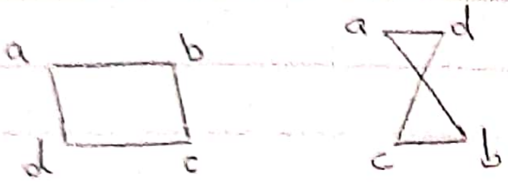
فصل دوم

دو گراف قطع کردن معنا ندارد.

Subject:

فصل دوم: مسیرها و دورها (مدارها)

تعریف: دو گراف را یکریخت گوئیم هرگاه این دو گراف از نظر اشیاء و روابط کاملاً بر هم منطبق باشد. در دو گراف یکریخت تعداد یالها و تعداد رئوس کاملاً یکسان هستند.



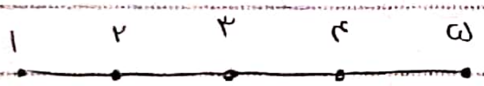
این دو گراف یکریخت هستند

این دو گراف یکریخت نیستند
(شرط لازم که باید تعداد رئوس و تعداد یال ها کاملا یکسان باشند را ندارد)

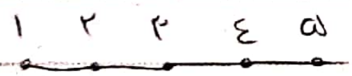
نکته ۱: گاه می روی یک مجموعه از اشیاء دو رابطه مستقلاً تعریف می شود گراف حاصل یکسان است و این دو گراف یکریخت هستند.

مثال: $V=\{1,2,3,4,5\}$

رابطه ۱: دو شی با هم رابطه دارند هرگاه اختلاف این دو شی یک واحد باشد

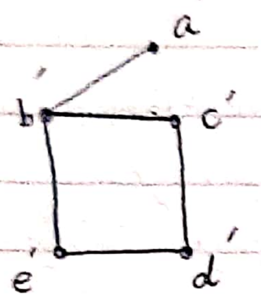


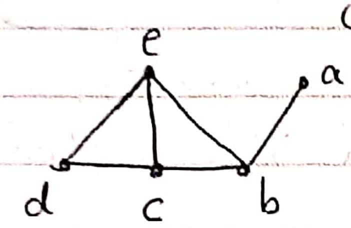
رابطه ۲: دو شی با هم رابطه دارند هرگاه یکی فرد و دیگری زوج و دو عدد متوالی باشند.



تعریف: $G_1=(V_1,E_1)$ و $G_2=(V_2,E_2)$ یکریخت اند اگر تابع $f: V_1 \longrightarrow V_2$ وجود داشته باشد که یک به یک و پوشا باشند، اگر $\{a,b\}$ یک یال در G_1 باشد، آنگاه $\{f(a),f(b)\}$ هم یال در G_2 باشند.

مثال: دو گراف زیر یکریخت هستند.





نکته! اشیا یکسان باشند باید روابط را طوری تعریف کنیم که یال های آن ها نظیر به نظیر باهم برابر باشند.

+ اگر دو گراف یکریخت باشند، آنگاه:

۱. تعداد رئوس و یال ها در دو گراف برابرند.

۲. تعداد رئوس از درجه k در دو گراف نیز برابرند.

۳. اگر رأسی از درجه m در یکی با رأس درجه k به عنوان همسایه (مجاور) داشته باشد باید در دیگری هم این خاصیت موجود باشد.

زیرگراف یک گراف: هر زیرگراف خود یک گراف است

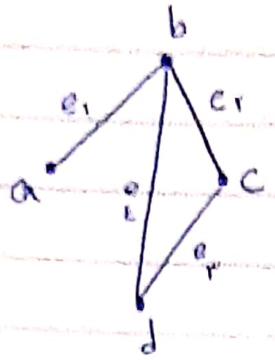
اگر $G=(V,E)$ یک گراف باشد. گراف $G'=(V',E')$ را یک زیرگراف G گوئیم هرگاه $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$. (در گراف و زیرگراف رابطه یکی است)

بنابراین E' باید نشان دهنده رابطه روی V' باشد و E' رابطه تعریف شده در E است منتها روی V'

مولفه یک یال تک راسی است. بنابراین هر مولفه زیرگراف G یک زیرگراف G است

Subject . Date

به عنوان مثال :



$V' = \{a, b\}$
$E' = \{e_1\}$

$V' = \{a, c\}$
$E' = \varnothing$

$V' = \{b, c, d\}$
$E' = \{e_2\}$

خواص زیرگراف :

۱. هر گرافی زیرگراف خودش است.

۲. هر زیرگراف از یک زیرگراف G، نیز یک زیرگراف G است.

۳. هر رأس تنها از گراف G نیز یک زیرگراف G است.

۴. هر یال تنها نیز در G نیز یک زیرگراف G است.

