جلسه ۱۱

نتیجه ۱.۱.۲ فرض کنید برای مجموعه اندیس گذار I و برای هر $i\in I$، فرض کنید $b_i\in R^n$ و $\beta_i\in R$ می توان نتیجه گرفت که مجموعه $C=\{x\in R^n ; \langle x,b_i\rangle \leq \beta_i , \forall i\in I\}$ مجموعه محدبی است.

اثبات. فرض کنید $C_i=\{x ; \langle x,b_i\rangle \leq \beta_i\}$. در این صورت C_i ها نیم فضاهای بسته از R^n یا $\emptyset$ هستند، بنابراین $C=\bigcap_{i\in I} C_i$ ✦

این نتیجه می تواند برای حالاتی که نامساویها موجود به جای $\leq$ از نامساوی های $\geq$ ، $>$ و $<$ و یا $=$ قرار گیرد، به دست آید. بنابراین در تمام حالات C یک مجموعه محدب از R^n است.

این یک حقیقت قابل توجه در نظریه و کاربردها می باشد.

نتیجه ۱.۱.۲ بوسیله نتیجه ۱.۶.۴ توسعه پیدا می کند.

یک مجموعه که بتوان به عنوان اشتراک متناهی از نیم فضاهایی از R^n نمایش داد را مجموعه محدب چندتائی ناسی برند. (polyhedral convex)
پلی هیدرال

یک جمع برداری $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_nx_n$ که از $x_1,x_2,\dots,x_n$ که λ_i ها اعداد غیرمنفی و $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=1$ است، را ترکیب محدبی از عناصر $x_1,x_2,\dots,x_n$ می نامیم.

در خیلی از موقعیتها، ترکیبات محدب در موضوعات کاربردی ظاهر می شوند و پارامترهای $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ می توانند تفسیر احتمالات یا نسبت را دهد.
probabilities proportions

به عنوان مثال، m قطعه با جرمهای $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ در موقعیتهای $x_1,x_2,\dots,x_m$ از R^3، مرکز ثقل این سیستم در نقطه $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_mx_m$ که $\lambda_i=\frac{\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m}$ هستند، می باشد. در این ترکیب محدب، λ_i ها نسبت وزن کل بوده است در x_i.

قضیه ۲.۲. یک زیرمجموعه از R^n محدب است اگر و فقط اگر که شامل همه ترکیبات محدب از عناصرش باشد.

اثبات. درگاه، فرض شود که C یک مجموعه محدب باشد اگر و فقط اگر برای عناصر $x_1,x_2\in C$ و $\lambda_1\geq 0$ و $\lambda_2\geq 0$ که $\lambda_1+\lambda_2=1$ می توان نتیجه گرفت که $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\in C$.

به این معناست که محدب بودن C به معنی اینکه برای $m=2$، نسبت به ترکیب محدب بسته است.

حال باید نشان دهیم که C نسبت به هر ترکیب محدب با $m>2$ نیز بسته هست.
حال فرض کنید $m>2$ و طبق فرض استقراء فرض کنید که C نسبت به هر ترکیب محدب کمتر از m بسته باشد. حال ترکیب محدب $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_mx_m=x$ از عناصر C را در نظر بگیرید، در این ترکیب محدب، حداقل یک اسکالر λ_i با عدد یک مخالف هست (زیرا در غیر اینصورت اگر تمام λ_i ها برابر یک باشد، داریم $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_m=m\neq1$)، برای راحتی فرض کنید λ_1 چنین باشد. فرض کنید

$$y=\lambda'_2x_2+\lambda'_3x_3+\dots+\lambda'_mx_m,\quad \lambda'_i=\frac{\lambda_i}{1-\lambda_1}$$

در این صورت y یک ترکیب محدب است، زیرا $\lambda'_i\geq0$ و $i=2,3,\dots,m$

$$\lambda'_2+\lambda'_3+\dots+\lambda'_m=\frac{\lambda_2+\lambda_3+\dots+\lambda_m}{1-\lambda_1}=\frac{\lambda_2+\lambda_3+\dots+\lambda_m}{\lambda_2+\lambda_3+\dots+\lambda_m}=1$$

چون y یک ترکیب محدب از $m-1$ عنصر از C است، فلذا طبق فرض استقراء عضوی از C است. از طرفی $x=(1-\lambda_1)y+\lambda_1x_1$، پس نتیجه می‌شود که $x\in C$. ■

تعریف (غلاف محدب Convex hall) اشتراک همه مجموعه های محدب شامل یک مجموعه S از R^n را غلاف محدب از S می‌نامیم و آن را با $\text{conv}\, S$ نشان می‌دهیم. بوسیله قضیه ۱.۲ ص ۱۰، این یک مجموعه محدب است و تنها کوچکترین مجموعه ای شامل S با چنین خاصیت است.

