فصل سوم

مشتق و کاربردهای آن

دانشجوی گرامی

با سلام ،

در این فصل قصد داریم با تعریف مشتق، نحوه محاسبه مشتق ، برخی از قضایای مهم مرتبط با آن و کاربردهای آن در مسایل واقعی آشنا شویم.

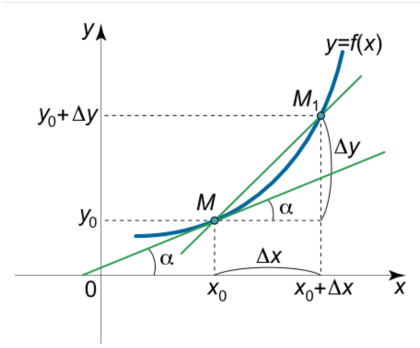
از آنجا که احتمال دارد اشکالات تایپی در این جزوه وجود داشته باشد یا نگارش آن داری اشکالاتی باشد. خوشحال خواهیم شد این اشتباهات را به ما انعکاس دهید.

با آرزوی بهترینها

جعفری- منیری

گروه ریاضی دانشگاه مازنداران

فروردین ۱۳۹۹



فرض کنید تابع $y = f(x)$ در دست باشد و دو نقطه x_0 و x_1 از قلمرو تابع f را در نظر بگیرید وفرض کنید $M(x_0, f(x_0))$ و $M_1 = (x_1, f(x_1))$ دو نقطه متناظر با $x_1 = x_0 + \Delta x$ و x_0 روی منحنی $y = f(x)$ باشد نسبت $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ را شیب خط M_1M می نامند

حال اگر نقطه M_1 را تدریجا به نقطه M نزدیک نمائیم ($\Delta x = x_1 - x_0$) تدریجا به صفر نزدیک خواهد شد در وضعیت حدی داریم $\lim_{x_1\to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$. این حد در صورت وجود شیب خط مماس به منحنی $y = f(x)$ در نقطه $M(x_0, f(x_0))$ می‌باشد که آنرا مشتق تابع f در نقطه x_0 نیز می نامند یعنی: $f'(x_0) = \lim_{x_1\to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

اگر در آن قرار دهیم $\Delta x = x_1 - x_0$ آنگاه خواهیم داشت: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

تعریف: فرض کنیم $y = f(x)$ یک تابع دلخواه و x_0 متعلق به دامنه f باشد ، اگرحد $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ وجود داشته باشد می‌گوییم تابع f در x_0 مشتق پذیر هست و مقدار این حد را مشتق تابع f در $x = x_0$ نامیده و با علامت $f'(x_0)$ نشان میدهیم.

مثال: فرض کنید $f(x) = x^2 + x$ ، مشتق تابع f در $x = 2$ با استفاده ازتعریف مشتق بیابید.

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} x + 3 = 5$$

نکته: معمولا برای محاسبه مشتق یک تابع در حالت کلی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

نکته: معمولا از نمادهای زیر برای نشان دادن مشتق یک تابع استفاده می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = D^{(1)}f = Df = D_x f$$

مثال: فرض کنید $f(x) = \sqrt{x}$ ، مشتق این تابع را با استفاده از تعریف مشتق بیابید.

$$\mathrm{f'(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

برای محاسبه حد بالا از تکنیکهای رفع ابهام استفاده میکنیم. در اینجا صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب میکنیم.

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\,(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال: فرض کنید $f(x) = \sin x$ ، مشتق این تابع را با استفاده از تعریف مشتق بیابید.

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\ \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\ (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\ (\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\cos x \sin h}{h} = \mathbf{\cos x}$$

تعریف (مشتق چپ و مشتق راست): تابع f را و $x_0 \in D_f$ درنظر بگیرید. مشتق چپ و راست تابع f در نقطه $x = x_0$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad ,$$

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad .$$

تذکر: تابع f رادر یک نقطه مانند x_0 دارای مشتق هست اگر در این نقطه دارای مشتق راست ومشتق چپ برابرباشد:

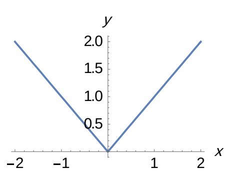
$$f'_{-}(x_0) = f'_{+}(x_0) = f'(x_0)$$

نکته: اگر تابع f در نقطه x_0 ازبازه $(a،b)$ دارای مشتق باشد، آنگاه در x_0 پیوسته است. زیرا:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\times(x-x_0)$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\times\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x)\times 0 = 0$$

یعنی داریم که: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ پس تابع f در x_0 پیوسته است.

اما عکس مطلب بالا در حالت کلی درست نیست. برای مثال تابع $f(x) = |x|$ را در نقطه صفر در نظر بگیرید.



میدانیم که تابع قدر مطلق همواره پیوسته ا ست پس در صفر هم پیوسته است.

اما تابع $f(x) = |x|$ در صفر مشتق پذیر نمی باشد، زیرا:

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

که این یعنی این تابع در نقطه صفر مشتق پذیر نیست.

مثال: تابع $f(x)=|4-x^2|$ را در نظر بگیرید:

۱)آیا تابع f،در نقطه۲ پیوسته است؟

۲)آیا این تابع در نقاط $x=2$ و $x=-2$ مشتق پذیر است؟

حل: $|4-x^2|=0 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 2$

پس :

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4 & x\geq 2\\ 4-x^2 & -2<x<2\\ x^2-4 & x\leq -2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}x^2-4=0 \qquad , \qquad \lim_{x\to 2^-}f(x)=0 \ \ , \ \ f(2)=0$$

تابع f وقتی $x\to 2$ دارای حد است. همچنین در این نقطه تابع پیوسته است.

