توابع چند متغیره:

n تایی مرتب

definition: هر تابع به شکل $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ که $f(x_1,\dots,x_n) \longleftarrow (x_1,\dots,x_n)$ را n متغیره گویند.

هم‌دامنه دامنه

example: توابع زیر چند متغیره هستند.

1- $f(x,y,z)=xy^2+z$

2- $f(x,y)=xy+\sin(x+y)$

3- $f(x,y,z,t)=x+y+z+t$

+ همواره هم‌دامنه تابع باید زیرمجموعه‌ای باشد تا تابع پوشا است.

Point: منظور از دامنه تابع n متغیره مجموعه n تایی مرتب باشد $(x_1,\dots,x_n)$ که به ازای آن‌ها f معلوم می‌شود.

example: دامنه توابع زیر را تعیین کنید.

1- $f(x,y,z)=\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$

$D_f=\{(x,y,z)\in R^3 \mid f(x,y,z)\in R\}=\{(x,y,z)\in R^3 \mid 4-x^2-y^2-z^2\geq 0\}$

دامنه تابع f عبارت است از مجموعه نقاط درون و روی کره‌ای به مرکز $=\{(x,y,z)\in R^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 4\}$

مبدأ و شعاع ۲.

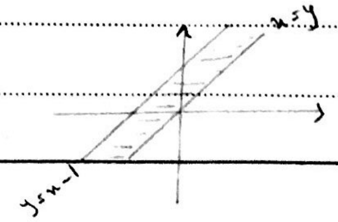
* حالت کلی معادله کره $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$.

2- $g(x,y)=\dfrac{2x-y}{[x-y]}$ $\quad D_g=R^2-\{(x,y) \mid 0\leq x-y<1\}$ $\quad [x-y]=0 \longrightarrow 0\leq x-y<1$

مخرج نباید صفر شود

$x-y=1 \longrightarrow y=x-1$

$x-y=0 \longrightarrow y=x$



remember:

1. $\int \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right)$

2. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \int e^u du = e^u$ $\quad \sqrt{x} = u \rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3. $\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \sqrt{1-\sin^2\theta}\, \cos\theta \, d\theta = \int \cos^2 d\theta = \int \frac{(1+\cos 2\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$

تغییر متغیر $\quad x = \sin\theta$

$= \frac{1}{2}\left(\sin^{-1}x + \frac{1}{2} \sin 2(\sin^{-1}x)\right)$

4. $\int \underset{u}{e^x} \cos x \, \overset{dv}{dx} = uv - \int v\,du$

معمولاً در انتگرال ضربی از قاعده جزء به جزء باید

مشتق	انتگرال
$\cos x$	e^x
$\sin x$	$+e^x$
$\cos x$	e^x

$e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$

ما ادامه سیری را تا ۱۰۰ ادامه می‌دهیم

تا جایی پیش می‌رویم که عین سوال تکرار شود و برگشت خورده از جمله مرتبی انتگرال می‌گیریم و منفی برگشت

$2\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x$

که خود به خود به جمع دو طرف اضافه می‌شود

5. $\int x \arctan x \, dx =$

مشتق	انتگرال
$\arctan x$	x
$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{x^2}{2}$

پیوستگی ما این صورت می‌توانیم تا زمانی که به جواب برسیم ادامه بدهیم

اگر نقطه برداریم تا زمانی که برداریم پیوسته نیست.

تابع در نقاط تنها پیوسته است اما حد ندارد.

MICRO

example: حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

1- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi)} e^{x+y} + \cos(x-y) = \lim e^{\pi} + \cos(-\pi) = e^{\pi} - 1$

۲- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = \frac{0}{0}$ مبهم $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{xy} = 1$ ✓ هم‌ارزی $\frac{\sin x}{x} = 1$

$+ \sin 0 = 0$

۳- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y} = \frac{0}{0}$ مبهم

برای اینکه ثابت کنیم حد وجود ندارد از مسیر استفاده می‌کنیم چند جواب بدست آمد حد وجود ندارد.

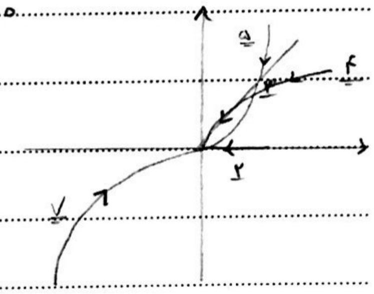
$\xrightarrow{y=x} \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-x}{x+x} = 0$ مطلق $\quad \xrightarrow{y=x^2} \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-x^2}{x+x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(1-x)}{x(1+x)} = 1$

1- $x=0$ $\quad$ ۵- $y=x^2$ $\quad$ حد وجود ندارد

۲- $y=0$ $\quad$ ۶- $y=-x^2$

۳- $y=x$ $\quad$ ۷- $y=mx$

۴- $y=\sqrt{x}$



۴- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \xrightarrow{y=x} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{x^2}{x^2(2)} = \frac{1}{2}$

حد وجود ندارد

$\xrightarrow{y=x^2} \frac{x^3}{x^2+x^4} = \frac{x^3}{x^2(1+x^2)} = \frac{x}{1+x^2} = 0$

توابع پیوسته:

فرض کنید تابع f در همسایگی نقطه (a,b) تعریف شده باشد و $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ یعنی مقدار حد و تابع یکسان باشد آنگاه می‌گوییم تابع f در نقطه (a,b) پیوسته است.

Subject : Date

example: بررسی کنید تابع زیر در نقطه (0,0) پیوسته است یا خیر

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\forall\varepsilon>0 \;,\; \exists\delta>0 \qquad |y|<\delta \quad y^2<\delta^2$

$$\lim \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0 \qquad \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta \longrightarrow \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

$$|y|\le\sqrt{x^2+y^2}<\delta \longrightarrow \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon \qquad y^2<\varepsilon \quad \delta^2<\varepsilon \quad \delta<\sqrt{\varepsilon}$$

چون مخرج از صورت بزرگتر می‌شود.

مشتق جزئی:

فرض کنید D یک زیر مجموعه از R^3 و $f:D\longrightarrow R$ یک تابع و (x,y,z) یک نقطه در D باشد.

وجود داشته باشد آنگاه این حد را مشتق جزئی تابع f بر حسب x نامیده و به صورت $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h}$

(x,y,z) های $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ، $f_x(x,y,z)$ یا $f_1(x,y,z)$ را نمایش می‌دهند.

not important

مشتق‌های جزئی تابع f نسبت به y و z هم به صورت‌های زیر است:

1- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=f_y(x,y,z)=\lim_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y}$

2- $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=f_z(x,y,z)=\lim_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}$

Subject :

Date

example: إذا $f(x,y)=\ln(x\tan y)$ أثبت أن $f_x(1,\frac{\pi}{4})$ و $f_y(1,\frac{\pi}{4})$ متساويان

$f(x,y)=\ln(x\tan y) \longrightarrow$ بالتبسيط $f(x,y)=\ln(x)+\ln(\tan y)$

$f_y(x,y)=\dfrac{1+\tan^2 y}{\tan y} \longrightarrow f_y(1,\frac{\pi}{4})=\dfrac{1+\tan^2\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1+1}{1}=2 \qquad \tan\frac{\pi}{4}=1$

$f_x(x,y)=\dfrac{1}{x} \longrightarrow f_x(1,\frac{\pi}{4})=1$

example:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases} \qquad \begin{cases} f_x(0,0)=? \\ f_y(0,0)=?\end{cases}$$

تعريف

$a=0,\ b=0 \longrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{h}{h^2}-0}{\frac{h}{1}}=\lim \dfrac{1}{h^2} \longrightarrow y=0$

تعريف $f_x(a,b)=\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$

$f_y(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0-0}{h}=0$

$x=0$

point: 1- $f_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$

2- $f_y(x_0,y_0)=\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$

example: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-xy}{x+y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Subject : Date ....

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(x,y)-f(x,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{x^2-xy}{x+y} - x}{y} = -2 \qquad y=0$$

مشتق های جزئی مرتبه دوم و بالاتر:

$$1- f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad 2- f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$3- f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad 4- f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

example: $f(x,y) = \sin(xy^2)$ $\quad f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} = ?$

$f_x = y^2\cos(xy^2)$ $\quad f_{xx} = -y^4\sin(xy^2)$ $\quad f_y = 2xy\cos(xy^2)$

$f_{yy} = 2x\cos(xy^2) - 4x^2y^2\sin(xy^2)$ $\quad f_{xy} = 2y\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2)$

$f_{yx} = 2y\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2)$

Premisse: اگر تابع f_{xy} و f_{yx} ~~در همسایگی~~ در همسایگی پیوسته باشند آنگاه این ۲ تابع در نقطه (x_0, y_0) با هم مساوی اند.

قاعده زنجیره ای مشتق:

هرگاه y تابعی از x باشد و x خود تابعی از متغیر t باشد، مشتق y نسبت به t برابر است با:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) \times \left(\frac{dx}{dt}\right).$$

MICRO®

Subject :

Date ....

premiss: فرض کنید تابع f با ضابطه $z = f(x, y)$ داده شود و x و y توابع g و h در دامنه تابع f پیوسته هستند

توابع $x = g(u, v)$ و $y = h(u, v)$ دارای مشتق های جزئی باشند آنگاه تابع $f(g(u, v), h(u, v))$

نیز نسبت به u و v دارای مشتق جزئی است و داریم:

$$1.\ \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$2.\ \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial v}$$

example: اگر $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 3xy - 2xz + 4$

و $x = 3s + t$ و $y = 2s - t$ و $z = s + 2t$ باشد آنگاه $f_s = \frac{\partial f}{\partial s}$ را بیابید

$$\frac{\partial f}{\partial s} = f_x \cdot x_s + f_y \cdot y_s + f_z \cdot z_s$$

$$= (2x + 3y - 2z) \cdot 3 + (2y + 3x) \cdot 2 + (2z - 2x) \cdot 1$$

$$= 10x + 13y - 4z = 10(3s + t) + 13(2s - t) - 4(s + 2t) = 52s - 11t$$

example: $z = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

اثبات کنید

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y} \times \sin\theta$$

Subject : Date

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = z_x \times x_\theta + z_y \times y_\theta = z_x \times (-r\sin\theta) + z_y \times (r\cos\theta)$$

$$(z_x \cos\theta + z_y \sin\theta)^2 + \frac{1}{r^2}(-z_x r\sin\theta + z_y r\cos\theta)^2$$

$$= (z_x^2 \cos^2\theta) + (z_y^2 \sin^2\theta) + 2(z_x \cos\theta\, z_y \sin\theta) + \frac{1}{r^2}$$

$$((z_x^2 r^2 \sin^2\theta) + (z_y^2 r^2 \cos^2\theta) - 2(z_x r\sin\theta\, z_y r\cos\theta) = (z_x)^2\cos^2\theta + (z_y)^2\sin^2\theta$$

$$+(z_x)^2\sin^2\theta + (z_y)^2\cos^2\theta = (z_x)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + (z_y)^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = (z_x)^2 + (z_y)^2$$

دیفرانسیل کامل:

اگر تابع f با ضابطه $f(x,y,z)$ یک تابع سه متغیره و دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد آنگاه دیفرانسیل کامل تابع f عبارت است از:

$$df = f_x(x,y,z)\,dx + f_y(x,y,z)\,dy + f_z(x,y,z)\,dz$$

اگر f یک تابع n متغیره $(x_1, \dots, x_n)$ باشد آنگاه دیفرانسیل کامل تابع f عبارت است از:

$$df = f_{x_1}\,dx_1 + f_{x_2}\,dx_2 + \dots + f_{x_n}\,dx_n$$

point: دیفرانسیل کامل تابع $z = f(x_1, \dots, x_n)$ برابر است با

$$df = z_{x_1}\,dx_1 + \dots + z_{x_n}\,dx_n$$

می‌باشد.

point: هرگاه $z = f(x,y)$ دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد، دیفرانسیل کامل تابع f به شکل زیر است:

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy$$

MICRO®

* $d(df) = d(f_x dx + f_y dy) = d(f_x dx) + d(f_y dy) = f_{xx} d^2x + f_{xy} dx\, dy$

$+ f_{yx} dy\, dx + f_{yy} d^2y$ $= f_{xx} d^2x + 2 f_{xy} dx\, dy + f_{yy} d^2y$ ⟶

مانند اتحاد است.

در حالت کلی: $d^2f = (f_x dx + f_y dy)^2$

Point: $d^n f = (f_x dx + f_y dy)^n$.

example: برای $f = \sin(xy)$ مطلوبست d^2f.

formula: $f_x dx + f_y dy$ $\quad f_{(x,y)}$

$\longrightarrow = y\cos(xy)\, dx + x\cos(xy)\, dy$

$d^2f = \underbrace{-y^2\sin(xy)}_{f_{xx}} d^2x + 2\underbrace{(\cos(xy) - xy\sin(xy))}_{f_{xy}} dx\, dy \underbrace{- x^2\sin(xy)}_{f_{yy}} d^2y$

سری تیلور: (توابع چند متغیره)

* سری تیلور برای توابع یک متغیره:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

اگر به جای x_0 صفر قرار دهیم سری مک لورن پدید می آید.

فرض کنید تابع f با ضابطه $z = f(x,y)$ در نقطه (a,b) از هر مرتبه‌ای دارای مشتق‌های جزئی باشد.

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left(f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)\right) + \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(a,b)(x-a)^2\right.$$

$$+2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2\big)+\frac{1}{3!}\{f_{xxx}(a,b)(x-a)^3$$

$$+3f_{xxy}(a,b)(x-a)^2(y-b)+3f_{xyy}(a,b)(x-a)(y-b)^2+f_{yyy}(a,b)(y-b)^3\}+\cdots$$

example: بسط تیلور تابع f را حول نقطه $(1,2)$ را بنویسید.

$$f(x,y)=4x^3+12xy+3y^3-8x^2y+9xy^2+15x+7$$

$$(1,2)\longrightarrow f_x=12x^2+12y-16xy+9y^2+15=96$$

$$f_y=12y+9y^2-8x^2+18xy=40$$

$$f_{xy}=12-16x+18y=50 \qquad f_{yx}=12-16x+18y=50$$

$$f_{xx}=24x-16y=-8 \qquad f_{yy}=18y+18x=72$$

$$f_{xxx}=24 \qquad f_{xxy}=-16 \qquad f_{xyy}=18$$

$$f(x,y)=200+\frac{1}{1!}\big[96(x-1)+40(y-2)\big]+\frac{1}{2!}\big[-24(x-1)^2+100(x-1)(y-2)$$

$$+72(y-2)^2\big]+\frac{1}{3!}\big[24(x-1)^3-48(x-1)^2(y-2)+54(x-1)(y-2)^2+18$$

$$(y-2)^3\big]$$

حد و پیوستگی توابع دو متغیره:

برای $A\subset R^2$ و تابع $f:A\to R$ و نقاط $(a,b),(c,d)\in A$ فاصله اقلیدسی شده اگر به ازای هر

(x,y) در نزدیکی $f(a,b)$ به $f(x,y)$ تعریف شود به طوری که هر همسایگی نقطه (a,b) را شامل باشد آنگاه

نقطه (a,b) را نقطه بیشینه موضعی تابع f می‌نامند.

definition: برای $A \subset \mathbb{R}^2$ تابع $f: A \to \mathbb{R}$ و نقاط $(c,d) \in A$ و (a,b) اگر ثابت شود اگر به ازای هر $(x,y) \in k_2$ ، $f(x,y) \geq f(c,d)$ تعریف بشود به طوری که k_2 یک همسایگی نقطه (c,d) باشد آن‌گاه

نقطه (c,d) را نقطه کمینه موضعی تابع f می‌نامند.

+ نقاط کمینه یا بیشینه تابع f را نقاط فرین یا اکسترمم می‌نامند.