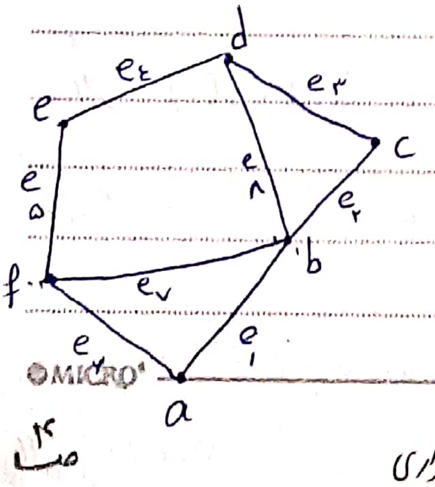
۵. هر طوقه در گراف G یک زیرگراف G است.

راه - مسیر - دور

تعریف راه : یک دنباله از رئوس و یال ها مانند $v_1 e_1 v_2 e_2 \ldots, v_n e_n v_{n+1}$

که $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$

مثال :



راه است
راس تکراری
یال تکراری
$\{d e_3 c e_2 b e_1 a e_6 f e_7 b e_2 c\}$

جاده است
با رأس تکراری
$\{e e_5 f e_6 a e_1 b e_7 f\}$

Scanned by CamScanner

Subject : Date

مسیر است
یال تکراری
نه راس تکراری
$\{ d e_{۲} b e_{۱} a e_{۴} f \}$

+ یک دنباله متناوب و متناهی از رئوس و یال ها که از یک راس شروع و به یک راس دیگر خاتمه می یابد یک راه است.

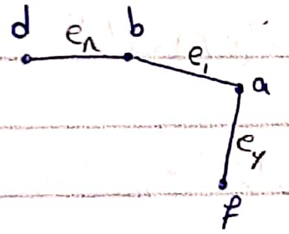
راه باز: راهی است که راس ابتدایی و انتهایی آن یکسان نیست.

* راه بازی که در آن راس تکراری نداشته باشیم یک مسیر نامیده می شود.

نکته: اگر راهی راس تکراری نداشته باشد آنگاه یال تکراری هم ندارد.

در مسیر: راس های انتهایی از درجه ۱ و راس های میانی (غیر انتهایی) از درجه ۲ هستند

به عنوان مثال: (مثال قبل)



در اینجا d چون فقط رفت از درجه ۱
b هم آمد و هم رفت از درجه ۲
a هم آمد و هم رفت از درجه ۲
f فقط آمد از درجه ۱

راه بسته: راهی است که راس ابتدای آن با راس انتهایی آن برهم منطبق است.

مسیر بسته را یک دور می نامند.

path: مسیر ... مسیر n راسی را با P_n نمایش می دهیم.

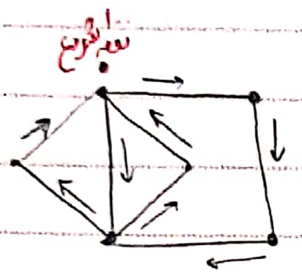
مدار از تمام راس ها الزاما نمی گذرد
مدار یال تکراری ندارد
دور راس تکراری ندارد

دور : cycle ...... دور n راسی را با C_n نشان می دهیم.
مدار : circuit

مدار ۲ راسی C_2

مدار ۳ راسی C_3

طوقه (مدار ۱ راسی)؟



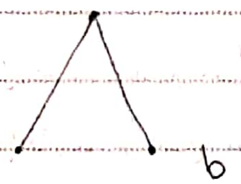
مدار یال تکراری ندارد
دور راس تکراری ندارد

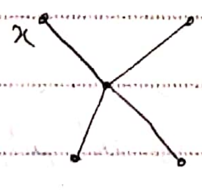
گراف همبند:

گراف همبند به طور عام یعنی گراف که هر دو راس را در نظر بگیریم با هم ارتباط داشته باشند توسط یال.

تعریف رسمی گراف همبند: گراف $G=(V,E)$ همبند گوئیم هرگاه بین هر دو راس آن یک مسیر وجود داشته باشد. در غیر اینصورت گراف را ناهمبند می نامیم.

به عنوان مثال:





گراف ناهمبند است چون بین a و b هیچ مسیری وجود ندارد.
بین x و b هیچ مسیری وجود ندارد.

افراز ← دو مجموعه ناتهی، اشتراک دو مجموعه تهی، اجتماع خود مجموعه را می‌سازد.

Subject : Date ....

تعریف: به هر یک از زیرگراف‌های همبند یک گراف ناهمبند یک مؤلفه همبندی می‌نامیم.

تمرین: یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه رئوس V از گراف دلخواه ساده G تعریف کنید که هر کلاس هم‌ارزی یک مؤلفه همبندی آن گراف باشد.

قضیه: گراف G ناهمبند است اگر و فقط اگر مجموعه رئوس $V(G)$ را بتوان به دو زیرمجموعه
دوشرطی
V_1 و V_2 چنان افراز کرد که هیچ یالی در G موجود نباشد که یک رأس آن در V_1 و رأس دیگری در V_2 باشد.