بطور مشابه پیوستگی تابع در $x=-2$ ثابت می شود. حال مشتق پذیری آن را در نقطه$x=-2$ بررسی می کنیم:

$$f'_+(-2)=\lim_{x\to -2^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\to -2^+}\frac{4-x^2-0}{x+2}=\lim_{x\to -2^+}(2-x)=4$$

$$f'_-(-2)=\lim_{x\to -2^-}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-4-0}{x+2}=\lim_{x\to -2^-}(x-2)=-4$$

یعنی تابع f در نقطه$x=-2$ مشتق ندارد به همین ترتیب نشان داده میشود که این تابع در نقطه $x=2$ هم دارای مشتق نیست.

مثال: مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع f در $x=2$ مشتق پذیر باشد.

$$f(x)=\begin{cases}ax+b & x<2\\ 2x^2-1 & x\geq 2\end{cases}$$

حل: چون این تابع در نقطه ۲ مشتق پذیر است یعنی در این نقطه پیوسته است. پس

شرط پیوستگی $2a+b=7 \Rightarrow (\lim_{x\to 2^+} f(x)=7 \ , \ \lim_{x\to 2^-} f(x)=2a+b \ , \ f(2)=7)$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2-1-7}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2(x^2-4)}{x-2}=8$$

$$f_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{ax+b-7}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{ax+b-(2a+b)}{x-2}=a \quad\Rightarrow\quad a=8$$

$$2a+b=7 \quad\Rightarrow\quad b=7-2a=7-16=-9 \quad\Rightarrow\quad b=-9$$

محاسبه جبری مشتقها

برای محاسبه مشتق ترکیب توابع می توانیم از قضایا زیر کمک بگیریم:

قضیه: اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ مشتق پذیر باشند آنگاه داریم :

الف) $(af)'=af'$ ب) $(f\pm g)'=f'\pm g'$

ج) $(fg)'=f'g+g'f$ د) $(\frac{f}{g})'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$

قضیه (قاعده زنجیره ای مشتق): اگر تابع $g(x)$ در نقطه $x=a$ مشتق پذیر باشد و $f(x)$ در $g(a)$ مشتق پذیر باشد آنگاه

$$(fog)'(a)=g'(a)f'(g(a))$$

نکته: در حالت کلی برای مشتق گیری تابع $y(x)=f(g(x))$ از دستور $y'(x)=g'f'(g(x))$ استفاده میکنیم.

مثال: مشتق تابع $y=\sin(x^2+3x)$ برابراست با $y'=(2x+3)\cos(x^2+3x)$.

مثال: اگر مشتق $f(x)=x(1-x)(2-x)\cdots(n-x)$ باشد. آنگاه مطلوبست $f'(0)$ ؟

برای حل $g(x)=(1-x)(2-x)\cdots(n-x)$ در نظر میگیریم. پس $f(x)=x\,g(x)$ حال به کمک قسمت ج قضیه مشتق را محاسبه میکنیم و سپس 0 را جایگذاری میکنیم.

$$f(x)=x\,g(x)\to \quad f'(x)=g(x)+xg'(x)\to f'(0)=g(0)+0\times g(0)=g(0)$$

$$g(0)=1\times 2\times\cdots\times n=n!\to \quad f'(x)=n!$$

جدول مشتق بعضی از توابع

$\boldsymbol{h(u)}$	$\boldsymbol{h'}$
u^n	$nu'u^{n-1}$
e^u	$u'e^u$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u)$
$\cot u$	$-u'(1+\cot^2 u)$
$\sec u$	$u'\sec u\ \tan u$

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f'(x)}$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\tan x$	$1+\tan^2 x$
$\cot x$	$-(1+\cot^2 x)$
$\sec x$	$\sec x\ \tan x$

تعریف (مشتق پذیری در یک بازه): تابع f را در بازه $[a,b]$ مشتق پذیر گوییم اگر در هر نقطه از (a,b) مشتق داشته باشد ودر نقطه a از راست ودر نقطه b از چپ مشتق داشته باشد.

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad , \qquad f'_-(b) = \lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

مشتق گیری از توابع نمایی

برای مشتق گیری از توابع به فرم نمایی یا توابع به فرم $y = f(x)^{g(x)}$ ، از تابع $\ln$ استفاده میکنیم. قبل از بیان نحوه کار بعضی از خواص تابع لگاریتم طبیعی را مرور می‌کنیم:

$$i)\ \ln A^n = n\ \ln A, \qquad ii)\ \ln AB = \ln A + \ln B\,, \qquad iii)\ \ln\frac{A}{B} = \ln A - \ln B.$$

از طرفی می دانیم مشتق تابع $\ln U(x)$ برابر هست با $\frac{U'(x)}{U(x)}$. اکنون به کمک این اطلاعات به آسانی متوانیم مشتق توابع نمایی و امثالهم را حساب کنیم. برای اینکار ابتدا از طرفین $\ln$ می گیریم و سپس مشتق می گیریم. به مثالهای زیر دقت کنید.

مثال: مشتق تابع $y = a^x$ را بیابید.

$$y = a^x \xrightarrow{\ln} \ln y = x\ln a \xrightarrow{\text{مشتق میگیریم}} \frac{y'}{y} = \ln a \to y' = y\ \ln a \to y' = a^x \ln a$$

مثال: مشتق تابع $y = u^v$ که در آن u و v توابعی از x هستند را بیابید.

$$y = u^v \xrightarrow{\ln} \ln y = v\ln u \xrightarrow{\text{مشتق میگیریم}} \frac{y'}{y} = v'\ln u + v\frac{u'}{u} \to y' = y\ (v'\ln u + v\frac{u'}{u})$$

$$\rightarrow y' = u^v\left(\frac{v' u \ln u + v u'}{u}\right)$$

نکته: از این تکنیک برای مشتق توابعی که به شکل حاصلضرب چندین توابع توان دار هست میتوانید استفاده کنید.