Point: اگر در همسایگی نقطه‌ای مانند (a,b) نقطه‌ای مثل (x_1,y_1) وجود داشته باشد به طوری که $f(x_1,y_1) > f(a,b)$ و نقطه‌ای مانند (x_2,y_2) وجود داشته باشد به طوری که $f(x_2,y_2) < f(a,b)$ آن‌گاه نقطه (a,b) یک نقطه زینی تابع f می‌باشد.

یافتن نقاط اکسترمم موضعی تابع دو متغیره $z=f(x,y)$:

ابتدا از تابع f نسبت به x و سپس از تابع f نسبت به y مشتق می‌گیریم. دستگاه $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ را حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم نقطه (x_0,y_0) جوابی از دستگاه بالا باشد. در این صورت قضیه زیر را داریم.

قضیه (آزمون مشتق دوم):

فرض کنیم تابع f با ضابطه $z=f(x,y)$ در نقطه (a,b) دارای مشتق‌های جزئی مرتبه دوم بوده و

Subject :

Date ....

$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ باشد در این نقطه:

۱- اگر $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2<0$ باشد آنگاه نقطه (a,b) یک نقطه زینی است.

۲- اگر $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$ و $f_{xx}>0$ باشد آنگاه (a,b) یک نقطه مینیمم نسبی (موضعی) است.

۳- اگر $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$ و $f_{xx}<0$ باشد آنگاه (a,b) یک نقطه ماکزیمم نسبی (موضعی) است.

example: $z=x^3+6x^2+3y^2-12xy+9$

$f_x=3x^2+12x-12y=0$ $\qquad$ $f_y=6y-12x=0 \longrightarrow y=2x$

$3x^2-12x=0 \longrightarrow \begin{cases} y_1=0 \\ y_2=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=4 \end{cases}$

$\Delta=f_{xx}\times f_{yy}-f_{xy}^2$

$f_{xx}=6x+12$ $\qquad$ $f_{yy}=6$ $\qquad$ $f_{xy}=-12$

$\Delta\big|_{(0,0)}=(12)(6)-(12)^2 \rightarrow 72-144=-72<0 \longrightarrow (0,0)$ زینی

$\Delta\big|_{(4,8)}=36\times 6-(12)^2 \longrightarrow 216-144=72>0 \longrightarrow f_{xx}\big|_{(4,8)}=36>0$ مینیمم

ضرایب لاگرانژ برای یافتن اکسترمم:

فرض کنید بخواهیم اکسترمم های تابع n متغیره $f(x_1,\dots,x_n)$ را مشروط به اینکه $g(x_1,\dots,x_n)=0$ و

MICRO®

Subject : 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　Date

به طور کلی:

دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$h = f + \lambda g \qquad \begin{cases} h_{x_1} = 0 \\ h_{x_2} = 0 \\ \vdots \\ h_{x_n} = 0 \\ g(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

با حل دستگاه بالا می‌توان مقادیر λ و x_n و ... و x_1 را حساب کرد.

Example: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 　بیضی‌گون 　بزرگترین مکعب 　→ infected

$V = 8xyz$ 　حجم مکعب 　$h = f + \lambda g \longrightarrow h = 8xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$

$h_x = 8yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \xrightarrow{x\,\times} 8xyz + \frac{2\lambda}{a^2}x^2 = 0$ 　　دستگاه

$h_y = 8xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \xrightarrow{y\,\times} 8y\,xz + \frac{2\lambda y^2}{b^2} = 0$

$h_z = 8xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0 \xrightarrow{z\,\times} 8xyz + 2\lambda\frac{z^2}{c^2} = 0$

$h_\lambda = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

$24xyz + 2\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \cancel{\frac{y^2}{b^2}} + \frac{z^2}{c^2}\right) = 0 \qquad 24xyz + 2\lambda = 0 \longrightarrow \lambda = -12xyz$

$\xrightarrow{\lambda \to h_x} 8yz - \frac{24x^2yz}{a^2} = 0 \longrightarrow 8yz\left(1 - \frac{3x^2}{a^2}\right) = 0 \longrightarrow 8yz = 0$

$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{3} \end{cases}$

$y = 0$ یا $z = 0$ 　, 　$x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$

به همین ترتیب

$\begin{cases} y = \pm\frac{b}{\sqrt{3}} \\ z = \pm\frac{c}{\sqrt{3}} \end{cases}$

z یا x در صورت صفر شدن حجم

و y صفر می‌شود و مکعب

MICRO

مستطیل نمی‌شود.

Subject : Date

حجم: $V = 8 \times \frac{a}{\sqrt{3}} \times \frac{b}{\sqrt{3}} \times \frac{c}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}} abc$

میدان‌های برداری:

فرض می‌کنیم $D \subset R^n$ و $x_1, x_2, \dots, x_n$ در D باشند اگر $\vec{F}: D \to R^n$ تعریف شود تابع $\vec{F}$ را یک میدان برداری می‌نامند و به صورت $\vec{F}(x)$ نشان می‌دهند.

یک میدان برداری را می‌توان برحسب مؤلفه‌های آن ارائه نمود، اگر P و Q و R توابع مؤلفه‌های میدان برداری باشند آنگاه:

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

و به طور خلاصه به صورت:

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

گفته می‌شود اگر توابع مؤلفه‌های P و Q و R از $\vec{F}$ پیوسته باشند آنگاه میدان برداری F پیوسته است.

example: $F(x,y) = (x+y, x-y)$ $\quad R^2 \to R^2$

گرادیان:

فرض کنیم f یک تابع سه متغیره و مشتق‌پذیر باشد میدان برداری

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\vec{k}$$

را گرادیان تابع f می‌نامند و به صورت‌های $\text{grad} f$ یا ∇f نمایش می‌دهند.

حال اگر f تابع سه متغیره و مشتق‌پذیر باشد داریم:

Subject :

Date

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f$$

$$\nabla f = \nabla \cdot f$$

example: $f(x,y,z) = x^{\sinh(y+z)}$ $\qquad a^{u} = u' \cdot a^{u} \cdot \ln a \rightarrow$ formol

از فرمول

$f_x = \sinh(y+z)\, x^{\sin(y+z)-1}$ $\qquad f_y = 1 \times \cosh(y+z)\, x^{\sinh(y+z)} \ln x$

$f_z = 1 \times \cosh(y+z)\, x^{\sinh(y+z)} \ln(x)$

$$\vec{\nabla} f = (f_x)\vec{i} + (f_y)\vec{j} + (f_z)\vec{k}$$

example: اکسترمم های تابع $u = x - 2y + z$ را با شرط ۹ = $x^2 + y^2 + z^2$ را بیابید.

$h = f + \lambda g$

شرط

$h = x - 2y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$

$h_x = 1 + 2\lambda x = 0 \longrightarrow x = -\frac{1}{2\lambda} \longrightarrow x = -\frac{1}{2\sqrt{4}}$

$h_y = -2 + 2\lambda y = 0 \longrightarrow y = \frac{1}{\lambda} \longrightarrow y = \sqrt{4}$

$h_z = 1 + 2\lambda z = 0 \longrightarrow z = -\frac{1}{2\lambda} \longrightarrow z = \frac{\sqrt{4}}{2}$

$h_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$

$$\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 9 \longrightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{4}}$$

$\left(-\frac{\sqrt{4}}{2}, \sqrt{4}, -\frac{\sqrt{4}}{2}\right) \longrightarrow$ نقطه اکسترمم

MICRO

Subject : Date ....

دیورژانس یا واگرایی:

فرض کنیم برای میدان برداری $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ مشتق‌های جزئی $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ وجود دارند

یعنی به صورت $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\vec{k}$.

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

example: اثر میدان نیروی جاذبه

$$\vec{F} = \frac{-Gmx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{i} + \frac{-Gmy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{j} + \frac{-Gmz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}$$ باشد نشان دهید

$\nabla\cdot\vec{F} = 0$ نشان دهید

نسبت به x مشتق می‌گیریم چون Gmx بر حسب x و y ...

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{Gm(2x^2-y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{Gm(2z^2-y^2-x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{Gm(2y^2-x^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{Gm(2x^2-y^2-z^2+2y^2-x^2-z^2+2z^2-x^2-y^2)}{(x^2+y^2+z^2)} = 0$$

مشتق اول x:

$$\frac{(-Gm)(x^2+y^2+z^2)^{3/2} + \frac{3}{2}(2x)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}(Gmx)}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\left[-Gm(x^2+y^2+z^2)^1 + 3Gmx^2\right]}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Downarrow$$

$$Gm(3x^2-x^2-y^2-z^2) = Gm(2x^2-y^2-z^2)$$

MICRO®

Scanned with CamScanner

definition: اگر $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ یک میدان برداری باشد به طوری که مؤلفه‌های آن از مرتبه اول مشتق‌پذیر باشند آنگاه بردار $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ را کرل میدان برداری F می‌نامند $\text{curl}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$

$$\bullet\ \text{curl}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) - \vec{j}\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + \vec{k}\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right).$$

definition: اگر ∇ یک عملگر باشد آنگاه $\nabla^2 = \nabla . \nabla$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$= \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}\right) . \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}\right) = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$$

$+ \nabla$ (لاپلاسین) $\nabla +$

* اگر همه یکسان صفر شود که همان لاپلاسین است تابع مورد نظر را هارمونیک گویند.

example: کرل $\vec{F} = (\sin(xyz), \cos(xyz), t)$ را بیابید.

$$\text{curl}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ \sin(xyz) & \cos(xyz) & t \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\cancel{\frac{dt}{dy}}^{\,0} - \frac{d(\cos(xyz))}{dz}\right) - \vec{j}\left(\cancel{\frac{dt}{dx}}^{\,0} - \frac{d(\sin(xyz))}{dz}\right) + \vec{k}\left(\frac{d(\cos(xyz))}{dx} - \frac{d(\sin(xyz))}{dy}\right)$$

example: نشان دهید $f = 2x + 3x^2 - 3y^2 + 2z$ هارمونیک است.

مشتق جهتی تابع در امتداد یک بردار:

Subject : Date

مشتق سوئی تابع f در امتداد بردار $\vec{a}$ برابر است با:

$\vec{Df} = \vec{\nabla f} \cdot \vec{a} = \|\vec{\nabla f}\| \cdot \|a\| \cdot \cos\varphi$

+ f وقتی بیشترین مقدار را دارد که f و بردار a هم جهت باشند یعنی $\varphi = 0$ و عبارت بالا زمانی اتفاق می افتد که $\vec{a}$ در امتداد ∇f است.

example: اگر $f(x,y,z) = x - y + z^2$ آنگاه:

۱. میزان تغییرات تابع f در نقطه $A(۳,۲,۱)$ در امتداد $\vec{AB}$ را بیابید. $B = (۱۰,۷,۴)$

۲. بیشترین تغییرات f را در A بیابید.

Point: مشتق تابع $\vec{f}$ در جهت بردار $\vec{u}$

$Df(P_0) = \vec{\nabla f}\left(\frac{\vec{u}}{|u|}\right)$ یکه

الف)

$\nabla f = \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}\right) = (1, -1, 2z)$ $(۱,-۱,۴)$ $\vec{AB} = (۷,۶,۶)$

$\|AB\| = \sqrt{۴۹+۳۶+۳۶} = \sqrt{۱۲۱} = ۱۱$ $\frac{AB}{\|AB\|} = \left(\frac{۷}{۱۱}, \frac{۶}{۱۱}, \frac{۶}{۱۱}\right)$ برای بدست آوردن بردار یکه در امتداد بردار بردار را تقسیم بر اندازه اش می کنیم

$Df(A)_{\vec{AB}} = (۱,-۱,۴) \cdot \left(\frac{۷}{۱۱}, \frac{۶}{۱۱}, \frac{۶}{۱۱}\right) = \frac{۷}{۱۱} - \frac{۶}{۱۱} + \frac{۲۴}{۱۱} = \frac{۲۵}{۱۱}$

ب) بیشترین تغییرات $\|\nabla f\|_A = \sqrt{۱+۱+۱۶} = \sqrt{۱۸}$ اندازه گرادیان

MICRO

Subject : Date

example : تغییرات تابع f را مانند $f(x,y)=e^{2y}\tan^{-1}\left(\frac{y}{3x}\right)$ در جهتی در نقطه (۱,۳) ...

مماس است.

$$f(x,y)=\left[\frac{-3y}{y^2+9x^2}e^{2y}\right]\vec{i}+\left[2e^{2y}\tan^{-1}\left(\frac{y}{3x}\right)+e^{2y}\frac{3x}{9x^2+y^2}\right]\vec{j}$$

$\vec{\nabla}f(1,3)=-\frac{e^6}{2}\vec{i}$ ... الف) اگر $\vec{j}$ جهتی باشد که در آن میزان تغییرات تابع صفر است $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$

$$\vec{\nabla}f.\vec{a}=\left(-\frac{e^6}{2}\vec{i}+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{6}\right)e^6\vec{j}\right).\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}\right)=e^6\frac{a_1}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{6}\right)e^6a_2=0$$

$$a_2=\frac{3}{3\pi+1}a_1 \qquad \vec{a}=a_1\vec{i}+\frac{3}{3\pi+1}a_1\vec{j}$$

$$\vec{\nabla}f(1,3)=\frac{-e^6}{2}\vec{i}+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{6}\right)e^6\vec{j}$$

$$\tan\theta=\frac{\vec{a_2}}{\vec{a_1}}=\frac{3}{3\pi+1} \qquad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{3}{3\pi+1}\right)=16.05\ (*)$$

یعنی بردار یکه‌ای که با محور xها زاویه میسازد ... اول

یعنی بردار متوالی با زاویه‌ای که از رابطه (*) بدست خواهد آمد در نقطه (۱,۳) f دارای اندازه

تغییرات صفر است.

$a_1\to\cos\theta \qquad a_2\to\sin\theta$

$a_2=\sin 16.05 \qquad a_1=\cos 16.05$

بردار معامد بر یک رویه:

تعریف : $(x,y,z)=u$ یک معادله سطح رویه و u_x و u_y و u_z در نقطه (x_0,y_0,z_0) f پیوسته بوده و هر

آن‌ها با هم صفر نباشند آنگاه بردار عمود بر رویه در نقطه f برابر است با:

MICRO

Subject :   Date ....

$\vec{\nabla}_{\vec{u}}(x_0, y_0, z_0)$

خط قائم و صفحه مماس بر رویه:

فرض کنیم (x_0, y_0, z_0) معادله یک رویه باشد خط قائم بر رویه که از نقطه (x_0, y_0, z_0) از رویه می‌گذرد عبارت از خطی است که از نقطه P عبور کند و موازی بردار عمود بر رویه در نقطه P باشد یعنی ابتدا بردار عمود را به دست می‌آوریم.

$\vec{N} = (u_x(x_0, y_0, z_0), u_y(x_0, y_0, z_0), u_z(\dots))$

الف) معادله خطی را می‌نویسیم که از P بگذرد و موازی N باشد:

این رابطه صورت متقارن خط عمود بر رویه است.

$$\frac{x - x_0}{u_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{u_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{u_z(\dots)}$$

صفحه مماس:

فرض کنیم f در نقطه (x_0, y_0, z_0) از رویه که دیفرانسیل پذیر باشد در (x_0, y_0, z_0) P را صفحه ای در نظر بگیریم که از نقطه (x_0, y_0, z_0) گذشته و $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ بر آن عمود باشد معادله صفحه مماس که در نقطه (x_0, y_0, z_0) بر رویه که مماس باشد عبارت است از:

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

توجه به:

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)\vec{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\vec{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\vec{k}$$

example: معادله صفحه ای که بر این سطح در نقطه $(1,1,1)$ مماس است $x^2+y^2+z^2=3$ را بدست آورید.

ابتدا تابع را می‌نویسیم. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3$

$\vec{n} = (2,2,2)$

$\nabla f = (f_x, f_z, f_y) = (2x, 2y, 2z)$ برای بدست آوردن بردارهای نرمال از گرادیان کمک می‌گیریم

مشتق جزئی و جای گذاری می‌کنیم.

