

## توزیع‌های شرطی

**توزیع‌های شرطی:** توزیع‌های شرطی گسسته، توزیع‌های شرطی پیوسته، کاربرد توزیع‌های شرطی، امید ریاضی شرطی و واریانس شرطی، متغیرهای تصادفی مستقل.

A. Asgharzadeh  
University of Mazandaran

**تابع احتمال شرطی:** اگر  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی گسسته باشند در آن صورت تابع احتمال شرطی  $X$  به شرط  $Y = y$  را با  $f_{X|Y}(x|y)$  نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad f_Y(y) \neq 0$$

که در آن

$$f_{X|Y}(x|y) = P(X = x | Y = y)$$

$$(Y \text{ و } X \text{ توأم احتمال توأم}) \quad f_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

$$(Y \text{ تابع احتمال حاشیه‌ای}) \quad f_Y(y) = P(Y = y)$$

**تابع چگالی شرطی:** در حالتیکه  $X$  و  $Y$  پیوسته باشند تابع چگالی شرطی  $X$  به شرط  $Y$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\text{تابع چگالی توأم } X \text{ و } Y}{\text{تابع چگالی حاشیه ای } Y} \quad f_Y(y) \neq 0$$

اگر  $f_{X|Y}(x|y)$  تابع چگالی شرطی  $X$  به شرط  $Y = y$  باشد آنگاه

$$P(a < X < b | Y = y) = \int_a^b f(x|y) dx, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

**مثال ۱.** اگر  $X$  نسبت اشخاصی باشد که برای خرید یک نوع کالا تقاضای کتبی می‌فرستند،  $Y$  نسبت اشخاصی باشد که برای خرید نوع دیگر کالا تقاضای کتبی می‌فرستند و تابع چگالی توأم  $X$  و  $Y$  به صورت

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(x + 4y) & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، پیدا کنید

(الف) تابع چگالی شرطی  $Y|X = x$ .

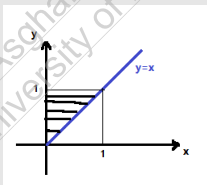
(ب) احتمال اینکه حداکثر ۵۰ درصد برای دومین نوع کالا درخواست کتبی بفرستند، به شرط آنکه ۲۰ درصد برای اولین نوع کالا درخواست کتبی ارسال شده باشد.

مثال ۲. فرض کنید  $0 < x < y < 1$ ،  $f(x, y) = 2$ .

الف) تابع چگالی شرطی  $X$  به شرط  $Y = y$  را پیدا کنید.

ب) پیدا کنید  $P(0 < X < \frac{1}{4} | Y = \frac{3}{4})$ .

شکل: ناحیه محصور



A. Asgharzadeh  
University of Mezanorran

مثال ۳. اگر تابع احتمال توأم  $X$  و  $Y$  به صورت زیر باشد

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{xy}{36}, \quad x = 1, 2, 3 \quad y = 1, 2, 3$$

پیدا کنید

الف)  $f_{Y|X}(y|x)$  و  $f_{X|Y}(x|y)$

ب)  $P(1 \leq X < 2 | y = 2)$

A. Asgharzadeh  
University of Mazandaran

قضیه: اگر  $X$  و  $Y$  مستقل باشند آنگاه

$$a) f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$$

$$b) f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$$

تعمیم توزیع‌های شرطی:

تابع چگالی  $X_1$  و  $X_2$  به شرط  $X_3$ :

$$f_{X_1, X_2 | X_3}(x_1, x_2 | x_3) = \frac{f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3)}{f_{X_3}(x_3)}$$

تابع چگالی  $X_1$  و  $X_2$  و  $X_3$  به شرط  $X_4$  و  $X_5$ :

$$f_{X_1, X_2, X_3 | X_4, X_5}(x_1, x_2, x_3 | x_4, x_5) = \frac{f_{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)}{f_{X_4, X_5}(x_4, x_5)}$$

A. Asgharzadeh  
University of Mazandaran

مثال ۴. توزیع احتمال توأم  $X, Y, Z$  به صورت زیر داده شده است

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{108} \quad x = 1, 2, 3; \quad y = 1, 2, 3; \quad z = 1, 2$$