قضیه ۲.۲. برای هر مجموعه S، $\text{conv}\, S$ شامل همه ترکیبات محدب از عناصر S است.
اثبات. چون $\text{conv}\, S$ مجموعه محدب است بنابراین طبق قضیه ۲.۲ ترکیبات محدب از عناصر S که در $\text{conv}\, S$ قرار دارند. حال از سوی دیگر اگر دو ترکیب محدب

$$x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_mx_m,\quad y=\mu_1y_1+\mu_2y_2+\dots+\mu_ry_r$$

از عناصر S، $x_i\in S$ و $y_j\in S$ باشند، بردار

$$(1-\lambda)x+\lambda y=(1-\lambda)\lambda_1x_1+(1-\lambda)\lambda_2x_2+\dots+(1-\lambda)\lambda_mx_m$$
$$+\lambda\mu_1y_1+\lambda\mu_2y_2+\dots+\lambda\mu_ry_r$$

که $0\le\lambda\le1$ است را در نظر بگیریم خود یک ترکیب محدب از عناصر S است.
پس مجموعه تمام ترکیبات محدب از عناصر S یک مجموعه محدب است، و بنابراین باید شامل کوچکترین مجموعه محدب باشد یعنی که conv. بنابراین حکم حاصل می‌شود ■

نتیجه ۲.۳.۱.۲ غلاف محدب از مجموعه متناهی $\{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$ از R^n شامل تمام بردارهای به صورت $\lambda_0 b_0 + \cdots + \lambda_m b_m$ با $\lambda_0 \geq 0$، $\lambda_1 \geq 0$، ...، $\lambda_m \geq 0$ که $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$ است.

اثبات: ~~غلاف محدب~~ ترکیب محدب از عناصر انتخابی $\{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$ را می‌گویند به یک ترکیب محدب از همه عناصر $\{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$ نشان داده شود، به شرطی که به سایر بقیه عناصر b_i که در ترکیب اولیه نبودند، ضریب صفر قرار دهیم. ■

یک مجموعه‌ای که غلاف محدب از یک تعداد متناهی نقاط باشد را پولیتوپ می‌نامیم. polytope متناهی

m بعدی ✓ simplex

اگر $\{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$ به صورت آفینی مستقل باشد، غلاف محدب آن را سادک m بعدی می‌نامیم.

نقطه $\lambda_0 b_0 + \cdots + \lambda_m b_m$ با $\lambda_0 = \cdots = \lambda_m = \frac{1}{1+m}$ را انتصاف‌های (midpoint) یا barycenter از سادک می‌نامیم.

هرگاه $m=0$، ۱، ۲ یا ۳ باشد، در این صورت سادک یک نقطه، پاره خط بسته، ~~مسطح~~ مثلث یا چهارضلعی می‌نامیم.

در حقیقت می‌توان بعد یک مجموعه محدب C را ~~با~~ بعد غلاف آفینی C معنی نمود.

قضیه ۴.۲.۳ بعد یک مجموعه محدب C، ماکزیمم بعد سادک‌های متفاوت در C است.

اثبات. می‌دانیم که غلاف محدب هر مجموعه C در داخل C است.
ماکزیمم بعد سادک‌های متفاوت در C بزرگترین عدد m است که C شامل مجموعه آفینی مستقل $m+1$ عضوی است. فرض کنید $\{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$ چنین مجموعه‌ای باشد که m همان ماکزیمم است. M را غلاف آفینی باشد، در این صورت $\dim M = m$ و $M \subset \operatorname{aff} C$. بعلاوه $C \subset M$، برای اینکه اگر $C \setminus M$ شامل عضوی مانند b باشد، چون بنابراین $m+2$ عضو b_0، b_1، ...، b_m و b در C قرار می‌گیرند و باید مستقل آفینی باشند، این با عدد m متناقض است. از طرفی چون $\operatorname{aff} C$ کوچکترین مجموعه آفینی که شامل C است، پس $\operatorname{aff} C = M$ و بنابراین $\dim C = m$ ■

یک زیرمجموعه K از R^n را مخروط (cone) می‌نامیم اگر تحت ضرب اسکالرهای مثبت بسته باشد، یعنی اگر $x \in K$ و $\lambda > 0$، آنگاه $\lambda x \in K$.