مثال: تابع $y(x) = \frac{(x+2)^3(x^2+1)^{\frac{1}{5}}}{(x+4x+1)^3}$ در نظر بگیرید مطلوبست $y'(0)$.

$$y = \frac{(x+2)^3(x^2+1)^{\frac{1}{5}}}{(x^2+4x+1)^3} \xrightarrow{\ln} \ln y = 3\ln(x+2) + \frac{1}{5}\ln(x^2+3) - 3\ln(x^2+4x+1) \xrightarrow{\text{مشتق میگیریم}}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x+2} + \frac{2x}{5(x^2+3)} - \frac{3(2x+4)}{x^2+4x+1} \rightarrow y' = y\left(\frac{3}{x+2} + \frac{2x}{5(x^2+3)} - \frac{3(2x+4)}{x^2+4x+1}\right)$$

حال به جای x در رابطه اخیر 0 قرار میدهیم $y'(0) = y(0)\left(\frac{3}{2} + 0 - \frac{3\times 4}{1}\right) = 8 \times \frac{-21}{2} = -84$.

مشتق گیری ضمنی :

در توابعی مانند $y = x^7+5x^3+2x+4$ ، تابع y بطور مشخص بر حسب x تعریف شده است. اما در توابعی مانند $x + y^3x^3+y^2x^4+5yx^6 = 4$ گفته می‌شود که y در ضمن x ،تعریف گردیده است برای مشتق گیری این توابع از مشتق گیری ضمنی استفاده میکنیم.

فرض کنید تابع $y = f(x)$ به صورت ضمنی $F(x,y) = c$ مطرح شده باشد، که $z = F(x,y)$ تابعی دو متغیره است که نسبت به x مشتق پذیر است. c عددی حقیقی می باشد. در اینصورت $y' = -\frac{F_x}{F_y}$ که در آن F_x مشتق تابع $z = F(x,y)$ نسبت به x با فرض ثابت بودن y و نیز F_y مشتق تابع $z = F(x,y)$ نسبت به y با فرض ثابت بودن x.

مثال: فرض کنیم $x + y^3x^3+y^2x^4+5yx^6 = 4$ باشد . مشتق ضمنی این تابع را نسبت به x را بیابید.

در اینجا $x + y^3x^3+y^2x^4+5yx^6 - 4 = 0$ پس

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{1+3y^3x^2+4y^2x^3+30yx^5}{3y^2x^3+2yx^4+5x^6}$$

اگر نمی خواستیم از رابطه بالا استفاده کنیم بصورت زیر عمل می کردیم:

$$\Rightarrow\ 3y^2x^3y'+3y^3x^2+2yx^2y' + 4y^2x^3 + 5x^6y'+30yx^5 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow\ y' = -\frac{1+3y^3x^2+4y^2x^3+30yx^5}{3y^2x^3+2yx^4+5x^6}$$

تمرین: معادله خطوط قائم و مماس بر خم $y^2-6x^2+4y+19=0$ را در نقطه $A|_1^2$ بیابید.

حل:

$$y'=-\frac{-12x}{2y+4}=\frac{6x}{y+2}\xrightarrow{\text{در نقطه } A|_1^2}y'=4 \quad \text{شیب خط}$$

$$\to m=4\to m\cdot m'=-1\to m'=-\frac{1}{4} \qquad y-1=4(x-2)\to y=4x-7$$

$$y-1=-\frac{1}{4}(x-2)\to y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$$

مشتق توابع معکوس:

در این قسمت نحوه محاسبه مشتق تابع معکوس را تشریح خواهیم کرد. فرض کنیم بخواهیم مشتق تابع $y=\mathrm{f}^{-1}(x)$ را پیدا کنیم. می‌دانیم اگر $y=\mathrm{f}^{-1}(x)$ انگاه $x=f(y)$ اکنون از طرفین این رابطه نسبت به x مشتق می‌گیریم. پس داریم

$$y=\mathrm{f}^{-1}(x)\to x=f(y)\xrightarrow{\text{مشتق طرفین}}1=y'f'(y)\to y'=\frac{1}{f'(y)}$$

در ادامه سعی می‌کینم معادل $f'(y)$ را برحسب x جایگزین کنیم.

مثال : مشتق توابع معکوس $y=\sin^{-1}x$ را بیابید.

$$y=\sin^{-1}x\to x=\sin y\to 1=y'\cos y\to y'=\frac{1}{\cos y}$$

اکنون کافی هست معادل $\cos y$ را بر حسب x جایگزین کنیم. می‌دانیم $\cos y=\sqrt{1-sin^2y}$ از طرفی داشتیم $x=\sin y$ پس $\cos y=\sqrt{1-x^2}$. حال با جانشانی این مقدار در $y'=\frac{1}{\cos y}$ داریم $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. بنا بر این

$$y=\sin^{-1}x\to y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

تمرین: مشتق توابع معکوس $y=\cos^{-1}x$ ، $y=\tan^{-1}x$ و $y=\sec^{-1}x$ را بیابید.

نکته: اگر تابع $f(x)$ در یک همسایگی نقطه a پیوسته ، یک به یک (۱-۱) و ناصفر باشد. آنگاه تابع $f^{-1}(x)$ در نقطه $b=f(a)$ یا $a=f^{-1}(b)$ مشتق پذیر بوده و داریم:

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$$

مثال : تابع $f(x)=x^3+2x+5$ موجود هست و $f(-1)=2$ مطلوبست $(f^{-1})'(2)$.

