ص ۵۵

می دانیم که تابع موج دلخواه $\psi(x)$ را می توان بر حسب ویژه توابع $u_n(x)$ بسط داد:

$$\psi(x) = \sum_n A_n u_n(x),$$

به طوری که

$$A_n = \int_0^a dx\, u_n^*(x)\, \psi(x).$$

در اینجا حدود از 0 تا a قرار داده شده است زیرا $u_n(x)$ در اینجا همان ویژه توابع مربوط به ذره در جعبه است.

هر کدام از ویژه توابع $u_n(x)$ وابستگی زمانی خاص خود را به صورت $e^{\frac{-iE_nt}{\hbar}}$ اختیار می کند، در نتیجه

$$\psi(x,t) = \sum_n A_n u_n(x)\, e^{\frac{-iE_nt}{\hbar}}$$

برای آنکه تعبیری از ضرایب A_n ارائه کنیم، مقدار انتظاری انرژی را برای یک حالت اختیاری $\psi(x)$ محاسبه می کنیم.

$$\langle H\rangle = \int dx\, \psi^*(x)\, H\, \psi(x)$$

در داخل جعبه $V(x) = \begin{cases} \infty & a<x \\ 0 & 0<x<a \\ \infty & x<0 \end{cases}$ ، $H = \frac{P^2}{2m}$ است و در خارج جعبه $\psi(x)=0$ است.

$$\langle H \rangle = \int dx\, \psi^*(x)\, H\, \psi(x) = \int dx\, \psi^*(x)\, H \sum_n A_n u_n(x)$$

$$= \int dx\, \psi^*(x) \sum_n A_n H u_n(x)$$

$$= \sum_n A_n \int dx\, \psi^*(x) \underbrace{H u_n(x)}_{E_n u_n(x)}$$

$$= \sum_n A_n \int dx\, \psi^*(x)\, E_n u_n(x)$$

$$= \sum_n A_n E_n \underbrace{\int dx\, \psi^*(x) u_n(x)}_{A_n^*}$$

$$= \sum_n A_n E_n A_n^*$$

$$= \sum_n E_n |A_n|^2$$

توجه: در استخراج روابط فوق از $Hu_n(x) = E_n u_n(x)$ ، $A_n = \int dx\, u_n^*(x)\psi(x)$ و

در نتیجه $A_n^* = \int dx\, \psi^*(x) u_n(x)$ استفاده شده است.

$$\Longrightarrow \boxed{\langle H \rangle = \sum_n E_n |A_n|^2} \quad (1)$$

از طرف دیگر، می دانیم مجموع احتمالات برابر با یک است:

$$1 = \int dx\, \psi^*(x)\, \psi(x)$$

$$1 = \int dx\, \psi^*(x) \sum_n A_n u_n(x) = \sum_n A_n \int dx\, \psi^*(x) u_n(x) =$$

$$= \sum_n A_n A_n^* = \sum_n |A_n|^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_n |A_n|^2 = 1} \quad (2)$$

با یادآوری مطالب مربوط به صفحات ۱۶ و ۱۷ جزوه، می توان اینچنین تعبیر کرد:

ص ۱۶،۱۷ $\begin{cases} \sum_j P(j) = 1 \\ \langle j \rangle = \sum_j j\, P(j) \end{cases}$

$|A_n|^2 =$ احتمال آن است که از اندازه گیری انرژی برای حالت $\psi(x)$، ویژه مقدار E_n به دست آید.

تابع موج $\psi(x)$ هرچه باشد، ویژه مقدارهای E_1، E_2، ...، و E_n تنها نتیجه های ممکن در اندازه گیری انرژی هستند.

مثال: فرض کنید $\psi(x) = u_3(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{3\pi x}{a}$ باشد، این به آن معناست که

$$\psi(x) = 0\, u_1(x) + 0\, u_2(x) + \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{3\pi x}{a} + 0\, u_4(x) + 0 \times u_5(x) + \cdots$$

در این صورت $A_1 = A_2 = A_4 = \cdots = 0$ ولی $A_3 = 1 \neq 0$ است. در این صورت

اگر انرژی تابع حالت $\psi(x)$ اندازه‌گیری شود با احتمال ٪۱۰۰ فقط مقدار

انرژی $E_3 = \dfrac{3^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ به دست می‌آید.

یعنی سیستم به طور یقین و با احتمال ٪۱۰۰ در حالت $u_3(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{3\pi x}{a}$ می‌باشد.