این چنین مجموعه‌ای در واقع اجتماع شعاع‌های از مبدأ است که مبدأ ممکن است در آن باشد یا نباشد.

جلسه ۱۴

یک مخروط محدب، یک مخروطی است که محدب است.
شخص ممکن است تصور کند که یک مخروط محدب به شکل گوشه دار باشد.
زیرفضاهای R^n به ویژه مخروطهای محدب هستند. بنابراین ابرصفحه‌های باز و بسته متناظر با ابرصفحه‌های عبوری از مبدأ هستند.

دوتا از مهمترین مخروطهای محدب، مستطیل نامنفی از R^n به شکل

$$\{x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) ; \xi_1\geq 0, \xi_2\geq 0, \dots, \xi_n\geq 0\}$$

و مستطیل مثبت به شکل

$$\{x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) ; \xi_1>0, \xi_2>0, \dots, \xi_n>0\},$$

هستند. این مخروطها در نظریه نابرابریها مفید هم می‌باشند. در این موضوع اگر $x-x'$ در مستطیل نامنفی قرار داشته باشد، گوییم $x\geq x'$ یعنی

$$\xi_j \geq \xi'_j, \quad j=1,2,\dots,n$$

در این علامت‌گذاری مستطیل نامنفی شامل تمام بردارهای x است که $x\geq 0$ است.

قضیه ۲.۵ اشتراک هر تعداد از مخروطهای محدب یک مخروط محدب است.

اثبات. ساده است.

نتیجه ۱.۵.۲ فرض کنید $b_i\in R^n$ برای $i\in I$ که I یک مجموعه اندیس گذاری دلخواه است. در این صورت

$$K=\{x\in R^n \mid \langle x, b_i\rangle \leq 0,\ i\in I\}$$

یک مخروط محدب است.

اثبات. نتیجه‌ای از نتیجه ۱.۱.۲

البته ≤ 0 را می‌توان با علامتهای ≥ 0 ، $>$ ، $<$ و $=$ تعویض نمود

بنابراین مجموعه جواب سیستم‌های نابرابری خطی، مخروط محدب هستند.

همین نوع تفاوت بین مخروط محدب و زیرفضاها را مشخص می‌کند.

قضیه ۳.۶.۲ زیرمجموعه R^n مخروط محدب است اگر و فقط اگر تحت جمع و ضرب اسکالر مثبت بسته باشد.

۱۵ صفحه

اثبات - هرگاه K یک مخروط باشد و $x\in K$ و $y\in K$ و اگر K مجموعه محدب باشد. دراین صورت $z=\frac{1}{2}(x+y)$ در K قرار می‌گیرد، پس $2z\in K$.
یعنی K نسبت به جمع بسته است. اثبات عکس اگر K نسبت به ضرب اسکالر و جمع بسته باشد و $1>\lambda>0$ می‌دانیم که $(1-\lambda)x$ و λy عضوهای K هستند. پس $(1-\lambda)x+\lambda y\in K$
یعنی K محدب است ~~پس K~~ که اگر و فقط اگر K نسبت به جمع بسته باشد. ■

نتیجه ۱.۶.۲ زیرمجموعه R^n مخروط محدب است اگر و فقط اگر شامل همه ترکیبات خطی مثبت از عناصرش باشد (یعنی تمام ترکیبات $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_mx_m$ که ضرائب آن مثبت هستند).

نتیجه ۲.۶.۲ فرض کنید S یک مجموعه دلخواه از R^n و K مجموعه همه ترکیبات مثبت خطی از S است. دراین صورت K کوچکترین مخروط محدبی است که شامل S است.

اثبات. K نسبت به جمع و ضرب اسکالر مثبت بسته است و $S\subset K$. از طرفی اگر هر مخروط محدبی که شامل S هست، لازم است که شامل K نیز باشد. ■

در زیر وقتی که یک مجموعه محدب باشد، توصیف ساده‌تری ~~مجموعه~~ ارائه می‌کند.