اثبات: وقتی که G ناهمبند است حداقل دو مؤلفه دارد. یک مؤلفه را مجموعه رئوس آن V_1 و مؤلفه‌های دیگر را مجموعه رئوس آنرا V_2 می‌نامیم. هیچ مسیری از رئوس در V_1 به رئوس در V_2 وجود ندارد. راسی در V_1 باشد a و راسی در V_2 باشد b وجود دارد که هیچ یالی بین این دو راس وجود ندارد. V_1 و V_2 هم افرازی از V هستند.

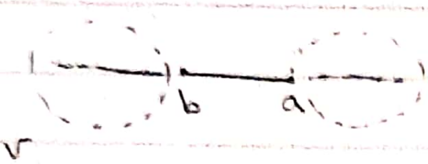
اثبات عکس: V_1 و V_2 افرازی از رئوس G باشند و هیچ یالی مانند e وجود ندارد که یک راس پایانی در V_1 و راس پایانی دیگر آن در V_2 باشد. حال ادعا می‌کنیم هیچ مسیری بین دو راس یک راس در V_1 و راس دیگر در V_2 باشد وجود ندارد. (برای اثبات فرض خلف را در نظر می‌گیریم)

مجموع درجات هر مؤلفه همیشه زوج است. چون هر یک مؤلفه خودش یک گراف است.

Subject . Date

اگر چنین باشد این مسیر در ۲ به a ختم می‌شود و این مسیر در ۲ به b ختم می‌شود در نتیجه می‌توانیم

یک یال b را به a وصل کنیم



در نتیجه یک یال پیدا شد که راس پایانی در ۱ و راس پایانی دیگر آن در ۲ است پس گراف

ناهمبند است، طبق تعریف.

قضیه: در هر گراف دلخواه اگر دقیقاً دو راس از درجه فرد داشته باشد آن گاه یک مسیر بین

این دو راس وجود دارد (چه گراف همبند باشد چه ناهمبند):

اثبات: اگر دقیقاً دو راس از درجه فرد داشته باشد این دو راس نمی‌توانند در دو مؤلفه متمایز باشند

چون در غیر اینصورت در یک مؤلفه که خود یک گراف است یک راس از درجه فرد خواهیم داشت

و این با نتایج قبل در تناقض است. لذا این دو راس در یک مؤلفه همبندی قرار دارند و واضح است

که یک مسیر بین این دو راس وجود دارد.

نتیجه: تمرین: در یک گراف دلخواه می‌توان مجموعه رئوس از درجه فرد را به مجموعه‌های دوتایی

چنان تقسیم‌بندی کرد که بین هر دو راس آن یک مسیر وجود دارد (لزوماً این تقسیم‌بندی

منحصر به فرد نیست).

MICRO

ص ۸، ۹

Subject :   Date ....

تعداد یال های یک گراف : در یک گراف n راسی حداکثر تعداد یالها $\frac{n(n-1)}{2}$ است .

نکته ! گراف کامل k_n همه این تعداد یال را دارد . اثبات :

$k_n = \frac{n(n-1)}{2}$

$\sum_{v\in V} \deg v = 2|E|$

$$\boxed{n(n-1) = 2|E| \Rightarrow |E| = \frac{n(n-1)}{2}}$$

روش دوم : راس اول $n-1$ راس دوم به $n-2$ ، راس سوم به $n-3$ که به اینها فرم ... وطبق گاوس جمع

تعداد یالهای گراف n راسی $\frac{n(n-1)}{2}$ است .

قضیه : اگر G دارای k مؤلفه $G_1, \ldots, G_k$ باشد

$$|E(G)| \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

اثبات : فرض کنیم مؤلفه G_i دارای n_i راس باشد و G دارای $n_1+n_2+\dots+n_k=n$ راس داشته

باشد . $(n_i \geq 1)$ طبق یک نامساوی در مبانی علوم ریاضی

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \leq n^2-(k-1)(2n-k)$$

چون هر مؤلفه خود یک گراف است ، و تعداد یالهای یک گراف حداکثر

$$|E(G_i)| \leq \frac{n_i(n_i-1)}{2}$$

است . پس داریم :

$$|E(G)| = |E(G_1)| + \dots + |E(G_k)| \leq \underbrace{\frac{n_1(n_1-1)}{2} + \frac{n_2(n_2-1)}{2} + \dots + \frac{n_k(n_k-1)}{2}}_{\text{قضیه اثبات بالا}}$$

$$= \frac{n_1^2-n_1}{2} + \frac{n_2^2-n_2}{2} + \dots + \frac{n_k^2-n_k}{2}$$

* گراف اویلری است اگر هر راس از درجه زوج است *

Subject . Date

$$= \frac{n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_k^2}{2} - \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_k}{2} \leq \frac{n^2 - (k-1)(2n-k)}{2} - \frac{n}{2}$$

$$|E(G)| \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

"گراف های اویلری (خط اویلری) : راه بسته ای که همه ی یال ها را دقیقاً یکبار بپیماید را یک مدار [اویلری گوییم]

راهی که از یک راس شروع همه یال ها را دقیقاً یکبار بپیماید و به راس شروع خاتمه یابد. به راه

بسته مذکور خط اویلری می نامند و گراف اویلری گرافی است که خط اویلری داشته باشد.