پیدا کنید

الف) توزیع حاشیه‌ای توأم  $X$  و  $Y$

ب) توزیع حاشیه‌ای توأم  $X$  و  $Z$

ج) توزیع حاشیه‌ای  $X$

د) توزیع شرطی  $Z$  به شرط  $X = 1$  و  $Y = 2$

ه) توزیع شرطی توأم  $Y$  و  $Z$  به شرط  $X = 3$

A. Asgharzadeh  
University of Mazandaran



**امید ریاضی شرطی:** اگر  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی باشند آنگاه امید ریاضی شرطی تابع  $U(X)$  به شرط  $Y = y$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbb{E}[U(X)|y] = \begin{cases} \int u(x) f(x|y) dx & X \text{ پیوسته} \\ \sum_x u(x) f(x|y) & X \text{ گسسته} \end{cases}$$

در حالت خاص  $U(X) = X$ :

$$\mathbb{E}[X|y] = \begin{cases} \int x f(x|y) dx & X \text{ پیوسته} \\ \sum_x x f(x|y) & X \text{ گسسته} \end{cases}$$

**واریانس شرطی:**

$$\text{Var}(X|y) = \mathbb{E}[(X - \mu_{X|y})^2|y] = \mathbb{E}(X^2|y) - \mathbb{E}^2(X|y)$$

که در آن  $\mu_{X|y} = \mathbb{E}(X|y)$

مثال ۵. اگر تابع چگالی توأم  $X$  و  $Y$  به صورت زیر باشد

$$f(x, y) = ۲, \quad ۰ < x < y < ۱$$

پیدا کنید

الف)  $\mathbb{E}(X|Y)$ .

ب)  $\text{Var}(X|Y)$ .

A. Asgharzadeh  
University of Mazandaran

مثال ۶. اگر چگالی احتمال توأم  $X$  و  $Y$  به صورت

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 2y) & , 0 < y < 1, 0 < x < 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

باشد، میانگین شرطی و واریانس شرطی  $X$  به شرط  $Y = \frac{1}{3}$  را بیابید.

A. Asgharzadeh  
University of Mazandaran

**مثال ۷.** اگر  $X$  مبلغ (بر حسب تومان) مصرف بنزین یک بازاریاب در طول یک روز باشد و  $Y$  مبلغی باشد که بابت بنزین به بازاریاب پرداخت می‌شود، و چگالی توأم این دو متغیر تصادفی به صورت

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{25} \left( \frac{20-x}{x} \right) & 10 < x < 20, \quad \frac{x}{2} < y < x \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

باشد، بازاریابی که ۱۲ تومان برای مصرف بنزین خرج می‌کند، انتظار دارد که چه مبلغی به او پرداخت شود؟

A. Asgharzadeh  
University of Mazandaran

## قضیه ۱: خواص امید ریاضی شرطی

$$a) \mathbb{E}[aX + b|y] = a\mathbb{E}(X|y) + b \quad \text{خاصیت خطی}$$

$$b) \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Y)] \quad \text{خاصیت امید ریاضی مکرر}$$

$$c) \mathbb{E}[A(X) \cdot B(Y) | Y = y] = B(y) \mathbb{E}[A(X)|y] \quad \text{خاصیت جایگذاری}$$

## قضیه ۲

اگر  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی با توزیع توأم باشند، آنگاه

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}_X[\text{Var}(Y|X)] + \text{Var}_X[\mathbb{E}(Y|X)]$$

مثال ۸. فرض کنید که توزیع شرطی  $Y$  به شرط  $X = x$  بواسن با میانگین  $x$   $\mathbb{E}(Y|x) = x$  باشد و  $X \sim \text{Exp}(1)$ .

الف)  $\mathbb{E}(Y)$  را پیدا کنید.

ب)  $\text{Var}(Y)$  را حساب کنید.

A. Asgharzadeh  
University of Mazandaran

**مثال ۹.** فرض کنید  $X$  تعداد مشتری‌هایی باشد که در یک دقیقه معین به باجه یک بانک محلی مراجعه می‌کنند و فرض کنید که  $Y$  تعداد کسانی باشد که منصرف می‌شوند. فرض کنید  $X$  دارای توزیع پواسن با میانگین  $\mathbb{E}(X) = 3$  باشد و میانگین و واریانس شرطی  $Y$  به شرط  $X = x$  عبارتند از:  $\mathbb{E}(Y|x) = \frac{x}{2}$  و  $\text{Var}(Y|x) = \frac{x+1}{3}$ .

الف)  $\mathbb{E}(Y)$  را بیابید.

ب)  $\text{Var}(Y)$  را پیدا کنید.