مطابق دستور بالا داریم

$$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{3x^2+2|_{x=-1}}=\frac{1}{5}$$

مشتق توابع پارامتری: تابع $y=f(x)$ در نظر بگیرید. اگر x و y خود توابعی بر حسب t باشند مثلا $x=\varphi(t)$ و $y=\psi(t)$. آنگاه برای محاسبه مشتق تابع f نسبت به x از دستور زیر کمک می‌گیریم.

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

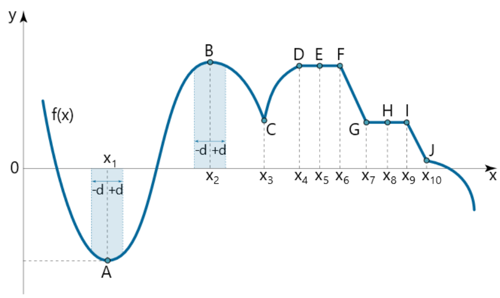
مثال: اگر $x=\sin 2t$ و $y=2\sin t$ باشد. آنگاه مطلوبست y'.

$$y'=\frac{(2\sin t)'}{(\sin 2t)'}=\frac{2\ \cos t}{2\ \cos 2t}=\frac{\cos t}{\cos 2t}$$

نکته: هر گاه تفاضل دو تابع برابر مقدار ثابتی باشد آنگاه مشتق آن دو تابع برابرهست.

$$f(x)-g(x)=c\to f'(x)=g'(x)$$

فرض کنید تابع f بر $[a,b]$ تعریف شده باشد:



۱) تابع f در نقطه c دارای min نسبی است اگر $\delta>0$ ای با که به ازای هر $x\in(c-\delta,c+\delta)$ داشته باشیم :

$$f(c)\leq f(x)$$

۲) تابع f در نقطه c، max نسبی دارد اگر $\delta>0$ ای باشد که به ازای هر $x\in(c-\delta,c+\delta)$ داشته باشیم:

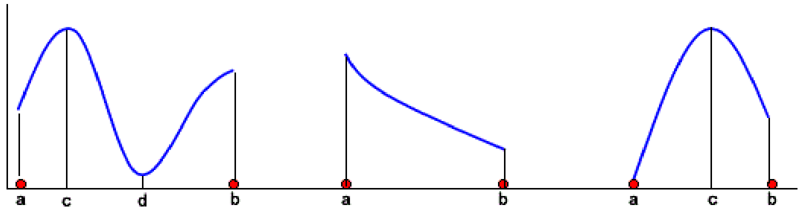
$$f(c)\geq f(x)$$

۳) تابع f در قلمرو خود در نقطه d، min مطلق دارد اگر به ازای هر x از قلمرو f داشته باشیم $f(d)<f(x)$

۴) تابع f در نقطه s، max مطلق دارد اگر به ازای هر x از قلمروتابع داشته باشیم: $f(x)<f(s)$

قضیه مقدار اکسترمم: اگر تابع f در بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه f هم دارای max مطلق است وهم داری min مطلق است.

به عبارت دیگر $f(d) \leq f(x) \leq f(c)$ بطوریکه $\exists c,d \in [a,b]$ در اینجا $f(d)$ مینمم مطلق و $f(c)$ ، ماکزیمم مطلق هست.



قضیه ماکزیمم و مینمم نسبی: اگر تابع f در نقاط c دارای ماکزیمم و یا مینمم نسبی باشد آنگاه $f'(c)=0$.

تعیین ماکزیمم و یا مینمم نسبی با استفاده از مشتق دوم:

قضیه: فرض کنیم مشتق اول و دوم تابع f موجود باشد. اگر نقطه c ریشه تابع $f'(x)=0$ باشد. آنگاه تابع f در نقطه c دارای ماکزیمم نسبی هست هرگاه $f''(c) \leq 0$ و همچنین تابع f در نقطه c دارای مینمم نسبی هست هرگاه $f''(c) \geq 0$.

مثال: نقاط اکسترمم توابع $f(x)=x^2+2x+3$ و $g(x)=2-x^2$ را مشخص کنید.

$$f(x)=x^2+2x+3 \to f'(x)=2x+2=0 \to x=-1,\ \ f''(x)=2 \to f''(-1) \geq 0 \to x = 1\ Min,$$

$$g(x)=2-x^2 \to g'^{(x)}=-2x=0 \to x=0,\ \ f''(x)=-2 \to f''(0) \leq 0 \to x=0\ Max$$

برای تعیین نقاطی که f در آنها max مطلق و min مطلق دارد به شیوه زیر عمل میکنیم :

۱) نقاط بحرانی تابع f را می یابیم و مقادیر f را در نقاط بحرانی حساب می کنیم.

۲) مقادیر f را در دو نقطه انتهایی (یعنی a,b)محاسبه می کنیم.

۳) کمترین مقدار ۱و۲را min مطلق تابع وبیشترین مقدار را، max مطلق تابع f می نامیم.

تعریف (نقطه بحرانی): نقطه $c \in D_f$ را نقطه بحرانی تابع f گویند هرگاه $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ تعریف شده نباشد.

مثال: min و max مطلق تابع $f(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}}$ در بازه $[-2,1]$ را بیابید.

حل: تابع f بر $[-2,1]$ پیوسته است. پس قضیه مقدار اکسترمم قابل استفاده است. داریم:

$$f'(x)=\frac{2}{3}\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}$$

پس تابع f دارای تنها یک نقطه بحرانی 1- می باشد.

$$f(-2)=\sqrt[3]{(-2+1)^2}=1,\qquad f(-2)=\sqrt[3]{(1+1)^2}=\sqrt[3]{4},\qquad f(-1)=\sqrt[3]{(-1+1)^2}=0$$

تابع f در1-،min مطلق دارد که صفر است و در 1،max مطلق دارد که $\sqrt[3]{4}$ می باشد.