نکته: گراف اویلری همواره همبند است چون راس تنها نقشی در گراف اویلری ندارد و با تعریفی از گراف

اویلری کردیم گراف اویلری نمی تواند بیش از یک مؤلفه داشته باشد.

قضیه: گراف همبند G اویلری است اگر و تنها اگر همه ی راسهای گراف دارای درجه زوج باشند

اثبات: فرض کنیم G یک گراف اویلری باشد پس یک خط اویلری در این گراف وجود دارد. چون از هر یال

یکبار باید عبور کنیم بنابراین باید تعداد یال های برخورد کننده به هر راس همواره زوج باشد. این یعنی

درجه هر راس زوج است.

برعکس: فرض کنیم همه راس ها از درجه زوج باشند. یک راس مانند a را انتخاب می کنیم و شروع به

پیمایش می کنیم. یک دسته از یال ها را می پیماییم اگر رسیدیم به راس شروع و تمام یال های

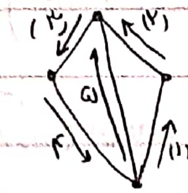
پیموده شده ی تمام است. در غیر اینصورت این تعداد یال هایی که پیموده شد از گراف

گراف همبند با درجه رئوس آن همه زوج است

Subject : Date

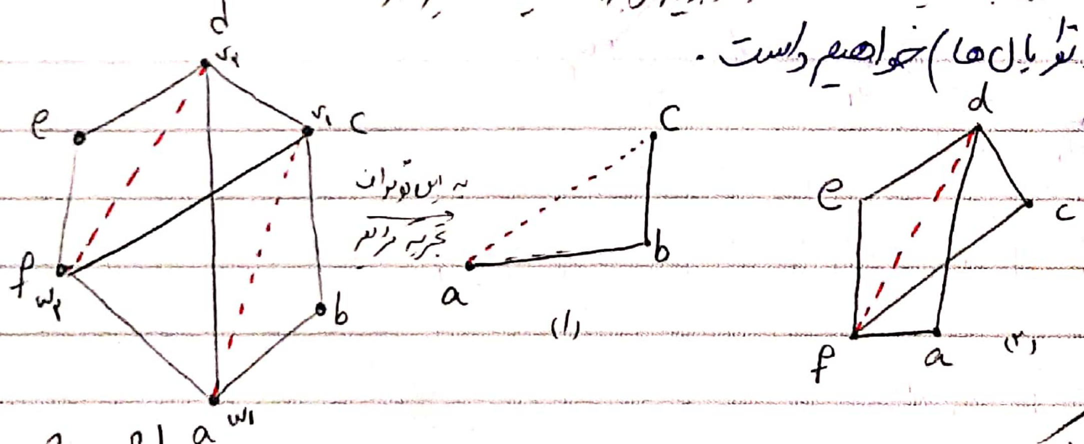
جدا می کنیم واضح است به ازای هر حالت اگر هر حلقه از اعمال روی یال حذف شده است ما باقیمانده نیز یک گراف با درجه های زوج است. حال در این باقیمانده با استقرا فرض کنیم یک خط اویلری بیابیم تعداد یال وجود دارد چون آن یال هایی که پیموده شده را به مجموعه خط اویلری اضافه کنیم یک خط اویلری تمام برگراف داده شده بوجود می آید. لذا حکم برقرار است.

گراف گویا یا گراف اویلری باز: اگر در گراف G از یک راس شروع به پیمایش بکنیم و همه ی یال ها را دقیقا یکبار بپیماییم و به راس دیگری برسیم (خاتمه دهیم) به گراف حاصل یک گراف گویا یا همان گراف اویلری باز می نامند. به آن راه پیموده شده (خط) خط اویلری باز یا خط گویا می نامند.

به عنوان مثال:  * دو راس از درجه فرد دارد. *

قضیه: اگر در گرافی $2k$ راس از درجه فرد داشته باشیم آنگاه در این گراف k خط گویای متمایز (از نظر یال ها) خواهیم داشت.

وقتی خط ac باشد یک مدار است اما اگر اضافه نبود هم مانند یک خط اویلری باز است.



اثبات: فرض کنیم $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ، $w_1, w_2, \ldots, w_k$ راس از درجه فرد داشته باشیم. پس

MICRO

Scanned by CamScanner

v_1 و w_1 یک یال اضافه می‌کنیم (این یال موازی یال‌های دیگر بین v_1 و w_1 هم باشد)
چندگانه

حال یک مدار اویلری در گراف جدید ایجاد می‌شود. از w_1 شروع به حرکت کرده بعضی از یال‌ها را می‌پیماییم

و به راس w_2 می‌رسیم. از w_2 به v_1 می‌رویم (به کمک همین یال) این مدار را اگر در گراف ،

گراف حاصل یک مدار اویلری است. آن مدار جدا شده با حذف یال $v_1 w_1$ یک خط گذر است.