$2(x-1) + 2(y-1) + 2(z-1) = 0$

example: با الگوریتم زیر برای تابع مقابل $f = z + 4y - 2x - x^2 - y^2$.

راه اول:

$z = 4y - 2x - x^2 - y^2$ $\quad f_x = -2 - 2x = 0 \quad f_y = 4 - 2y = 0 \longrightarrow x = -1$

$y = 3$

$f_{xx} = -2 < 0 \qquad f_{yy} = -2 \qquad f_{xy} = 0$

$z = 18 + 2 - 1 - 9 = 10 \qquad (x,y,z) = (-1, 3, 10)$

$\Delta = f_{xx} \times f_{yy} - (f_{xy})^2 = 4 > 0$

راه دوم:

$h = (z + 4y - 2x - x^2 - y^2) + \lambda(\sqrt{x^2+y^2+z^2} - 1)$

$h_x = (-2 - 2x) + \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{2x+2}{x}$

$h_y = 4 - 2y + \lambda\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{2y-4}{y}$

$h_z = 1 + \lambda\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = 0 \longrightarrow \lambda = -\frac{1}{z} \qquad h_\lambda = \sqrt{x^2+y^2+z^2} - 1 = 0 \longrightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1$

Subject :   Date ....

example: معادله صفحه مماس و خط قائم بر رویه $z = \sin x + e^{xy} + y$ در نقطه (۰،۲،۳) بنویسید.

$+2$

$f = z - \sin x - e^{xy} - y$

$f_x = -\cos x - y e^{xy} = -3 \qquad f_y = -1 - x e^{xy} = -1 \qquad f_z = 1 \longrightarrow (-3,-1,1)$

$\nabla f = (-\cos x - y e^{xy}, -x e^{xy} - 1, 1) = u(x,y,z)$

بردار هادی

$$\frac{x-0}{-3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$$

انتگرال دوگانه:

definition: در صفحه xy ناحیه B را در نظر بگیرید. آن را به زیرناحیه‌های $B_1, B_2, \dots, B_n$ تقسیم کنیم. این

هر افراز B به صورت $P = \{B_1, \dots, B_n\}$ به دست آید.

نرم افراز

$\|P\| =$ بیشترین $\{d(B_1), d(B_2), \dots, d(B_n)\}$ = قطر بزرگترین بخش

اندازه افراز P با بزرگترین قطر B_i ها تعیین می‌شود.

تعریف انتگرال دوگانه:

definition: فرض کنید تابع f با ضابطه $z = f(x,y)$ روی ناحیه B در صفحه xy تعریف شده و کراندار باشد اگر P افراز B

در صفحه xy به صورت $P = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ افراز شده، ΔB_k مساحت B_k و $(x_k, y_k) \in B_k$

Scanned with CamScanner

Subject : Date ....

اگر P یک افرازی ناحیه B_k باشد آنگاه عبارت:

$$R(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\,\Delta B_k$$

را مجموعه انتگرال ریمان تابع f به ازای افراز P از B می‌نامند. $\Delta B_k=\Delta x_k\,\Delta y_k$

اگر $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\,\Delta B_k$ موجود باشد این حد انتگرال دوگانه تابع f در ناحیه B نامیده می‌شود و با

نماد: $$\iint_B f(x,y)\,dB=\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$$

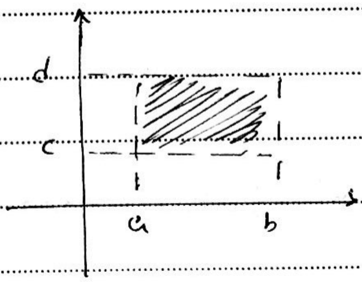
تابع انتگرال‌پذیر

ناحیه انتگرال‌پذیر

ناحیه‌های انتگرال‌گیری:

ساده‌ترین ناحیه انتگرال‌گیری در انتگرال دوگانه مستطیل زیر است.

$$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$$



$$\int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy\,dx$$

([illegible])

(این دو با هم فرقی ندارند)

$$=\int_{y=c}^{d}\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx\,dy$$

MICRO

Subject :

Date

۲ـ در این حالت ناحیه به شکل زیر است.

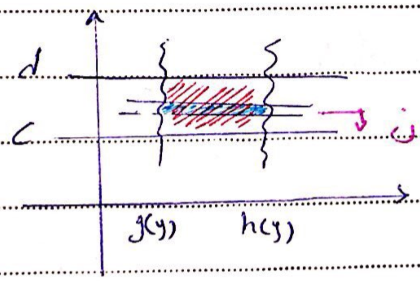
x بین ۲ عدد باشد اکیداً عمودی

$B=\{(x,y) \mid a\le x\le b$
$g(x)\le y\le h(x)\}$

$$\int_{x=a}^{b}\int_{y=g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

این عمودی x بین ۲ مقدار و y بین ۲ تابع است.

۳ـ در این حالت ناحیه انتگرال‌گیری به شکل زیر است.



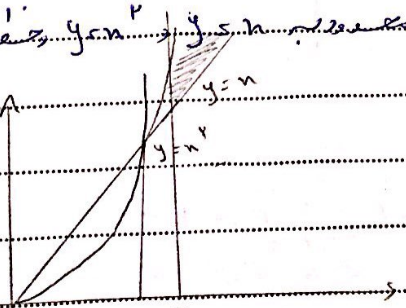
$B=\{(x,y)\in R^2 \mid g(y)\le x\le h(y)\}$
$c\le y\le d$

$$\int_{y=c}^{d}\int_{x=g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

در این افقی x بین ۲ تابع و y بین ۲ مقدار.

۴ـ این حالت ترکیبی از حالت‌های قبلی است.

example: اگر $f(x,y)=x+y$ انتگرال را حساب کنید اگر B محصور بین $y\le x$ و $y\ge x^2$ و خطوط $x=1$ و $x=2$.



$x=2$ محصور باشد ناحیه (B) [illegible] عمودی است
چون x بین ۲ عدد
است و y بین ۲ تابع

$B=\{(x,y)\in R^2 \mid 1\le x\le 2$
$x\le y\le x^2\}$

Subject :   **Date** ....

$\int_{x=1}^{2}\int_{y=x}^{x^2}(x+y-1)\,dy\,dx =$

1- $\int_{y=x}^{x^2}(x+y-1)\,dy = xy+\frac{y^2}{2}-y\Big|_{y=x}^{x^2} = (x^3+\frac{x^4}{2}-x^2)-(x^2+\frac{x^2}{2}-x)$

ثابت

$= \frac{x^4}{2}+x^3-5x^2+x$

2- $\int_{1}^{2}\frac{x^4}{2}+x^3-5x^2+x\,dx = \frac{x^5}{10}+\frac{x^4}{4}-\frac{5}{6}x^3+\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 =$

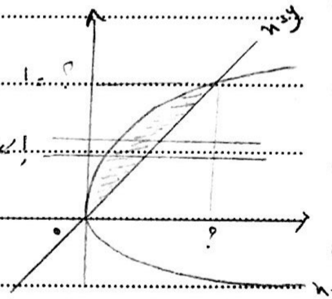
$(\frac{32}{10}+\frac{16}{4}-\frac{40}{6}+\frac{x^4}{2})-(\frac{1}{10}+\frac{1}{4}-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}) = ?$

example : انتگرال دوگانه‌ی ناحیه‌ای را حساب کنید که بین $x+z^2=1$ و $x=y$ و $x=y^2$ محصور شده است.

$z^2=1-x \longrightarrow z=\pm\sqrt{1-x}$ $0\leq y\leq 1$

$y^2\leq x\leq y$

$x=y \longrightarrow y=y^2 \longrightarrow y^2-y=0 \longrightarrow y(1-y)=0$



حجم $= 2\int_{0=y}^{1}\int_{x=y^2}^{y}\sqrt{1-x}\,dx\,dy =$

$\pm\sqrt{1-x}$

$\int\sqrt{(1-y^2)}\,dy$ $y=\cos\theta$ $(\sqrt{1-\cos^2\theta})(-\sin\theta)\,d\theta$

MICRO

Subject :   Date :

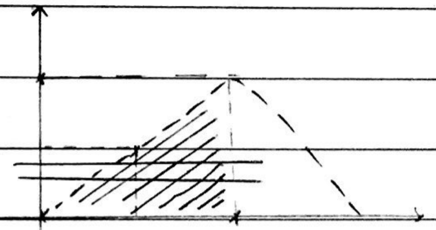
1. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} xy \, dy \, dx =$ $B=\{(x,y) \mid 0 \le x \le 2 \}$

این میشه $0 \le y \le \sqrt{4x-x^2}$

$y=0$

$y=\sqrt{4x-x^2} \xrightarrow{\text{مربع کامل}} y=\sqrt{-(x^2-4x)}=\sqrt{-((x-2)^2-4)} \rightarrow y=\sqrt{4-(x-2)^2}$

$(x-2)^2 \le 4 \rightarrow -2 \le x-2 \le 2 \rightarrow 0 \le x \le 4$ دامنه تابع



عرض ماکس $x=2 \rightarrow y=2$ $y=\sqrt{4-(x-2)^2}$

$y=\sqrt{4-0}=\sqrt{4}=2$

با یه خط افقی تغییر   (دایره میشه)   چیزی که بین (۲،۰) این ناحیه میشه

مساحت الان افقی y با بین ۲ و ۰ باشه و x بین ۲ تا ... بین ... جا ... میشه

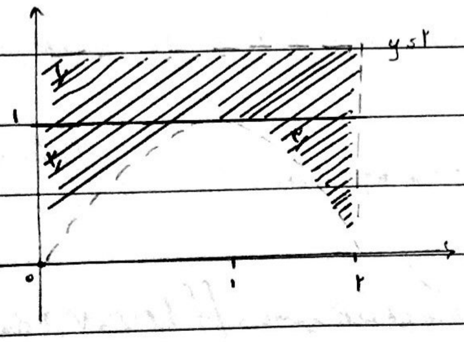
$0 \le y \le 2$

$2-\sqrt{4-y^2} \le x \le 2$ $y^2+(x-2)^2=4 \rightarrow x-2=\pm\sqrt{4-y^2}$

2. $\int_0^2 \int_{\sqrt{2x-x^2}}^2 f(x,y) \, dy \, dx =$

$B=\{(x,y) \mid 0 \le x \le 2\}$

$\sqrt{2x-x^2} \le y \le 2$



$\begin{cases} y=\sqrt{2x-x^2} \\ y=2 \end{cases}$ $(x-1)^2+y^2=1$

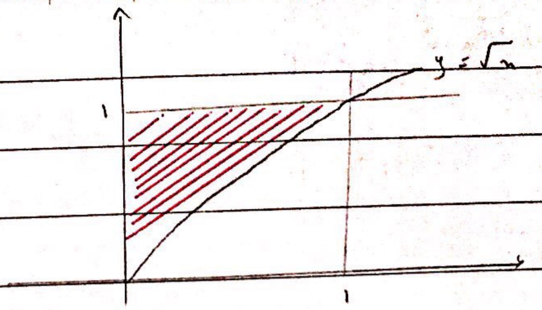
$\rightarrow x=1+\sqrt{1-y^2}$

1) $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 1 \le y \le 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1+\sqrt{1-y^2} \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 1+\sqrt{1-y^2} \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

... مستقل

Subject :   Date :

۳- $\int_0^1\int_0^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy =$

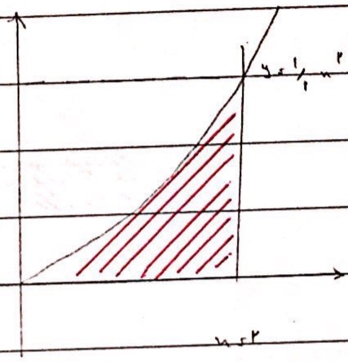


$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le y^2 \end{cases}$ ناحیه افقی

(تغییر ناحیه)

$\begin{cases} \sqrt{x} \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ ناحیه عمودی

۴- $\iint f(x,y)\,dx\,dy =$



$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$ ناحیه عمودی

تغییر ناحیه

$\begin{cases} \sqrt{2y} \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$ ناحیه افقی $\quad y=\frac{1}{2}x^2 \;,\; x=2 \Rightarrow y=2$

تغییر متغیر :

هدف از تغییر متغیر در انتگرال های ۲ گانه آسان کردن انتگرال است.

اگر $\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$ در ناحیه B در صفحه xy تعریف شده باشد آن گاه با انتخاب $x=g(u,v)$ و $y=h(u,v)$ انتگرال به شکل

$\iint_R f(u,v)\,du\,dv$ در ناحیه R تبدیل می‌شود لذا باید رابطه بین $f(x,y)$ و $f(u,v)$ را پیدا کنیم که در واقع همان رابطه

بین R و B در دستگاه ... است این رابطه عبارت از ژاکوبین است که به صورت زیر محاسبه می‌شود.

PAN

Subject: Date:

در تغییر انتگرال ۲ گانه به صورت:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(u,v)\,du\,dv = \iint_R f(g(u,v), h(u,v))\,J\,du.dv$$

تغییر متغیر قطبی:

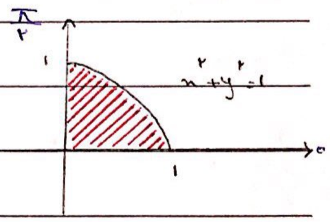
در مختصات قطبی زاویه بین صفر تا ۲π می‌شود.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

$$\iint_B f(x,y)\,dB = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

example: $I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy =$



$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le \sqrt{1-y^2} \end{cases}$ ناحیه $x = \sqrt{1-y^2} \to x^2+y^2=1$

$$I = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1} \sin(r^2)\,r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^1 2r\sin(\underset{u}{r^2})\,dr = \frac{1}{2}\int \sin u\,du = -\frac{1}{2}\cos u = -\frac{1}{2}\cos r^2 \Big|_{r=0}^{r=1}$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos 1 - \cos 0) = \frac{1}{2}(1 - \cos 1)$$

PAN

Subject : Date :

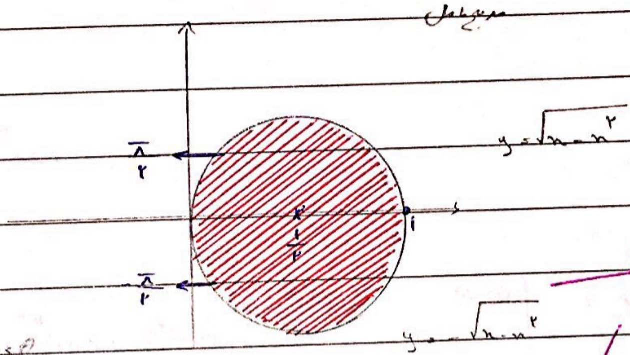
$I = \frac{1}{2}(1-\cos 1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4}(1-\cos 1)$

example: $I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx =$

$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -\sqrt{x-x^2} \le y \le \sqrt{x-x^2} \end{cases}$

$y = \sqrt{x-x^2} \rightarrow y^2 + \underbrace{x^2 - x}_{\text{مربع کامل}} = 0 \rightarrow y^2 + (x-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

$r = \frac{1}{2}$, $\Big|_0^{\frac{1}{2}}$



$x^2 + y^2 = x$

$r^2 = r\cos\theta \rightarrow r = 0 , r = \cos\theta$

دست راست

$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{\cos\theta} (r^2)\, r\, dr\, d\theta =$

θ

$\int_0^{\cos\theta} r^3 dr = \frac{r^4}{4}\Big|_0^{\cos\theta} = \frac{1}{4}\cos^4\theta$

$I = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \frac{1}{16}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)\, d\theta$

$\cos^2 2\theta = \left(\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{16}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) d\theta =$

point: $\cos^{2n}\theta = (\cos^2\theta)^n = \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^n$

2- $\sin^{2n}\theta = (\sin^2\theta)^n = \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^n$

PAN

Subject: Date:

$$= \frac{1}{16}\left(\theta + \sin 2\theta + \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{2} + \underset{0}{\cancel{\sin\pi}} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}\underset{0}{\cancel{\sin 2\pi}} - \left(-\frac{\pi}{2} + \underset{0}{\cancel{\sin(-\pi)}}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}\underset{0}{\cancel{\sin(-2\pi)}}\right)\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{32}$$

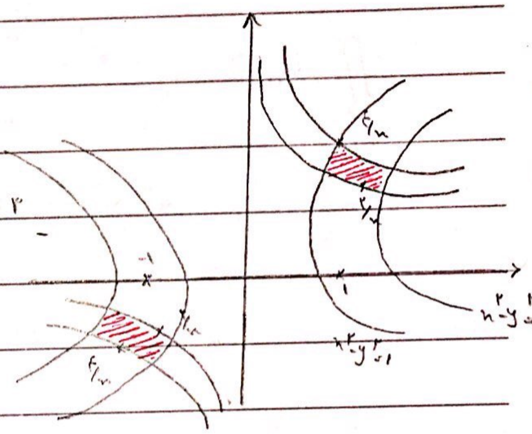
هذلولی   هذلولی

example: $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$, $xy = 2$, $xy = 4$ ناحیه محدود به اول.