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x)=\sqrt{1-x^2}$را در بازه $[0,1]$ بیابید؟

$$\mathrm{f(x)}=\sqrt{1-x^2}\ \rightarrow f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=0\rightarrow x=0$$

از طرفی تابع $f'(c)$ در ±1 تعریف شده نیست اما $-1\in D_f$پس نقاط بحرانی تابع فوق عبارتند از $x=1$ و $x=0$

مثال: نقاط بحرانی تابع$h(x)=x^{\frac{6}{5}}-12x^{\frac{1}{5}}$ را بیابید.

حل $$h'(x)=\frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}}-\frac{12}{5}x^{\frac{-4}{5}}=\frac{1}{x^{\frac{4}{5}}}[\frac{6}{5}x-\frac{12}{5}]$$

پس تابع h در $x=0$ مشتق ندارد. بنابر این 0 یک نقطه بحرانی تابعh است.

$$h'(x)=0\quad\Rightarrow\quad\frac{0}{5}x-\frac{12}{5}=0\quad\Rightarrow\quad x=2$$

پس مجموعه$\{0,2\}$ نقاط بحرانی تابعh می‌باشند.

تمرین : مطلوب است تعیین نقاط بحرانی توابع $f(\mathrm{x})=\sin^3 8\mathrm{x}$ و $h(x)=\sin 2x\cos 2x$

مثالهی بیشتر http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcI/CriticalPoints.aspx

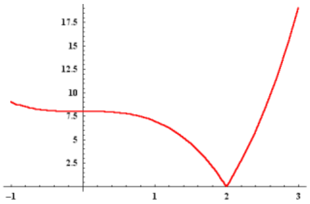
حالتهایی که تابع$f(x)$ در نقطه $x=x_0$ مشتق پذیر نمی‌باشد:

۱- $f'(x)=\infty$
۲- مشتق چپ و راست موجود ولی برابر نیست $f'_+(x_0)\neq f'_-(x_0)$
۳- تابع$f(x)$ در یک همسایگی نقطه x_0 تعریف شده باشد ولی پیوسته نباشد.
۴- تابع$f(x)$ در یک همسایگی نقطه x_0 تعریف شده نباشد .

در حالت دوم ۲ دو تعریف زیر را داریم:

تعریف (**نقطه زاویه دار corner point**): هر گاه مشتق چپ و راست موجود باشند ولی برابر نباشد آنگاه تابع $f(x)$ در نقطه x_0 دارای دو مماس هست. در این حالت به نقطه x_0 نقطه زاویه دار تابع $f(x)$ گویند.

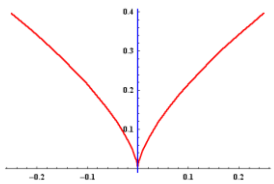
تعریف (**نقطه بازگشت cusp point**): هر گاه مشتق چپ و راست بی نهایت (مختلف العلامه) باشند، آنگاه تابع $f(x)$ در نقطه x_0 دارای مماس موازی محور y ها هست. در این حالت به نقطه x_0 نقطه بازگشت تابع $f(x)$ گویند.



مثال: نقطه $\boldsymbol{x=2}$ نقطه زاویه دار تابع $f(x)=|x^3-8|$ می‌باشد.

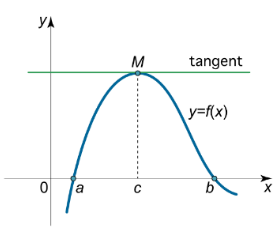
$$f(x)=\begin{cases}x^3-8 & x\geq 2\\ 8-x^3 & x<2\end{cases} \quad \to f'(x)=\begin{cases}3x^2 & x\geq 2\\ -3x^2 & x<2\end{cases}$$

چون $f'_-(2)\neq f'_+(2)$ پس این تابع در نقطه $\boldsymbol{x=2}$ مشتق ندارد.از طرفی $f'_+(2)=12$ و $f'_-(2)=-12$ به نقطه $\boldsymbol{x=2}$ نقطه زاویه دار یا گوشه گویند.



مثال: نقطه $\boldsymbol{x=0}$ نقطه بازگشت تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ می‌باشد.

$$f'(x)=\frac{2}{3}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \quad \to \lim_{x\to 0^+}f'(x)=+\infty \text{ و } \lim_{x\to 0^-}f'(x)=-\infty$$



قضیه رُل: (**یا رول**) فرض کنید که **Rolle's Theorem**

۱- تابع f دربازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد.

۲- تابع f در بازه باز (a,b) مشتق پذیر باشد.

۳- اگر $f(a)=f(b)$ آنگاه $\exists c\in(a,b)$ هست که $f'(c)=0$.

بعبارت دیگر اگر تابع f در بازه بسته $[a,b]$پیوسته و در بازه باز (a,b)مشتق پذیر باشد آنگاه حداقل یک نقطه مانند c در بازه a,b وجود دارد که مشتق f در آن صفر هست، یعنی مماس بر منحنی در نقطه $(c,f(c))$ دارای شیب صفر است (مماس در نقطه $(c,f(c))$ موازی با محور x ها است.)

نکته: استفاده مهمی که میشل رُل از قضیه خود کرد آن بود که نشان داد بین هر دو ریشه یک چند جمله ای یک ریشه مشتق آن وجود دارد.(Michel Rolle was a French mathematician)

مثال : نشان دهید که معادله $x^3+2x+c=0$ نمی تواند بیش از یک ریشه حقیقی داشته باشد(c عدد ثابت است.)

حل: فرض می کنیم معادله بالا دارای بیش از یک ریشه باشد(فرض خلف)و $x_1\neq x_2$ دو ریشه متفاوت آن باشند و $x_2>x_1$. تابع $f(x)=x^3+2x+c$ را در نظر میگیریم.