حال دومین خط گذر را که از w_2 شروع شده و به w_3 ختم می‌شود از گراف جدا می‌کنیم و این روند را ادامه

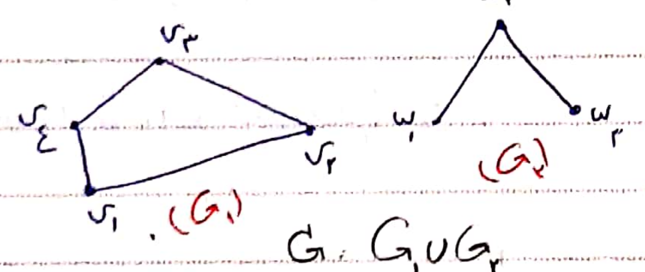
می‌دهیم تمام K خط گذرهای گراف بدست آید.

اعمال روی گراف:

1) عمل اجتماع: فرض کنیم $G_1=(V_1,E_1)$ و $G_2=(V_2,E_2)$ دو گراف دلخواه باشند

در اینصورت منظور از $G_1 \cup G_2$ گرافی است که در آن $V(G_1 \cup G_2)=V_1 \cup V_2$, $E(G_1 \cup G_2)=E_1 \cup E_2$

مثال 1:



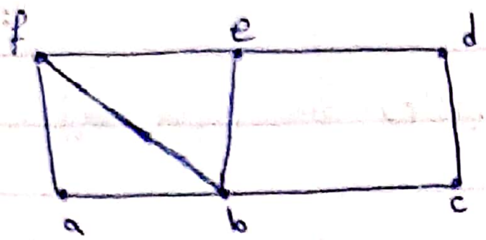
$G = G_1 \cup G_2$

$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, w_1, w_2, w_3\}$

$E(G)=E_1 \cup E_2$

یعنی راس مشترک یا یال مشترک نداشته باشد

Subject : Date



مثال (۲):

$G_1 = (V_1, E_1)$

$V_1 = \{a, b, e, f\}$

$E_1 = \{ab, be, bf, ef, fa\}$

$G_2 = (V_2, E_2)$

$V_2 = \{b, c, d, e\}$

$E_2 = \{bc, cd, de, eb\}$

$G = G_1 \cup G_2$

$V = V_1 \cup V_2 = \{a, b, c, d, e, f\}$

$E = \{ab, be, bf, ef, fa, bc, cd, de\}$

۲) عمل اشتراک: اگر G_1 و G_2 دو گراف باشند $G_1 \cap G_2$ گرافی است که در آن

$V(G_1 \cap G_2) = V(G_1) \cap V(G_2)$

$E(G_1 \cap G_2) = E(G_1) \cap E(G_2)$

مثال: به عنوان مثال در مثال (۱) داریم $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ چون اشتراک رئوس و یال هایشان تهی است.

در مثال (۲) داریم. چون $G_1 \cap G_2 = \overset{e \quad b}{\text{———}}$ ، $V(G_1 \cap G_2) = \{e, b\}$

$E(G_1 \cap G_2) = \{eb\}$

۳) جمع حلقه‌ای دو گراف: $\oplus$ نماد جمع حلقه‌ای است.

$G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$

$G_1 \oplus G_2 = G$

$V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$

$E(G) = (E(G_1) \cup E(G_2)) - (E(G_1) \cap E(G_2))$

تعیین $E(G_1 \oplus G_2)$ دقیقاً آن یال هایی است که فقط در G_1 یا فقط در G_2 باشند.

مثال: G_1 و G_2 یال مجزا دارند $G_1 \cup G_2 = G_1 \oplus G_2$

$G_1 \cap G_2$ پوچ ... اگر راس مشترک داشته باشد.
تهی ... اگر راس مشترک نداشته باشد.

نکته!: $G \oplus G$ = پوچ می شود.

نکته!: اگر G_1 یک زیرگراف از G باشد $G \oplus G_1 = \square$ (جواب گرافی است که از حذف یال های G_1 از G بدست می آید.)

تعریف تجزیه گراف: منظور از تجزیه یک گراف G به دو زیرگراف G_1 و G_2 تعیین

$G_1 \cup G_2 = G$ و $G_1 \cap G_2 =$ پوچ

اگر $G_1 \subseteq G$ (زیرگراف) آنگاه خواهیم داشت:

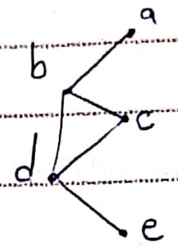
$G \oplus G_1 = G - G_1$

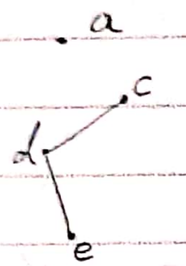
و آنرا مکمل یا متمم G_1 می نامند نسبت به خود G.

تمرین: اگر گرافی دارای m یال باشد آنگاه $2^{m-1} - 1$ حالات مختلف تجزیه دارد؟

در گراف G اگر یک راس v را از G حذف کنیم تمام یال های برخورد داشته به v نیز باید حذف شود. G-v یعنی گرافی که از حذف v و همه ی یال های برخورد داشته به v بوجود می آید.