هر ۴ تا هذلولی است.

$$\iint (x^2 + y^2)\,dx\,dy = ?$$

در معادله هذلولی: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$



$x^2 - y^2 = 1 \xrightarrow{y=0} x = \pm 1$ $x^2 - y^2 = 9 \xrightarrow{y=0} x = \pm 3$

$xy = 2 \longrightarrow y = 2/x$ $xy = 4 \longrightarrow y = 4/x$

$u = xy \qquad v = x^2 - y^2$

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = ? \qquad \frac{1}{J} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -2y^2 - 2x^2 = -2(x^2 + y^2)$$

این نسبت به هم

معکوس هم‌اند.

$$J = \frac{1}{-2(x^2 + y^2)}$$

$u = xy \longrightarrow xy = 2 \,,\, xy = 4 \xrightarrow{\text{ش}} 2 \le u \le 4$

$v = x^2 - y^2 \longrightarrow x^2 - y^2 = 1 \,,\, x^2 - y^2 = 9 \xrightarrow{\text{ش}} 1 \le v \le 9$

PAN

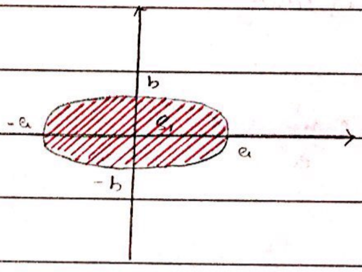
$$\int_{2}^{4}\int_{1}^{9} (x^2+y^2)x \frac{-1}{2(x^2+y^2)}\, dv\, du = -\frac{1}{2}\int_{2}^{4}\int_{1}^{9} dv\, du = -\frac{1}{2}(4-2)(9-1) = -8$$

با تغییر متغیرهای انتگرال عوض شد:

$S = \iint_B 1\, dB =$ مساحت ناحیه B در صفحه XY

example: مساحت بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ را محاسبه کنید

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ روی محیط بیضی داریم



$S = 4\iint_{B_1} dB_1$

$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \qquad y^2 = b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \qquad y = \pm\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$

$B: \ -a \le x \le a \qquad -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \le y \le b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

$S = \int_{-a}^{a}\int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} dy\, dx = 4\int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} 1\, dy\, dx = 4b\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\, dx \longrightarrow$ انتگرال سخت

از راه تغییر:

تعریف می‌کنیم $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$

تغییر متغیر $\begin{cases} \frac{x}{a} = r\cos\theta & \longrightarrow x = ar\cos\theta \\ \frac{y}{b} = r\sin\theta & \longrightarrow y = br\sin\theta \end{cases}$

$$J = \begin{vmatrix} x_r & y_r \\ x_\theta & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & b\sin\theta \\ -ar\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr\cos^2\theta + abr\sin^2\theta = abr$$

PAN

Subject :

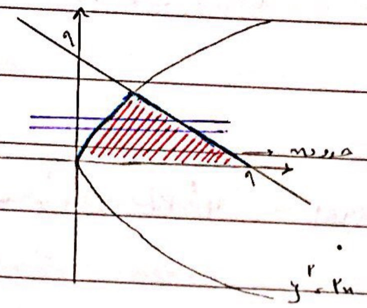
Date :

$$S=4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{1} abr\,dr\,d\theta=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^1 d\theta=\frac{4}{2}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=(2ab)\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi ab$$

* مساحت ناحیه ای که به وسیله نمودارهای زیر محصور شده است را حساب کنید.

$y^2=2x$, $x+y=9$

Very important



$y=0$ معادله محور xها است

$x+y=9 \xrightarrow{x=0} y=9$

$\xrightarrow{y=0} x=9$

$$S=\int_0^{-1+\sqrt{19}}\int_{\frac{y^2}{2}}^{9-y} dx\,dy$$

$0\le y\le -1+\sqrt{19}$

$\frac{y^2}{2}\le x\le 9-y$

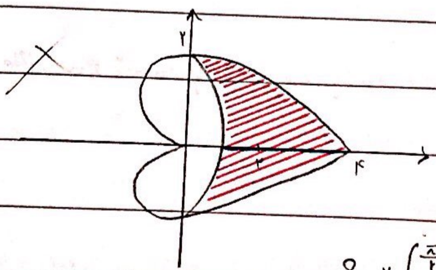
$y^2=2x$, $x+y=9$ → $y^2=2(9-y)$ → $y=-1\pm\sqrt{19}$

$y^2+2y-18=0$

$y^2=2x \rightarrow x=\frac{y^2}{2}$, $x+y=9 \rightarrow x=9-y$

$$\int_0^{-1+\sqrt{19}}\left(9-y-\frac{y^2}{2}\right)dy=9y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}\Big|_0^{-1+\sqrt{19}}$$

example: ناحیه ای خارج دایره به شعاع ۲ و داخل دلنمای $r=2(1+\cos\theta)$ است. مساحت این ناحیه را بیابید.



θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
r	4	3	2	1	0	1	2	3	4

$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_2^{2(1+\cos\theta)} r\,dr\,d\theta$$

$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$2\le r\le 2(1+\cos\theta)$

Subject : Date :

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^2}{2}\Big|_2^{2(1+\cos\theta)}\right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4(1+\cos\theta)^2 - 4\right) d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cancel{1} + 2\cos\theta + \cos^2\theta \cancel{- 1}\right) d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos\theta + \cos^2\theta\right) d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = 4\left(2\sin\theta + \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\cancel{\sin 2\theta}\right)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4\left(2\times 1 + \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right) = 4\left(2 + \frac{\pi}{4}\right) = 8 + \pi$$

* مساحت محصور بین $y^2=4x$ و $y^2=2x$ ، $xy=1$ ، $xy=4$ را محاسبه کنید.

سهمی افقی   سهمی افقی   هذلولی   هذلولی

محاسبه حجم:

اگر تابع f در ناحیه B به صورت پیوسته و مثبت تعریف شده باشد آنگاه $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta B_k$ عبارت است از مجموع حجم‌های استوانه‌های مستطیل‌القاعده که قاعده و ارتفاع آن‌ها به ترتیب ΔB_k و $f(x_k, y_k)$ می‌باشد. اگر اندازه نرم افراز یعنی $\|P\|$ به سمت صفر میل کند آنگاه مجموع حجم‌های استوانه‌ای که بین $z=f(x,y)$ و ناحیه B در صفحه xy قرار دارد تقریبی از استوانه‌ مانندی می‌دهد که حجم آن V است و با انتگرال زیر برابر خواهد بود.

$$V = \iint_B f(x,y)\, dB$$

example: حجم محصور به وسیله بیضی‌گون با معادله $9x^2+9y^2+z^2=9$ را بیابید.

معادله بیضی‌گون $= \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 1$

$x^2+y^2=r^2$ * , $z^2 + 9(x^2+y^2) = 9 \xrightarrow{\div 9} x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \xrightarrow{\text{مرکز}} (\alpha=0, \beta=0, \gamma=0)$

$(a=1, b=1, c=3)$

PAN

Subject :

Date :

۰٪ درست نیست

$z=0$

عمق مشترک عبارت از ناحیه‌ای به ارتفاع ۱ است لذا:

$\int 9r^2-9 \to r^2=1 \to r=\pm 1$ اما ما مشتق نگرفتیم

$$V=8\int_0^{\pi/2}\int_0^1 3\sqrt{1-r^2}\; r\,dr\,d\theta = 12\int_0^{\pi/2} -\frac{2}{3}(1-r^2)^{3/2}\Big|_0^1 d\theta = 8\int_0^{\pi/2} d\theta = 4\pi$$

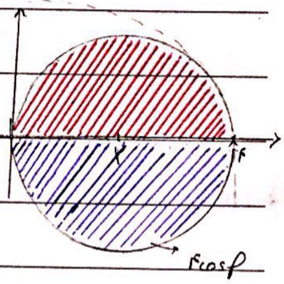
$1-r^2$ ، u ، مشتق u

چون نقطه ۸ قسمت مساوی دارد

$$\int\sqrt{u}\,du = \int u^{1/2}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2}$$

$z^2=9-9r^2 \;,\; z=\pm 3\sqrt{1-r^2}$ مثبت را در نظر می‌گیریم.

example: حجم قسمتی از کره را که به معادله $z^2+r^2=16$ و با استوانه $r=4\cos\theta$ بریده شده است.



معادله کره $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$

$r^2=x^2+y^2 \to z^2+x^2+y^2=16 \to (\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,0)$

$$V=4\int_0^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta}\sqrt{16-r^2}\; r\,dr\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2} -\frac{1}{3}(16-r^2)^{3/2}\Big|_0^{4\cos\theta} d\theta = -\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\left[(16-16\cos^2\theta)^{3/2}-64\right]d\theta$$

$$= \frac{256}{3}\int_0^{\pi/2}\sin\theta(1-\cos^2\theta)\,d\theta \quad \frac{128}{3}\pi - \frac{215}{9} + \frac{128}{3}\pi$$

درسته

* ۴ را ضرب می‌کنیم چون ما در نصف حساب کردیم، مسئله ۸ قسمت دارد.

۰٪

برای پیدا کردن (۰،۰،۰) دایره به شعاع ۴ که مرکز آن است به روش زیر عمل می‌شود.

$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

$r=4\cos\theta \xrightarrow{\times r} r^2=4r\cos\theta \to x^2+y^2=4x \xrightarrow{\text{مربع کامل}} (x-2)^2+y^2=4 \to$ دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز $(2,0)$

$$16^{3/2}(1-\cos^2\theta)^{3/2}=(\sin^2\theta)^{3/2}=\sin^3\theta$$

جرم یک جسم:

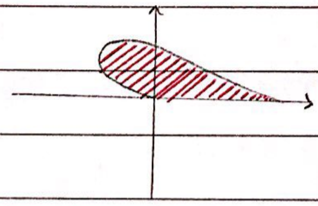
جرم جسم عبارت است از $m=\rho.V$ است به شرطی که V حجم و ρ چگالی آن می‌باشد.

$$M=\iint_B \rho(x,y)\,dB=\iint \rho(x,y)\,dx\,dy$$

example: جرم جسمی را محاسبه کنید به صورت صفحه‌ای است که چگالی آن در هر نقطه $\rho=kr$ باشد و معادله آن $r=2(1+\cos\theta)$ است.

$$M=\int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} kr.r\,dr\,d\theta=\frac{8}{3}k\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3 d\theta=\frac{8}{3}k\int_0^{\pi}(1+3\cos^2\theta+3\cos\theta+\cos^3\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{10}{3}k\pi$$



$$+\,3\cos^2\theta=3\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)$$

$$\int\cos\theta\cos^2\theta\,d\theta=\int\underbrace{\cos\theta}_{du}(1-\underbrace{\sin^2\theta}_{u})\,d\theta=\int(1-u^2)\,du=u-\frac{u^3}{3}$$

$$\frac{8}{3}k\int_0^{\pi}\left(1+\frac{3}{2}(1+\cos2\theta)+3\cos\theta+\cos\theta(1-\sin^2\theta)\right)d\theta=\frac{8}{3}k\left(\theta+\frac{3}{2}\theta+\frac{3}{4}\sin\theta+\sin\theta\right.$$

$$\left.-\frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{8}{3}k\left(\left(\pi+\frac{3}{2}\pi\right)\left(0+0+0+0+0-\frac{0}{3}\right)\right)=\frac{8}{3}k\times\frac{5\pi}{2}=\frac{20k\pi}{3}$$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ روابط مثلثاتی

Subject:

Date:

گشتاور جرم:

$M_x = \iint_B y\,\rho(x,y)\,dB$ ← گشتاور جرم نسبت به محور طول‌ها

$M_y = \iint_B x\,\rho(x,y)\,dB$ ← گشتاور جرم نسبت به محور عرض‌ها

$M_0 = \iint_B \sqrt{(x^2+y^2)}\;\rho(x,y)\,dB$ ← گشتاور جرم نسبت به مبدأ مختصات.

مختصات مرکز ثقل:

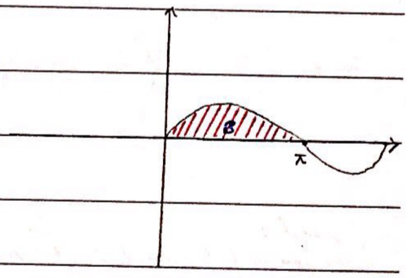
۱. $\bar{x} = \dfrac{M_y}{M}$ ۲. $\bar{y} = \dfrac{M_x}{M}$

example: مختصات مرکز ثقل ورقه‌ای را بیابید که توسط $y=\sin x$ ، $y=0$ ، $x=0$ ، $x=\pi$ محصور شده باشد و چگالی هر نقطه آن متناسب با فاصله آن نقطه از محور xها باشد.

$\rho(x,y) = ky$ ، ~~k عدد ثابت ...~~

درست

$\bar{x}=?$, $\bar{y}=?$ $M=?$, $M_x=?$, $M_y=?$



$0 \le x \le \pi$

$0 \le y \le \sin x$

$M = \iint_B \rho(x,y)\,dB = \int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} ky\,dy\,dx = k\int_0^{\pi} \left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{\sin x} dx = \frac{k}{2}\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{k}{4}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx$

$= \frac{k}{4}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{k\pi}{4}$

$M_x = \iint_B y\,\rho(x,y)\,dB = \int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} ky^2\,dy\,dx = k\int_0^{\pi}\left(\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{\sin x}\right)dx = \frac{k}{3}\int_0^{\pi}\sin^3 x\,dx$

$= \frac{k}{3}\int_0^{1} \sin x(1-\cos^2 x)\,dx$ برای توان‌های فرد sin , cos یکی از آنها را جدا می‌کنیم و بقیه را به کمک اتحاد به یکدیگر تبدیل می‌کنیم و sin جدا شده را مشتق cos در نظر می‌گیریم (sin , cos مشتق یکدیگرند)

Subject :

Date :

$u = \cos x$

$du = -\sin x \, dx$

$= -\frac{k}{3}\int (1-u^2)du = -\frac{k}{3}\left(u - \frac{u^3}{3}\right) = -\frac{k}{3}\left(\cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\right)\Big|_0^{\pi} = -\frac{k}{3}\left(\left(-1+\frac{1}{3}\right) - \left(1-\frac{1}{3}\right)\right)$

$= +\frac{4k}{9}$

$M_y = \int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} (x)(ky)\,dy\,dx = k\int_0^{\pi} x \int y\,dy = k\int_0^{\pi} x\left(\frac{\sin^2 x}{2}\right)dx = \frac{k}{2}\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx$

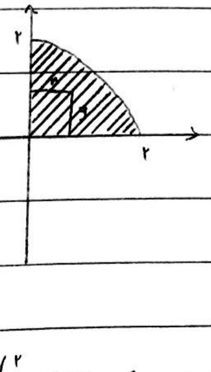
مشتق	انتگرال
$+\ x$	$\sin^2 x$
$-\ 1$	$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$
$+\ 0$	$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}\cos 2x$

$\frac{k}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\cos 2x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{k}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{8}\right)\right)$

$= \frac{k\pi^2}{8}$

$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{k\pi^2}{8}}{\frac{k\pi}{4}} = \frac{1}{2}k\pi$ $\qquad$ $\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{4k}{9}}{\frac{k\pi}{4}} = \frac{16}{9\pi}$

example : جرم ناحیه‌ای را که توسط دایره $x^2+y^2=4$ در ربع اول محصور شده است که چگالی آن ناحیه را بیابید که چگالی آن



در هر نقطه برابر است با مجموع فواصل آن نقطه از دو محور (ناحیه اول)

دو محور

$\rho(x,y) = x+y$

درست نیست

چون دایره است از مختصات قطبی بهره می‌بریم.