نتیجه ۳.۶.۲ فرض کنید C یک مجموعه محدب باشد و فرض کنید

$$K=\{\lambda x \mid \lambda>0, x\in C\}$$

دراین صورت K کوچکترین مخروط محدبی است که شامل C است.

اثبات. این از نتیجه قبل حاصل می‌شود، یعنی هر ترکیب خطی مثبت از عناصر C یک مضرب اسکالر مثبت از یک ترکیب محدب از C است و بنابراین عنصری از K است. ■

می‌دانیم که مخروط محدب حاصل از کنار هم قرار دادن مبدأ، و مخروط در نتیجه ۲.۶.۲ (یا نتیجه ۳.۶.۲) به عنوان مخروط محدب تولید شده از S محسوب می‌شود و آن را با cone S تعریف می‌کنیم.
(بنابراین مخروط محدب حاصل از S، تحت اصطلاحات ما، کوچکترین مخروط محدب شامل S نیست، مگر اینکه مخروط حاصل شامل مبدأ باشد)
اگر $S\neq\emptyset$، مخروط S شامل ترکیب خطی غیرمنفی (به جای مثبت) از عناصر S است

$\{\lambda y ; \lambda \geq 0\}$ $\quad$ cone $S = \operatorname{conv}(\operatorname{ray} S)$ برعکس داریم

که در این رابطه $\operatorname{ray} S$ اتحاد مبداء با تمام نیم فضاهای (rays)

تولید شده بوسیله صفر نیست $y \in S$ است.

در شکل یک دیسک بیضوی (elliptical disk) می تواند به عنوان سطح مقطع مستقیم

از مخروط مدور باشد. بنابراین هر مجموعه محدب C از R^n را می توان سطح مقطع از بعضی

مخروط K از R^{n+1} دانست. در حقیقت K یک مخروط محدب تولید شده

بوسیله مجموعه نقاط $(1, x) \in R^{n+1}$ است که $x \in C$ است. در این صورت K شامل مبداء

از R^{n+1} است و نقاط $(\lambda, \lambda x)$ برای $\lambda > 0$ و $x \in C$ است. اشتراک K با

ابر صفحه $\{(\lambda, y) ; \lambda = 1\}$ می تواند C را ارائه دهد. این حقیقت امکان

این را می دهد که یکی از آنها را انتخاب کنیم، قبل از قضایای کلی در مورد مجموعه های محدب

از قضایای متناظر در مورد مخروطهای محدب را نتیجه بگیریم.

بردار x^* را بردار نرمال نسبت به مجموعه محدب C در نقطه a از C می نامیم، اگر

x^* با هر خطوط در C با نقطه انتهایی a یک زاویه حاده نسازد. یعنی اگر برای هر $x \in C$

$\langle x-a, x^* \rangle \leq 0$. برای مثال اگر C نیم فضا $\{x \mid \langle x, b \rangle \leq \beta\}$ باشد

و a در شرط $\langle a, b \rangle = \beta$ صدق کند در این صورت b را نرمال برای C در a

می نامیم. خواننده می تواند به آسانی بررسی کند که این مخروط همواره محدب است. ~~barrier~~

بررسی ساده دیگری می تواند شامل مخروط محدب، برای یک مجموعه محدب C، یک مخروط مانع

barrier cone

آن باشد. این یک مجموعه ای از بردارهای x^* که

برای بعضی از $\beta \in R$، برای هر $x \in C$ داریم $\langle x, x^* \rangle \leq \beta$.

در زیر نشان داده شده که هر مخروط محدب شامل مبداء، متناظر با یک جفت

از زیرفضاهاست.

قضیه ۷.۲ فرض کنید K یک مخروط محدب شامل نقطه مبداء ۰ باشد

در این صورت یک کوچکترین زیرفضای شامل K یعنی

$$K-K = \{x-y ; x \in K, y \in K\} = \operatorname{aff} K$$

وجود دارد و یک ~~زیرفضا~~ بزرگترین زیرفضای مشمول در K که آن

صفحه ۱۷

$(-K)\cap K$ باشد وجود خواهد داشت.