مثال:





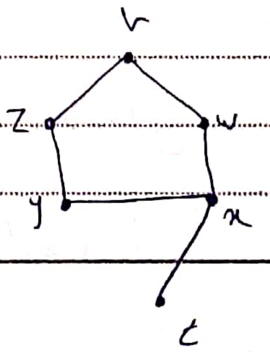
باید b را حذف و یال های که با آن برخورد می کند نیز حذف شود.

اگر e یک یال در G باشد G-e یعنی گرافی که از حذف یال e بوجود می آید در G-e هیچ راسی حذف نمی شود.

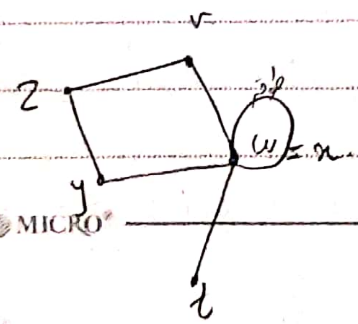
یال

عطف دو راس: اگر a و b در G دو راس باشند منظور از عطف a و b یعنی دو راس a و b را با هم منطبق کرده و تمام یال هایی که به a یا b برخورد می کردند در این حالت نیز برخورد خواهند داشت به a=b. و همینطور اگر a و b مجاور بودند در گراف، در این حالت نیز تبدیل به یک طوقه می شود.

مثال:

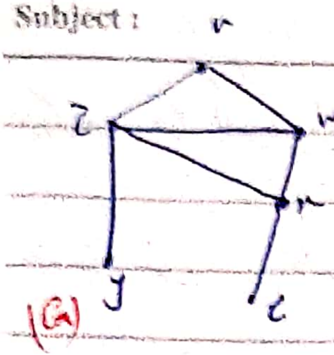


x را با w عطف کنید.

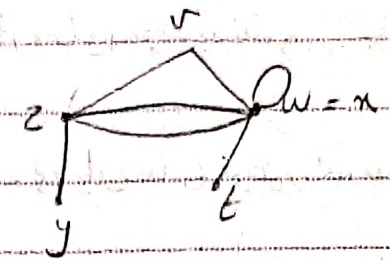


در عطف گراف حاصل زیرگراف گراف اولیه نیست. (لزوماً)

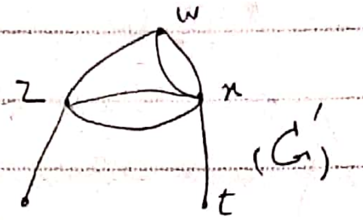
Subject: Date



x را با w عطف کنیم



z را با v عطف کنیم



G' زیرگراف G لزوماً نیست.

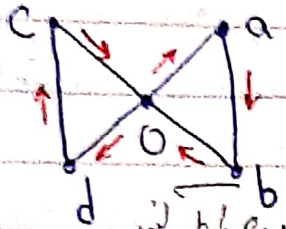
قضیه ۶.۲: یک گراف G اویلری است اگر و تنها اگر بتوان آن را به مدارها تجزیه کرد.

اثبات: وقتی G اویلری است آنگاه درجه هر راس زوج است. از راس v_1 شروع به پیمایش می‌کنیم به راسی مانند v_2 می‌رسیم این روند را ادامه داده تا در مرحله‌ای به v_1 برسیم اگر یال‌ها پیموده شده پس یک مدار داریم در غیر اینصورت این مدار پیموده شده را از مدار اصلی جدا می‌کنیم. باقیمانده مدار بجز راس‌های تنها همه از درجه زوج مثبت (یعنی به غیر از صفر) هستند گراف حاصل از چند مدار اویلری تشکیل شده است. این روند بالا را ادامه داده تا کاملاً به مدارها تجزیه شوند پس به این ترتیب هر گراف اویلری به مدارها تجزیه می‌شود.

برعکس: اگر یک گرافی به مدارها تجزیه شود چون درجه هر راس در هر مدار زوج است. لذا درجه هر راس در اجتماع این مدارها زوج است. لذا گراف G اویلری است.

Subject :   Date ....

راس گذرای دلخواه :



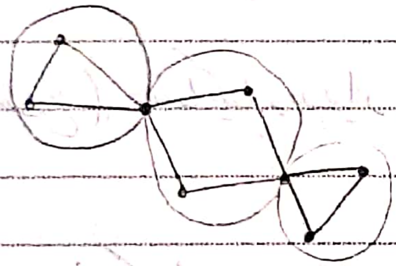
به عنوان مثال داریم: o اگر از نقطه o حرکت کنیم از هر طرفی بتوان حرکت کرد دوباره به o شروع برسیم (خودش حواسش هست)

اما اگر از نقطه a حرکت کرد باید خودمان هدایتش کنیم تا همه راس های پیموده نشده را طی کنیم

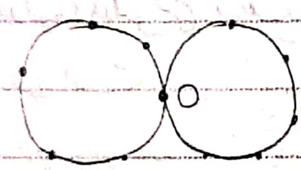
به o راس گذرای دلخواه می گوییم

تعریف: راس v در گراف اویلری G را راس گذرای دلخواه گوییم هرگاه شروع از این راس بر هر یال نپیموده شده مدار اویلری را طی می کند.