$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2} (r\cos\theta + r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((\cos\theta+\sin\theta)\frac{r^3}{3}\Big|_0^2\right)d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{8}{3}(1+1) = \frac{16}{3}$

$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

PAN

Subject :

Date :

$M_x = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2} y(x+y) = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2} (r\sin\theta)(r\sin\theta + r\cos\theta)\, r\, dr\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (\frac{1}{2}\sin 2\theta + \sin^2\theta) r^4 \Big|_0^2 d\theta$

$= 4\int_0^{\pi/2} (\frac{1}{2}\sin 2\theta + \sin^2\theta)\cdot r^4 \Big|_0^2 d\theta = 4\int_0^{\pi/2} (\frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1-\cos 2\theta}{2})\, d\theta$

$= 4(-\frac{1}{4}\cos 2\theta + \frac{1}{2}(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta))\Big|_0^{\pi/2} = 4(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{4}) - (-\frac{1}{4}) = 2+\pi$

$M_y \rightarrow$ به محور تقارن % $\qquad M_y = 2+\pi$

$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{2+\pi}{\frac{17}{4}} = 0{,}946$

مرکز ثقل

$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{4(2+\pi)}{17} = 0{,}9460$

محاسبه گشتاور دوم :

$I_x = \iint_B y^2 \rho(x,y)\, dx\, dy$

$I_y = \iint_B x^2 \rho(x,y)\, dx\, dy$

$I_0 = \iint_B (x^2+y^2)\rho(x,y)\, dx\, dy$.

example : گشتاور دوم حول محور x ناحیه محصور بین سهمی $y^2=5x$ و $x=5$ را محاسبه ρ

است . $y^2 = 5x \xrightarrow{x=5} y^2 = 25 \longrightarrow y = \pm 5$

چنانچه چگالی $\rho(x,y)$ از فاصله نقطه تا خط $y=-5$ عبارت از $y+5$ است ، داریم : تمرین

$I_x = \int_{-5}^{5}\int_{y^2/5}^{5} (y+5)^2\, dx\, dy = \int_{-5}^{5} (y+5)^2 (5 - \frac{y^2}{5})\, dy = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} (625 + 250y - 10y^3 - y^4)\, dy$

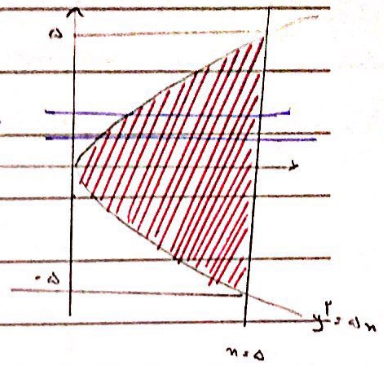
PAN

K

Subject: Date:

$$= \frac{1}{5}\int \left(625y + 125y^2 - \frac{10}{3}y^3 - \frac{y^5}{5}\right)\Big|_{-5}^{5} = 1000$$

$$\begin{cases} -5 \le y \le 5 \\ \frac{y^2}{5} \le x \le 5 \end{cases}$$



: point $\iint_B (\text{فاصله سطح})^2 \times f(x,y)\, dB =$ گشتاور دوم

محاسبه سطح رویه:

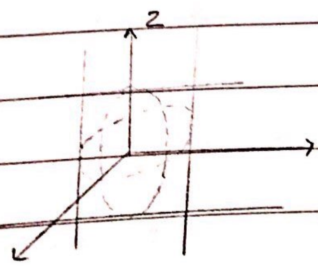
فرض کنید $z = f(x,y)$ رویه‌ای روی ناحیه B روی صفحه xy تعریف شده باشد در این صورت مساحت سطح این رویه در ناحیه B عبارت است از:

$$S = \iint_B \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dB$$

example: مساحت رویه‌ی را بدست آورید که توسط استوانه‌ای به معادله $x^2+y^2=a^2$ از استوانه $x^2+z^2=a^2$ جدا شده باشد.

اگر معادله‌ای متغیر سوم نداشت آن متغیر دلخواه است در این جا z دلخواه است هر معادله‌ای که متغیری دلخواه داشته باشد استوانه است. رویه را از معادله‌ای که متغیر بیشتری دارد انتخاب می‌کنیم با توجه به اطلاعات سوال $x^2+z^2=a^2$

معادله‌ی $x^2+y^2=a^2$ ناحیه. $\qquad z^2 = a^2 - x^2 \to z = \pm\sqrt{a^2-x^2}$



B: دایره $x^2+y^2=a^2$

$$x^2+y^2=a^2 \to y^2 = a^2-x^2 \to y = \pm\sqrt{a^2-x^2}$$

PAN

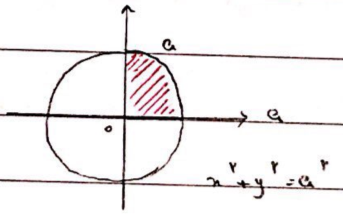
$$\sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}=\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}$$

$$S=\iint_B\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}\,dB \qquad S=8\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dy\,dx$$

درست نیست

چون ۸ ربع داریم

$$S=8a\int_0^a\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\left(\sqrt{a^2-x^2}-0\right)dx=8a\int_0^a dx=8a^2$$

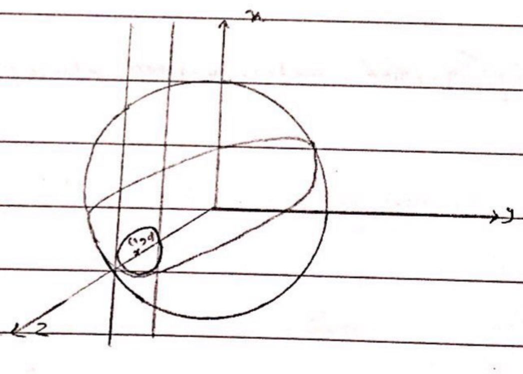


example: مساحت بخشی از کره که در داخل استوانه به معادله $x^2+y^2-2x=0$ و کره $x^2+y^2+z^2=4$ است را بیابید.

دایره: $(x-1)^2+y^2=1$

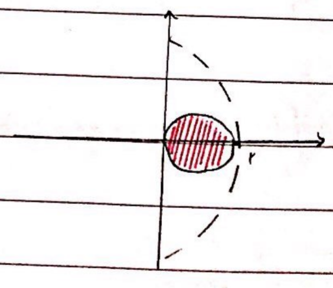
رویه: $z=\sqrt{4-(x^2+y^2)}$

تصویر: $(x-1)^2+y^2=1$



$B:\ 0\le x\le 2$

$-\sqrt{1-(x-1)^2}\le y\le\sqrt{1+(x-1)^2}$



$$f_x=\frac{-2x}{2\sqrt{4-(x^2+y^2)}}\longrightarrow f_x^2=\sqrt{\frac{x^2}{4-(x^2+y^2)}}$$

Subject: Date:

$$f_x = \frac{-2y}{2\sqrt{4-(x^2+y^2)}} \qquad , \qquad f_y^2 = \frac{y^2}{4-(x^2+y^2)}$$

$r = 2\cos\theta$

$$\sqrt{1+f_x^2+f_y^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{4-(x^2+y^2)}+\frac{y^2}{4-(x^2+y^2)}}$$

$r^2 = 2r\cos\theta$

$x^2+y^2-2x=$

$$S = 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2\cos\theta}$$

چون در ربع اول محاسبه می‌کنیم ضرب در ۴ تا انتگرال داریم چون ۴ بار تقارن فقط ناحیه اول را حساب می‌کنیم

به زاویه صفر تا $\frac{\pi}{2}$ چون ناحیه انتگرال ما است از مختصات قطبی می‌بریم

$(x-1)^2+y^2=1$ ⟶ دایره

Part: ناحیه انتگرال ما یک دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات با شعاع ۲ ... بین ۲ و ۲ است (۲ بین ۲ و ۲ است) ولی این مرکز دایره مبدأ مختصات نباشد جای است در معادله‌ی دایره به جای $x = r\cos\theta$ و به جای $y = r\sin\theta$ قرار می‌دهیم

$x = r\cos\theta \qquad (r\cos\theta-1)^2+(r\sin\theta)^2=1 \longrightarrow r = 2\cos\theta$

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{2\cos\theta}\frac{-2r}{\sqrt{4-r^2}}\,dr\,d\theta =$$

منفی پشت می‌بریم.
به جای ... ۴ پشت می‌بریم.

$$= -4\iint_0^{2\cos\theta}\left(u^{-\frac{1}{2}}\,du\right)d\theta = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\sqrt{u}\,\Big|_0^{2\cos\theta}\right)d\theta = -8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{4-4\cos^2\theta}-\sqrt{4}\right)d\theta$$

enplein: $\sqrt{4-4\cos^2\theta} = \sqrt{4(1-\cos^2\theta)} = 2\sqrt{\sin^2\theta} = 2|\sin\theta| = 2\sin\theta$

چون در ربع اول sin مثبت است قدر مطلق را بدون منفی بیرون می‌آوریم.

PAN

$$S = -14\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta - 1)\,d\theta = -14(-\cos\theta - \theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -14\left((0 - \tfrac{\pi}{2}) - (-1)\right) = -14(-\tfrac{\pi}{2} + 1) = 7\pi - 14$$

محاسبه حجم اجسام دوار:

قضیه پاپوس: حجم جسم دوار حاصل از دوران ناحیه مسطح R حول محوری که از نقطه درونی R نمی‌گذرد مساوی مساحت R ضرب در

$V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_n$ — مختصات ناحیه پیچیده شده به ... شکل R است.

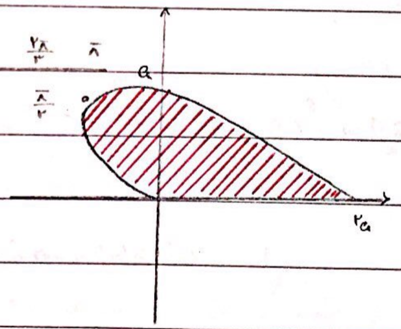
$$= 2\pi\iint_{R_1} y\,dA + \dots + 2\pi\iint_{R_n} y\,dA = 2\pi A\,\frac{\iint_R y\,dA}{A} = 2A\pi\bar{y}$$

$$= \iint_R 2\pi y\,dA = \iint_B 2\pi y\,dx\,dy \qquad V = \iint_B 2\pi y\,dB \rightarrow \text{very important}$$

مثال example: اگر ناحیه ای محدود از دلنمای بالای محور x ها قرار دارد دور محور x ها دوران دهیم اگر $r = a(1+\cos\theta)$ باشد حجم حاصل از دوران را بیابید.

$r = a(1+\cos\theta)$ نمودار:

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
r	$2a$	$\frac{3a}{2}$	a	$\frac{a}{2}$	0



$r = a(1+\cos 0) = 2a$

$r = a(1+\cos 90^\circ) = a$

چون بزرگترین سطح محصول ما است از ۰ تا $a(1+\cos\theta)$ است.

$B:\ 0 \le r \le a(1+\cos\theta)$

$\quad 0 \le \theta \le \pi$

و کوچکترین درجه هم صفر است.

$$V = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{a(1+\cos\theta)} (2\pi)(r\sin\theta)(r)\,dr\,d\theta =$$

بازوی — y — ژ

Subject:

Date:

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}(\sin\varphi)\,r^3\Big|_0^{a(1+\cos\varphi)}=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}(\sin\varphi)\left(a^3(1+\cos\varphi)^3\right)d\varphi$$

$(1+\cos\varphi)=u \longrightarrow du=\sin\varphi$ با تغییر متغیر

$$=-\frac{2\pi a^3}{3}\int u^3\,du=\frac{u^4}{4}\longrightarrow-\frac{\pi a^3}{6}(1+\cos\varphi)^4\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}=-\frac{\pi a^3}{6}(0-16)=\frac{8}{3}\pi a^3$$

انتگرال‌های سه‌گانه:

فرض کنید تابع $f(x,y,z)$ در ناحیه G تعریف شده باشد و یک افراز از ناحیه G به صورت $P=\{G_1,\dots,G_n\}$

باشد. به ازای هر نقطه (x_k,y_k,z_k) از زیرناحیه G_k مجموع:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\,\Delta V_k$$

حجم

متناظر با تابع

را مجموع ریمان می‌نامیم، در اینجا ΔV_k حجم ناحیه G_k است.

definition: فرض کنید تابع $u=f(x,y,z)$ در ناحیه G تعریف شده و $P=\{G_1,\dots,G_n\}$ افرازی از G باشد اگر $\Delta V_k=(\Delta x_k)(\Delta y_k)(\Delta z_k)$

آنگاه $\lim\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\,\Delta V_k$ ($n\to\infty$) به صورت زیر تعریف است.

$\|P\|\to 0$

$$\iiint_G f\,dG$$

Fact: تعریف انتگرال سه‌گانه مشابه انتگرال دوگانه است.

Example: فرض کنید G ناحیه محدود به $x+y+z=4$ و صفحه‌های مختصات باشد، انتگرال $\iiint_G e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz$ را محاسبه کنید.

پاسخ: ...

PAN

Scanned with CamScanner

$B=\{(x,y):\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 4-2x\}$

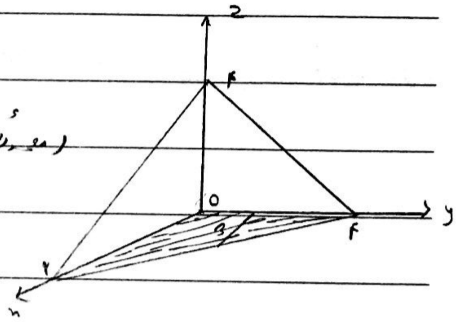
در حساب چه شد

$$\int_0^2\int_0^{4-2x}\int_0^{4-2x-y} e^{x+y+z}\,dz\,dy\,dx=\int_0^2\int_0^{4-2x}\left(e^{-x+4}-e^{x+y}\right)dy\,dx \quad \to e^{x}e^{y}$$

در محاسبه جمع شده

$$=\int_0^2\left(ye^{-x+4}-e^{x+y}\right)\Big|_0^{4-2x}dx=\int_0^2\left((4-2x)e^{-x+4}-e^{-x+4}+e^{x}\right)dx=e^4+4e^2-1$$

با انتگرال جزء به جزء



(معمولاً x بین ۲ و ۰ در y و z بین ۴ جابجا است)

اعداد (۲،۴،۴) را از محورهای مختصات بدست آوردیم برای بدست آوردن x به

y و z صفر می‌دهیم و برای بدست آوردن y به x و z صفر می‌دهیم برای بدست آوردن z

به y و x صفر می‌دهیم.