تابع f بر $[x_2,x_1]$ پیوسته است و همچنین این تابع در فاصله $[x_2.x_1]$ مشتق پذیر است. از طرفی $f(x_1)=0$ و $f(x_2)=0$ پس بنا به قضیه رل باید $c\in(x_1,x_2)$ ای باشد که $f'(c)=0$ یعنی $3c^2+2=0$ که هرگز چنین نمی شود ویک تناقض است. بالطبع فرض دارا بودن بیش از یک ریشه نادرست بوده و f حد اکثر دارای یک ریشه می باشد.

مثال: نشان دهید معادله $4x^5+3x^3+3x-2=0$ دقیقا دارای یک ریشه است.

حل: قرار می‌دهیم $f(x)=4x^5+3x^3+3x-2$. داریم: $f(0)=-2<0$, $f(1)=8>0$

چون $f(0)<k=0<f(1)$ پس $t\in(0.1)$ ای بنا به قضیه مقدار میانی یا قضیه بولزانو هست که $f(t)=k=0$ پس تابع f در $(0,1)$ ریشه دارد. اگر تابع f در $(0,1)$ دارای بیش از یک ریشه باشد(فرض خلف) و $x_1\neq x_2$ دو تا از آنها باشند و $x_1<x_2$ فرض می شود تابع f بر $[x_1.x_2]$ پیوسته و بر $(x_1.x_2)$ مشتق پذیر باشد و $f(x_1)=f(x_2)$. بنا به قضیه رل، بایستی $t\in(0.1)$ ای باشد که $f'(t)=0$ یعنی $20x^4+9x^2+3=0$ که این امر غیر ممکن است. پس فرض خلف باطل و معادله بیش از یک ریشه ندارد. **بنابر این معادله بالا دقیقا یک ریشه دارد.**

مثال : فرض کنید دو تابع f و g بر $[a.b]$ مشتق پذیر باشند و $f(b)=g(b)$. $f(a)=g(a)$ ثابت کنید c ای وجود دارد که $c\in(a.b)$ بطوری که $f'(c)=g'(c)$.

حل: تابع جدید h را تعریف می کنیم: $h(x)=f(x)-g(x)$. به وضوح تابع h بر $(a.b)$ پیوسته و مشتق پذیر می‌باشد (زیرا f و g هم پیوسته و هم مشتق پذیرند) ومقدار h در a یعنی $h(a)$ برابر است با: $h(a)=f(a)-g(a)=0$ و به همین ترتیب: $h(b)=f(b)-g(b)=0$ پس بنابر **قضیه رل**، $\exists c\in(a.b)$ هست که $h'(c)=0$ یعنی

$$f'(c)-g'(c)=0 \to f'(c)=g'(c).$$

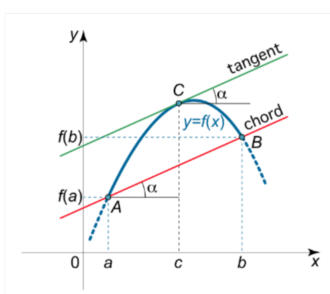
قضیه مقدار میانگین (لاگرانژ): Mean Value Theorem یا Lagrange's Mean Value Theorem

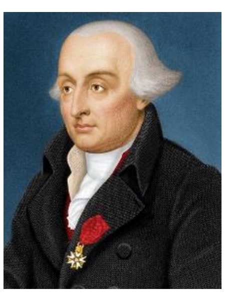
فرض کنید f یک تابع حقیقی بر $[a.b]$ باشد و

الف) f بر $[a.b]$ پیوسته باشد

ب) f بر $(a.b)$ مشتق پذیر باشد

آنگاه $\exists c\in(a.b)$ ای است که:





$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

اثبات: برای اثبات تابع h را بصورت زیر تعریف میکنیم.

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$$

با توجه به تعریف h و اینکه طبق فرض قضیه تابع $f(x)$ پیوسته و مشتق پذیرند پس تابع h پیوسته و مشتق پذیرند. از طرفی $h(a) = h(b) = 0$ پس شرایط قضیه رل برقرار هست بنابر این داریم:

$$\exists c \in (a,b)\ h'(c) = 0 \to f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \to f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

نکته : این قضیه توسط ریاضیدان هندی باسکارا Bhaskara قبلا کشف شده بود.

مثال : برای هر دو عدد حقیقی x_1 و x_2 نشان دهید که $|\sin x_2 - \sin x_1| \le |x_2 - x_1|$.

حل: تابع $f(x)$ را $f(x) = \sin x$ در نظر میگیریم . واضح هست که این تابع در بازه (x_1, x_2) پیوسته و مشتق پذیر هست. بنابر این شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار هست. پس

$$\exists\ c \in (0,1) \xrightarrow{MVT} f'(c) = \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} = \cos c\ ,$$

حال از طرفین رابطه بالا قدر مطلق می‌گیریم (می دانیم که $|\cos c| \le 1$) پس

$$\left|\frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1}\right| = |\cos c| \le 1 \qquad \to \quad |\sin x_2 - \sin x_1| \le |x_2 - x_1|$$

مثال: فرض کنید $\forall x \in [a.b]\ f'(x) = 0$. نشان دهید که $f(x)$ در بازه $[a.b]$ یک تابع ثابت است.

فرض کنید $f(x)$ در $[a.b]$ ثابت نباشد پس مثلا x_2, x_1 در بازه $[a.b]$ موجودند بطوریکه $f(x_1) \ne f(x_2)$ (مثلا فرض میکنیم $x_2 < x_1$) تابع f بر $x_2.x_1$ پیوسته مشتق پذیر است بنا به قضیه مقدار میانگین، $c \in (x_2.x_1)$ موجود است بطوری که

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

چون $f'(c) = 0$ داریم $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0$. بنابر این می دانیم که سمت راست مخالف صفر است که یک تناقض می‌باشد. بنابر یان تابع f بر $[a, b]$ ثابت است.