ج)  $\mathbb{E}(XY)$  را حساب کنید.

A. Asgharzadeh  
University of Mazan

**مثال ۱۰.** یک زندانی در سلولی گذاشته می شود که سه در دارد. در اول بلافاصله به آزادی منتهی می شود. در دوم به تونلی وصل است که او را پس از یک روز راه به سلول باز می گرداند. در سوم به تونلی مشابه وصل است که او را پس از سه روز به سلول باز می گرداند. فرض کنید زندانی در همه حال هر یک از این سه در را با احتمال مساوی انتخاب کند. به طور متوسط انتظار داریم که زندانی بعد از چند روز از زندان آزاد شود؟

A. Asgharzadeh  
University of Maragheh



مسئله ۱. اگر متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  تابع چگالی توأمی به صورت

$$f(x, y) = \begin{cases} 24y(1 - x - y) & x > 0, x + y < 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

داشته باشند، پیدا کنید

الف) چگالی حاشیه‌ای  $X$

ب) چگالی حاشیه‌ای  $Y$

ج) چگالی شرطی  $Y$  به شرط  $X = \frac{1}{4}$  را بیابید.

د) میانگین شرطی و واریانس شرطی  $Y$  به شرط  $X = \frac{1}{4}$  را بیابید.

A. Asgharzadeh  
University of Mazandaran

مسأله ۲. اگر تابع چگالی توأم  $X$  و  $Y$  به صورت

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2x + y) & 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

باشد، پیدا کنید

الف) چگالی شرطی  $Y$  به شرط  $X = \frac{1}{4}$

ب) چگالی شرطی  $X$  به شرط  $Y = 1$ .

A. Asgharzadeh  
University of Mazandaran

مسأله ۳. اگر چگالی احتمال متغیرهای  $X, Y, Z$  به صورت

$$f(x, y, z) = \begin{cases} (x + y) e^{-z} & 0 < x < 1, 0 < y < 1, z > 0 \\ 0 & \text{و غیره} \end{cases}$$

باشد، پیدا کنید

- الف) چگالی شرطی  $Y$  به شرط  $X = \frac{1}{3}$  و  $Z = 2$
- ب) چگالی شرطی توأم  $Y$  و  $Z$  به شرط  $X = \frac{1}{4}$ .

A. Asgharzadeh  
University of Mazandaran

**مسأله ۴.** توزیع احتمال توأم  $X, Y, Z$  به صورت زیر داده شده است

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{108} \quad x = 1, 2, 3; \quad y = 1, 2, 3; \quad z = 1, 2$$

میانگین شرطی متغیر تصادفی  $U = Z^2$  را به شرط  $X = 1$  و  $Y = 2$  بیابید.

**مسأله ۵.** با مراجعه به مسأله ۴، میانگین شرطی و واریانس شرطی  $Y$  به شرط  $X = \frac{1}{4}$  را پیدا کنید.

A. Asgharzadeh  
University of Mazanorran

**مسأله ۶.** فرض کنید متغیرهای تصادفی مستقل  $X$  و  $Y$  بین  $(-1, 1)$  دارای توزیع یکنواخت باشند. مطلوب است محاسبه احتمال های زیر:

$$a) P(X + Y < \frac{1}{2})$$

$$b) P(X - Y < \frac{1}{2})$$

$$c) P(|X| + |Y| \leq 1)$$

$$d) P(|Y| \leq e^X)$$

$$e) P(XY < \frac{1}{6})$$

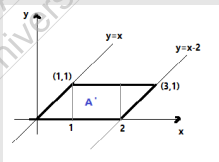
A. Agharzadeh  
University of Mazandaran

**مسأله ۷\*.** فرض کنید متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  درون متوازی الاضلاع به رئوس  
 $B = \{(x, y) : (x, y) = (0, 0), (1, 1), (2, 0), (3, 1)\}$  به طور یکنواخت توزیع (بخش) شده  
 باشند که

$$f(x, y) = \begin{cases} c & (x, y) \in B \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

الف)  $c$  را پیدا کنید.      ب) توابع احتمال حاشیه ای  $f_X(x)$  و  $f_Y(y)$  را بیابید.  
 ج) توابع احتمال شرطی  $f(x|y)$  و  $f(y|x)$  را پیدا کنید.

شکل: ناحیه محصور  $B$



A. Asgharzadeh  
 University of Mazandaran