مشتق	انتگرال
$4-2x$	e^{4-x}
-2	$-e^{4-x}$
0	e^{4-x}

$$=\left((2x-4)e^{4-x}+2e^{4-x}-e^{4-x}+e^{x}\right)\Big|_{x=0}^{x=2}$$

example : حجم G محدود به $z=0$ ، $z=3$ ، $x^2+y^2=16$ ، $x^2+y^2=9$ مفروض است انتگرال $I=\iiint x^2\,dx\,dy\,dz$

مختصات قطبی

$$I=\iiint x^2\,dG=\iint_D\left(\int_0^3 x^2\,dx\,dy\right)=3\iint x^2\,dx\,dy=3\int_0^{2\pi}\int_3^4 r^2\cos^2\theta\,(r)\,dr\,d\theta$$

[illegible]

$$=\frac{3}{4}\int_0^{2\pi} r^4\Big|_3^4\cos^2\theta\,d\theta=\frac{525}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta=\frac{525}{4}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{525}{4}\pi$$

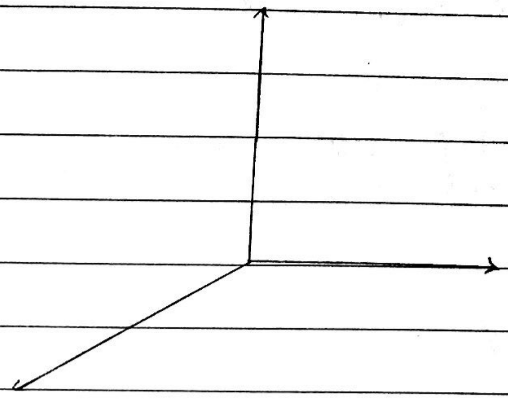
Subject: Date:

$0 \le z \le 3$

$3 \le r \le 4$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

1.



توضیح انتگرال: $\frac{3}{4}\int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi)(r^4)\Big|_3^4)\, d\varphi = \frac{3\times(256-81)}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi$

$= \frac{525}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) = \frac{525}{8}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{525}{4}\times \pi$

* اگر ناحیه مطلب به یکی از صفحات x و y و z بین ۲ عدد هستند و سایر ابعاد با متغیر نداریم فقط بین ۲ عدد است.

۱ـ تغییر متغیر در انتگرال سه‌گانه:

هرگاه متغیرهای x y z به صورت توابعی از u v w باشند، $x = g(u,v,w)$, $y = h(u,v,w)$, $z = k(u,v,w)$

در این صورت می‌توان ناحیه G را با تبدیل‌های بالا به ناحیه R در دستگاه u v w تبدیل کرد.

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}$$

$\det(A) = \det(A^t)$

$$\iiint_G f(x,y,z)\, dG = \iiint_R f(g,h,k)\, J\, dR$$

PAN

Subject :

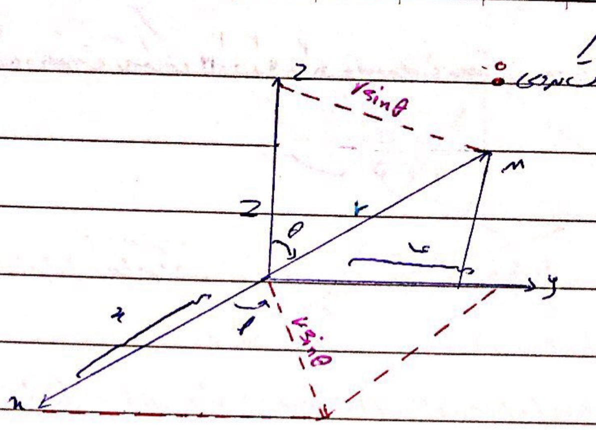
Date :

$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi \quad \sin\theta$

$z = r\cos\theta$

تغییر متغیر با استفاده از مختصات کروی:



$\cos\varphi = \frac{x}{\text{تصویر}} \rightarrow \cos\varphi = \frac{x}{r\sin\theta}$

$\sin\varphi = \frac{y}{\text{تصویر}} \rightarrow \sin\varphi = \frac{y}{r\sin\theta}$

چون از جسم m عمود می‌شود $r\sin\theta$ با ضلع پایینی برابر می‌شود ضلع پایین هم $r\sin\theta$ می‌شود.

$0 \leq \theta \leq \pi$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Point: بیشترین مقدار θ، ۱۸۰ است و φ روی زمین است پس می‌تواند آزادانه بچرخد.

$$\iiint_G h(x,y,z)\,d\theta = \iiint_R f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta)(r^2\sin\theta)$$

$$J = \begin{vmatrix} x_r & y_r & z_r \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\sin\theta\cos\varphi)(r^2\sin^2\theta\cos\varphi) - \sin\theta\sin\varphi(-r^2\sin^2\theta\sin\varphi) + \cos\theta(r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + r^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi)$$

$$= r^2\sin^3\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos\theta(r^2\sin\theta\cos\theta) = r^2\sin^3\theta + r^2\cos^2\theta\sin\theta = r^2\sin\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) =$$

$= r^2\sin\theta$

در جاهایی از مختصات کروی استفاده می‌کنیم که دایره یا کره داشته باشیم اگر کره یا دایره داشته باشیم از

مختصات کروی استفاده می‌کنیم.

PAN

Subject :

Date :

example: جرم جسمی که در یک هشتم اول، محصور به کره $x^2+y^2+z^2=16$ و صفحات مختصات محصور شده است را با انتگرال

$\iiint xyz\,dV$

دوران

نیز با بسط دهید

چون جسم در یک هشتم اول است حدود φ و θ از صفر تا $\frac{\pi}{2}$ است

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4} (r\sin\theta\cos\varphi)(r\sin\theta\sin\varphi)(r\cos\theta)(r^2\sin\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4} r^5\sin^3\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\varphi}{2}\left(\frac{1}{4}\sin^4\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\frac{(4)^6}{6}\,d\varphi = \frac{256}{3}$$

اگر حدود ثابت باشند و انتگرال‌ها ضربی باشند می‌توان به صورت زیر آن‌ها را از هم جدا کنیم

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\right)\times\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos\theta\,d\theta\right)\times\left(\int_0^{4} r^5\,dr\right)$$

↓

$$\left(-\frac{1}{4}\cos 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\times\left(\frac{\sin^4\theta}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\times\left(\frac{r^6}{6}\Big|_0^{4}\right) = \left(-\frac{1}{4}(-1-1)\right)\times\left(\frac{1}{4}-0\right)\times\left(\frac{4^6}{6}-0\right)$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{4^6}{6} = \frac{4^4}{3} = \frac{256}{3}$$

explain: $\sin^3\theta\cos\theta$, $\sin\theta = u$, $\cos\theta = du$

$\int u^3\,du = \frac{u^4}{4}$

very important

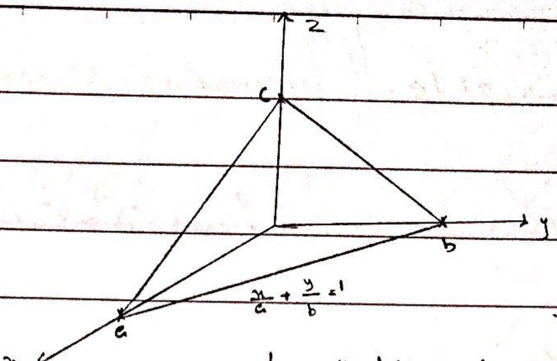
example: حجم ناحیه محدود به $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ و $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ $(a, b, c > 0)$ محصور شده است را با انتگرال سه‌گانه

PAN $f(x,y,z)=1$ باید باشد.

$y, z = 0 \longrightarrow x = a$

$x, z = 0 \longrightarrow y = b$

$y, x = 0 \longrightarrow z = c$



$\rightarrow y = b(1 - \frac{x}{a})$

$x = 0 \longrightarrow$ صفحه yz

$y = 0 \longrightarrow$ صفحه xz

$z = 0 \longrightarrow$ صفحه xy

$0 \leq x \leq a$

$0 \leq y \leq b(1 - \frac{x}{a})$

$0 \leq z \leq c(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b})$

$$\int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} x\,dz\,dy\,dx = \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} xz \Big|_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} =$$

$$\int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} x(c(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}))\,dy\,dx = c\int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} (x - \frac{x^2}{a} - \frac{xy}{b})\,dy\,dx =$$

$$= c\int_0^a (xy - \frac{x^2}{a}y - \frac{xy^2}{2b}) \Big|_0^{y=b(1-\frac{x}{a})} dx = \int_0^a b(x - \frac{x^2}{a}) - \frac{b}{a}(x^2 - \frac{x^3}{a}) - \frac{b}{2}(x - \frac{2x^2}{a}$$

$$+ \frac{x^3}{a^2})\,dx$$

مختصات استوانه ای :

$x = r\cos\varphi \quad , y = r\sin\varphi \; , \quad z = z \; , \quad J = r = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}$

PAN

ناشی از ۳ تا ۲ بعد تغییر می‌کند

۴۹

Subject :

Date :

$$\iiint_G h(x,y,z)\, dG = \iiint_G h(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r \, dz\, dr\, d\theta$$

مثال: ناحیه اول فضا و محدود به کره $x^2+y^2+z^2=4^2$ ، صفحات مختصات محصور شده است مطلوب است انتگرال زیر

$\iiint xyz\, dV$

$0 \le r \le 4$

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ → ناحیه اول فضا

چون ناحیه در یک هشتم فضا است بنابراین θ از صفر تا $\frac{\pi}{2}$ است.

$$\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{4} \int_{z=0}^{\sqrt{16-r^2}} (r^2 \sin\cos\theta)(z)(r)\, dz\, dr\, d\theta . \qquad r^2 = x^2+y^2$$

$(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta) - 16 = z^2$

$-r^2 + 16 = z^2 \rightarrow z = \sqrt{16-r^2}$

$$= \frac{1}{4}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{4} (r^3 \sin 2\theta)\, z^2 \Big|_0^{\sqrt{16-r^2}} dr\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4 (16r^3 - r^5)\sin 2\theta\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4r^4 - \frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^4 \sin 2\theta\, d\theta = -\frac{1}{8}\left(4^5 - \frac{4^6}{6}\right)\cos 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{8}\left(4^5 - \frac{4^6}{6}\right)(-1-1)$$

$$= \frac{1}{4}\left(4^5 - \frac{4^6}{6}\right)$$

مثال: انتگرال سه‌گانه مقابل $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dz\, dy\, dx$

اگر ابتدا نسبت به z انتگرال بگیریم، از تغییر متغیر نمی‌توان استفاده کرد.

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dz = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, z \Big|_0^2 = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

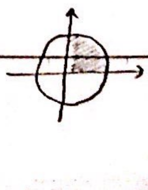
حالا باید از تغییر متغیر قطبی که در محدوده دایره باشد.

$$= \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx$$ تغییر متغیر قطبی

از این جا به بعد به شکل دایره است

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $J = r$

$0 \le y \le \sqrt{9-x^2}$, $0 \le x \le 3$



$y^2 = 9 - x^2 \rightarrow x^2+y^2 = 9$

$r = 3$ شعاع دایره برابر با ۳ است.

Subject : Date :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}=\theta}\int_{r=0}^{3}\left(\frac{2}{\sqrt{r^2}}\right) r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3} dr\,d\theta = 6\times\frac{\pi}{2}=3\pi$$

point: اگر انتگرال سه‌گانه داشتیم که استوانه باشد از تغییر متغیر استوانه‌ای استفاده می‌کنیم.

حجم در انتگرال سه‌گانه:

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta V_k = \iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

اگر در هر نقطه (x,y,z) از ناحیه G، $f(x,y,z)=1$ باشد آنگاه رابطه فوق را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \iiint_G dx\,dy\,dz$$

به طور مشابه حجم در مختصات کروی هم عبارت است از:

$$V=\iiint_G \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

به طور مشابه حجم در مختصات استوانه‌ای هم عبارت است از:

$$V=\iiint_G r\,dz\,dr\,d\theta$$

example: حجم ناحیه‌ای که به سطوح $z=x^2+3y^2$ و $z=8-x^2-y^2$ محصور شده است را محاسبه کنید.

ابتدا سایه حاصل از برخورد این ۲ منحنی را پیدا می‌کنیم.

$$8-x^2-y^2=x^2+3y^2$$

(این ۲ منحنی بیضی با هم برخورد می‌کنند) یعنی بیضی

$$\to 2x^2+4y^2=8 \xrightarrow{\div 8} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

PAN

Scanned with CamScanner

Subject : Date : 2

$2x^2+4y^2=8$

$x^2+2y^2=4 \longrightarrow -2\le x\le 2$

$y^2=2\left(1-\frac{x^2}{4}\right) \longrightarrow y=\pm\sqrt{2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}$

$$V=\int_{-2}^{2}\int_{y=-A}^{A}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dy\,dx=\int_{-2}^{2}\int_{-A}^{A}\left(8-2x^2-4y^2\right)dy\,dx$$

از تغییر متغیرهای زیر استفاده می‌کنیم.

$x=2r\cos\theta$ (یعنی بعضی جاها به جای تغییر متغیر) $J=2\sqrt{2}r$

$y=\sqrt{2}r\sin\theta$ در انتگرال دوگانه استفاده می‌کنیم. (یعنی همیشه تغییر متغیر قطبی نیست)

$-a\le x\le a \longrightarrow -2\le x\le 2$

$$\begin{cases} -2\le x\le 2 \\ -\sqrt{2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}\le y\le \sqrt{2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)} \to A \\ x^2+3y^2\le z\le 8-x^2-y^2 \end{cases}$$

برای به دست آوردن حدود r باید $x=2r\cos\theta$ و $y=\sqrt{2}r\sin\theta$ را در معادله بیضی

جایگذاری کنیم و r را به دست آوریم.