مثال: اگر تابع موج سیستم در حالت

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{1}{6}}\, u_1(x) + \sqrt{\frac{2}{6}}\, u_3(x) + \sqrt{\frac{3}{6}}\, u_5(x)$$

باشد. آنگاه از اندازه‌گیری انرژی سیستم، با احتمال $\frac{1}{6}$ مقدار E_1 و با احتمال $\frac{2}{6}$

فقط مقدار E_3 و با احتمال $\frac{3}{6}$ فقط مقدار E_5 به دست می‌آید.

در حقیقت $\psi(x)$ گفته شده که بیانگر سیستم فیزیکی است به صورت

$$\psi(x) = \underbrace{\sqrt{\frac{1}{6}}}_{A_1} u_1(x) + \underbrace{0}_{A_2}\, u_2(x) + \underbrace{\sqrt{\frac{2}{6}}}_{A_3} u_3(x) + \underbrace{0}_{A_4}\, u_4(x) + \underbrace{\sqrt{\frac{3}{6}}}_{A_5} u_5(x) + 0 + 0 \cdots$$

می‌باشد. پس می‌توان نوشت:

$$A_1 = \sqrt{\frac{1}{6}}\,,\ A_2 = 0\,,\ A_3 = \sqrt{\frac{2}{6}}\,,\ A_4 = 0\,,\ A_5 = \sqrt{\frac{3}{6}}\,,\ A_6 = A_7 = \cdots = 0$$

با احتمال $\frac{1}{6}$ سیستم در حالت $u_1(x)$ است. $\longleftarrow$ $|A_1|^2 = \frac{1}{6} =$ احتمال یافتن E_1 در اندازه‌گیری انرژی سیستم

با احتمال ۰ سیستم در حالت $u_2(x)$ است. $\longleftarrow$ $|A_2|^2 = 0 =$ احتمال یافتن E_2 در اندازه‌گیری سیستم

والی آخر

مثال) ذره‌ای در یک جعبه پتانسیل $V(x)=\begin{cases}\infty & x<0\\ 0 & 0<x<a\\ \infty & a<x\end{cases}$ قرار دارد. تابع موج

توصیف‌گر ذره با $\psi(x)$ به صورت زیر داده می‌شود.

$$\psi(x)=\begin{cases}A\left(\frac{x}{a}\right) & 0<x<\frac{a}{2}\\ A\left(1-\frac{x}{a}\right) & \frac{a}{2}<x<a\end{cases}$$

الف) مقدار A را بیابید.

می‌دانیم تابع موج باید بهنجار باشد. یعنی مجموع احتمالات باید برابر با یک باشد.

در بیرون جعبه یعنی در $x<0$ و $x>a$ تابع موج صفر است. در فاصله بین

$0<x<a$ هم تابع موج داده شده است.

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\psi^*(x)\,\psi(x)=\underbrace{\int_{-\infty}^{0}\psi^*(x)\psi(x)\,dx}_{0}+\int_{0}^{\frac{a}{2}}\psi^*(x)\,\psi(x)\,dx+$$

$$+\int_{\frac{a}{2}}^{a}\psi^*(x)\,\psi(x)\,dx+\underbrace{\int_{a}^{\infty}\psi^*(x)\,\psi(x)\,dx}_{0}=$$

$$1=|A|^2\int_{0}^{\frac{a}{2}}\frac{x^2}{a^2}\,dx+|A|^2\int_{\frac{a}{2}}^{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2dx=|A|^2\frac{a}{12}\;\rightarrow\;A=\sqrt{\frac{12}{a}}$$

ب) این احتمال را بیابید که از اندازه‌گیری انرژی، ویژه مقدار E_2 به دست آید.

$|A_2|^2$ = احتمال آنکه از اندازه‌گیری انرژی مقدار E_2 به دست آید.

$$A_n = \int dx\ \psi(x)\, u_n^*(x)$$

$$A_2 = \int_0^a dx\ \psi(x)\ u_2^*(x) = \int_0^a dx\, \psi(x) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a}$$

حدود را از 0 تا a قرار دادیم، زیرا در خارج از این ناحیه تابع موج صفر است.

$$A_2 = \int_0^{\frac{a}{2}} dx\ \sqrt{\frac{12}{a}}\ \frac{x}{a}\ \sqrt{\frac{2}{a}}\ \sin\frac{2\pi x}{a} + \int_{\frac{a}{2}}^{a} dx \sqrt{\frac{12}{a}}\left(1-\frac{x}{a}\right)\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{2\pi x}{a}$$

$$= \ldots\ldots = 0$$

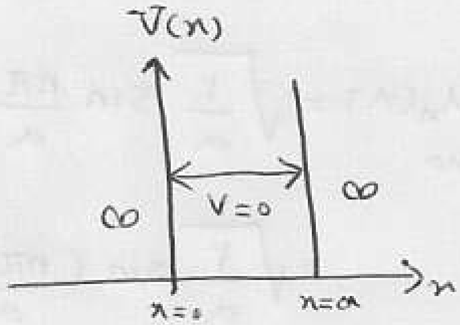
روش حل این انتگرال برای n اختیاری به طور مشروح در کتاب نوشته شده است. می‌توانید دنبال کنید و A_2 را بیابید.

