i_m}$$

که اندیسهای $i_1, i_2, \ldots, i_m$ متفاوت هستند. این موضوع همان توصیفی است که در کلیه قضیه بوده است. ■

~~انتقال خطی از A~~ برای هر تبدیل خطی A از R^n به R^m ، تعریف می‌کنیم

$$AC=\{Ax;\ x\in C\},\qquad C\subset R^n$$
$$A^{-1}D=\{x;\ Ax\in D\},\qquad D\subset R^m,$$

مجموعه AC را تصویر C تحت A و $A^{-1}D$ را تصویر وارون D تحت A می‌نامیم. معلوم می‌شود که وقتی تصاویر گرفته می‌شود، مفهوم محدب حفظ می‌گردد، یعنی محدب بوسیله تبدیل خطی حفظ می‌شود. (این اصلاً برداشت نمی‌شود که $A^{-1}D$ در اینجا به عنوان معکوس تبدیل خطی ~~به عنوان~~ یک نگاشت تک مقداری باشد)

قضیه ۳.۴. فرض کنید A تبدیل خطی از R^n به R^m است. در این صورت برای هر مجموعه محدب C از R^n و هر مجموعه محدب D از R^m، مجموعه‌های AC و $A^{-1}D$ محدب هستند.

اثبات: آن ساده است.

نتیجه ۳.۴.۱. تصویر متعامد از یک مجموعه محدب C، روی زیرفضای L، محدب است.

اثبات: تصویر متعامد یک به L که یک تبدیل خطی است. نظیر هر x، عنصر یکتای $y\in L$ است که $(x-y)\perp L$.

از قضیه ۳.۴، درمی‌یابیم که هرگاه y از یک مجموعه محدب انتخاب شود، جوابهای x از سیستم خطی $Ax=y$ نیز از یک مجموعه محدب خواهند بود.

هرگاه K یک مستطیل از R^m، $a\in R^m$ باشند، و فرض کنید $D=K+a$. در این صورت $A^{-1}D$ مجموعه‌ای از بردارهای x ای است که $Ax\geq a$، یعنی