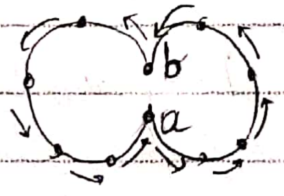
نکته: لزومی ندارد یک گراف اگر اویلری باشد راس گذرای دلخواه داشته باشد.

۱) 

این گراف راس گذرای دلخواه ندارد و به ۳ مدار تجزیه شده است

۲) 

o تنها راس گذرای دلخواه است و به ۲ مدار تجزیه می شود.

۳) 

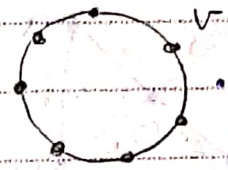
۲ راس گذرای دلخواه دارد a و b

MICRO

در پیمایش اویلری راس تکراری اعتبار ندارد یعنی راس تکراری داشته باشیم در اویلری اما یال تکراری نباید داشته باشیم

Subject : Date

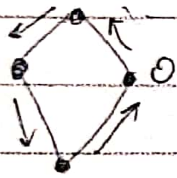
قضیه ۲.۷ : گراف اویلری G گذرای دلخواه در راس v است اگر و تنها اگر v در هر مدار G باشد.

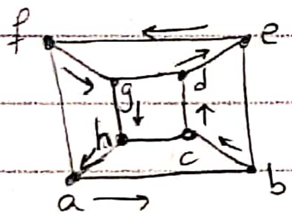


اثبات : وقتی v در هر مدار باشد یعنی از v میتوان از هر یال عبور کرد و اگر به v برسیم بعد از آن نیز میتوان از آن یال دیگر از مدار دیگر حرکت کرد پس v راس گذرای دلخواه است

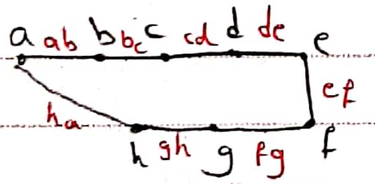
برعکس : یعنی از v میتوان به هر سمتی حرکت کرد پس v در هر مداری قرار دارد

مدار و مسیر همیلتونی : یک مدار یا دور همیلتنی یعنی دوری که همه راس های گراف (بجز راس شروع) دقیقا یکبار ببیند و به راس شروع خاتمه دهد.





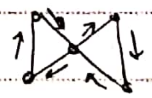
نکته! مدارهای همیلتونی در یک گراف n راسی دقیقا n یال دارد



۸ راس

۸ یال

۱) مثال

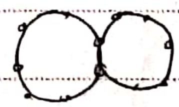


اویلری است

مدار همیلتونی ندارد

چون یک راس ۲ بار پیموده میشود

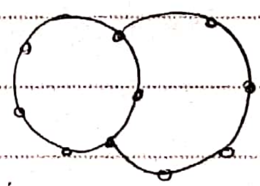
۲) مثال



مدار همیلتونی دارد.

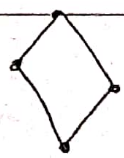
اویلری نیست چون راس درجه ۳ دارد

۳) مثال



دارای مدار همیلتونی نیست.

۱۴ مثال



هم اویلری هم همیلتونی

Subject: Date ....

نکته! هیچ ارتباطی بین گراف های اویلری و هامیلتونی وجود ندارد. (ماشینکال های قبل)

شرح: در سال ۱۸۵۹ میلادی هامیلتون مسئله طرح کرد که شرط لازم و کافی

برای وجود یک دور هامیلتونی در یک گراف را بیان کند. از آن سال تا به حال کسی

این مسئله را نتوانست پاسخ بدهد.

کار دیگر هامیلتون ساختن یک وسیله بازی ۱۲ وجهی ۲۰ راسی بود که هر وجه یک پنج ضلعی

(جمعاً ۲۰ راسی) بود. ایشان ۲۰ شهر را روی این ۲۰ راس نوشت و سوال این بود که آیا

می توان از یک راس (شهر) شروع به پیمایش کرد و همه شهرها را یکبار پیمود و به شهر شروع رسید؟

و کارخانه ای این را به عنوان پروژه اسباب بازی از ایشان خرید. به ۱۲ وجهی فوق ۱۲ وجهی دور

هامیلتون می گوییم.

تعریف: مسیر هامیلتونی یعنی یک مسیری که شامل همه راس ها بوده و راس شروع با راس

پایانی متفاوت باشند.

نکته! اگر در گرافی دور هامیلتونی وجود داشته باشد با حذف یک یال از آن دور یک مسیر هامیلتونی

بدست می آید.

نکته ~~اگر در گرافی راسی از درجه ۱ موجود باشد در آن گراف دور هامیلتونی وجود ندارد.~~ اما مسیر

هامیلتونی ممکن است وجود داشته باشد.