اثبات: با توجه به قضیه ۶.۲ صفحه ۱۶، K تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است. برای زیرفضا بودن علاوه بر اینکه شامل صفر باشد، باید تحت ضرب در ۱- بسته باشد. پس $K-K$ و $(-K)\cap K$ زیرفضا هستند که اولی شامل K و دومی زیرمجموعه K است و از طرفی می‌توان نشان داد که $K-K$ کوچکترین زیرفضا و $(-K)\cap K$ بزرگترین زیرفضای بالایی حالت هستند. چون خلاف آنکه شامل نقطه صفر تنگ زیرفضا است، پس زیرفضا است (قضیه ۱.۱ صفحه ۱) بنابراین حکم حاصل می‌شود.

فصل سوم

جبر مجموعه‌های محدب

تحدب مجموعه‌های محدب به وسیله یک تعداد از عملیات جبری حفظ می‌شود. برای مثال:

اگر C یک مجموعه محدب در R^n باشد، در این صورت هر انتقال $C+a$ و هر ضرب اسکالر λC نیز چنین است. یعنی

$$\lambda C=\{\lambda x;\ x\in C\}$$

از لحاظ مفهوم هندسی، اگر $\lambda>0$، λC تبدیل بزرگ شده (یا منقبض شده) با فاکتور λ که مبدأ در آن ثابت است. انعکاس متقارن از C که در یک طرف مبدأ، برابر $-C=(-1)C$ است.

تعریف مجموعه محدب متقارن: یک مجموعه محدب را متقارن می‌نامیم گر $-C=C$ (symmetric reflection) چنین مجموعه‌ای (لازم نیست) شامل مبدأ باشد زیرا با داشتن x و $-x$ تمام نقاط مابین x و $-x$ در C قرار می‌گیرد، یک مبدأ در مجموعه محدب متقارن قرار می‌گیرد. هر کی مجموعه‌های محدب متقارن، زیرفضا هستند.

قضیه ۳.۱ اگر C_1 و C_2 مجموعه‌های محدب در R^n باشند، در این صورت جمع C_1+C_2 نیز چنین است که

$$C_1+C_2=\{x_1+x_2;\ x_1\in C_1,\ x_2\in C_2\}$$

اثبات: فرض کنید x و y از C_1+C_2 باشد، در این صورت x_1 و y_1 از C_1 و x_2، y_2 از C_2 وجود دارند که

$$x=x_1+x_2,\qquad y=y_1+y_2$$

برای $0<\lambda<1$ داریم

$$(1-\lambda)x+\lambda y=[(1-\lambda)x_1+\lambda y_1]+[(1-\lambda)x_2+\lambda y_2]$$

و با توجه به محدب بودن C_1 و C_2، $(1-\lambda)x_1+\lambda y_1\in C_1$ و $(1-\lambda)x_2+\lambda y_2\in C_2$

بنابراین $(1-\lambda)x+\lambda y\in C_1+C_2$. ■

برای مثال اگر C_1 یک مجموعه محدب و C_2 یک مستطیل نامنفی باشد در این صورت

$$C_1+C_2=\{x_1+x_2 \mid x_1\in C_1\ ;\ x_2\geq 0\}$$
$$=\{x \mid \exists x_1\in C_1\ ;\ x_1\leq x\}$$

مجموعه فوق با توجه به قضیه (۳.۱)، در صورتیکه C_1 محدب است، یک مجموعه محدب خواهد بود. محدب بودن C بوسیله تعریف زیر در واقع حاصل می‌شود

$$(1-\lambda)C+\lambda C\subset C,\qquad 0\leq\lambda\leq 1$$

تساوی این رابطه را برای مجموعه محدب ارائه می‌شود. (برای اثبات قضیه ۲.۶) مجموعه K مخروط محدب است اگر و فقط اگر برای هر $\lambda>0$، $\lambda K\subset K$ ، $K+K\subset K$.

اگر $C_1,\dots,C_m$ مجموعه‌های محدب باشند، در این صورت ترکیب خطی آنها نیز محدب است

$$C=\lambda_1C_1+\dots+\lambda_mC_m$$

بطور طبیعی C را ترکیب محدب از $C_1, C_2, \dots, C_m$ می‌باشد، اگر $\lambda_1\geq 0, \lambda_2\geq 0, \dots, \lambda_m\geq 0$ ، $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_m=1$.