مثال: فرض کنید $f(x) = sin^2x + cos^2x$ بر $[-\pi, \pi]$. نشان دهید به ازای هر x از $[-\pi, \pi]$ داریم $f(x) = 1$.

حل: $\Leftarrow \qquad f'(x) = 2sinxcosx - 2cosxsinx = 0$

یعنی به ازای هر x داریم که: $f'(x) = 0$. پس بنا به مثال قبل ،تابع بر $[-\pi, \pi]$ یک تابع ثابت است. حال داریم

$$f(0) = sin^2 0 + cos^2 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 1$$

بنابر این $f(x) = 1$ به ازای هر x از $[-\pi, \pi]$

تمرین۱: اگر تابع f زوج باشد آنگاه f' فرد است و بالعکس یعنی اگر f' فرد باشد آنگاه f زوج است.

تمرین۲: نشان دهید به ازای هر $a, b \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ داریم $|\tan a - \tan b| \leq 4|a - b|$.

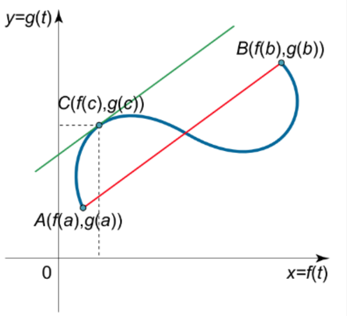
تمرین۳: نشان دهید به ازای هر a, b با فرض $a < b$ داریم $\frac{b-a}{1+a^2} \leq |\tan b - \tan a| \leq \frac{b-a}{1+b^2}$.

تمرین۴: تابع f داری خاصیت $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \end{cases}$ $\forall\, x$ هست نشان دهید $0 < f(x) < x \quad \forall\, x \in (0, x)$.

قضیه کوشی: Cauchy's mean-value Theorem

اگر تابع $f(x)$ و $g(x)$ در فاصله $[a, b]$پیوسته و در فاصله (a, b) مشتق پذیر باشد.

آنگاه حداقل یک نقطه مانند c وجود دارد بطوریکه



$$\exists c \in (a, b) \qquad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

اثبات: برای اثبات تابع h را بصورت زیر تعریف میکنیم.

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\big(g(x) - g(a)\big)$$

با توجه به تعریف h و اینکه طبق فرض قضیه توابع $f(x)$ و $g(x)$ پیوسته و مشتق پذیرند پس تابع h پیوسته و مشتق پذیرند.

از طرفی $h(a) = h(b) = 0$ پس شرایط قضیه رل برقرار هست بنابر این داریم

$$\exists c \in (a, b)\; h'(c) = 0 \to f'(c) - 0 - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0 \to \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

نکته: قاعده هوپیتال یا قضیه هوپیتال برگفته از این قضیه می باشد.

کاربردهای دیگری از مشتق

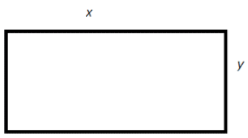
خط مشی کلی برای حل مسایل max و min

۱- شکل رسم می کنیم و حروف مناسبی برای ثابتها و متغیرها انتخاب می‌کنیم.

۲- معادله ای برای کمیتی که میخواهیم max و یا min بیابیم می نویسم.

۳- نقاط بحرانی و نقاط انتهایی را آزمایش می‌کنیم.

مثال: سیمی به طول ۱۰ سانتی متر در اختیار ماست می خواهیم با آن مستطیلی به طول x و عرض y درست کنیم. x و y را طوری بیابید که مساحت مستطیل max گردد.

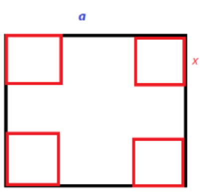


$$\max \quad s = xy$$

$$2(x+y) = 10 \to y = 5 - x \ \to s = x(5-x) = 5x - x^2 \to s' = 5 - 2x = 0 \to x = \frac{5}{2}$$

پس $y = 5 - x \to y = \frac{5}{2}$ در نتیجه $s = \frac{25}{4} = 6.25\, cm^2$.

مثال: ورق حلبی مربع شکلی که هر ضلع آن a سانتیمتر می باشد . می خواهیم با آن یک جعبه روباز بسازیم. از گوشه های آن مربع هایی به ضلع x را جدا می‌کنیم، لبه ها را خم می‌کنیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم مکعب ماکزیمم باشد.



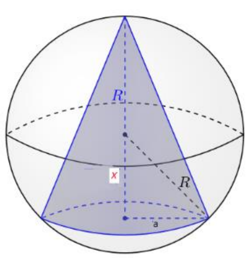
حجم جعبه: مساحت قاعده × ارتفاع

$$v(x) = (a-2x)^2 x \to v' = -4(a-2x)x + (a-2x)^2 = 0$$

$$v'(x) = a^2 - 8ax + 12x^2 = 0 \to x = \frac{a}{2} \text{و} \ \ x = \frac{a}{6}$$

$$v\left(\frac{a}{2}\right) = 0, v\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}$$

مثال: حجم بزرگترین مخروط قائمی را که بتوان در یک کره به شعاع R محاط کرد را پیدا کنید. می دانیم حجم مخروط $= \frac{1}{3}$ (مساحت قاعده × ارتفاع)



$$v = \frac{1}{3}\pi a^2 (R+x) = \frac{1}{3}\pi (R^2 - x^2)(R+x) \quad \Rightarrow$$

$$v(x) = \frac{1}{3}\pi (R-x)(R+x)^2 \quad \Rightarrow \quad v'(x) = -\frac{1}{3}\pi (R+x)^2 + \frac{2}{3}\pi (R-x)(R+x):$$

$$\Rightarrow \quad v'(x) = \frac{1}{3}\pi(R+x)[-R-x+2R-2x] = \frac{1}{3}\pi(R+x)(R-3x)$$