$|A_2|^2$ جواب مسأله خواهد بود

نکته قابل توجه: اگر سیستم با تابع موج دلخواه $\psi(x)$ به شما داده شود و شما در اثر اندازه‌گیری انرژی به مقدار $E_2 = \frac{2^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ دست یابید، سیستم در اثر این اندازه‌گیری به $u_2(x)$ تغییر می‌کند یعنی تابع موج توصیف‌گر سیستم از حالت دلخواه $\psi(x)$ به $u_2(x)$ تقلیل می‌یابد.

توجه :

$$V(x)=\begin{cases}\infty & x<0\\ 0 & 0<x<a\\ \infty & a<x\end{cases}$$



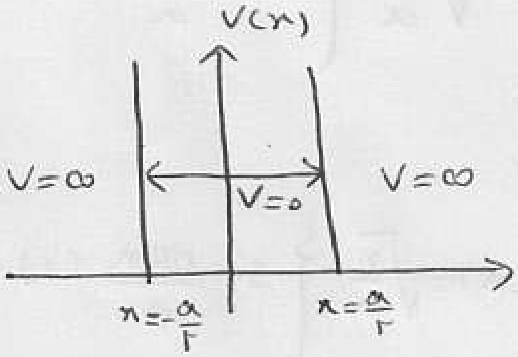
حل $\longrightarrow$ $u_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

$$n=1,2,3,\ldots$$

سؤال: حال اگر پتانسیل ذره در جعبه به صورت متقارن زیر در نظر گرفته شود، جوابها چه تغییری می‌کنند؟

$$V(x)=\begin{cases}\infty & x<-\frac{a}{2}\\ 0 & -\frac{a}{2}<x<\frac{a}{2}\\ \infty & \frac{a}{2}<x\end{cases}$$



$$u_n(x)=?$$

در این حالت، به نظر می‌رسد که پتانسیل به شکل متقارن درآمده است. ظاهراً می‌توان از تبدیل مختصات $x\longrightarrow x-\frac{a}{2}$ استفاده کرد و با استفاده از جوابهای قبلی برای ذره در جعبه بین $0<x<a$، به جوابهای مربوط به ذره در جعبه متقارن دست یافت

$$x\longrightarrow x-\frac{a}{2}$$

$$x=0\longrightarrow 0-\frac{a}{2}=-\frac{a}{2}$$

$$x=a\longrightarrow a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$$

$$\sin\frac{n\pi x}{a}\longrightarrow \sin\frac{n\pi}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)$$

$$u_n(x) \longrightarrow \underset{\text{جدید}}{u_n(x)} = \sqrt{\frac{۲}{a}} \sin \frac{n\pi}{a}\left(x - \frac{a}{۲}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{۲}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a} - \frac{n\pi}{۲}\right) \Longrightarrow$$

از رابطه $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ استفاده می‌کنیم.

$$\Longrightarrow \underset{\text{جدید}}{u_n(x)} = \sqrt{\frac{۲}{a}}\left[\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi}{۲} - \cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi}{۲}\right] =$$

$$= \begin{cases} n \text{ فرد}: & u_n(x) = \sqrt{\frac{۲}{a}}\left\{\sin\frac{n\pi x}{a}(0) - \cos\frac{n\pi x}{a}(-1)^{\frac{n-1}{۲}}\right\} \\ n \text{ زوج}: & u_n(x) = \sqrt{\frac{۲}{a}}\left\{\sin\frac{n\pi x}{a}(-1)^{\frac{n}{۲}} - \cos\frac{n\pi x}{a}(0)\right\} \end{cases}$$

با صرفنظر کردن از ضرایب $(-1)^{\frac{n}{۲}}$ و $(-1)^{\frac{n+1}{۲}}$ می‌توان نوشت

$$u_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{۲}{a}}\cos\frac{n\pi x}{a}, \; n = ۱, ۳, ۵, \ldots & \left(E_n = \frac{n^۲\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲}\right) \\ \sqrt{\frac{۲}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}, \; n = ۲, ۴, ۶, \ldots & \left(E_n = \frac{n^۲\pi^۲\hbar^۲}{۲ma^۲}\right) \end{cases}$$