در این حالت از نظر هندسی، C یک نوع مخلوط از $C_1, C_2, \dots, C_m$ به حساب می‌آید.

برای مثال اگر C_1 و C_2 مثلث و دیسک در R^2 باشند و λ از بین ۰ تا ۱ انتخاب شود،

$$C=(1-\lambda)C_1+\lambda C_2$$

یک مثلث را به مثلثی با گوشه‌های گرد تبدیل می‌کند.

چند خاصیت برای جمع و ضرب اسکالر معتبر می‌باشند بطور مساوی، حتی بدون تحدب داریم

$$C_1+C_2=C_2+C_1$$
$$(C_1+C_2)+C_3=C_1+(C_2+C_3)$$
$$\lambda_1(\lambda_2C)=(\lambda_1\lambda_2)C$$
$$\lambda(C_1+C_2)=\lambda C_1+\lambda C_2$$

صفحه ۱۹

قضیه ۳.۲. اگر C مجموعه محدب باشد و $\lambda_1 \ge 0$ و $\lambda_2 \ge 0$، در این صورت

$$(\lambda_1+\lambda_2)C = \lambda_1 C + \lambda_2 C$$

اثبات.
شمول $\subset$ برقرار است، خواه C محدب باشد یا نباشد. برای عکس آن داریم

$$C \supset \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)C + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)C$$

چون $\lambda_1+\lambda_2>0$ و با ضرب طرفین این معادله داریم

$$(\lambda_1+\lambda_2)C \supset \lambda_1 C + \lambda_2 C$$

در حالتی که λ_1 یا λ_2 صفر باشند، مطلب واضح خواهد بود. ■

از این قضیه واضح است که $C+C=2C$ ، $C+C+C=3C$ ، ... (اگر C محدب باشد)

اگر C_1 و C_2 دو مجموعه محدب در R^n باشند در این صورت $C_1 \cap C_2$ ~~[illegible]~~ بزرگترین مجموعه محدبی است که در هر دو C_1 و C_2 است و همچنین $C_1 \cup C_2$ کوچکترین مجموعه محدب که شامل هر دوی C_1 و C_2 است.

این موضوع را با یک خانواده دلخواه $\{C_i ; i \in I\}$ بررسی می‌شود به عبارتی مجموعه همه زیرمجموعه‌های محدب از R^n تحت ترتیب جزئی شمول یک شبکه کامل است.

Lattice

قضیه ۳.۳. فرض کنید $\{C_i ; i \in I\}$ یک تعداد دلخواهی از مجموعه‌های محدب غیرخالی از R^n باشند. فرض کنید C غلاف محدب از اتحاد این خانواده است. در این صورت

$$C = \bigcup \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i C_i \right\},$$

که در این رابطه اتحاد روی همه ترکیبات محدب متناهی گرفته می‌شود (یعنی روی تمام ضرایب نامنفی λ_i که تنها تعداد متناهی از آنها ~~[illegible]~~ ناصفر هستند و جمع آنها برابر یک است)

اثبات. با توجه به قضیه ۲.۳ مجموعه C از همه ترکیبات محدب $x=\mu_1 y_1+\dots+\mu_m y_m$ که y_1، y_2، ... y_m عناصر دلخواه از اتحاد C_i هاست، حاصل می‌شود. دقیقاً C را می‌توان برابر همه ترکیباتی از ضرایب غیرصفر بردارها به عنوان عناصر ~~[illegible]~~ C_i مختلف دانست.

یعنی که اینک ترکیب دو عنصر y_1 و y_2 از یک مجموعه C_i باشند، در این صورت ترکیب $\mu_1 y_1+\mu_2 y_2$

آن را با μy که $\mu=\mu_1+\mu_2$ و

$$y=\left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)y_1+\left(\frac{\mu_2}{\mu}\right)y_2 \in C_i$$

عوض کرد. پس C دقیقاً اجتماع ترکیبات متناهی محدب به صورت

$$\mu_1 C_{i_1}+\mu_2 C_{i_2}+\dots+\mu_n C_{i_m}$$

که اندیس‌های $i_1, i_2, \dots, i_m$ متفاوت هستند. این موضوع تمام توصیفاتی است که در حکم قضیه بوده است. ∎