$1=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}$

$\longrightarrow \frac{4r^2\cos^2\theta}{4}+\frac{2r^2\sin^2\theta}{2}=1 \longrightarrow \boxed{r=1}$

دمت گرم

55

$$V=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\left(8-8r^2\cos^2\theta-8r^2\sin^2\theta\right)2\sqrt{2}r\,dr\,d\theta$$

$\longrightarrow 8r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=8r^2$

از $8r^2$ فاکتور می‌گیریم

$$V=\int_{0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\left(8-8r^2\right)2\sqrt{2}r\,dr\,d\theta=16\sqrt{2}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}\left(r-r^3\right)dr\,d\theta=(16\sqrt{2})\int_{0}^{2\pi}\left(\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1\right)d\theta$$

$$=(16\sqrt{2}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)d\theta=(16\sqrt{2})\times\frac{1}{4}\times 2\pi$$

PAN

Subject :

Date :

example: حجم ناحیه‌ای که داخل کره $x^2+y^2+z^2=16$ و بالای مخروط $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ محصور است را محاسبه کنید.

$$z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \longrightarrow z^2=3(x^2+y^2)$$

$$x^2+y^2+3x^2+3y^2=16 \longrightarrow 4x^2+4y^2=16 \longrightarrow x^2+y^2=4$$

$$\begin{cases} -2\le x\le 2 \\ -\sqrt{4-x^2}\le y\le \sqrt{4-x^2} \\ \sqrt{3(x^2+y^2)}\le z\le \sqrt{16-(x^2+y^2)} \end{cases}$$

Point: به طور کلی انتگرال برای به دست آوردن حجم مفید است.

$$s=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{3(x^2+y^2)}}^{\sqrt{16-(x^2+y^2)}} 1\,dz\,dy\,dx=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{16-(x^2+y^2)}-\sqrt{3(x^2+y^2)}\,dy\,dx$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\left(\sqrt{16-r^2}-\sqrt{3r^2}\right)r\,dr\,d\theta=-\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\left(-2r\sqrt{16-r^2}-\sqrt{3}r^2\right)dr\,d\theta$$

$$\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-\frac{\sqrt{3}}{3}r^3\Big|_0^2=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{3}(16-r^2)^{3/2}-\frac{\sqrt{3}}{3}r^3\Big|_0^2\right)d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{3}(16-4)^{3/2}-\frac{\sqrt{3}}{3}8\right)-\left(\frac{2}{3}(16)^{3/2}\right)\right]=\frac{2}{3}\left((2)^{10}-\frac{\sqrt{3}}{3}8\right)-\left(\frac{2}{3}(2)^6\right)$$

$$(2^4)^{3/2}=2^6$$

جرم جسم:

$$M=\iiint_G \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

PAN

Subject:

Date:

گشتاور جرم نسبت به صفحه‌ها:

$$M_{xy} = \iiint z\, f(x,y,z)\, dv$$

$$M_{yz} = \iiint x\, f(x,y,z)\, dv$$

$$M_{xz} = \iiint y\, f(x,y,z)\, dv$$

مختصات مرکز ثقل:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{1}{M} \iiint x\, f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{1}{M} \iiint y\, f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{1}{M} \iiint z\, f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

گشتاور دوم نسبت به محورهای مختصات:

$$I_x = \iiint (y^2+z^2)\, f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

$$I_y = \iiint (x^2+y^2)\, f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

$$I_z = \iiint (x^2+y^2)\, f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

PAN

Subject :

Date :

$I_0 = \iiint (x^2+y^2+z^2)\, f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$ ✓

[illegible] به صفحه [illegible]:

$I_{xy} = \iiint z^2 f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$ ✓

$I_{yz} = \iiint x^2 f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$ ✓

$I_{xz} = \iiint y^2 f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$ ✓

example: جرم جسمی که بین $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ و $z=0$ محصور شده است هرگاه چگالی در هر نقطه متناسب با مجذور فاصله آن نقطه از مبدأ باشد

است معادله سطح را بیابید. $x^2+y^2=25 \leftarrow 25-x^2-y^2=0 \leftarrow z=0$ [illegible] $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$

سطح نیم‌کره چون $x^2+y^2=25 \leftarrow \sqrt{25-x^2-y^2}$ به شعاع ۵ و چون $z=0$ صفحه روی زمین است

همچنین ارتفاع صفر است. $f=k\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 \rightarrow f=k(x^2+y^2+z^2)$

$M=\iiint k(x^2+y^2+z^2)\, dG = \int_{x=-5}^{5}\int_{y=-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{25-x^2-y^2}} k(x^2+y^2+z^2)\, dz\, dy\, dx$

درست نشده

$x^2+y^2+z^2=25 \xrightarrow{z=0} x^2+y^2=25 \rightarrow x^2-25=y \rightarrow y=\pm\sqrt{25-x^2}$

چون نیم‌کره [illegible] است [illegible] داریم.

PAN

Subject :   Date :

$$M = k\int_0^{2\pi=\theta}\int_{0=\varphi}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{5} \underbrace{(r^2\sin\varphi)}_{\text{ژ}}\, r^2\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

متغیر

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi\cos\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \longrightarrow x^2+y^2+z^2 = r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(\sin\varphi)\left(\frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^5\right] d\varphi\, d\theta = 625k\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = 625k\int_0^{2\pi} (-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\, d\theta$$

$$= 625k\, \theta\Big|_0^{2\pi} = 1250k\pi$$

$\bar{z}$ به دست می‌آوریم $= \frac{M_{xy}}{M}$

important ← مرکز ثقل معمولاً سه تا حساب می‌کنیم. اما اینجا مستقیم به دست می‌آید.

در سوال‌های امتحان ۲ تا از مرکز ثقل‌ها صفر می‌شود و دیگر احتیاج به حساب نیست.

دلیل تقارن: چون مرکز ثقل روی محور z هاست پس $\bar{x}$ و $\bar{y}$ صفر می‌شود و ما فقط $\bar{z}$ را حساب می‌کنیم.

$$M_{xy} = \iiint z\,\rho\, dG = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{5} \underbrace{(r\cos\theta)}_{z}\underbrace{(kr^2)}_{\rho}\underbrace{(r^2\sin\varphi)}_{\text{ژ}}\, dr\, d\varphi\, d\theta = k\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)(\sin\varphi)\left(\frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^5 d\varphi\, d\theta$$

$$= \frac{15625k}{6}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)(\sin\varphi)\, d\varphi\, d\theta = \frac{-15625k}{6}\int_0^{2\pi} (\cos\theta)(\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\, d\theta$$

$$= \frac{15625k}{6}\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos\theta\, d\theta}_{\downarrow} = 0$$

$$\sin\theta\Big|_0^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 0 = 0$$

PAN

Subject :

Date :

example: مرکز جرم جسمی از بالا به کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ و از پایین به مخروط $x^2+y^2=z^2\tan^2 a$ محصور است مختصات

مرکز ثقل را بیابید. $\rho=1$ (چگالی ۱)

مثال متقارن نسبت به x, y پس $\bar{x}=\bar{y}=0$ است. (چون جسم متقارن نسبت به محور z ها می‌باشد).

چون جرم جسم برابر $M=V$ است چون $\rho=\frac{m}{V}$, $\rho=1$ $\rightarrow$ $M=V$.

$$\bar{z}=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{M_{xy}}{V}$$

مشترک دو رویه را می‌یابیم

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=z^2\tan^2\theta \end{cases}$$

$$z^2\tan^2 a+z^2=a^2 \rightarrow z^2(1+\tan^2 a)=a^2$$

$$z^2=\frac{a^2}{1+\tan^2 a}=a^2\cos^2 a$$ ، فرمول مثلثاتی $$\frac{1}{1+\tan^2 a}=\cos^2 a$$

به دست آوردن r $\rightarrow$ $x^2+y^2+a^2\cos^2 a=a^2 \rightarrow x^2+y^2=a^2\sin^2 a$ (شعاع دایره برابر با $a\sin a$)

شعاع و z را داریم

(تغییر متغیر قطبی استوانه‌ای می‌دهیم)

(دیفرانسیل ...)

دقت کنید

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{a\sin a}\int_{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{\tan^2 a}}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{a\sin a}(r)\left(\sqrt{a^2-r^2}-\frac{r}{\tan a}\right)dr\,d\theta$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{a\sin a}\left(r\sqrt{a^2-r^2}-\frac{r^2}{\tan a}\right)dr\,d\theta$$

Subject : Date :

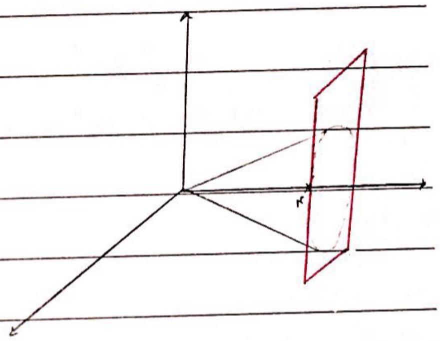
$$V = \int_0^{2\pi} \left[\left(-\frac{1}{3} (a^2 - r^2)\sqrt{a^2 - r^2} - \frac{r^3}{3\tan a} \right) \Bigg|_0^{r = a\sin a} \right] d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{3} \left(a^3\cos^3 a - \frac{a^3 \sin^3 a}{3\tan a} \right) d\theta = (2\pi)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(a^3\cos^3 a - \frac{a^3 \sin^3 a}{3\tan a}\right)$$

Example : جسمی توسط مخروط $4x^2 + y^2 = z^2$ و صفحه $y = 4$ محصور شده است اگر چگالی جسم این سطح $f = kz$ باشد آن‌گاه گشتاور

جرم این جسم را نسبت به صفحه xz بیابید.

$$M_{xz} = \iiint y f(x,y,z)$$



$$M_{xz} = \int_{y=0}^{4} \int_{x=0}^{y/2} \int_{z=0}^{\sqrt{y^2 - 4x^2}} ykz \, dz \, dx \, dy$$

$$= \int_0^4 \int_0^{y/2} \left(\frac{ky}{2}\right)\left(z^2 \Big|_0^{\sqrt{y^2 - 4x^2}} \right) dx \, dy$$

$$= \int_0^4 \int_0^{y/2} \left(\frac{ky}{2}\right)(y^2 - 4x^2) \, dx \, dy = \int_0^4 \left(\frac{ky}{2}\right)\left(y^2 x - \frac{4}{3} x^3 \right)\Big|_0^{y/2} dy$$

$$M_{xz} = \int_0^4 \left(\frac{ky}{2}\right)\left(\frac{y^3}{2}\right)\left(\frac{y^3}{2} - \frac{y^3}{6}\right) dy = k\int_0^4 \left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^4}{12}\right) dy = k\int_0^4 \left(\frac{y^4}{6}\right) dy = \left(\frac{k}{6}\right)\frac{y^5}{5}\Bigg|_0^4$$

$$= \left[\left(\frac{k}{20}\right)(1024)\right] f$$

PAN

Subject :   Date :

فصل چهارم

انتگرال های خم:

فرض کنید $\overline{AB}$ در صفحه ی xy یک خم هموار باشد و اگر P تقسیم بندی خم $\overline{AB}$ به قطعه هایی به صورت $P=\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$

اگر Δl_k را طول خم $\overline{A_{k-1}A_k}$ در نظر بگیریم آن گاه $\|P\| = \max\{\Delta l_1, \dots, \Delta l_n\}$.

definition: فرض کنید $M_k(x_k, y_k)$ نقطه ای روی خم $\overline{A_{k-1}A_k}$ باشد اگر $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta l_k$ موجود باشد آن گاه آن

را انتگرال نوع اول خم f روی $\overline{AB}$ می نامیم.

نحوه ی محاسبه انتگرال نوع اول خم تابع f:

فرض کنید خم C به وسیله معادله $\vec{r}(l) = x(l)\vec{i} + y(l)\vec{j}$ داده شده باشد، در این صورت انتگرال $\int_{AB} f(M)\,dl = \int_0^{l} f(x(l), y(l))\,dl$.

$$\int_{AB} f(M)\,dl = \int_{l_1}^{l_2} f(x(l), y(l))\sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2}\,dl$$

example: خم C با معادله $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ مفروض است، $0 \le t \le 2\pi$ مقدار انتگرال $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,dl$ را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} x' = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) \\ y' = a(\cos t - \cos t + t\sin t) \end{cases}$$

$$\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(\cos^2 t + t^2\sin^2 t + t\sin 2t + \sin^2 t + t^2\cos^2 t - t\sin 2t)}\ \sqrt{a^2 t^2\sin^2 t + a^2 t^2\cos^2 t}\ dt$$

PAN

Subject:

Date:

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1+t^2)}\,\sqrt{a^2t^2}\,dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}2t\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{a^2}{2}\int\sqrt{u}\,du=\frac{a^2}{2}\,\frac{u^{3/2}}{3/2}=\left(\frac{a^2}{3}\right)(1+t^2)$$

$$\left(\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

انتگرال خم در فضا:

خم هموار C را در دستگاه xyz را توسط تعدادی متناهی نقطه به صورت $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}=P$ نشان می‌دهیم.

ازای $n, \dots, k=1$ نقطه دلخواه (x_k, y_k, z_k) را روی $\overline{A_{k-1}A_k}$ انتخاب می‌کنیم و طول $\overline{A_{k-1}A_k}$ را با Δl_k نشان می‌دهیم آنگاه مجموع ریمان

زیر را داریم.

definition: فرض کنیم تابع f روی خم C تعریف شده باشد اگر $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta l_k$ موجود باشد این حد را انتگرال

خم تابع f روی C نامیده و به صورت $\int_C f(x_k, y_k, z_k)\,dl$ نمایش می‌دهیم. اگر معادلات پارامتری خم C به صورت:

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \qquad a\le t\le b \\ z=z(t) \end{cases}$$

باشد به صورت: $dl=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt$.

$$\int_C f(x,y,z)\,dl=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\times\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt$$

example: انتگرال $\int_C (x^2+y^2+z^2)\,dl$ را روی خم $C:\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=bt \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ محاسبه کنید.

$$\begin{cases} x' = -a\sin t \\ y' = a\cos t \\ z' = b \end{cases} \qquad \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + (b)^2}\,(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}) + b^2t^2 \times \sqrt{a^2+b^2}\,dt = \int_0^{2\pi} (a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi} a^2t + \frac{b^2t^3}{3}$$

deflection : اگر F یک میدان برداری روی خم C پیوسته باشد و هم‌چنین T یک میدان برداری مماس واحد بر C باشد آن‌گاه انتگرال نوع دوم چنین تعریف می‌شود

$$\int_C F\cdot dr = \int F(x,y,z)\,T(x,y,z)\,dl$$

Point : کار انجام شده روی خم C توسط میدان F در واقع همان انتگرال نوع دوم خم است.

$$W = \int F\cdot dr$$

نحوه محاسبه :

خم را باید معمولاً با توجه به داده‌ها به صورت پارامتری بنویسیم

$$C:\ \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$T(x,y,z) = \frac{\dfrac{dr(t)}{dt}}{\left\|\dfrac{dr(t)}{dt}\right\|}$$

$$W = \int F\cdot dr = \int F(x(t),y(t),z(t))\cdot\frac{\dfrac{dr(t)}{dt}}{\left\|\dfrac{dr(t)}{dt}\right\|} = \int F(x(t),y(t),z(t))\cdot\frac{dr(t)}{dt}\,dt$$

Subject :　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　Date :

(این مبحث خیلی مهم است سوال می‌آید ٪)

example: کار انجام شده توسط $F = (-2y)\vec{i} + (xz)\vec{j} + (xy)\vec{k}$ روی خم $C: r(t) = (\cos t)\,\vec{i} + (\sin t)\,\vec{j} + t\vec{k}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \downarrow x \qquad\quad \downarrow y \quad \downarrow z$

$0 \le t \le 2\pi$ را به دست آورید.

$$W = \int F.dr = \int_0^{2\pi} (-t\sin t\,\vec{i} + t\cos t\,\vec{j} + \sin t\cos t\,\vec{k})(-\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k})\,dt$$

ضرب برداری $$= \int_0^{2\pi} (t\sin^2 t + t\cos^2 t + \frac{1}{2}\sin 2t)\,dt = \int_0^{2\pi} (t + \frac{1}{2}\sin 2t)\,dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{4}\cos 2t \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi^2$$

point: همه را بر حسب t بنویسیم می‌توان بدست آورد به صورت زیر.

$$\int_C \vec{F}.\vec{dr} = \int F(x(t), y(t), z(t)) . \frac{dr}{dt}\,dt = \int F(x(t), y(t), z(t)).\left(\frac{dx(t)}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\,\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\,\vec{k}\right)dt = \int (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}).\left(\frac{dx(t)}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\,\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\,\vec{k}\right)dt$$

$$= \int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

example:

PAN

$$I=\int_c (2xy+z^2)\,dx+(x^2)\,dy+(2xz+\pi\cos z)\,dz$$

$$A\left(1,-1,-\tfrac{1}{2}\right)\longrightarrow B\left(1,1,\tfrac{1}{2}\right)$$

بردار هادی $\overrightarrow{AB}=B-A=(0,2,1)$

معادله خط $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ (a,b,c) بردار هادی

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+\frac{1}{2}}{1}\longrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2t-1\\ z=t-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$c:\ \overrightarrow{r(t)}=(1)\vec{i}+(2t-1)\vec{j}+\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\vec{k}\quad z=t-\tfrac{1}{2}$$

به جای z و y و x باید در معادله اصلی جای گذاری کنیم.

$$I=\int F\cdot dr=\int_a^b \left(2(2t-1)+\left(t-\tfrac{1}{2}\right)^2\right)\underbrace{(0)}_{\text{بردار هادی}}+(1)\underbrace{(2)}_{\text{بردار هادی}}dt+\left(2t-1+\pi\cos\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\right)(1)\,dt$$

$$I=\int_a^b 2\,dt+\left(2t-1+\pi\cos\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\right)dt$$

برای بدست آوردن t باید y و z را مساوی کدام مقادیر قرار دهیم.