از $v'(x)$ داریم که $x = \frac{R}{3}$. پس تابع $v(x)$ تنها دارای یک نقطه بحرانی $x = \frac{R}{3}$ می باشد.

$$v''(x) = \frac{1}{3}\pi(R-3x) - \pi(R+x) = \frac{1}{3}\pi(R-3x-3R-3x) = \frac{1}{3}[-2R-6x]$$

$$\Rightarrow \quad v''\left(\frac{R}{3}\right) = \frac{\pi}{3}[-2R-2R] = -\frac{4}{3}\pi R < 0\,,$$

پس $v(x)$ در $x = \frac{R}{3}$ دارای max نسبی است و چون تنها دارای یک max نسبی است. پس دارای max مطلق نیزمی‌باشد.

بنابراین :

$$v\left(\frac{R}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - \frac{R^2}{9}\right)\left(\frac{4}{3}R\right) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{8}{9}R^2\right)\left(\frac{4}{3}R\right) = \frac{32}{81}\ \pi R^3$$

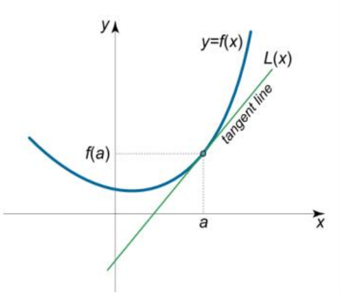
خطی سازی و دیفرانسیل

به کمک رابطه $f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ می‌توانیم بنویسیم :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a)$$

تقریب خطی Linear Approximation

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$



مثال: به کمک جذر9 مقدار تقریبی $\sqrt{9.1}$ راپیدا کنید.

حل: در اینجا $f(x) = \sqrt{x}$ در نظر می‌گیریم و $a = 9$ پس داریم:

$$f(x) = \sqrt{x} \approx \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}}(x-9) \rightarrow \sqrt{9.1} = 3 + \frac{0.1}{6} = 3.01$$

مثال: تقریب خطی تابع $f(x) = \ln x$ در نزدیکی نقطه $x = 1$ پیدا کنید.

با توجه به فرمول گفته شده $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \rightarrow L(x) = 0 + (x-1) = x-1$

پس تقریب خطی تابع $f(x) = \ln x$ در نزدیکی نقطه $x = 1$ به صورت $\ln x \approx x - 1$ خواهد بود.

تمرین : نشان دهید مقدار تقریبی $(a > 0)$ $\sqrt[n]{a^n + 1} \approx a + \frac{h}{n\,a^{n-1}}$ سپس به کمک آن مقدار تقریبی $\sqrt[8]{250}$ را بیابید. (راهنمایی $f(x) = \sqrt[n]{x}$)

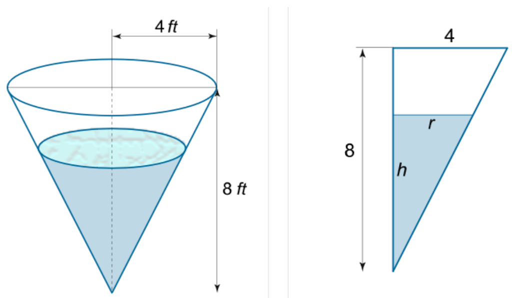
تعریف: فرض کنید $y = f(x)$ در $x = x_0$ مشتق پذیر باشد، در این صورت می‌گوییم تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = x_0$ دیفرانسیل پذیر هست و دیفرانسیل آن در نقطه $x = x_0$ را بصورت تعریف می‌کنیم.

$$dy = f'(x)dx$$

مثال: صفحه فلزی دایره شکلی به شعاع r بر اثر حرارت شعاع آن به اندازه dr تغییر کرده است. میزان تغییرات مساحت آن را محاسبه کنید.

می دانیم مساحت دایره $s = \pi r^2$ حال برای محاسبه تغییرات مساحت دیفرانسیل آن را حساب می‌کنیم $ds = 2\pi r\ dr$.

مثال : یک مخزن به شکل مخروط وارون شده با سرعت ۲ فوت مکعب در ثانیه تخلیه می گردد. ارتفاع مخروط ۸ فوت و شعاع آن ۴ فوت هست. سرعت پائین آمدن آب(تغییر سطح آب) وقتی که عمق آب ۶ فوت می باشد را بیابید.



حل: $r = \frac{h}{2}$ $\Rightarrow$ $4h = 8r$ $\Rightarrow$ $\frac{8}{h} = \frac{4}{r}$ $\Rightarrow$ $\frac{h_1}{h} = \frac{r_1}{r}$

حجم مخروط $\Leftarrow$ $v = \frac{\pi r^2 h}{3}$ $\xleftarrow{r=\frac{h}{2}}$ $v = \frac{\pi h^3}{12}$

از طرفی داریم $\Leftarrow$ $dv = 2$, $h = 6$, $dh = ?$

$$v = \frac{\pi h^3}{12} \quad \Rightarrow \quad dv = \frac{\pi h^2}{4} dh \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{\pi 36\ dh}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 2 = 9\pi\ dh \quad \Rightarrow \quad dh = \frac{2}{9\pi}$$

ارتفاع در هر دقیقه $\frac{2}{9\pi}$فوت بر ثانیه پائین می آید(وقتی که ارتفاع آب ۶ فوت است).