~~انتقال خطی از A~~ برای هر تبدیل خطی A از R^n به R^m، تعریف می‌کنیم

$$AC=\{Ax;\ x\in C\}, \qquad C\subset R^n$$
$$A^{-1}D=\{x;\ Ax\in D\}, \qquad D\subset R^m,$$

مجموعه AC را تصویر C تحت A و $A^{-1}D$ را تصویر وارون D تحت A می‌نامیم. معلوم می‌شود که وقتی تصاویر در نظر گرفته شود، مفهوم محدب حفظ می‌گردد، یعنی محدب بودن به وسیله تبدیل خطی حفظ می‌شود. (این واقعیت برداشت می‌شود که $A^{-1}D$ در اینجا به عنوان معکوس تبدیل خطی به عنوان یک تابع تک‌مقداری باشد)

قضیه ۳.۴. فرض کنید A تبدیل خطی از R^n به R^m است. در این صورت برای هر مجموعه محدب C از R^n و هر مجموعه محدب D از R^m، مجموعه‌های AC و $A^{-1}D$ محدب هستند.

اثبات: آسان است.

نتیجه ۳.۴.۱. تصویر متعامد از یک مجموعه محدب C، روی زیرفضای L، محدب است.

اثبات. تصویر متعامد یک به L که یک تبدیل خطی است، نظیر x، منحصر به فرد $y\in L$ است که $(x-y)\perp L$.

از قضیه ۳.۴، درمی‌یابیم که گرچه y از یک مجموعه محدب انتخاب شود، جواب‌های x از سیستم خطی $Ax=y$ نیز از یک مجموعه محدب خواهند بود.

گوییم K یک مستطیل از R^m، $a\in R^m$ باشند، و فرض کنید $D=K+a$. در این صورت $A^{-1}D$ مجموعه‌ای از بردارهای x است که $Ax\geq a$، است

آن را با μy که $\mu = \mu_1 + \mu_2$ و

$$y = \left(\frac{\mu_1}{\mu}\right) y_1 + \left(\frac{\mu_2}{\mu}\right) y_2 \in C_i$$

عوض کرد. پس C دقیقاً اجتماع ترکیبات متناهی محدب به صورت

$$\mu_1 C_{i_1} + \mu_2 C_{i_2} + \cdots + \mu_n C_{i_m}$$

که اندیسهای $i_1, i_2, \ldots, i_m$ متفاوت هستند. این موضوع تماماً توصیفی است که در حکم قضیه بوده است. ∎

~~انتقال خطی از A~~ برای هر تبدیل خطی A از R^n به R^m، تعریف می‌کنیم

$$AC = \{Ax \,;\, x \in C\}, \quad C \subset R^n$$
$$A^{-1}D = \{x \,;\, Ax \in D\}, \quad D \subset R^m,$$

مجموعه AC را تصویر C تحت A و $A^{-1}D$ را تصویر وارون D تحت A می‌نامیم. معلوم می‌شود که وقتی تصاویر در نظر گرفته شود، مفهوم محدب حفظ می‌گردد، یعنی محدب بوسیله تبدیل خطی حفظ می‌شود. (این واقعیت برداشت می‌شود که $A^{-1}D$ در اینجا به عنوان معکوس تبدیل خطی ~~بعنوان~~ تک نگاشت تک مقداری باشد)

قضیه ۳.۴. فرض کنید A تبدیل خطی از R^n به R^m است. در این صورت برای هر مجموعه محدب C از R^n و هر مجموعه محدب D از R^m، مجموعه‌های AC و $A^{-1}D$ محدب هستند.

اثبات: آن ساده است.

نتیجه ۳.۴.۱. تصویر متعامد از یک مجموعه محدب C، روی زیرفضای L، محدب است.

اثبات: تصویر متعامد یک به L که یک تبدیل خطی است، نظیر دو x، نقطه یکتای $y \in L$ است که $(x-y) \perp L$.

از قضیه ۳.۴، در می‌یابیم که هرگاه y از یک مجموعه محدب انتخاب شود، جوابهای x از سیستم خطی $Ax = y$ نیز از یک مجموعه محدب خواهند بود.

هرگاه K یک مستطیل از R^m، $a \in R^m$ باشند، و فرض کنید $D = K + a$.

در این صورت $A^{-1}D$ مجموعه‌ای از بردارهای x ای است که $Ax \geq a$ است