$$y=2t-1\xrightarrow{-1}-1=2t-1\longrightarrow t=0$$

پس $a=0$, $b=1$ است.

$$y=2t-1\xrightarrow{y=1}1=2t-1\longrightarrow t=1$$

$$z=t-\tfrac{1}{2}\xrightarrow{z=-\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}=t-\tfrac{1}{2}\longrightarrow t=0$$

$$z=t-\tfrac{1}{2}\xrightarrow{z=\frac{1}{2}}\tfrac{1}{2}=t-\tfrac{1}{2}\longrightarrow t=1$$

Subject .... Date ....

point: اگر خم را بخواهد طول را نسبت به حسب سرعت محاسبه کنیم

$$= \left(t + t^2 + \pi \sin\left(t - \frac{1}{2}\right)\right)\Big|_0^1 = 2 + \pi \sin\left(\frac{1}{2}\right) - \pi \sin\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 + 2\pi \sin\left(\frac{1}{2}\right)$$

جرم سیم:

اگر خم C را به صورت یک سیم نازک در نظر بگیریم و چگالی آن را در هر نقطه با $f(x,y,z)$ نشان دهیم آن‌گاه جرم سیم به وسیله انتگرال

خم بر حسب طول قوس محاسبه می‌شود. اگر طول قوس را با dl نشان دهیم آن‌گاه:

$$M = \int_C f(x,y,z)\,dl$$

example: اگر $z^2 + y^2 + x^2 = f$ چگالی سیم مارپیچ با معادله برداری $0 \le t \le 2\pi$ باشد، $\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}$

آن‌گاه جرم سیم را محاسبه کنید.

$$dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt$$

$$dl = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$m = \int_C f(x,y,z)\,dl = \int_0^{2\pi} \left((a\cos t)^2 + (a\sin t)^2 + (bt)^2\right)\sqrt{a^2+b^2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2 + b^2t^2)\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\left(a^2 t + b^2\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(2\pi a^2 + 8\pi^3 \frac{b^2}{3}\right)$$

مختصات مرکز ثقل سیم:

1- $\bar{x} = \frac{1}{m}\int_C x f(x,y,z)\,dl$

2- $\bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y f(x,y,z)\,dl$

clips

۳- $\bar{z} = \frac{1}{m}\int_c z f(x,y,z)\,dl$

گشتاور ماند:

۱- $I_L = \int_c d^2(x,y,z)\, f(x,y,z)\,dl$ ✓

۲- $I_x = \int_c (y^2+z^2)\, f(x,y,z)\,dl$ ✓

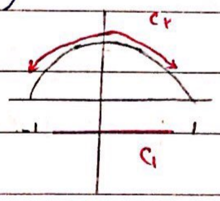
۳- $I_y = \int_c (x^2+y^2)\, f(x,y,z)\,dl$ ✓

۴- $I_z = \int_c (x^2+y^2)\, f(x,y,z)\,dl$ ✓

example: خم C نیم‌دایره‌ای است به مرکز مبدأ و شعاع یک. مطلوب است محاسبه انتگرال مقابل.

$\oint_c e^{x^2}dx + x\,dy$

point: این دایره بر روی انتگرال مسیر یعنی خم بسته است.



$y - y_0 =$ معادله خط

$y - 0 = 0(x-(-1))$ $\qquad y = 0$

$\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right. \qquad \left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$

$c_1 : \vec{r_1}(t) = t\,\vec{i} + 0\,\vec{j} \qquad -1 \le t \le 1$ (معادله محور x ها $y = 0$ است)

$c_2 : \vec{r_2}(t) = (\cos t)\,\vec{i} + (\sin t)\,\vec{j} \qquad 0 \le t \le \pi$ به صورت پارامتری می‌نویسیم.

$I = \int_{-1}^{1} e^{t^2}\,dt + \int_{0}^{\pi} e^{\cos^2 t}(-\sin t)\,dt + (\cos t)(\cos t)\,dt$

Subject .... Date ....

قضیه اساسی انتگرال خم:

فرض کنید خم C دارای نقطه شروع (x_0, y_0, z_0) و نقطه پایان x و y و z باشد اگر تابع سه متغیره f در همه نقاط آن خم مشتق پذیر باشد

اگر بردار گرادیان تابع f روی خم C دارای مشتق پیوسته باشد آنگاه:

$$\int_C \nabla f \cdot \vec{dr} = f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0)$$

(شروع - پایان)

example: خم C با معادله $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ نقطه $(1,0,0)$ را به $(1,0,2\pi)$ وصل می‌کند
ابتدا — انتها

$(y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2) = f$ باشد حاصل انتگرال زیر را بیابید.

$$\int \vec{f} \cdot \vec{dr}$$

$$\int \vec{f}\cdot\vec{dr} = \int_a^b (t^3\sin^2 t, (2\sin t\cos t)t^3, 3t^2\sin^2 t\cos t)\cdot(-\sin t, \cos t, 1)\,dt$$

$$\int (-t^3\sin^3 t, 2t^3\sin\cos^2 t, 3t^2\sin^2 t\cos t)\,dt = t^2\sin t(t\sin^2 t - 2t\cos^2 t - 3\sin t\cos t)$$

برای بدست آوردن a و b باید برای نقاط ابتدا و انتها معادله خم را برابر قرار دهیم و از آن t را بدست می‌آوریم.

حالا راه دوم می‌رویم طبق قضیه اساسی انتگرال خم:

نقطه انتها — نقطه ابتدا

$$\int f\cdot dr = \int \nabla(xy^2z^3)\cdot dr = f(1,0,2\pi) - f(1,0,0) = 0 - 0 = 0$$

$$f(y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2) = \nabla(xy^2z^3)$$

premiss: اگر f گرادیان یک تابع پیوسته و مشتق پذیر باشد مانند f باشد آنگاه انتگرال $\int_C f\cdot dr$ به مسیر بستگی ندارد.

premiss: اگر خم C دو مسیر C با جهت دار باشد و f در C پیوسته باشد و اگر $\int_C f\cdot dr$ به مسیر بستگی ندارد آنگاه $\int_C f\cdot dr = 0$.

result: فرض کنید P، Q، R در ناحیه D پیوسته باشند و برای تابع f ، $df = Pdx + Qdy + Rdz$ برقرار باشد (یعنی دیفرانسیل کامل باشد)

در ناحیه D برای هر دو نقطه دلخواه (x_0, y_0, z_0) و (x_1, y_1, z_1) از مسیر مستقل بوده و رابطه زیر برقرار است.

$$\int P dx + Q dy + R dz = f(x_1, y_1, z_1) - f(x_0, y_0, z_0)$$

اگر منحنی C بسته باشد آنگاه $\oint P dx + Q dy + R dz$ مساوی صفر می‌شود.

example: $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(-1,-2)} (y^2 - 2xy)\,dx + (2xy - x^2)\,dy =$

$P = y^2 - 2xy \longrightarrow P_y = 2y - 2x$

پس معادله کامل است.

$Q = 2xy - x^2 \longrightarrow Q_x = 2y - 2x$

$df = Pdx + Qdy \longrightarrow f = \int P dx + g(y)$

در اینجا $g(y)$ مجهول است.

$f = \int (y^2 - 2xy)\,dx + g(y)$

$f = xy^2 - x^2 y + g(x, y)$

از f نسبت به y مشتق گرفته و حاصل را برابر Q قرار می‌دهیم.

$f_y = 2xy - x^2 + g'(y) = 2xy - x^2$

$g'(y) = 0 \longrightarrow g(y) = c$

$f = xy^2 - x^2 y + c$

$f(-1, -2) - f(1, 1) = (-4 + 2) - (1 - 1) = -2$

Subject .... Date ....

example:

فرض کنید منحنی C خمی است که (۰،۰،۰) را به نقطه (۱،۲،۳) وصل می‌کند در این صورت انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_C \underbrace{(yz + y + z)}_{P}dx + \underbrace{(xz + x + z)}_{Q}dy + \underbrace{(xy + y + x)}_{R}dz$$

$P_y = z + 1 = Q_x$

$P_z = y + 1 = R_z$ پس معادله کامل است.

$Q_z = x + 1 = R_y$

یعنی $Pdx + Qdy + Rdz$ دیفرانسیل کامل است.

$f(x,y,z) = \int (yz + y + z)\,dx + f(y,z)$

$= yzx + yx + zx + f(y,z) \longrightarrow f_y = zx + x + f_y(y,z) = xz + x + z$

$f_y(y,z) = z \longrightarrow f(y,z) = yz + f(z)$ از f نسبت به y مشتق می‌گیریم و با Q برابر می‌دهیم.

$f_z = yx + x + y + f'(z) = xy + x + y$ نسبت به z از f مشتق می‌گیریم.

$f'(z) = 0 \longrightarrow f(z) = c$ از f نسبت به z مشتق گرفته و با R برابر می‌دهیم.

$f(x,y,z) = xyz + xy + xz + yz + c$

f(۱،۲،۳) - f(۰،۰،۰) = ۱۷

به طور خلاصه: $f = yzx + yx + zx + yz + f(z)$

clips

Scanned with CamScanner

قضیه گرین در صفحه: ← very important

فرض کنید C یک منحنی ساده بسته قطعه‌ای هموار در صفحه xy باشد که در جهت مثبت، ناحیه D را محصور کرده است. اگر P و Q توابعی با مشتق‌های جزئی پیوسته

روی ناحیه باز D پیوسته باشند آنگاه:

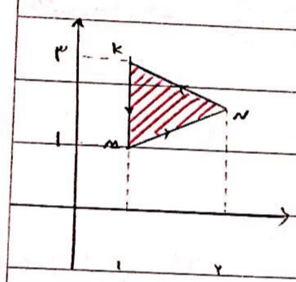
$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy \quad \text{یا} \quad dy\,dx$$

Example: اگر C مرز مثلثی باشد که از رئوس زیر تشکیل شده است حاصل انتگرال خم زیر را بدست آورید.

$$I = \int_C \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{P}\,dx + \underbrace{y\left(xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right)}_{Q}\,dy$$

خم بسته و ساده است، مشتق جزئی نیز دارند و مشتق‌ها پیوسته‌اند

پیمایش در جهت مثبت است چون پادساعتگرد است.



$M(1,1) \qquad N(2,2) \qquad K(1,3)$

از قضیه گرین استفاده کرده و جواب را بدست می‌آوریم.

$$I = \iint_D \left(y^2 + y\,\frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \left(\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right) dx\,dy = \int_1^2 \int_x^{-x+4} y^2\,dy\,dx = \int_1^2 \left(\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_x^{-x+4}\right) dx$$

ناحیه افقی: $1 \le x \le 2$

$x \le y \le -x+4$

$MN: \quad y-1 = (x-1)1 \longrightarrow y = x$

جهت مثبت خلاف عقربه‌های ساعت است.

$NK: \quad y-2 = -1(x-2) \longrightarrow y = -x+4$

Point: در حالت کلی جهت مثبت خلاف عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند.

Subject .... Date ....

$$= \frac{1}{2}\int \left((-x+4)^3 - x^3\right) dx = -\frac{1}{2}\int u^3\,du - \frac{1}{2}\int_0^2 x^3\,dx = -\frac{1}{12}u^4 - \frac{1}{8}x^4$$

$$= \left(-\frac{1}{12}(-x+4)^4 - \frac{1}{12}x^4\right)\Big|_0^2$$

محاسبه مساحت با استفاده از قضیه گرین:

$$\oint_C x\,dy = \iint_D (1)\,dx\,dy$$

$$S = \frac{1}{2}\oint_D x\,dy - y\,dx \longrightarrow \text{formol}^*$$

example: مساحت بیضی به معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را حساب کنید.

منحنی بیضی $C: (a\cos t)\vec{i} + (b\sin t)\vec{j} = \vec{r}(t)$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$S = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t) + (b\sin t)(a\sin t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \frac{1}{2}(2\pi)(ab)$$

$$= ab\pi$$

example: اگر C یک بیضی به معادله $4x^2 + 25y^2 = 100$ باشد آن‌گاه با استفاده از قضیه گرین انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$I = \int_C \underbrace{\frac{x^2 y}{x^2+1}}_{P}\,dx - \underbrace{\tan^{-1} x}_{Q}\,dy$$

$$C = 4x^2 + 25y^2 = 100$$

$$I = \oint \frac{x^2 y}{x^2+1}\,dx - \tan^{-1} x\,dy = \iint \left(\frac{-1}{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^2}\right) dx\,dy = \iint (-1)\,dx\,dy$$

$$\begin{cases} x = 5r\cos t \\ y = 2r\sin t \\ J = 5\times 2r \end{cases} \longrightarrow \int_{t=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} (-1)\times 5\times 2r \, dr\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{-10r^2}{2}\, dr\, dt = \int_0^{2\pi} (-5)(2\pi) = -10\pi$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

شعاع را از ضریب‌های زیر کسری محور x و y در معادله اصلی بدست می‌آوریم.

point
$$\begin{cases} x = ar\cos t \\ y = br\sin t \\ J = abr \end{cases}$$

محاسبه مساحت در مختصات قطبی:

$$M = \frac{1}{2}\oint_c r^2 \, d\varphi$$

very important

example : با استفاده از قضیه گرین مساحت محصور به معادله $r = a(1-\cos\varphi)$ را بیابید ($0 \le \varphi \le 2\pi$).

$$M = \frac{1}{2}\oint_c r^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\varphi)^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(\left(1+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) - 2\cos\varphi\right) d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\varphi + \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$$

example :

$$\int_{(0,0,0)}^{(\pi,\pi,\frac{1}{\pi})} \underbrace{(\cos x + 2yz)}_{P}\, dx + \underbrace{(\sin y + 2xz)}_{Q}\, dy + \underbrace{(z + 2xy)}_{R}\, dz =$$

$$\begin{cases} P_y = Q_x \longrightarrow 2z = 2z \\ P_z = R_x \longrightarrow 2y = 2y \\ Q_z = R_y \longrightarrow 2x = 2x \end{cases}$$

مستقل از مسیر

Subject .... Date ....

$F = \int P\,dx + f(y,z) = \int ((\cos x + 2yz)\,dx + f(y,z)) = \sin x + 2xyz + f(y,z) = \sin x + 2yzx + f(y,z)$

$2zx + f_y(y,z) = \sin y + 2xz$

$\xrightarrow[y]{\text{انتگرال نسبت به}} f(y,z) = -\cos y + f(z)$

$F = \sin x + 2yzx - \cos y + f(z)$

$\xrightarrow[z]{\text{مشتق نسبت به}} 2xy + f'(z) = z + 2xy \longrightarrow f'(z) = z \xrightarrow[z]{\text{انتگرال نسبت به}} f(z) = \frac{z^2}{2} + C$

$F = \sin x + 2xyz - \cos y + \frac{z^2}{2} + C$

$F(\pi, \pi, \frac{1}{\pi}) - F(0,0,0) = (\sin\pi + 2\pi \times \pi \times \frac{1}{\pi} - \cos\pi + \frac{\pi^2}{2}) - (0 + 0 - 1 + 0) = 2\pi + 1 + \frac{\pi^2}{2} + 1$

$= 2\pi + 2 + \frac{\pi^2}{2}$

examples: $\int_{(1,0,1)}^{(2,1,2)} (\underbrace{y^2z^3}_{P}\,dx + \underbrace{2xyz^3}_{Q}\,dy + \underbrace{3xy^2z^2}_{R}\,dz)$

$P_y = Q_x = 2yz^3$

$P_z = R_x = 3y^2z^2$ مستقل از مسیر است.

$Q_z = R_y = 6xyz^2$ ۱- نسبت به x انتگرال می‌گیریم. (۱)

$F = \int y^2z^3\,dx + f(y,z) = xy^2z^3 + f(y,z)$ ۲- سپس معادله را نسبت به y مشتق می‌گیریم.

$F_y = 2xyz^3 + f_y(y,z) = 2xyz^3$