۱ 

در این گراف مسیر هامیلتونی وجود دارد ولی
دور هامیلتونی ندارد.

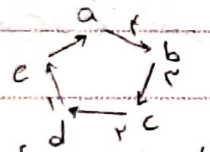
۲ 

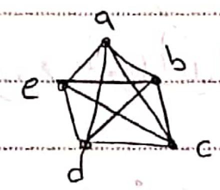
در این گراف نه مسیر و نه دور هامیلتونی وجود ندارد.

گزاره : در یک گراف کامل n راسی چه تعداد دور هامیلتونی وجود دارد؟

پس در K_n حداقل یک دور هامیلتونی وجود دارد. تعداد دورهای هامیلتونی $(n-1)!$ است و
چون دور تکراری داریم (یعنی تعداد دورهای متفاوت یعنی حداقل در یک یال متفاوت باشند) بنابراین تعداد دورهای
همیلتنی برابر است با $\frac{(n-1)!}{2}$.

به عنوان مثال





$4 \times 3 \times 2 \times 1 = (n-1)!$

چون از a به b و از a به e دور فرقی ندارد پس تقسیم بر ۲
می‌کنیم بنابراین $\frac{(n-1)!}{2}$ می‌شود

نکته : تعداد دور همیلتنی در یک گراف کامل n راسی دقیقاً برابر با $\frac{(n-1)!}{2}$ است.

سؤال : تعداد دورهای همیلتنی دو به دو یال مجزا در گراف کامل چه تعداد است؟

برای n های فرد قضیه زیر را داریم:

قضیه ۲.۸ : در گراف کامل n راسی با n فرد $n \geq 3$ دارای $\frac{n-1}{2}$ دورها
دو به دو یال مجزا داریم :

اثبات: می دانیم یک دور هامیلتونی در گراف کامل n راسی داریم (n فرد و $n \geq 3$) (درجه هر راس در گراف کامل n راسی $(n-1)$ است. این دور را حذف می کنیم. از هر راس دو یال حذف شده گراف حاصل یک گراف n راسی است که درجه هر راس $n-3$ است. مجدداً از این گراف باقیمانده به راس های دارای درجه زوج $n-3$ است یک دور همیلتونی را حذف می کنیم پس تا اینجا دو دور حذف شده. راس های باقیمانده دارای درجه $n-5$ هستند. این روند را آنقدر ادامه می دهیم تا درجه رئوس گراف باقیمانده $n-(n-2)=2$

$n-1 \rightarrow n-3$

$n-3 \rightarrow n-5$

$\vdots$

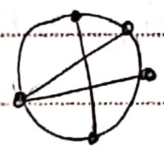
$n-(n-4) \rightarrow 4$

$n-(n-2) \rightarrow 2$

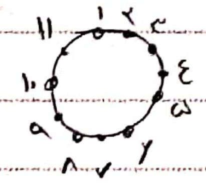
بنابراین تعداد دورهای هامیلتونی بدست آمده برابر است با $\frac{n-1}{2}$.

□ هر گرافی دارای دور هامیلتونی باشد آن را گراف همیلتونی می نامند.

+ یک شرط کافی برای هامیلتونی شدن یک گراف این است که درجه هر راس گراف حداقل برابر با $\frac{|V(G)|}{2}$ باشد.



چرا شرط فوق لازم نیست؟ چون گراف های هامیلتونی وجود دارد که این شرط را ندارند مثل گراف روبه رو. پس شرط واقعاً شرط کافی است و لازم نیست.



$deg(v) = 2 < 11/2$

Subject : Date

کاربرد گراف هامیلتونی

مسئله : دست فروش دوره‌گرد

فرض کنیم n محل داریم و همه‌ی این محله‌ها باهم ارتباط راه دارند. کدام محل‌ها به ترتیب انتخاب کند از هر محله فقط یکبار عبور کند و به محل شروع برسد.

یعنی یک دور هامیلتونی را دقیقاً بپیماید. گراف حاصل از این محله‌ها و راه‌های ارتباطی بین هر دو محله را یک یال بنامیم این گراف دارای n راس است و گراف کامل n راسی است

در این گراف $\frac{(n-1)!}{2}$ دور هامیلتونی متمایز وجود دارد اگر به یال‌های این گراف وزن بدهیم. یعنی هان هزینه‌ها را که یک راه دارد به یال‌ها رها هان را (ه) الحاق کنیم. بنابراین می‌توانیم بهینه‌ترین دور هامیلتونی را انتخاب کنیم. بهینه‌ترین در واقع آن دور هامیلتونی است به مجموع وزن‌های یال‌های آن (هزینه‌ی راه‌های آن) کمترین مقدار را داشته باشد

مسائل فصل دوم ص ۵۶-۶۰ (تمارین: ۲ - ۳ - ۵ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۲ - ۱۳ - ۱۴ - ۱۶ - ۱۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۳ - ۲۶ - ۲۷).

MICRO